ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова"
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Баранова Елена Юрьевна

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, И УПРУГОГО ШАРА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2015

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова".

Научный руководитель:	Вильке Владимир Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Шатина Альбина Викторовна, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики" Зленко Александр Афанасьевич, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет"
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр имени А.А. Дородницына Российской академии наук

Защита диссертации состоится 27 февраля 2015 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27.

Автореферат разослан 27 января 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационном совета Д 501.001.22,
кандидат физико-математических наук,
доцент Прошкин В.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Первым, кто детально исследовал движение твердого тела с полостями, полностью заполненными однородной несжимаемой жидкостью, был Н.Е. Жуковский. Много внимания он уделил задачам с идеальной жидкостью. Впоследствии идеальной жидкостью занимались такие ученые, как У.Т. Кельвин, С.Л. Соболев, А.Ю. Ишлинский, М.Е. Темченко, В.В. Румянцев, Г.К. Пожарицкий, Д.Е. Охоцимский, Г.С. Нариманов и др.

Задачи с вязкой жидкостью значительно более трудные, чем в случае идеальной жидкости. Для больших чисел Рейнольдса обычно используется метод пограничного слоя. Для малых чисел Рейнольдса Ф.Л. Черноусько показал, что можно составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

В диссертации использован асимптотический метод разделения движения и усреднения, предложенный В.Г. Вильке. Этот метод позволяет перейти к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, неизвестными в которой являются переменные "действие" невозмущенной задачи.

Задача о движении вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил является модельной задачей в приливной теории движения планет Солнечной системы. Проблемы, связанные с изучением вращения планеты, сохраняют свою актуальность и до настоящего времени, так как с каждым днем возрастают требования к точности определения параметров вращения Земли. Это важно в технических приложениях в навигации, геодезии и геофизике.

Динамическая теория вращения Земли относительно центра масс строилась на основе модели деформируемой Земли (С. Ньюком, А. Пуанкаре, Г. Джеффрис, А. Ляв, П. Мельхиор, У. Манк и Г. Макдональд, Кубо и др), поскольку на основе классической теории твердого тела малые колебания вектора угловой скорости в некоторой связанной с Землей системе координат имеют период, равный приблизительно 305 суток, что расходится с экспериментальными данными. На базе моделей деформируемых планет строилась теория приливов. В большинстве работ использовались феноменологические модели моментов, возникающих из-за деформаций планет.

В.Г. Вильке разработал методы решения для систем с бесконечным числом степеней свободы, которые были использованы в диссертации.

Цель работы.

Одной из целей диссертации является определение влияния полости, заполненной вязкой жидкостью, на эволюцию вращения твердого тела с неподвижной точкой в отсутствии внешних сил. В отличие от ранее исследуемых работ по этой тематике рассматривается тело с несимметричным тензором инерции, для которого полость предполагается сферической и близкой к сферической. Второй целью диссертации является построение теоретической модели вращения упругого шара в гравитационном поле двух притягивающих центров и изучение возмущенного движения полюса шара.

Методы исследования.

В работе используются методы аналитической механики, метод разделения движений, применяемый к механическим системам, содержащим большой коэффициент вязкости или большой коэффициент жесткости, метод усреднения для систем с быстрыми и медленными переменными.

Достоверность результатов.

Все результаты в диссертации получены методами аналитической механики и асимптотическими методами на основе сформулированных в ней предположений. В работе присутствуют подробные доказательства основных результатов. Во всех необходимых случаях заимствования научных результатов приведены соответствующие ссылки.

Научная новизна.

Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми.

Впервые проанализировано влияние сферической полости, полностью заполненной вязкой жидкостью, на эволюцию движения твердого тела с несимметричным тензором инерции.

Впервые было получено и проанализировано решение этой задачи для эллипсоидальной полости.

Рассмотрена теоретическая модель упругого шара в поле притяжения двух материальных точек и найдено аналитическое решение для возмущенного значения угловой скорости шара.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории ракето- и кораблестроения, при изучении сейсмостойкости резервуаров, при построении усложненных моделей вращения упругой планеты.

Апробация работы.

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях и симпозиумах:

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2011» (Москва, 2011).
2. Конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ (Москва, 2012).
3. VIII Международный симпозиум по классической и небесной механики CCMECH8 (Польша, Седльце, 2013).

4. L Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, РУДН (Москва, 2014).

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ. Среди них 2 печатные работы [1,2], опубликованных в журналах, включенных в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад.

В совместных работах [1,2] В.Г. Вильке принадлежат постановки задач и общее научное руководство. Все результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 136 наименований, включая работы автора. В диссертации приведено 19 рисунков. Общий объем диссертации – 87 страниц.

