



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Механико-математический факультет  
Кафедра теоретической механики и мехатроники

На правах рукописи  
УДК 531.391

**Баранова Елена Юрьевна**

**О движении твердого тела с эллипсоидальной  
полостью, заполненной вязкой жидкостью, и  
упругого шара в гравитационном поле**

Специальность 01.02.01 - теоретическая механика

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук  
профессор Вильке В. Г.

Москва-2014

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью</b>	<b>13</b>
1.1 Постановка задачи и уравнения движения. . . . .	14
1.2 Решение задачи для тела, близкого к шару . . . . .	18
1.3 Решение задачи для тела, близкого к осесимметричному . . . . .	25
1.4 Общие результаты, полученные при решении задач о движении твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью . . . . .	31
<b>2 Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью</b>	<b>34</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	35
2.2 Решение задачи для эллипсоидальной полости . . . . .	38
<b>3 Вращение упругого шара вокруг центра масс в гравитационном поле двух притягивающих центров</b>	<b>47</b>
3.1 Постановка задачи и уравнения движения. . . . .	48
3.2 Решение задачи для деформируемого шара без учета влияния Луны и Солнца. . . . .	60
3.3 Влияние возмущений от Луны и Солнца. . . . .	63
3.4 Применение полученных данных на примере планеты Земля . . . .	68
<b>Заключение</b>	<b>76</b>
<b>Литература</b>	<b>78</b>

# Введение

Механика как наука начала развиваться еще в древние времена [109]. Основными вопросами, которыми она занимается, — это законы движения и равновесия материальных тел. Соответствуя своему времени, задачи усложнялись и менялись. Так от задач, просто связанных с твердыми телами, перешли к задачам о движении твердых тел в жидкой среде. Рядом с этими задачами появились вопросы о твердых телах, содержащих полости с жидкостью внутри.

Первым обратил внимание на задачи о твердых телах с полостью, полностью заполненной жидкостью, Джордж Габриэль Стокс [135],[136] еще в середине XIX века, рассмотрев два случая полостей: прямоугольный параллелипипед и цилиндр с круговым сектором в качестве основания. Для малых скоростей частиц жидкости он доказал, что движение твердого тела не изменится, если жидкость заменить эквивалентным твердым телом.

Более общая постановка задачи появилась у Карла Готфрида Неймана. Он рассматривал односвязные и многосвязные полости внутри тела. К.Г. Нейман показал, что при нескольких полостях в покоящемся твердом теле, начальное движение, сообщенное жидкости, оказывает на движение тела гироскопический эффект.

Но первым, кто детально исследовал движение твердого тела с полостями, полностью заполненными однородной несжимаемой жидкостью, был Николай Егорович Жуковский. В своей работе [39] он изучил влияние жидкости на движение твердого тела. Очень много внимания он уделил задачам с идеальной жидкостью. Он показал, что если скорости частиц жидкости выражаются в виде потенциальных функций, то внутреннее движение жидкости определяется вращением тела и не зависит от поступательного движения. Движение самого тела происходит, как если бы вместо жидкости было эквивалентное твердое тело, масса и центр тяжести которого совпадают с массой и центром тяжести жидкости. Н.Е. Жуковский доказал, что момент инерции эквивалентного тела относительно любой оси, проходящей через его центр тяжести меньше момен-

та инерции соответствующей жидкости относительно той же оси. Однако, если тело имеет многосвязные полости, при замене жидкости на эквивалентное тело необходимо добавить к телу некоторый гироскоп, его ось и момент начального количества движения можно определить по главному моменту количества движения жидкости в покоящемся теле. Таким образом, решение задачи динамики тела с жидкостью разделяется на две части: первая – это решение трех краевых задач, связанных с формой полости, и расчет присоединенных масс; вторая – задача динамики твердого тела, сводящаяся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Его работа содержит определение эллипсоидов инерции эквивалентных тел для различных форм полостей: эллиптических, цилиндрических полостей и тел вращения. Для жидкости с трением описан общий способ нахождения движения тела с жидкостью, а также решена задача о движении замкнутой трубки, наполненной жидкостью.

Многие исследования были связаны с устойчивостью движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. У.Т. Кельвин проводил опыты, которые показали, что если полость с жидкостью сжата в направлении оси вращения, то вращение волчка будет устойчивым, а если сжата вдоль перпендикулярной оси, то неустойчивым. Теоретическое обоснование этого изучалось в работах Гринхилла, Хафа [129], Пуанкаре [132] и других. Эти ученые рассматривали полость эллипсоидальной формы, заполненную идеальной жидкостью. Предполагалось, что жидкость совершает однородные вихревые движения. В работе Хафа [129] представлено и решено характеристическое уравнение для малых колебаний твердого тела с полостью, содержащей жидкость, вблизи равномерного вращения. В работе Пуанкаре [132] была учтена неоднородность жидкости.

Особенно большой интерес к таким задач появился в середине XX века. Это связано с развитием авиационной и ракетной техники. Прикладные задачи, связанные с горючим внутри ракеты, космическими аппаратами, стартующими с искусственных спутников, а также задачи, связанные с сейсмостойкостью резервуаров для хранения жидкости, послужили толчком к исследованиям в этой области. Также аналогичные задачи появляются при конструировании кораблей, подводных лодок, в теории флаттера крыла самолета и т.д.

С.Л. Соболев рассмотрел движение тяжелого симметричного волчка с полостью, наполненной идеальной жидкостью [106]. Полость предполагалась симметричной относительно твердого тела, решались линеаризованные уравнения около равномерного вращения. Автор рассмотрел и сравнил два частных случая: эллипсоидальную и цилиндрическую полость, изучив колебания жидкости

в них. Этой же темой занимались А.Ю. Ишлинский и М.Е. Темченко [43]. Они рассматривали ту же задачу, но использовали другой метод, который позволил легко объяснить некоторые свойства устойчивости тела с жидкостью. Они же рассмотрели задачу об устойчивости волчка с жидкостью, вращающегося на струне [44]. По теме устойчивости движения волчка с полостью, наполненной жидкостью, проводились и экспериментальные исследования С.В. Малащенко и М.Е. Темченко [63].

Исследование устойчивости движения твердого тела с жидким наполнением обычно проводится двумя способами. Первый способ – это линеаризация уравнений движения и их исследование. Другой – основан на применении прямого (второго) метода Ляпунова. Ко второму способу относятся работы Н.Г. Четаева [123], В.В. Румянцева [85],[92]-[98] Г.К. Пожарицкого [86], С.В. Жака [37], Н.Н. Колесникова [49] и других. В частности, в работе А.В. Карапетяна [45] с помощью второго метода Ляпунова были получены достаточные условия устойчивости регулярной прецессии в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки с полостью, заполненной идеальной жидкостью.

Для идеальной жидкости определена структура спектра, разрешимость задачи Коши, выяснен ряд механических особенностей колебаний тела с полостью, заполненной жидкостью. Решение многих задач сведено к вычислительным программам.

Отдельной задачей является случай, когда учитывается влияние сил поверхностного натяжения. В работе [93] В.В. Румянцев получил достаточные условия устойчивости движения твердого тела с жидкостью. В частности, достаточным условием устойчивости вращения свободного тела с жидкостью является совпадение оси вращения и оси наибольшего центрального момента инерции системы [74]. Данный результат дополняет утверждения в работе Н.Е. Жуковского [39].

Большое число работ посвящено исследованию движения твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью. Особый интерес представляет изучение совместных колебаний жидкости и тела с жидкостью. Эти задачи в основном рассматривались в линейной постановке. Общая задача о колебаниях тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, исследовалась в работах [56],[68]-[71],[77]-[79],[82],[107]. Д.Е. Охоцимский исследовал безвихревое движение жидкости, когда давление постоянно на свободной поверхности, и твердому телу сообщают некоторое движения вблизи исходного положения [82]. Г.С. Нариманов получил общие уравнения возмущенного движения твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью, при

заданной системе внешних сил для малых колебаний жидкости, а потом - и при учете немалости колебаний ([77]-[80]). Г.С. Нариманов доказал теорему существования и единственности решения этих уравнений и обосновал возможность их редукции. Б.И. Рабинович ([87]-[89]) получил общее решение задачи Д.Е.Охоцимского [82] и обобщил на прямую задачу динамики системы тело-жидкость. Л.Н.Сретенским была рассмотрена задача о движении тела с жидким наполнением под действием упругих сил [107]. Описание малых колебаний твердого тела с полостью, частично заполненной тяжелой идеальной жидкостью, сводится к двум задачам. Сначала требуется решить задачу о собственных колебаниях жидкости в неподвижной сосуде, а именно: решить некоторые краевые задачи, а также исследовать собственные значения линейных уравнений - это задача зависит только от формы полости. Затем можно найти коэффициенты, отвечающие за взаимное влияние тела и жидкости друг на друга. Движение всей системы описывается счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Для некоторых полостей задача решается аналитически, а для более сложных форм используются различные численные методы [1],[73],[90].

Исследование движения волчка с полостью, неполностью заполненной жидкостью, и его устойчивость было проведено в работе [51] для цилиндрической полости.

Задачи с вязкой жидкостью значительно более трудные, чем в случае идеальной жидкости. Экспериментальные работы и их теоретическое обоснование представлены в [66],[67],[125]. Некоторые приближенные решения задач о движении вязкой жидкости дано в работе [39] и книге Н.А. Слезкина [105]. Б.Н. Румянцев в своей работе [91] рассмотрел некоторые задачи о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса. Полости рассматриваются в форме бесконечного цилиндра и сферы.

Для больших чисел Рейнольдса обычно используется метод пограничного слоя ([34],[52],[59]). Н.Н. Моисеев в своей работе [72] предложил вариант метода пограничного слоя для исследования малых колебаний вязкой жидкости. Этот метод был использован в работе П.С. Краснощекова [54]. Он рассмотрел задачу о малых плоских колебаниях маятника с осесимметричной полостью, заполненной жидкостью. Более общая задача рассмотрена в работе [53], где приводится также обоснование метода пограничного слоя для некоторых задач о колебаниях тела с жидкостью. Также на основе этого метода решалась задача о колебаниях вязкой жидкости со свободной поверхностью в [57]. Та же задача

рассматривалась В.В. Болотиным [13] при феноменологическом учете вязкости жидкости.

Методами функционального анализа С.Г.Крейн [55] установил некоторые общие теоремы о собственных колебаниях тяжелой вязкой жидкости в сосудах.

В работах О.Б. Иевлевой [41],[42] рассмотрены некоторые задачи со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью. Решение удалось выразить через обобщенные сферические функции.

Феноменологическая модель для описания качественного движения тяжелого тела с вязким наполнением была построена и развита в работах В.А. Самсонова [101],[102]. Взаимодействие жидкости в полости и тела в этой модели было разделено на нормальное давление и линейное внутреннее трение. Показано, что эта модель дает результаты, похожие на экспериментально получаемые решения, описанные в [100]. На основе этих работ были получены и другие результаты, связанные с исследованием устойчивости перманентных вращений твердого тела с жидким наполнением [46].

Ряд работ был посвящен динамике вязкой жидкости в полости вращающихся твердых тел [126]-[128],[133],[134]. Движение твердого тела предполагается заданным: либо равномерное вращение, либо регулярная прецессия.

Были написаны работы [12],[50],[75],[83],[110],[115],[118],[131] по динамике тела с жидкостью, учитывающие силы поверхностного натяжения. Эти силы очень сильно влияют на равновесие и движение жидкости в условиях, близких к условиям невесомости, поэтому такие задачи имеют прикладной интерес в вопросах космической техники. В частности, в работе [75] рассматривались колебания идеальной жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, а колебания вязкой жидкости - в работе [50]. Работа [118] связана с динамикой твердого тела с идеальной жидкостью, содержащей небольшой пузырь воздуха. Показано, что при некоторых предположениях движение такой системы может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В статьях Ф.Л. Черноусько [111],[112],[114],[116], [117],[119]-[122] и в монографии [113] рассмотрена общая задача о движении вязкой несжимаемой жидкости в полости твердого тела и о движении твердого тела, содержащего эту полость. Форма полости считается произвольной, и единственным допущением является предположение о малости числа Рейнольдса. Показано, что гидродинамическая задача сводится к решению трех стационарных линейных краевых задач, которые требуется решить один раз для каждой формы полости. Затем нужно вычислить некоторые интегралы от найденных решений, после чего можно со-

ставить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение тела с полостью. Эта система выписана в общем случае. Таким образом, ход решения оказывается аналогичным задаче о движении твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость (при безвихревом движении). В случае идеальной жидкости, как известно [39], также требуется решить три краевые задачи для каждой формы полости, а затем вычислить интегралы от решений (присоединенные моменты инерции).

Для некоторых форм полостей (сфера, трехосный эллипсоид, конечный цилиндр), наполненных вязкой жидкостью, дается решение упомянутых стационарных краевых задач.

Рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие движение тела с полостью, и показано, что они могут быть решены асимптотическими методами. Разобраны некоторые примеры. Найден закон затухания плоских вращений и нелинейных колебаний тела с вязкой жидкостью в поле тяжести. Изучено пространственное свободное движение твердого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость. Известно, что единственным устойчивым движением тела в этом случае является равномерное вращение вокруг оси наибольшего момента инерции [39],[93]. В работе изучен весь переходный процесс, приводящий к этому устойчивому движению, найдено время переходного процесса.

Для исследования эволюции движения механических систем, содержащих сплошную среду, В.Г. Вильке использовал асимптотический метод разделения движения и усреднения [15],[20]. Этот метод позволяет перейти к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, неизвестными в которой являются переменные "действие" невозмущенной задачи. Методом разделения движений и усреднения были получены эволюционные уравнения движения осесимметричного тела со сферической полостью [22].

В.Г. Вильке разработал методы решения и для других систем с бесконечным числом степеней свободы [15]. Для ряда моделей рассматриваемых систем доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений уравнений движения. Он рассмотрел задачу о движении вязкоупругого тела в центральном ньютоновском поле сил, системы вязкоупругих тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, задачу о движении системы тяжелое упругое-твердое тело с неподвижной точкой и многое другое [18],[19],[22]-[25]. Также эти методы были использованы в работах А.В. Шатиной по движению вязкоупругих планет [26]-[33].



Задача о движении вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил [22] является модельной задачей в приливной теории движения планет Солнечной системы. В этой работе получены точные уравнения движения деформируемого тела в центральном ньютоновском поле сил в рамках линейной теории упругости. Показано, что в стационарном движении центр масс шара движется по круговой орбите, вектор момента количества движения шара относительно притягивающего центра ортогонален плоскости орбиты, а деформированный шар неподвижен в орбитальной системе координат, т.е. обращен одной стороной к притягивающему центру.

Данный тип задач изучается учеными небесной механики. В первую очередь механиков интересует вращение Земли. Проблемы, связанные с изучением вращения нашей планеты, сохраняют свою актуальность и до настоящего времени, так как с каждым днем возрастают требования к точности определения параметров вращения Земли. Это важно в технических приложениях в навигации, геодезии и геофизике. Ось вращения Земли с течением времени изменяет свою ориентацию, как по отношению к связанной, так и по отношению к инерциальным системам координат. Высокоточные экспериментальные данные, связанные с траекториями движения полюсов Земли, свидетельствуют о сложных динамических процессах, происходящих в системе Земля-Луна-Солнце.

Теоретическими моделями деформируемой Земли занимались многие ученые, такие как: С. Ньюком, А. Пуанкаре, Г. Джеффрис, А. Ляв, П. Мельхиор, У. Манк и Г. Макдональд, Kubo [64],[76],[84],[130] и др. В основе многих таких исследований лежит динамическая теория вращения Земли относительно центра масс.

Задача о вращении небесных тел относительно их центров масс была предметом исследований многих механиков и математиков на протяжении нескольких столетий [2]-[5],[10],[11],[16],[17],[36],[38],[40],[47],[64],[76],[104]. Сначала небесные тела представлялись твердыми. Так, классическая теория твердого тела дала результат, что малые колебания вектора угловой скорости в некоторой связанной с Землей системе координат имеют период, равный приблизительно 305 суток, что расходится с экспериментальными данными. На базе моделей деформируемых планет строилась теория приливов [36]. В большинстве работ использовались феноменологические модели моментов, возникающих из-за деформаций планет. Задачи по этой тематике можно разделить на два типа. В первом случае изучаются эволюционные процессы на временах порядка миллионов лет, обусловленные внутренней диссипацией энергии при движениях планет [15],

[16]. Во втором случае моделируются процессы на временах, соизмеримых с периодами вращений планет относительно их центров масс, и, как правило, не учитывается влияние диссипации.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из трех глав, введения, заключения и списка литературы.

Введение содержит краткий обзор литературы по тематике данной работы.

Первая глава диссертации посвящена задаче об эволюции движения твердого тела с неподвижной точкой и полостью, заполненной вязкой жидкостью. Пустота рассматривается сферической, а твердое тело или близкое к сферическому, или близкое к осесимметричному. За форму тела отвечают малые параметры задачи. Для чисто твердого тела с неподвижной точкой движение известно — это движение, близкое к регулярной прецессии. Наличие вязкой жидкости в системе изменяет это движение. Предполагается, что жидкость имеет большой коэффициент вязкости. Другими словами, число Рейнольдса течения жидкости, который обратно пропорционален коэффициенту вязкости, можно считать малым параметром.

В 1.1 формулируется постановка задачи и выводятся общие уравнения движения в форме уравнений Рауса, каноническую часть которых составляют уравнения относительно переменных Андуайе, а лагранжеву — уравнение Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости.

В 1.2 решается система уравнений движения для тела, близкого к сферическому. Методом разделения движения и усреднения по "быстрой" переменной найдены решения в первом приближении по малым параметрам задачи. Найдены стационарные и нестационарные решения.

В 1.3 решается система уравнений движения для тела, близкого к осесимметричному. Аналогично задаче, разобранный в 1.2 использовался метод разделения движения и усреднения по "быстрой" переменной. Решения найдены в линейном приближении по малому параметру числа Рейнольдса течения жидкости. Приведены стационарные решения и разобраны различные типы нестационарных движений.

Общие результаты для двух разобранных задач приведены в 1.4. Отмечается, что несмотря на различия в тензорах инерции твердых тел стационарные

движения и типы нестационарных движений одинаковы: ось наибольшего момента твердого тела стремится совпасть с постоянным вектором момента количества движения.

Глава 2 посвящена задаче об эволюции движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью. Тело рассматривается близким к осесимметричному, оно также имеет неподвижную точку. Полость предполагается близкой к сферической. Жидкость в полости характеризуется малым значением числа Рейнольдса. Данные условия порождают пять малых параметров задачи. Решение ищется в линейном приближении по малому параметру, обратно пропорциональному коэффициенту вязкости жидкости.

Постановка задачи и общие уравнения движения приводятся в 2.1. Для решения задачи делается замена координат, в которой эллипсоидальная полость задается в каноническом виде.

В 2.2 приводится решение для задачи с эллипсоидальной полостью. Сначала решается нулевое приближение уравнения Навье-Стокса, а затем используется метод разделения движения и усреднения по "быстрой" переменной. Здесь же приведен анализ полученной системы дифференциальных уравнений, выраженной в переменных Андуайе.

В главе 3 речь идет о теоретической модели движения полюса упругого шара в притяжении двух материальных точек. Это модель Земли в гравитационном поле Луны и Солнца. Земля представляется однородным упругим шаром и рассматривается движение вокруг центра масс. Деформации шара рассматриваются за счет поля гравитационных сил и центробежных сил инерции. Материал планеты считается жестким, поэтому в задаче есть малый параметр, обратно пропорциональный модулю Юнга. Поле векторов упругого смещения ищется как решение задачи квазистатики в теории упругости. В результате деформации шара также оказываются малыми, что позволяет разрешить систему уравнений движения.

Постановка задачи и уравнения движения даны в 3.1. Решается уравнение для поля векторов упругих смещений в первом приближении, а также находятся компоненты тензора инерции, зависящие от них.

В 3.2 рассматривается задача о вращении упругого шара только под действием центробежных сил инерции. Влияние гравитационных полей Луны и Солнца не учитывалось. Показано, что уравнения движения дают решением регулярную прецессию.

В 3.3 решаются уравнения движения с учетом влияния гравитационных по-

лей Луны и Солнца. Были получены уравнения для координат возмущенного значения угловой скорости. Найдено решение этих уравнений в первом приближении по малому параметру.

В рамках данной модели были подставлены реальные значения параметров Земли, Луны и Солнца. Полученный результат приведен в 3.4. Были получены коэффициенты упругости, которые соответствовали бы Земле, если бы она была однородным упругим телом. Описано движение полюса Земли.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

По теме диссертации опубликовано 2 печатные работы [8],[9].

Основные результаты были доложены на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2011" (Москва, 11-15 апреля 2011 года), Конференции-конкурсе молодых ученых НИИ механики МГУ (Москва, 8-10 октября 2012), VIII Международном симпозиуме по классической и небесной механике ССМЕСН8 (Седльце, Польша, 25-29 сентября 2013), L Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, РУДН (Москва, 13-16 мая 2014).

# Глава 1

## Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью

Данная глава посвящена задаче об эволюции движения твердого тела с неподвижной точкой и полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, в отсутствие внешних сил. Полость рассматривается сферической, а твердое тело близкое к сферическому или к осесимметричному, за что отвечают малые параметры задачи. Именно рассмотрение несимметричной формы тела отличает эту работу от ранее опубликованных.

Для чисто твердого тела с неподвижной точкой движение известно — это движение, близкое к регулярной прецессии. Наличие вязкой жидкости в системе изменяет это движение. Однако из-за того, что жидкость предполагается сильновязкой, т.е. имеющей большой коэффициент вязкости, влияние это невелико.

Для описания движения системы используются переменные Андуайе. Уравнения движения имеют смешанный вид: уравнения движения в лагранжевой форме и уравнение Навье-Стокса для жидкости с краевыми условиями. Для разрешения этой системы применяется метод разделения движения, с помощью которого можно с любой степенью точности получить решение задачи. Решение нулевого приближения уравнения Навье-Стокса для вязкой жидкости было получено ранее в [58] и использовано в работе [22]. Также в задаче есть

"быстрая" переменная, по которой производится усреднение [20]. В результате, получается система уравнений в первом приближении, описывающая эволюцию движения тела с жидкостью. Из шести координат три остаются постоянными, а еще одна переменная не зависит от остальных и изменение этой координаты можно анализировать отдельно.

В итоге было получено, что вектор момента количества движения постоянен в инерциальной системе координат, а ось наибольшего момента тела асимптотически стремится к этому вектору.

## 1.1 Постановка задачи и уравнения движения.

Рассматривается движение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки  $O$ . Эта точка берется за начало неподвижной системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Внутри тела находится полость, полностью заполненная вязкой жидкостью. В данном разделе полость представляет собой шар радиуса  $a$  с центром в точке  $O_1$  (рис. 1.1). Система движется по инерции, т.е. внешние силы отсутствуют. Требуется определить эволюцию движения системы.