Содержание диссертации

Во введении раскрывается вопрос актуальности исследования, дан краткий обзор литературы по тематике диссертации и изложено содержание работы.

Первая глава диссертации посвящена задаче об эволюции движения твердого тела с неподвижной точкой и полостью, заполненной вязкой жидкостью. Полость рассматривается сферической. За форму твердого тела отвечают малые параметры задачи. Предполагается, что жидкость имеет большой коэффициент вязкости. Другими словами, число Рейнольдса Re течения жидкости, которое обратно пропорционален коэффициенту вязкости, считается малым параметром ε.

В **§1.1** формулируется постановка задачи и выводятся общие уравнения движения в форме уравнений Рауса, каноническую часть которых составляют уравнения относительно переменных Андуайе, а лагранжеву – уравнение Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, которое дополняется граничным условием и условием несжимаемости жидкости:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{I}} = -\nabla_{\varphi}\mathcal{R}, \;\; \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \nabla_{I}\mathcal{R}, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}'}\boldsymbol{v} + \left[J^{-1}\left(\dot{\boldsymbol{G}} - \dot{\boldsymbol{G}}_v\right) \times \boldsymbol{r}'\right] + 2[J^{-1}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_v) \times \boldsymbol{v}] = -\dfrac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\boldsymbol{v}, \\ div\, \boldsymbol{v} = 0, \;\; \boldsymbol{v}|_{\partial V} = 0 \end{cases}$$

где $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}$ – переменные Андуайе, $\mathcal{R}$ – функционал Рауса, $\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}$ – радиус-вектор частицы жидкости в полости и ее относительная скорость, J – тензор инерции системы, $\boldsymbol{G}$ – вектор момента количества движения системы, $\boldsymbol{G}_v$ – вектор момента количества движения жидкости, p – давление жидкости, ν – кинематический коэффициент вязкости.

В **§1.2** решается система уравнений движения для тела, близкого к сферическому. Тензор инерции тела имеет вид $J = diag\{A(1+\varepsilon_1), A(1+\varepsilon_2), A(1+\varepsilon_3)\}$, где ε_1, ε_2, ε_3 – малые параметры задачи. Методом разделения движения и усреднения по "быстрой" переменной найдены решения в первом приближении по малым параметрам $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Система имеет два стационарных решения $\langle I_1 \rangle = 0$ и $\langle I_1 \rangle = I_2$, что соответствует случаям, когда ось наибольшего момента инерции тела совпадает с вектором момента количества движения $\boldsymbol{G}$, который постоянен в неподвижной системе координат, и, наоборот, перпендикулярна к нему. Исследованы нестационарные решения системы, показано, что ось наибольшего момента инерции асимптотически стремится к вектору $\boldsymbol{G}$.

В **§1.3** решается система уравнений движения для тела, близкого к осесимметричному. Тензор инерции тела имеет вид $J = diag\{A/(1+\varepsilon_1), A/(1-\varepsilon_1), C\}$. Аналогично задаче, разобранной в §1.2, использовался метод разделения движения и усреднения по "быстрой" переменной. Решения найдены в линейном приближении по малому параметру

ε числа Рейнольдса течения жидкости. Стационарные решения аналогичны решениям, найденным в §1.2. В случае $A < C$ решение $\langle I_1 \rangle = I_2$ – устойчиво, а $\langle I_1 \rangle = 0$ – неустойчиво. В случае $A > C$, – наоборот, $\langle I_1 \rangle = I_2$ – неустойчиво, а $\langle I_1 \rangle = 0$ – устойчиво.

Общие результаты для двух разобранных задач приведены в **§1.4**. Отмечается, что, несмотря на различия в тензорах инерции твердых тел, стационарные движения и типы нестационарных движений одинаковы: ось наибольшего момента твердого тела асимптотически стремится совпасть с постоянным вектором момента количества движения.

Глава 2 посвящена задаче об эволюции движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью. Тело рассматривается близким к осесимметричному, т.е. тензор инерции тела имеет вид $J = diag\{A/(1+\varepsilon_1), A/(1-\varepsilon_1), C\}$; оно также имеет неподвижную точку. Полость предполагается близкой к сферической. Жидкость в полости характеризуется малым значением числа Рейнольдса ε. Данные условия порождают пять малых параметров задачи. Решение ищется в линейном приближении по малому параметру ε, обратно пропорциональному коэффициенту вязкости жидкости.

Постановка задачи и общие уравнения движения приводятся в **§2.1**. Для решения задачи делается замена координат, в которой эллипсоидальная полость задается в каноническом виде.