Для описания движения системы вводится система координат  $Ox_1x_2x_3$ , жестко связанная с телом. Оси  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  — главные оси инерции тела с жидкостью. В подвижной системе координат центр шара  $O_1$  определяется вектором  $\mathbf{r}_1$ , а частица жидкости соответствующим вектором  $\mathbf{r}$ . Будем рассматривать вектора  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$  ( $|\mathbf{r}'| \leq a$ ), обозначающие радиус-вектора частиц жидкости, исходящие из центра шара. Поле  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}', t)$  определяет поле относительных скоростей частиц жидкости в зависимости от их радиус-вектора  $\mathbf{r}'$  и времени  $t$ . Жидкость предполагается однородной и несжимаемой:

$$\rho = const, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Вязкость жидкости будет считаться достаточно большой, а число Рейнольдса  $Re$  течения вязкой жидкости в полости можно рассматривать как малый параметр задачи.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} (J_{solid} \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]]^2 \rho dx$$

состоит из двух слагаемых: кинетической энергии твердой части тела и ки-

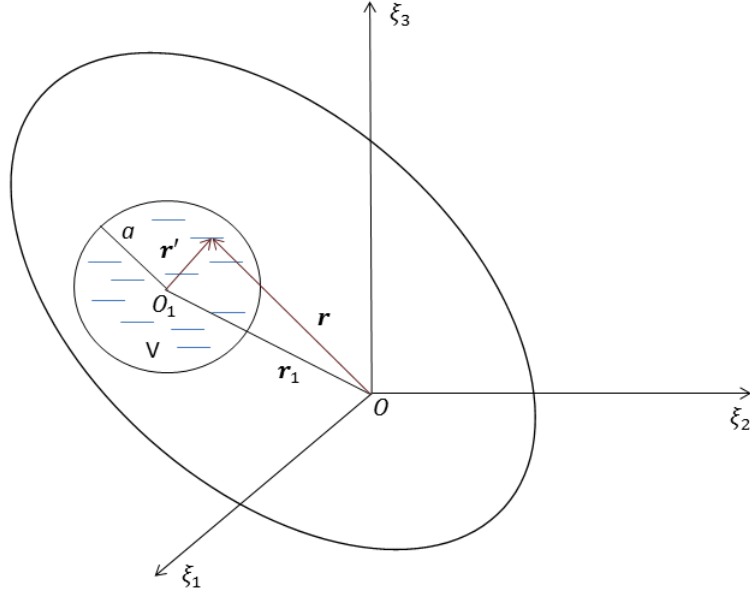


Рис. 1.1: Твердое тело со сферической полостью, заполненной жидкостью, и неподвижной точкой  $O$

нетической энергии жидкости в полости. Здесь  $J_{solid}$  — тензор инерции твердой части тела,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость тела,  $V = \{|\mathbf{r}'| \leq a\}$  — объем, заполняемый жидкостью плотности  $\rho$ . Для всех частиц жидкости на границе  $\mathbf{r}' \in \partial V$ , поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r}', t) = 0$ , — так называемое, условие прилипания [103].

Так как в подвижной системе координат скорость центра полости равна нулю:  $\mathbf{v}_{O_1} = 0$  — и, соответственно,  $\int_V \rho \mathbf{v} dx = \rho \mathbf{v}_{O_1} \text{vol} V = 0$ , то выражение для кинетической энергии удобно переписать в виде

$$T = \frac{1}{2} (J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{G}_v) + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^2 \rho dx, \quad (1.1.1)$$

где  $J$  — тензор инерции всей системы, а  $\mathbf{G}_v = \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{v}] \rho dx$  — момент количества движения жидкости в связанной с телом системе координат.

Для описания движения системы будем использовать канонические переменные Андуайе  $I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  [22],[113],[124]. Переход от неподвижной системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  к подвижной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  осуществляется с

помощью пяти поворотов на углы  $\varphi_3, \delta_1, \varphi_2, \delta_2, \varphi_1$  [7],[61]. Координаты в новой и старой системе координат связаны соотношением

$$\mathbf{R} = \Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)\mathbf{r},$$

где  $\Gamma_3(\varphi_i) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Gamma_1(\delta_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_j & -\sin \delta_j \\ 0 & \sin \delta_j & \cos \delta_j \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  
 $j = 1, 2$ .

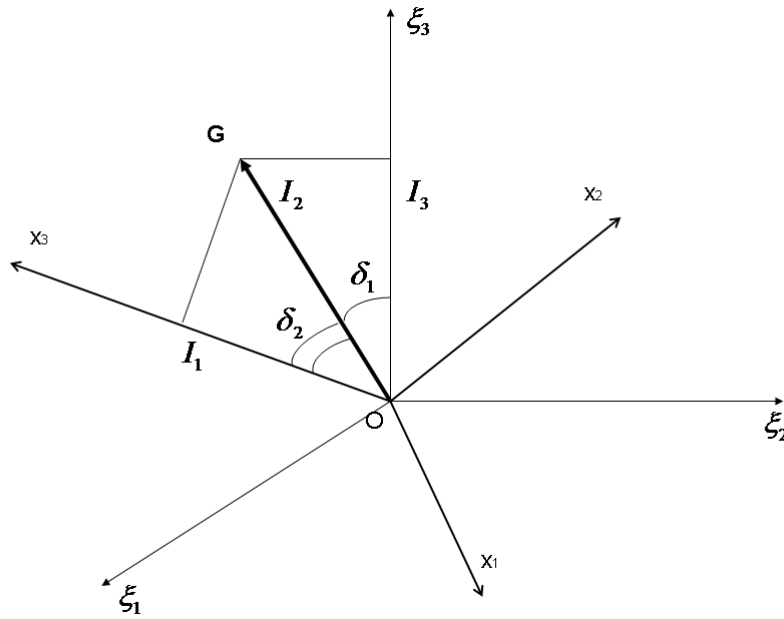


Рис. 1.2: Связь между подвижной  $Ox_1x_2x_3$  и неподвижной  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  системами координат

Вектор момента количества движения  $\mathbf{G}$  имеет проекции в новой системе координат  $(\mathbf{G}, \mathbf{e}_{x_3}) = I_1 = I_2 \cos \delta_2$  и  $(\mathbf{G}, \mathbf{e}_{\xi_3}) = I_3 = I_2 \cos \delta_1$ , где  $I_2 = |\mathbf{G}|$  — модуль момента количества движения (рис. 1.2). Другими словами, в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  [15],[22]

$$\mathbf{G} = \left( \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1, \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1, I_1 \right). \quad (1.1.2)$$

Из равенства (1.1.1) вектор момента количества движения рассматриваемой системы  $\mathbf{G} = (\nabla_{\boldsymbol{\omega}} T) = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}_{\mathbf{v}}$ , откуда выражается угловая скорость  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_{\mathbf{v}})$ .



Уравнения движения запишем с помощью функционала Рауса [35],[65],[108]:

$$\mathcal{R}[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}, \mathbf{r}'] = (\nabla_{\boldsymbol{\omega}} T, \boldsymbol{\omega}) - T = \frac{1}{2} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_{\mathbf{v}}, J^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_{\mathbf{v}})) - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^2 \rho dx \quad (1.1.3)$$

Кинетическая энергия системы не возрастает вдоль всякого решения

$$\frac{dT}{dt} = -2D[\mathbf{v}] \leq 0$$

Здесь  $D[\mathbf{v}]$  — функционал внутренних диссипативных сил в жидкости [15]:

$$D[\mathbf{v}] = \int_V \mu \sum_{i,j=1}^3 c_{ij}^2 dx, c_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), i, j = \overline{1,3}.$$

где  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости, а  $c_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации. В [15] доказано, что функционал  $D[\mathbf{v}]$  с учетом граничных условий  $\mathbf{v} = 0$  на границе  $\partial V$  обращается в ноль только при  $\mathbf{v}(\mathbf{r}', t) = 0$  [15]. Таким образом, стационарные значения кинетической энергии системы на интегральном многообразии  $\mathbf{G}^2 = const$  суть стационарные вращения системы как единого целого с постоянной угловой скоростью вокруг одной из главных осей инерции тела с жидкостью.

В результате одна группа уравнений представляется в виде канонических уравнений относительно канонических переменных Андуайе, а вторая — как уравнения движения в лагранжевой форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}} &= -\nabla_{\boldsymbol{\varphi}} \mathcal{R}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} &= \nabla_{\mathbf{I}} \mathcal{R}, \\ \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{R} - \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{R} &= \nabla_{\mathbf{r}'} p - \mu \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

здесь  $p(\mathbf{r}', t)$  — давление в жидкости.

Вторая группа (1.1.4) переписывается в виде уравнений Навье-Стокса для вязкой жидкости [15]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}'} \mathbf{v} + \left[ J^{-1} (\dot{\mathbf{G}} - \dot{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}}) \times \mathbf{r}' \right] + 2 \left[ J^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_{\mathbf{v}}) \times \mathbf{v} \right] = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (1.1.5)$$

где  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  — кинематический коэффициент вязкости. Здесь в левой части

уравнения первые два слагаемых — это относительное ускорение частиц жидкости, третье слагаемое — вращательное ускорение, а последнее — кориолисово ускорение. В правой части поле вязких сил и поле реакций связей. Для полноты системы к этому уравнению добавляются условие несжимаемости и граничное условие:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \Big|_{\mathbf{r}' \in \partial V} = 0 \quad (1.1.6)$$

Точно проинтегрировать систему таких уравнений удастся только в редких случаях, поэтому обычно используются различные асимптотические методы нахождения решений.

## 1.2 Решение задачи для тела, близкого к шару

Рассмотрим твердое тело с тензором инерции  $J = \operatorname{diag}\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ . Пусть главные моменты инерции удовлетворяют неравенствам  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{C}$ . Представим тензор инерции в виде  $J = A \operatorname{diag}\{1, 1, 1\} + A \operatorname{diag}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ , где

$$A(1 + \varepsilon_1) = \mathcal{A}, \quad A(1 + \varepsilon_2) = \mathcal{B}, \quad A(1 + \varepsilon_3) = \mathcal{C}.$$

Не нарушая общности будем считать, что параметры  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  удовлетворяют условиям:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3.$$

Величины  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  считаются малыми.

Подставляя значения моментов инерции и используя выражение (1.1.2), сделаем некоторые преобразования:

$$(\mathbf{G}, J^{-1}\mathbf{G}) = \frac{(I_2^2 - I_1^2) \sin^2 \varphi_1}{A(1 + \varepsilon_1)} + \frac{(I_2^2 - I_1^2) \cos^2 \varphi_1}{A(1 + \varepsilon_2)} + \frac{I_1^2}{A(1 + \varepsilon_3)},$$

$$(\mathbf{G}_v, J^{-1}\mathbf{G}) = \left( \mathbf{G}_v, \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1}{A(1 + \varepsilon_1)} \mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1}{A(1 + \varepsilon_2)} \mathbf{e}_2 + \frac{I_1}{A(1 + \varepsilon_3)} \mathbf{e}_3 \right).$$

Тогда функционал Рауса, согласно (1.1.3), в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} \left( \frac{\sin^2 \varphi_1}{1 + \varepsilon_1} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{1 + \varepsilon_2} \right) + \frac{I_1^2}{2A(1 + \varepsilon_3)} - \\ & - \left( \mathbf{G}_v, \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A(1 + \varepsilon_1)} \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} + \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A(1 + \varepsilon_2)} \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2} + \frac{I_1}{A(1 + \varepsilon_3)} \mathbf{e}_{x_3} \right) + \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{G}_v, J^{-1} \mathbf{G}_v) - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^2 \rho dx \end{aligned}$$

Заметим, что  $\mathcal{R}$  не зависит от переменных  $I_3, \varphi_2, \varphi_3$ . Из уравнений движения следует, что  $\dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0$ . В частности, очевидно, что  $|\mathbf{G}| = I_2 = \text{const}$ . Но эти условия дают больше:  $\varphi_2 = \text{const}$ ,  $\cos \delta_1 = \frac{I_3}{I_2} = \text{const}$  — это означает, что в неподвижной системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  вектор момента количества движения  $\mathbf{G}$  постоянен, а его полная производная в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  равна  $\dot{\mathbf{G}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_1} \dot{I}_1 + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1$ .

Выписывая функционал Рауса в виде ряда по малым параметрам  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , его можно разделить на три слагаемых

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$$

Здесь  $\mathcal{R}_0$  содержит члены, не зависящие от малых параметров  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ;  $\mathcal{R}_1$  линейно зависит от них:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 = & \frac{I_2^2}{2A} - \left( \mathbf{G}_v, \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A} (\sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} + \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2}) + \frac{I_1}{A} \mathbf{e}_{x_3} \right) + \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{G}_v, J^{-1} \mathbf{G}_v) - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^2 \rho dx, \\ \mathcal{R}_1 = & -\frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} (\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1) - \frac{I_1^2}{2A} \varepsilon_3 + \\ & + \left( \mathbf{G}_v, \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A} (\varepsilon_1 \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} + \varepsilon_2 \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2}) + \frac{I_1}{A} \varepsilon_3 \mathbf{e}_{x_3} \right) \end{aligned}$$

а  $\mathcal{R}_2$  — это члены второго и более высокого порядка малости, которые мы не будем рассматривать в данной задаче.

Уравнения движения без членов высших порядков принимают вид:

$$\dot{\mathbf{I}} = -\nabla_{\varphi}(\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1), \quad \dot{\varphi} = \nabla_{\mathbf{I}}(\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1),$$

Подставляя выражения для  $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ , получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 = \frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\varphi_1 + \\ \quad + \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A} (\mathbf{G}_v, (1 - \varepsilon_1) \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} - (1 - \varepsilon_2) \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2}) \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{I_1}{A} (\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1 - \varepsilon_3) - \frac{1}{A} (\mathbf{G}_v, (1 - \varepsilon_3) \mathbf{e}_{x_3}) + \\ \quad + \frac{I_1}{A\sqrt{I_2^2 - I_1^2}} (\mathbf{G}_v, (1 - \varepsilon_1) \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} + (1 - \varepsilon_2) \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2}) \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{I_2}{A} - \frac{I_2}{A} (\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1) - \\ \quad - \frac{I_2}{A\sqrt{I_2^2 - I_1^2}} (\mathbf{G}_v, (1 - \varepsilon_1) \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} + (1 - \varepsilon_2) \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2}) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{array} \right.$$

Решение уравнений (1.1.5), (1.1.6) найдем в виде ряда по малому параметру  $\varepsilon = Re = \frac{\omega^2(0)a}{\nu} \ll 1$ , где  $\omega(0)$  — модуль угловой скорости тела в начальный момент времени. При подходящем выборе единиц измерения можно считать, что  $\varepsilon = \nu^{-1}$ .

Итак, поле скоростей частиц жидкости и ее давление представляем в виде рядов:

$$\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{r}', t) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2(\mathbf{r}', t) + \dots$$

$$p = \varepsilon p_1(\mathbf{r}', t) + \varepsilon^2 p_2(\mathbf{r}', t) + \dots$$

Используем метод разделения движений [15]. Сначала рассматривается  $\varepsilon = 0$  ( $\nu = \infty$ ), т.е. жидкость является твердым телом. Другими словами, всё тело твердое, а его движение описывается уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 = \frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{I_1}{A} (\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1 - \varepsilon_3) = \omega_1(I_1, \varphi_1) \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{I_2}{A} (1 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1) = \omega_2(\varphi_1) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

Данные уравнения описывают движение твердого тела, эллипсоид инерции которого близок к сфере, с неподвижной точкой. Его движение близко по угловым скоростям к равномерному вращению вокруг вектора момента количества движения.

Заметим, что  $\omega_1(I_1, \varphi_1) < 0$ , кроме случая, когда тело является шаром. В самом деле,  $\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1 - \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + (-\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cos^2 \varphi_1 - \varepsilon_3 = \cos 2\varphi_1 (-\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_3) - \frac{3}{2}\varepsilon_3$ . Наименьшее значение это выражение принимает  $\varepsilon_1 - \varepsilon_3 < 0$ , а наибольшее  $-\varepsilon_1 - 2\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 < 0$ .

При  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  тело осесимметрично и уравнения его движения:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = 0 \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{I_1}{A} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = \omega_1 \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{I_2}{A} (1 - \varepsilon_1) = \omega_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases}$$

Тело равномерно вращается вокруг вектора момента количества движения, а ось  $Cx_3$  сохраняет постоянный угол с вектором момента количества движения. Это регулярная прецессия, как в случае Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

В затвердевшей жидкости ( $\varepsilon = 0$ ) поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r}', t) = 0$  и давление  $p(\mathbf{r}', t) = 0$ .

Уравнения движения первого порядка имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\varphi_1 + \left( J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_1}, \mathbf{G}_v \right) \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{I_1}{A} (\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1 - \varepsilon_3) - \left( J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_1}, \mathbf{G}_v \right) \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{I_2}{A} (1 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1) - \left( J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_2}, \mathbf{G}_v \right) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases}$$

Чтобы получить эти уравнения в явном виде, необходимо выразить момент количества движения жидкости  $\mathbf{G}_v$ , а для этого — найти  $\mathbf{v}_1$ . Исследовав порядок слагаемых в уравнении Навье-Стокса (1.1.5), выпишем его нулевое приближение (приближение Стокса [103]):

$$\begin{aligned} \left[ J^{-1} \dot{\mathbf{G}} \times \mathbf{r}' \right] &= \Delta \mathbf{v}_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_1 &= 0, \quad \mathbf{v}_1 \Big|_{\mathbf{r}' \in \partial V} = 0 \end{aligned}$$

Данное уравнение согласно [15],[52] имеет решение

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{10} \left( \mathbf{r}'^2 - a^2 \right) \left[ J^{-1} \dot{\mathbf{G}} \times \mathbf{r}' \right] \quad (1.2.2)$$

Используя (1.2.2), находится момент количества движения. Таким образом, нулевое приближение уравнения Навье-Стокса дает первое приближение канонических уравнений движения. При необходимости эту процедуру можно продолжать для второго и последующих приближений.

С помощью уравнений движения (1.2.1) получим

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_1} \left( \frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\varphi_1 \right) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_1} \left( \frac{I_1}{A} (\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1 - \varepsilon_3) \right)$$

и из (1.2.2) найдем  $\mathbf{v}_1$ . Затем, согласно методу разделения движений [15], найденное  $\mathbf{v}_1$  подставляется в систему первого приближения канонических уравнений движения.

В задаче со сферической полостью [22] было получено следующее выражение:

$$\mathbf{G}_v = -\varepsilon k J^{-1} \dot{\mathbf{G}}, \quad k = \frac{8\pi\rho a^7}{525}$$

После подстановки выражений для  $\mathbf{G}$  и  $\dot{\mathbf{G}}$  уравнения движения первого порядка по  $\varepsilon$  примут вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Q_1 - \varepsilon k \left( \frac{I_1}{A^2} \sin 2\varphi_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) Q_1 + \frac{I_2^2 - I_1^2}{A^2} (1 - 2\varepsilon_1 \cos^2 \varphi_1 - 2\varepsilon_2 \sin^2 \varphi_1) Q_2 \right) \\ \dot{\varphi}_1 = Q_2 + \varepsilon k \left( \frac{I_1^2}{(I_2^2 - I_1^2) A^2} (1 - 2\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 - 2\varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1) Q_1 + \frac{I_1}{A^2} \sin 2\varphi_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) Q_2 \right) \\ \dot{\varphi}_2 = Q_3 + \varepsilon k \left( \frac{I_1 I_2}{(I_2^2 - I_1^2) A^2} (-1 + 2\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + 2\varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1) Q_1 - \frac{I_2}{A^2} \sin 2\varphi_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) Q_2 \right) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\varphi_1, \\ Q_2 &= \frac{I_1}{A} (\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1 - \varepsilon_3), \\ Q_3 &= \frac{I_2}{A} (1 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 - \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1). \end{aligned}$$

Уравнения (1.2.3) при  $\varepsilon = 0$  описывают движение твердого тела в случае Эйлера. Угол  $\varphi_1$  изменяется монотонно, поскольку знак  $Q_2 = \omega_1(I_1, \varphi_1)$  не меняется. В этом случае имеем

$$\frac{dI_1}{d\varphi_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{I_2^2 - I_1^2}{2I_1} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\varphi_1}{\varepsilon_1 \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_2 \cos^2 \varphi_1 - \varepsilon_3} \quad (1.2.4)$$

Интегрируя уравнение (1.2.4) методом разделения переменных, получим

$$I_2^2 - I_1^2 = D[-3\varepsilon_3 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\varphi_1]^{-1}, \quad (1.2.5)$$

где  $D \geq 0$  — произвольная постоянная.

Канонические переменные действие-угол  $(\hat{I}_1, \hat{\varphi}_1)$  в задаче Эйлера-Пуансо вводятся с помощью известной процедуры [48],[99] и представляются в виде

$$I_1 = \hat{I}_1 + F_1(\hat{I}_1, \hat{\varphi}_1), \quad \varphi_1 = \hat{\varphi}_1 + G_1(\hat{I}_1, \hat{\varphi}_1), \quad \langle G_1 \rangle_{\hat{\varphi}_1} = 0$$

Здесь угловые скобки означают усреднение. Переменные  $\varphi_1, \hat{\varphi}_1$  заданы по модулю  $2\pi$ , функция  $G_1$  является нечетной по переменной  $\hat{\varphi}_1$ , а функция  $I_1$  согласно (1.2.5) — четной функцией по  $\varphi_1$ . Если  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , то переменная Андуйе  $I_1 = \hat{I}_1$  становится переменной действие. Функции  $F_1, G_1$  имеют порядок  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$  и также обращаются в ноль в случае симметричного твердого тела. Для переменных действие-угол переменная  $\hat{\varphi}_1$  — быстрая и по ней можно проводить усреднение [81]. Процедуру усреднения правых частей уравнений (1.2.3) по переменной  $\hat{\varphi}_1$  можно заменить усреднением по переменной  $\varphi_1$  с погрешностями порядка  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ . В результате получим

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = -\varepsilon k \frac{J_1(I_2^2 - J_1^2)}{2A^3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3) \\ \dot{\psi}_1 = \frac{J_1}{2A} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3) \\ \dot{\psi}_2 = \frac{I_2}{2A} (2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases}$$

Здесь взяты члены только первого порядка по малым  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , а  $J_1$  обозначает усредненное значение  $I_1$ , а  $\psi_1, \psi_2$  — усредненные значения  $\varphi_1, \varphi_2$  соответственно. В результате усреднения по  $\hat{\varphi}_1$ , которое можно заменить на усреднение правых частей по  $\varphi_1$ , получаются функции, порядок малости которых равен  $\varepsilon\varepsilon_i$ .