В **§2.2** приводится решение для задачи с эллипсоидальной полостью. Нулевое приближение уравнения Навье-Стокса не имеет форму уравнения Пуассона, как это было в предыдущих задачах в §1.2 и §1.3, и найдено в виде решения, разложенного в ряд по малым параметрам задачи. Затем использовался метод разделения движения и усреднения по "быстрой" переменной. Правая часть системы уравнений движения зависит от большого числа параметров. Приведен анализ полученной системы дифференциальных уравнений, выраженной в переменных Андуайе.

По-прежнему есть два стационарных решения $\langle I_1 \rangle = 0$ и $\langle I_1 \rangle = I_2$. Если тело осесимметрично ($\varepsilon_1 = 0$), то при $A < C$ решения системы стремятся к аттрактору $\langle I_1 \rangle = I_2$, а решение $\langle I_1 \rangle = 0$ – неустойчиво. При $A > C$ решения стремятся к аттрактору $\langle I_1 \rangle = 0$, а решение $\langle I_1 \rangle = I_2$ – неустойчиво.

Если $A = C$, то тип нестационарных решений зависит от геометрических особенностей полости.

В общем случае если тело сильно сплющено вдоль своей третьей оси, то решения $\langle I_1 \rangle$ стремятся к I_2. Если же твердое тело сильно вытянуто вдоль своей третьей оси, то решения $\langle I_1 \rangle$ стремятся к 0.

В **главе 3** речь идет о движении полюса упругого шара в поле притяжения двух материальных точек, что может быть рассмотрено в качестве модели движения Земли в гравитационном поле Луны и Солнца. Земля представляется однородным упругим шаром и рассматривается ее движение вокруг центра масс. Деформации шара рассматриваются за счет поля гравитационных сил и центробежных сил инерции. Материал планеты считается жестким, поэтому в задаче есть малый параметр, обратно пропорциональный модулю Юнга $\varepsilon = E^{-1}$. Поле векторов упругого смещения $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ ищется как решение задачи квазистатики в теории упругости. В результате деформации шара также оказываются малыми, что позволяет разрешить систему уравнений движения.

Постановка задачи и уравнения движения даны в **§3.1**. Решается уравнение для поля векторов упругих смещений в первом приближении, представленного в виде суммы четырех слагаемых $\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{4} \boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{r}, t)$, где $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ порождены гравитационными полями Луны и Солнца, а $\boldsymbol{u}_3$ и $\boldsymbol{u}_4$ возникают за счет центробежных сил инерции. Поле $\boldsymbol{u}_3$ определяет сжатие шара вдоль оси вращения, а поле $\boldsymbol{u}_4$ отвечает за сферически симметричные деформации. В этом параграфе также находятся компоненты тензора инерции $J[\boldsymbol{u}]$, зависящие от полей $\boldsymbol{u}_k$.

В **§3.2** рассматривается задача о вращении упругого шара только под действием центробежных сил инерции. Влияние гравитационных полей Луны и Солнца не учитывалось. Показано, что уравнения движения дают решением регулярную прецессию с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{\rho\omega_0^3 r_0^2(1+\nu)(13+9\nu)}{7E(7+5\nu)},$$

где ρ – плотность упругого шара, ω_0 – угловая скорость упругого шара при невозмущенном движении, r_0 – радиус шара в невозмущенном состоянии, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Также выводится выражение относительного сжатия шара за счет центробежных сил инерции:

$$\Delta R = \frac{\rho\omega_0^2 r_0^3(1+\nu)(2+\nu)}{E(7+5\nu)}.$$

В **§3.3** решаются уравнения движения с учетом влияния гравитационных полей Луны и Солнца. Получены уравнения для координат возмущенного значения угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$. Найдено решение этих уравнений в первом приближении по малому параметру. Это решение на плоскости (p, q) описывает кривую типа эллипс с изменяющейся формой и возмущенными участками, где эллипс стягивается почти в точку, а затем увеличивается до исходных размеров.

В рамках данной модели были использованы реальные значения параметров Земли, Луны и Солнца. Полученный результат приведен в **§3.4**. Графики координат угловой скорости Земли приведены на рис.1-2. Они представляют собой суперпозицию колебаний с изменяющимися амплитудами. Большие колебания происходят с периодом Чандлера (428 дней), а малые колебания с периодом одни сутки. Их амплитуды меняются с периодом полмесяца и полгода. Возмущения угловой скорости в проекции на ось вращения r складывается из постоянной величины и периодических добавок с периодами полмесяца и полгода. Влияние Луны на изменение угловой скорости Земли больше влияния Солнца приблизительно в 178 раз.