Вспомним условие  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ . Тогда для тела с тензором инерции

$J = \text{diag}\{A(1 + \varepsilon_1), A(1 + \varepsilon_2), A(1 + \varepsilon_3)\}$  и шарообразной полостью радиуса  $a$  уравнения, описывающие эволюцию, имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = -\frac{4\varepsilon\rho\pi a^7}{525} \frac{J_1}{A^3} (I_2^2 - J_1^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3) = \frac{4\varepsilon\rho\pi a^7}{175} \frac{J_1}{A^3} (I_2^2 - J_1^2)\varepsilon_3 \\ \dot{\psi}_1 = f_1(J_1) \\ \dot{\psi}_2 = f_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases}$$

где  $f_1(J_1) = -\frac{3J_1}{2A}\varepsilon_3$  линейно зависит от  $J_1$ ,  $f_2 = \frac{I_2}{2A}(2 + \varepsilon_3)$  — константа. Первое уравнение не зависит от других и имеет два стационарных решения:  $J_1 = I_2$  и  $J_1 = 0$ . Остальные решения имеют вид:

$$J_1 = I_2 \sqrt{\frac{C_1 e^{Kt}}{1 + C_1 e^{Kt}}}, K = \frac{8\varepsilon\rho\pi a^7 I_2^2}{175 A^3} \varepsilon_3, C_1 \geq 0$$

Здесь  $C_1$  — произвольная постоянная интегрирования. Все решения, отличные от стационарных, стремятся к одному из двух стационарных, в зависимости от знака  $K$ .

Так как  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3$  и  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ , то  $\varepsilon_3 \geq 0$  и правая часть первого уравнения неотрицательна в любой момент времени. Таким образом, решения первого уравнения в системе, описывающей эволюцию вращений твердого тела, стремятся к аттрактору  $J_1 = I_2$ , а стационарное движение  $J_1 = 0$  неустойчиво (рис. 1.3).

Отдельный случай  $\varepsilon_3 = 0$ , т.е.  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  и эллипсоид представляет собой шар, соответствует множеству стационарных решений  $J_1 = \text{const}$ .



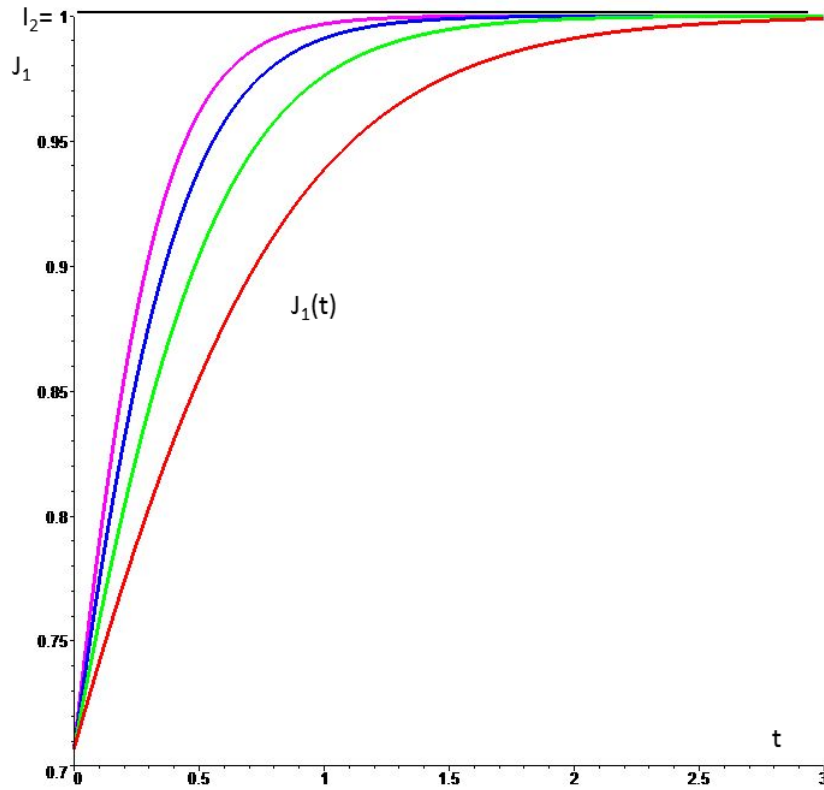


Рис. 1.3: График функции  $J_1(t)$  для  $I_2 = 1$ ,  $C_1 = 1$  при различных постоянных  $K$ . Красная (нижняя) линия отвечает параметру  $K = 2$ , зеленая —  $K = 3$ , синяя —  $K = 4$ , розовая (верхняя) —  $K = 5$

Графики на рис. 1.3 построены для  $I_2 = 1$ ,  $C_1 = 1$ . Время  $t$  бралось в пределах от 0 до 3, в этот промежуток переменная  $J_1$  делает резкий скачок и далее асимптотически стремится к  $I_2$ .

### 1.3 Решение задачи для тела, близкого к осесимметричному

Теперь рассмотрим тело с тензором инерции  $J = \text{diag}\{A, B, C\}$ , где

$$\frac{A}{1 + \varepsilon_1} = A, \quad \frac{A}{1 - \varepsilon_1} = B, \quad C = C.$$

Тензор инерции  $\text{diag}\{A, A, C\}$  соответствует тензору осесимметричного тела, а рассматриваемый тензор инерции близок к нему: величина  $\varepsilon_1$  — малый параметр. В этом случае функционал Рауса имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} (1 - \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1) + \frac{I_1^2}{2C} - \\ &- \left( \mathbf{G}_v, \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A} (1 + \varepsilon_1) \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} + \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A} (1 - \varepsilon_1) \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2} + \frac{I_1}{C} \mathbf{e}_{x_3} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{G}_v, J^{-1} \mathbf{G}_v) - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^2 \rho dx \end{aligned}$$

Заметим, что в этом случае функционал Рауса  $\mathcal{R}$  также не зависит от переменных  $I_3, \varphi_2, \varphi_3$  и, следовательно, по тем же рассуждениям, что и в предыдущей главе, вектор момента количества движения  $\mathbf{G}$  постоянен в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ .

Аналогично предыдущей задаче функционал Рауса представим в виде

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1,$$

где  $\mathcal{R}_0$  содержит члены, не зависящие от малого параметра  $\varepsilon_1$ ;  $\mathcal{R}_1$  содержит члены первого порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= \frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} + \frac{I_1^2}{2C} - \left( \mathbf{G}_v, \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A} (\sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} + \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2}) + \frac{I_1}{C} \mathbf{e}_{x_3} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{G}_v, J^{-1} \mathbf{G}_v) - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^2 \rho dx, \\ \mathcal{R}_1 &= -\frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1 - \varepsilon_1 \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A} (\mathbf{G}_v, \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} - \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2}) \end{aligned}$$

Уравнения движения принимают вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{I}_1 &= -\frac{I_2^2 - I_1^2}{A} \varepsilon_1 \sin 2\varphi_1 + \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A} (\mathbf{G}_v, (1 + \varepsilon_1) \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} - (1 - \varepsilon_1) \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2}) \\ \dot{\varphi}_1 &= I_1 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{I_1}{A} \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1 - \frac{1}{C} (\mathbf{G}_v, \mathbf{e}_{x_3}) + \\ &+ \frac{I_1}{A \sqrt{I_2^2 - I_1^2}} (\mathbf{G}_v, (1 + \varepsilon_1) \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} + (1 - \varepsilon_1) \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2}) \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{I_2}{A} - \frac{I_2}{A} \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1 - \frac{I_2}{A \sqrt{I_2^2 - I_1^2}} (\mathbf{G}_v, (1 + \varepsilon_1) \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} + (1 - \varepsilon_1) \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2}) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Поскольку жидкость сильновязкая, то решение уравнений (1.1.5), (1.1.6) также будем искать в виде ряда по малому параметру  $\varepsilon = Re = \nu^{-1} \ll 1$ .

Поле скоростей частиц жидкости и ее давление представляются в виде рядов:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \varepsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{r}', t) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2(\mathbf{r}', t) + \dots \\ p &= \varepsilon p_1(\mathbf{r}', t) + \varepsilon^2 p_2(\mathbf{r}', t) + \dots\end{aligned}$$

Аналогично предыдущей задаче, мы будем использовать метод разделения движения и усреднения по быстрой переменной. Исследовав порядок слагаемых в уравнении Навье-Стокса (1.1.5), выпишем его нулевое приближение:

$$\begin{aligned}\left[ J^{-1} \dot{\mathbf{G}} \times \mathbf{r}' \right] &= \Delta \mathbf{v}_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_1 &= 0, \quad \mathbf{v}_1 \Big|_{\mathbf{r}' \in \partial V} = 0\end{aligned}$$

Данное уравнение имеет решение (1.2.2). Воспользуемся методом разделения движений. Сначала рассматривается абсолютно твердое тело, т.е.  $\varepsilon = 0 (\nu = \infty)$ . В этом случае движение описывается уравнениями:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{I}_1 &= -\frac{I_2^2 - I_1^2}{A} \varepsilon_1 \sin 2\varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 &= I_1 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{I_1}{A} \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1 = \omega_1(I_1, \varphi_1) \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{I_2}{A} (1 - \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1) = \omega_2(\varphi_1) \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{aligned} \right.$$

Эти уравнения описывают движение твердого тела с "замороженной" жидкостью в случае Эйлера, когда два главных момента инерции близки друг к другу. Они отличаются от уравнений, описывающих регулярную прецессию, слагаемыми порядка  $\varepsilon_1$ , а значит, движение тела в этом случае близко к регулярной прецессии.

При  $\varepsilon_1 = 0$  тело осесимметрично и уравнения принимают вид (совпадают с полученным в [22]):

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = 0 \\ \dot{\varphi}_1 = I_1 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) = \omega_1 \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{I_2}{A} = \omega_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases}$$

Тело совершает регулярную прецессию, как в случае волчка Эйлера.

Уравнения движения первого порядка имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -\frac{I_2^2 - I_1^2}{A} \varepsilon_1 \sin 2\varphi_1 + \left( J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_1}, \mathbf{G}_v \right) \\ \dot{\varphi}_1 = I_1 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{I_1}{A} \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1 - \left( J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_1}, \mathbf{G}_v \right) \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{I_2}{A} (1 - \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1) - \left( J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_2}, \mathbf{G}_v \right) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases}$$

Опираясь на полученное в [22] выражение для момента количества движения жидкости  $\mathbf{G}_v = -\varepsilon k J^{-1} \dot{\mathbf{G}}$ ,  $k = \frac{8\pi\rho a^7}{525}$ , находим явный вид этих уравнений.

После подстановки выражений для  $\mathbf{G}$  и  $\dot{\mathbf{G}}$  уравнения движения первого порядка примут вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = P_1 - \varepsilon k \left( -2\varepsilon_1 \frac{I_1}{A^2} \sin 2\varphi_1 P_1 + \frac{I_2^2 - I_1^2}{A^2} (1 + 2\varepsilon_1 \cos 2\varphi_1) P_2 + \varepsilon_1^2 \frac{I_2^2 - I_1^2}{A^2} P_2 \right) \\ \dot{\varphi}_1 = P_2 + \varepsilon k \left( \frac{I_1^2(1 + \varepsilon_1^2)}{(I_2^2 - I_1^2)A^2} (1 - 2\varepsilon_1 \cos 2\varphi_1) P_1 - 2\varepsilon_1 \frac{I_1}{A^2} \sin 2\varphi_1 P_2 + \frac{P_1}{C^2} \right) \\ \dot{\varphi}_2 = P_3 + \varepsilon k \left( \frac{I_1 I_2 (1 + \varepsilon_1^2)}{(I_2^2 - I_1^2)A^2} (-1 + 2\varepsilon_1 \cos 2\varphi_1) P_1 + 2\varepsilon_1 \frac{I_2}{A^2} \sin 2\varphi_1 P_2 \right) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{I_2^2 - I_1^2}{A} \varepsilon_1 \sin 2\varphi_1, \\ P_2 &= I_1 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{I_1}{A} \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1, \\ P_3 &= \frac{I_2}{A} (1 - \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1). \end{aligned}$$

По аналогичным рассуждениям, проведенным в параграфе 1.2, можно про-

вести усреднение правых частей уравнений по переменной  $\varphi_1$ . Получаем

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = -\varepsilon k \frac{J_1(I_2^2 - J_1^2)}{A^3} \lambda \\ \dot{\psi}_1 = \frac{J_1}{A} \lambda \\ \dot{\psi}_2 = \frac{I_2}{A} \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

где  $\lambda = \frac{A-C}{C}$ ,  $J_1$  — это усредненное значение  $I_1$ , а  $\psi_1, \psi_2$  — усредненные значения  $\varphi_1, \varphi_2$  соответственно. Заменой усреднения по быстрой переменной  $\hat{\varphi}_1$  усреднением по  $\varphi_1$  теряются члены порядка малости  $\varepsilon \varepsilon_1^2$ .

Итак, для тела с тензором инерции  $J = \text{diag}\{A/(1 + \varepsilon_1), A/(1 - \varepsilon_1), C\}$  и шарообразной полостью радиуса  $a$  уравнения, описывающие эволюцию, имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = -\frac{8}{525} \pi a^7 \rho \varepsilon \frac{J_1(I_2^2 - J_1^2)}{A^3} \lambda \\ \dot{\psi}_1 = f_1(J_1) \\ \dot{\psi}_2 = f_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases}$$

где  $f_1(J_1) = \frac{J_1}{A} \lambda$  линейно зависит от  $J_1$ ,  $f_2 = \frac{I_2}{A}$  — константа. Первое уравнение не зависит от других и имеет два стационарных решения:  $J_1 = I_2$  и  $J_1 = 0$ . Остальные решения имеют вид:

$$J_1 = I_2 \sqrt{\frac{C_1 e^{Kt}}{1 + C_1 e^{Kt}}}, K = -\frac{16 \varepsilon \rho \pi a^7 I_2^2}{525 A^3} \lambda, C_1 \geq 0$$

Здесь  $C_1$  — произвольная постоянная интегрирования.

Решения уравнения на  $I_1$  стремятся к одному из стационарных (рис. 1.4, 1.5) в зависимости от знака  $\lambda$ .

В первом случае (рис. 1.4), когда  $A < C$  ( $\lambda < 0$ ), решения первого уравнения в системе, описывающей эволюцию вращений твердого тела, стремятся к аттрактору  $J_1 = I_2$ , а стационарное движение  $J_1 = 0$  неустойчиво. Во втором случае (рис. 1.5), когда  $A > C$  ( $\lambda > 0$ ), решения первого уравнения стремятся к аттрактору  $J_1 = 0$ , а стационарное движение  $J_1 = I_2$  неустойчиво.

Отдельный случай  $A = C$ , т.е. твердое тело представляет собой осесиммет-

ричный эллипсоид, соответствует множеству стационарных решений  $J_1 = const$ .

Предельным движением является стационарное вращение тела вокруг оси с наибольшим моментом инерции. При этом поле скоростей жидкости относительно твердого тела равно нулю и рассеяния энергии нет.

Из второго уравнения системы (1.3.1) следует, что поправка в частоту угловой переменной  $\varphi_1$  равна нулю.

Если множитель  $\lambda$  близок к нулю, т.е. главный момент инерции  $A$  близок к главному моменту инерции  $C$ , то эволюция переменной  $J_1$  замедляется и становится пропорциональной  $\varepsilon\varepsilon_1^2$  при  $A = C$ . Для сферически симметричного тела, когда  $\varepsilon_1 = 0$ , производная первой переменной равна нулю  $\dot{J}_1 = 0$  и эволюции движения нет.

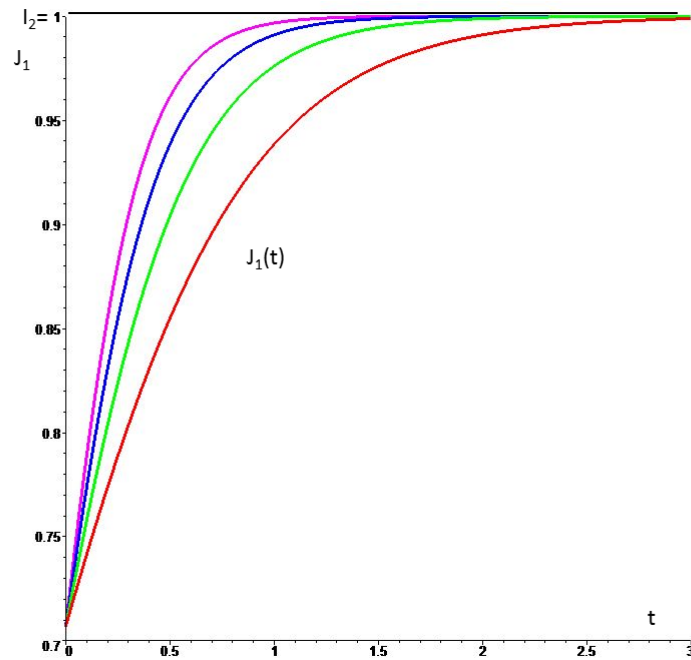


Рис. 1.4: График функции  $J_1(t)$  для  $I_2 = 1$ ,  $C_1 = 1$  при различных постоянных  $K > 0$ . Красная (нижняя) линия отвечает параметру  $K = 2$ , зеленая —  $K = 3$ , синяя —  $K = 4$ , розовая (верхняя) —  $K = 5$

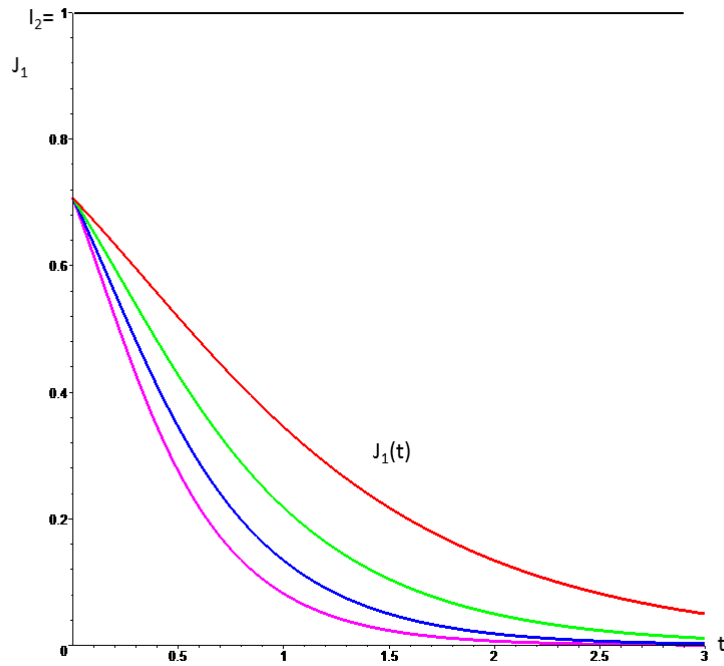


Рис. 1.5: График функции  $J_1(t)$  для  $I_2 = 1$ ,  $C_1 = 1$  при различных постоянных  $K < 0$ . Красная (верхняя) линия отвечает параметру  $K = -2$ , зеленая —  $K = -3$ , синяя —  $K = -4$ , розовая (нижняя) —  $K = -5$

Графики на рис. 1.4, 1.5 были построены для  $I_2 = 1$ ,  $C_1 = 1$ . Время  $t$  бралось в пределах от 0 до 3, в этот промежуток переменная  $J_1$  при положительных значениях константы  $K$  (рис. 1.4) делает резкий скачок и далее асимптотически стремится к  $I_2$ . При отрицательных значениях  $K$  (рис. 1.5) на том же промежутке переменная  $J_1$  резко падает и далее асимптотически стремится к 0.

## 1.4 Общие результаты, полученные при решении задач о движении твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью

Выше были рассмотрены две задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой и сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью. В параграфе 1.2 твердое тело предполагалось близким к сферическому, а в параграфе 1.3 — близким к осесимметричному. Задачи отличаются тензорами инерции тела. Однако для обоих случаев свойства полученных решений одинаковы.

Если твердое тело сплющено вдоль своей третьей оси, то решения  $J_1$  системы уравнений движения стремятся к  $I_2$ . Это означает, что главная ось инерции  $Ox_3$  и ось, проходящая через начало координат  $O$  и коллинеарная постоянному в инерциальной системе координат вектору момента количества движения  $\mathbf{G}$  постепенно сближаются, стремясь совпасть (рис. 1.6). Это существенное отличие от случая чисто твердого тела: при регулярной прецессии угол между этими осями постоянен, на рис. 1.6 этот случай нарисован пунктиром.

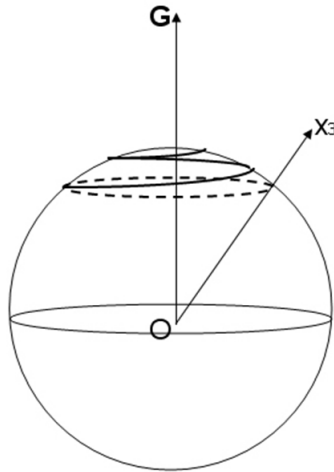


Рис. 1.6: Стремление оси  $Ox_3$  к неподвижному вектору момента количества движения  $\mathbf{G}$  для тела, отличного от осесимметричного (сплошная линия). Случай регулярной прецессии (пунктирная линия)

Если же твердое тело вытянуто вдоль своей третьей оси, то решения для  $J_1$  стремятся к 0, т.е. вышеуказанные оси стремятся максимально разойтись и стать перпендикулярными друг к другу (рис. 1.7). На рис. 1.7 пунктиром также нарисован случай регулярной прецессии для чисто твердого тела.



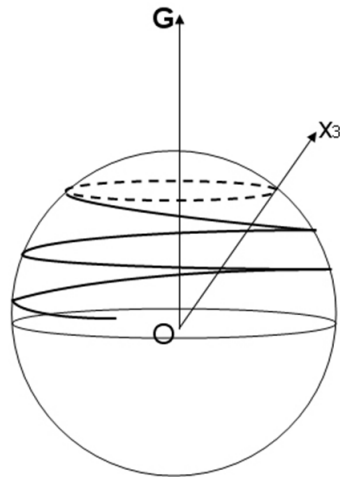


Рис. 1.7: Стремление оси  $Ox_3$  отклониться от неподвижного вектора момента количества движения  $\mathbf{G}$  для тела, отличного от осесимметричного (сплошная линия). Случай регулярной прецессии (пунктирная линия)

Различия в результатах двух рассматриваемых задач связаны с различиями движения абсолютно симметричного твердого тела и тела, имеющего ось симметрии, но отличного от шара. Так как для шара эволюция движения отсутствует, то значение переменной  $\psi_1$  в первой задаче близко к нулю, а уравнение изменения переменной  $J_1$  содержит линейные члены по малым параметрам, отвечающим за несимметричность тела. В отличие от этого случая, осесимметричное твердое тело совершает регулярную прецессию, поэтому переменная  $\psi_1$  не стремится к нулю при устремлении к нулю малого параметра  $\varepsilon_1$ , а также уравнение на  $J_1$  содержит член нулевого порядка по  $\varepsilon_1$ .