Также были получены коэффициенты упругости, которые соответствовали бы Земле, если бы она была однородным упругим телом:

$$E = 2{,}4 * 10^{10}\,\frac{\text{кг}}{\text{мс}^2},\ \ \nu = -0{,}83.$$

Отрицательное значение коэффициента Пуассона означает, что материал Земли как однородного упругого шара является ауксетиком, т.е. при расширении вдоль одной оси он расширяется и в перпендикулярном направлении.

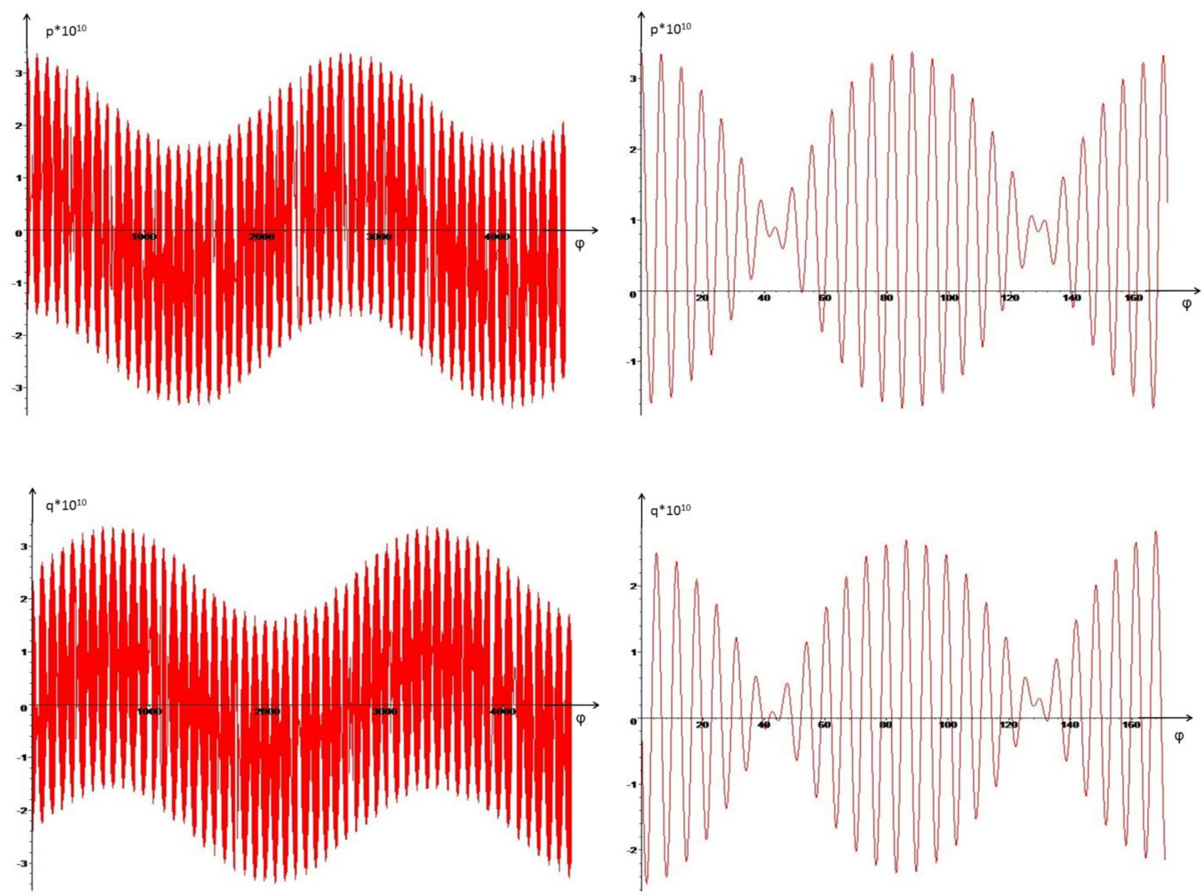

Рис.1: Графики координат p, q на отрезке времени, соответствующем двум годам земного времени (слева) и одному месяцу (справа).