## Глава 2

# Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью

Данная глава является продолжением исследования эволюции твердого тела с полостью с жидкостью при отсутствии внешних сил. Здесь тело берется близкое к осесимметричному. Оно также имеет неподвижную точку и полость с вязкой жидкостью. В отличие от предыдущей главы полость берется эллипсоидальной, но близкой к сферической, за что также отвечают малые параметры. Даже такое незначительное усложнение системы ведет к более сложным уравнениям движения. Малое отклонение формы полости от сферической вносит дополнительные слагаемые в уравнения движения.

Как и в предыдущей задаче, для решения используются переменные Андуайе, в которых удобным образом записывается система уравнений. Три из шести переменных оказываются постоянными, что приводит к постоянству вектора момента количества движения тела с жидкостью. Методом разделения движения и усреднения были получены уравнения движения. В результате, изменение координаты, отвечающей за эволюцию движения, содержит большое число зависимых констант, связанных с несферичностью полости с жидкостью, ее геометрическим расположением внутри тела и отклонением самого тела от осесимметричного.

Для случая, когда тело осесимметрично, уравнение, описывающее эволю-

ции движения, дает такой же результат, как и в случае сферической полости. В остальных случаях решение зависит от геометрических особенностей полости, однако, при сильно вытянутом или сильно сплюсненном твердом теле они не сказываются и так же ось наибольшего момента твердого тела стремится совпасть с вектором момента количества движения.

## 2.1 Постановка задачи

Рассматривается движение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки  $O$ , с тензором инерции  $J = \text{diag}\{\frac{A}{1+\varepsilon_1}, \frac{A}{1-\varepsilon_1}, C\}$ , где  $\varepsilon_1$  — малый параметр. Заметим, что данная модель включает в себя случай тензора инерции с разными отклонениями от осесимметричного тела. Если тело имеет тензор инерции  $J = \text{diag}\{\frac{A'}{1+a}, \frac{A'}{1+b}, C\}$ , то заменой  $A = A'/(1 + \frac{a+b}{2})$  он сводится к вышеуказанному, где  $\varepsilon_1 = \frac{a-b}{1+a+b}$ .

Точка  $O$  берется за начало неподвижной системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Внутри тела находится полость, полностью заполненная вязкой жидкостью. Полость представляет собой эллипсоид с центром в точке  $O_1$  (рис. 2.1). Система движется по инерции, т.е. внешние силы отсутствуют. Нужно определить эволюцию движения системы.

Пусть  $Ox_1x_2x_3$  — система координат, жестко связанная с твердым телом. Оси  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  — главные оси инерции тела с жидкостью. Геометрическое место точек полости в канонической системе координат:

$$V = \{a_1x_1'^2 + a_2x_2'^2 + a_3x_3'^2 \leq 1\}, \quad (2.1.1)$$

все  $a_i > 0, i = 1, 2, 3$ .

Эллипсоид рассматривается близкий к сфере, т.е.  $\frac{a_i}{a_j} \approx 1, i \neq j$ .

В подвижной системе координат центр полости  $O_1$  определяется вектором  $\mathbf{r}_1$ , а частица жидкости соответствующим вектором  $\mathbf{r}$ . Будем рассматривать жидкость с помощью векторов  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ , обозначающих радиус-вектора частиц жидкости, исходящие из центра полости. Поле  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}', t)$  определяет поле относительных скоростей частиц жидкости в зависимости от их радиус-вектора  $\mathbf{r}'$  и времени  $t$ . Жидкость предполагается однородной и несжимаемой:

$$\rho = \text{const}, \text{div} \mathbf{v} = 0.$$

Вязкость жидкости будет считаться достаточно большой, тогда число Рей-

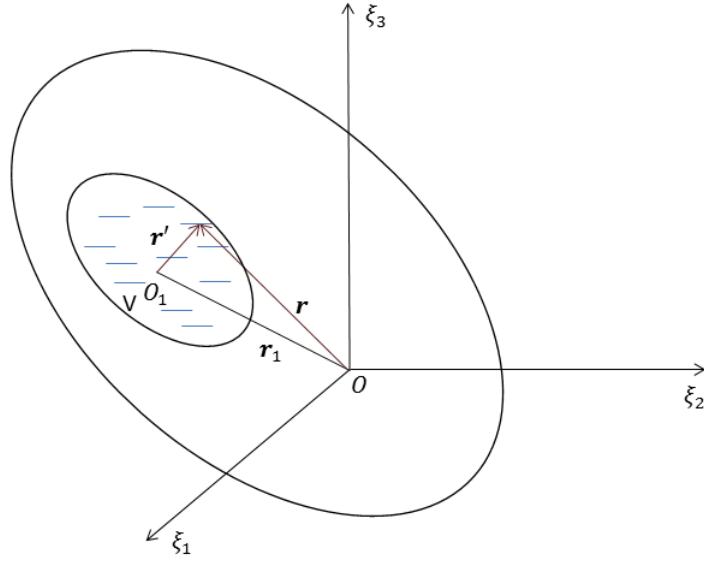


Рис. 2.1: Твердое тело с эллипсоидальной полостью, заполненной жидкостью, и неподвижной точкой  $O$

нольдса  $Re$  течения вязкой жидкости в полости можно рассматривать как малый параметр задачи.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} (J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{G}_v) + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^2 \rho dx, \quad (2.1.2)$$

где  $J$  — тензор инерции всей системы, а  $\mathbf{G}_v = \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{v}] \rho dx$  — момент количества движения жидкости в связанной с телом системе координат.

Для описания движения системы будем также использовать канонические переменные Андуайе  $I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Вектор момента количества движения  $\mathbf{G}$  имеет проекции в системе координат  $Ox_1x_2x_3$   $(\mathbf{G}, \mathbf{e}_{x_3}) = I_1 = I_2 \cos \delta_2$  и  $(\mathbf{G}, \mathbf{e}_{\xi_3}) = I_3 = I_2 \cos \delta_1$ , где  $I_2 = |\mathbf{G}|$  — модуль момента количества движения:

$$\mathbf{G} = \left( \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1, \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1, I_1 \right).$$

Из выражения для кинетической энергии (2.1.2) вектор момента количества движения рассматриваемой системы  $\mathbf{G} = (\nabla_{\boldsymbol{\omega}} T) = J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}_v$ , откуда выражается угловая скорость  $\boldsymbol{\omega} = J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_v)$ .

Уравнения движения будем записывать с помощью функционала Рауса:

$$\mathcal{R}[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}, \mathbf{r}'] = (\nabla_{\boldsymbol{\omega}} T, \boldsymbol{\omega}) - T = \frac{1}{2} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v, J^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v)) - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^2 \rho dx \quad (2.1.3)$$

Функционал внутренних диссипативных сил в жидкости задается в виде [52]:

$$D[\mathbf{v}] = \int_V \mu \sum_{i,j=1}^3 c_{ij}^2 dx, c_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), i, j = \overline{1,3}.$$

где  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости, а  $c_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации.

В результате одна группа уравнений представляется в виде канонических уравнений относительно канонических переменных Андуайе, а вторая — как уравнения движения в лагранжевой форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}} &= -\nabla_{\boldsymbol{\varphi}} \mathcal{R}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} &= \nabla_{\mathbf{I}} \mathcal{R}, \\ \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{R} - \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{R} &= \nabla_{\mathbf{r}'} p - \mu \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

здесь  $p(\mathbf{r}', t)$  — давление в жидкости.

Вторая группа переписывается в виде уравнений Навье-Стокса для вязкой жидкости [15]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}'} \mathbf{v} + \left[ J^{-1} (\dot{\mathbf{G}} - \dot{\mathbf{G}}_v) \times \mathbf{r}' \right] + 2 \left[ J^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v) \times \mathbf{v} \right] = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (2.1.5)$$

где  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  — кинематический коэффициент вязкости. Здесь в левой части уравнения первые два слагаемых — это относительное ускорение частиц жидкости, третье слагаемое — вращательное ускорение, а последнее — кориолисово ускорение. В правой части поле вязких сил и поле реакций связей. Для полноты системы к этому уравнению добавляются условие несжимаемости и граничное

условие:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \Big|_{\mathbf{r}' \in \partial V} = 0 \quad (2.1.6)$$

## 2.2 Решение задачи для эллипсоидальной полости

Для описания движения будем рассматривать  $Ox'_1x'_2x'_3$  — систему координат, в которой уравнение полости представляется в каноническом виде (2.1.1), а  $\Gamma \in SO(3)$  — постоянный оператор поворота, задающий переход от системы координат  $Ox'_1x'_2x'_3$  к системе координат  $Ox_1x_2x_3$ :

$$\boldsymbol{\rho} = \Gamma^{-1} \mathbf{r}'.$$

Вихревое поле скоростей вязкой жидкости, находящейся внутри области  $V$ , в системе координат  $Ox'_1x'_2x'_3$  представим как функцию  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{t})$ , обращающуюся в ноль на границе области  $V$ . Сама область  $V = \{\boldsymbol{\rho} : (\Lambda \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}) \leq 1\}$ , где  $\Lambda = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, a_3\}$ . Так как полуоси рассматриваемой полости близки друг к другу, то приближенно оси равны  $a_0 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ . Их можно представить как

$$a_i = a_0(1 + \mu_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $\mu_i$  — выражения, для которых, из определения следует, должно выполняться равенство  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ . Величины  $\mu_i$  считаются малыми.

Функционал Рауса в этой задаче, согласно (2.1.3), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} (1 - \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1) + \frac{I_1^2}{2C} - \\ & - \left( \mathbf{G}_{\mathbf{u}}, \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A(1 - \varepsilon_1)} \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{x_1} + \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A(1 + \varepsilon_1)} \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{x_2} + \frac{I_1}{C} \mathbf{e}_{x_3} \right) + \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{G}_{\mathbf{u}}, J^{-1} \mathbf{G}_{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2} \int_V (\Gamma \mathbf{u})^2 \rho \, dx, \end{aligned}$$

где по сравнению с предыдущей задачей (параграф 1.3) поле скоростей жидкости заменено на  $\Gamma \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, t) = \Gamma \mathbf{u}(\Gamma^{-1} \mathbf{r}', t)$ , а момент движения частиц жидкости

$$\mathbf{G}_u = \Gamma \int_V [\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{u}] \rho dx', \quad \int_V \rho \mathbf{u} dx' = 0 \quad (2.2.1)$$

Отметим, что в данной задаче так же, как и в предыдущей, функционал Рауса  $\mathcal{R}$  не зависит от переменных  $I_3, \varphi_2, \varphi_3$  и, следовательно, вектор момента количества движения постоянен  $\mathbf{G} = const$  в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ .

Уравнения движения без членов высших порядков относительно  $\varepsilon_1$  имеют вид

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = P_1 + \left( J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_1}, \mathbf{G}_u \right) \\ \dot{\varphi}_1 = P_2 - \left( J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_1}, \mathbf{G}_u \right) \\ \dot{\varphi}_2 = P_3 - \left( J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_2}, \mathbf{G}_u \right) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{I_2^2 - I_1^2}{A} \varepsilon_1 \sin 2\varphi_1, \\ P_2 &= I_1 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{I_1}{A} \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1, \\ P_3 &= \frac{I_2}{A} (1 - \varepsilon_1 \cos 2\varphi_1). \end{aligned}$$

Решение уравнений (2.1.5), (2.1.6) будем искать в виде ряда по малому параметру  $\varepsilon = Re = \nu^{-1} \ll 1$ .