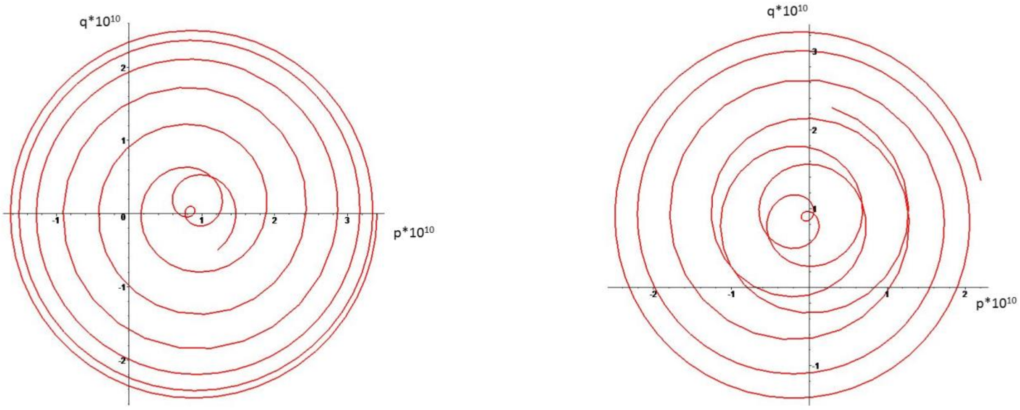

Рис.2: Траектория конца вектора угловой скорости на плоскости (p, q) для первых 8 дней (слева) и для 114-122 дней (справа). Начальный момент времени соответствует моменту зимнего солнцестояния, а Луна находится на отрезке, соединяющем Солнце с Землей.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

- Проведено исследование эволюции вращения твердого тела с неподвижной точкой и сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью, в отсутствии внешних сил. Твердое тело рассматривалось близким к сферическому или к осесимметричному. Описано движение системы в первом приближении по малым параметрам. Методом разделения движений и усреднения получена система уравнений, описывающих движение системы в переменных Андуайе. Найдены стационарные и нестационарные решения этой системы. Показано, что ось наибольшего момента инерции тела асимптотически стремится к постоянному в неподвижной системе координат вектору момента количества движения.
- Проведено исследование эволюции движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью, в отсутствии внешних сил. Тело рассматривалось близким к осесимметричному, а эллипсоидальная полость – близкой к сферической. Описано движение системы в первом приближении по малым параметрам. Показано, что для ярко выраженного сплюснутого или

вытянутого тела решение аналогично решению, полученному в задаче со сферической полостью. В общем случае решение зависит от геометрических особенностей полости.

- Рассмотрено движение вязкоупругой планеты в гравитационном поле притяжения двух материальных точек. Проведено исследование вращательного движения однородного упругого шара вокруг центра масс в предположении, что притягивающие центры лежат в одной плоскости и двигаются вокруг центра масс планеты по круговым орбитам. Описано деформированное состояние упругого шара в первом приближении по малому параметру. Показано, что возмущенное значение угловой скорости складывается из двух составляющих. Одна из них – это регулярная прецессия, возникающая в результате воздействия центробежных сил инерции на упругое тело, а вторая – это вращательные движения, при которых координаты возмущенного значения угловой скорости образуют биения.
- В рамках построенной модели вращения упругой планеты были получены выражения угловой скорости для планеты Земля в поле притяжения Луны и Солнца и проведено их сравнение с экспериментальными данными.
- В отсутствии гравитационных полей было получено выражение для относительного сжатия упругого шара вдоль оси вращения через коэффициенты упругости. Показано, что в рамках данной модели Земля является ауксетиком.

Работы автора по теме диссертации

Работы, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ:

1. Баранова Е.Ю., Вильке В.Г. *Вращение упругого шара вокруг центра масс в гравитационном поле двух притягивающих центров.* // Вестник МГУ Сер. 1 Мат. мех. 2014 № 3. С. 33-40

2. Баранова Е.Ю., Вильке В.Г. *Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью.* // Вестник МГУ Сер. 1 Мат. мех. 2013 № 1. С. 44-50

Другие работы, опубликованные автором по теме диссертации:

3. Баранова Е.Ю., Вильке В.Г. *Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью* // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2011» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2011. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).

4. Баранова Е.Ю., Вильке В.Г. *Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью* // Труды конференции-конкурса молодых учёных НИИ механики МГУ. 8-10 октября 2012 г. Под редакцией академика РАН А.Г. Куликовского, профессора В.А. Самсонова. М.: Изд-во Моск. Ун-та

5. Baranova E.U., Vilke V.G. *Rotation of an elastic sphere about its mass centre in the gravitational field of two attracting centres* // Book of Abstracts : 8th

International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, September 25-29, 2013, Siedlce, Poland, p. 13

6. Baranova E.Y., Vilke V.G. *Rotation of an elastic sphere about its mass centre in the gravitational field of two attracting centres* // Тезисы докладов L Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. М.:РУДН, 2014, с. 33-34