Поле скоростей частиц жидкости и ее давление представляются в виде рядов:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \varepsilon \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\rho}, t) + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2(\boldsymbol{\rho}, t) + \dots \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \dots \end{aligned}$$

Исследовав порядок слагаемых в уравнении Навье-Стокса (2.1.5), выпишем его нулевое приближение при  $\nabla p_0 = 0$ :

$$[\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\rho}] = \Delta \mathbf{u}_1, \quad p_0 = const, \quad div \mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_1|_{\boldsymbol{\rho} \in \partial V} = 0 \quad (2.2.2)$$

где  $\boldsymbol{\beta} = \Gamma^{-1} J^{-1} \dot{\mathbf{G}}$  — вектор  $J^{-1} \dot{\mathbf{G}}$  в системе координат  $Ox'_1x'_2x'_3$ . В уравнении (2.2.2) частные производные вычисляются по переменным  $x'_1, x'_2, x'_3$ , являющи-

мися координатами вектра  $\boldsymbol{\rho}$ .

Поиск решения уравнения Пуассона (2.2.2) усложняется тем, что полость эллипсоидальная, поэтому для начала проанализируем решение, аналогичное для сферической полости.

Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{u}_{10} = [(\Lambda \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}) - 1][\mathbf{b} \times \Lambda \boldsymbol{\rho}],$$

где  $\mathbf{b}$  — произвольный постоянный вектор. Тогда имеем

$$\mathbf{u}_{10}|_{\boldsymbol{\rho} \in \partial V} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_{10} = (\nabla, \mathbf{u}_{10}) = 2(\Lambda \boldsymbol{\rho}, [\mathbf{b} \times \Lambda \boldsymbol{\rho}]) + [(\Lambda \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}) - 1] \nabla [\mathbf{b} \times \Lambda \boldsymbol{\rho}] = 0,$$

$$\Delta \mathbf{u}_{10} = [\mathbf{b} \times (2\Lambda \operatorname{tr} \Lambda + 4\Lambda^2) \boldsymbol{\rho}] = L \boldsymbol{\rho} = K \boldsymbol{\rho} + C \boldsymbol{\rho} \quad (2.2.3)$$

Векторное произведение в (2.2.3) можно представить в виде матрицы  $L$ , умноженной на радиус-вектор  $\boldsymbol{\rho}$ , которую в свою очередь можно разложить на сумму кососимметрической  $K$  и симметрической  $C$  матриц.

Матрица  $(2\Lambda \operatorname{tr} \Lambda + 4\Lambda^2)$  имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 2a_1(a_1 + a_2 + a_3) + 4a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_2(a_1 + a_2 + a_3) + 4a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_3(a_1 + a_2 + a_3) + 4a_3^2 \end{pmatrix}$$

Обозначим элементы этой матрицы через  $\nu_i$ :

$$\nu_i = 2a_i(a_1 + a_2 + a_3) + 4a_i^2 = a_0^2(10 + 14\mu_i + 4\mu_i^2).$$

Теперь найдем явный вид матриц  $K$  и  $C$ .

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -b_3(\nu_2 + \nu_1)/2 & b_2(\nu_3 + \nu_1)/2 \\ b_3(\nu_2 + \nu_1)/2 & 0 & -b_1(\nu_2 + \nu_3)/2 \\ -b_2(\nu_3 + \nu_1)/2 & b_1(\nu_2 + \nu_3)/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b_3(\nu_2 - \nu_1)/2 & b_2(\nu_3 - \nu_1)/2 \\ b_3(\nu_2 - \nu_1)/2 & 0 & b_1(\nu_2 - \nu_3)/2 \\ b_2(\nu_3 - \nu_1)/2 & b_1(\nu_2 - \nu_3)/2 & 0 \end{pmatrix}$$



где  $b_1, b_2, b_3$  — координаты вектора  $\mathbf{b}$  в системе координат  $Ox'_1x'_2x'_3$ . Элементы матрицы  $C$  являются суммами линейных и квадратичных величин, пропорциональных  $\mu_i$  и  $\mu_i^2$ .

Если принять

$$b_1 = \frac{2\beta_1}{\nu_2 + \nu_3}, \quad b_2 = \frac{2\beta_2}{\nu_1 + \nu_3}, \quad b_3 = \frac{2\beta_3}{\nu_2 + \nu_1},$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  — координаты вектора  $\boldsymbol{\beta}$  в системе координат  $Ox'_1x'_2x'_3$ , то  $K\rho = [\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\rho}]$ . В линейном приближении  $b_k \approx \frac{\beta_k}{10a_0^2} \left(1 + \frac{7}{10}\mu_k\right)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Согласно уравнениям (2.2.2) и (2.2.3),

$$\Delta \mathbf{u}_{10} - \Delta \mathbf{u}_1 = C\rho,$$

где

$$C = (c_{ij}), c_{ii} = 0, c_{12} = c_{21} = \beta_3 \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}, c_{13} = c_{31} = \beta_2 \frac{\nu_3 - \nu_1}{\nu_3 + \nu_1}, c_{23} = c_{32} = \beta_1 \frac{\nu_2 - \nu_3}{\nu_2 + \nu_3}.$$

Найдем векторное поле  $\mathbf{u}_{11}(\boldsymbol{\rho}, t)$ , удовлетворяющее соотношениям

$$\Delta \mathbf{u}_{11} = -C\rho, \quad \int_V \operatorname{div} \mathbf{u}_{11} dx' = \int_{\partial V} (\mathbf{u}_{11}, \mathbf{n}) d\sigma = 0, \quad \mathbf{u}_{11}|_{\rho \in \partial V} = 0 \quad (2.2.4)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к эллипсоиду  $\partial V = 0$ . Второе равенство в соотношениях (2.2.4) соответствует интегральному свойству несжимаемости жидкости, преобразованное с помощью формулы Остроградского, и заменяет условие  $\operatorname{div} \mathbf{u}_{11} = 0$  в соотношениях (2.2.2). Решение задачи (2.2.4) будем искать в виде

$$\mathbf{u}_{11} = [(\Lambda\rho, \rho) - 1]D\rho.$$

Тогда

$$\Delta \mathbf{u}_{11} = D(2\operatorname{tr}\Lambda * E + 4\Lambda)\rho = D(6a_0E + 4\Lambda)\rho$$

$E$  — единичная матрица  $3 \times 3$ . Из последнего равенства находим матрицу  $D$ :

$$D = -C(6a_0E + 4\Lambda)^{-1}$$

Выразим элементы матрицы  $D$  через малые параметры  $\mu_i$ .

$$(6a_0E + 4\Lambda) = \begin{pmatrix} 10a_0 + 4a_0\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 10a_0 + 4a_0\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 10a_0 + 4a_0\mu_3 \end{pmatrix}$$

$$C(6a_0E + 4\Lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}/(10a_0 + 4a_0\mu_2) & c_{13}/(10a_0 + 4a_0\mu_3) \\ c_{21}/(10a_0 + 4a_0\mu_1) & 0 & c_{23}/(10a_0 + 4a_0\mu_3) \\ c_{31}/(10a_0 + 4a_0\mu_1) & c_{32}/(10a_0 + 4a_0\mu_2) & 0 \end{pmatrix}$$

Так как на диагонали матрицы  $C$  стоят нули, то и у матрицы  $D$  диагональные элементы равны нулю.

$$d_{ii} = 0, i = 1, 2, 3.$$

Остальные элементы матрицы  $D$  имеют вид

$$d_{12} \approx d_{21} \approx \frac{7}{100a_0} \beta_3(\mu_2 - \mu_1), d_{13} \approx d_{31} \approx \frac{7}{100a_0} \beta_2(\mu_1 - \mu_3),$$

$$d_{23} \approx d_{32} \approx \frac{7}{100a_0} \beta_1(\mu_3 - \mu_2)$$

Коэффициенты  $d_{ij}$  определены с точностью до членов порядка  $\mu_k^2$ . В линейном приближении матрица  $D$  оказывается симметрической.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для  $\mathbf{u}_{11}$  выполняется интегральное свойство несжимаемости жидкости:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u}_{11} dx' = 2 \int_V (\Lambda \boldsymbol{\rho}, D \boldsymbol{\rho}) dx' = 0$$

в силу того, что под интегралом стоят линейные комбинации произведений вида  $x'_i x'_j$  при  $i \neq j$ , а интегралы от них по объему равны нулю.

В результате суммарное поле скоростей жидкости в эллипсоидальной полости можно принять равным

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{10} + \mathbf{u}_{11} = [(\Lambda \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}) - 1] ([\mathbf{b} \times \Lambda \boldsymbol{\rho}] + D \boldsymbol{\rho}) \quad (2.2.5)$$

Имея выражение для поля скоростей жидкости в полости, вычислим момент количества движения жидкости  $\mathbf{G}_u$ . Используем соотношение (2.2.1) и равенство (2.2.5)

$$\mathbf{G}_u = \varepsilon (\mathbf{G}_{u_{10}} + \mathbf{G}_{u_{11}}),$$

$$\mathbf{G}_{u_{10}} = \Gamma \int_V [\boldsymbol{\rho} \times [(\Lambda \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}) - 1][\mathbf{b} \times \Lambda \boldsymbol{\rho}]] \rho dx',$$

$$\mathbf{G}_{u_{11}} = \Gamma \int_V [(\Lambda \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}) - 1][\boldsymbol{\rho} \times D \boldsymbol{\rho}] \rho dx'$$

Для вычислений данных интегралов сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} x \sin \theta \cos \varphi, \\ x'_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2}} x \sin \theta \sin \varphi, \\ x'_3 = \frac{1}{\sqrt{a_3}} x \cos \theta. \end{cases}$$

Якобиан замены в данном случае  $\frac{1}{\sqrt{a_1 a_2 a_3}} x^2 \sin \theta$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{u_{10}} &= \frac{\Gamma}{\sqrt{a_1 a_2 a_3}} \int_{|\mathbf{x}| < 1} (\mathbf{x}^2 - 1) [\Lambda^{-1/2} \mathbf{x} \times [\mathbf{b} \times \Lambda^{1/2} \mathbf{x}]] \rho x^2 \sin \theta dx d\theta d\varphi = \\ &= -\frac{16\pi\rho}{105\sqrt{a_1 a_2 a_3}} \Gamma \mathbf{b} = -\frac{8\pi\rho}{525a_0^{7/2}} \Gamma \text{diag} \left\{ 1 + \frac{7}{10}\mu_1, 1 + \frac{7}{10}\mu_2, 1 + \frac{7}{10}\mu_3 \right\} \Gamma \boldsymbol{\beta} + \\ &\quad + O(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2), \end{aligned}$$

$$\mathbf{G}_{u_{11}} = \frac{\Gamma}{\sqrt{a_1 a_2 a_3}} \int_{|\mathbf{x}| < 1} (\mathbf{x}^2 - 1) [\Lambda^{-1/2} \mathbf{x} \times D \Lambda^{-1/2} \mathbf{x}] \rho x^2 \sin \theta dx d\theta d\varphi = O(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2).$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x \sin \theta \cos \varphi, x \sin \theta \sin \varphi, x \cos \theta) = \Lambda^{1/2} \boldsymbol{\rho}$ .

Итак, момент количества движения частиц жидкости в линейном по  $\varepsilon$  и  $\mu_i$  приближении равен

$$\mathbf{G}_u = -\frac{8\varepsilon\pi\rho}{525a_0^{7/2}} \Gamma \text{diag} \left\{ 1 + \frac{7}{10}\mu_1, 1 + \frac{7}{10}\mu_2, 1 + \frac{7}{10}\mu_3 \right\} \Gamma^{-1} J^{-1} \dot{\mathbf{G}},$$

Уравнения возмущенного движения принимают вид

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = P_1 - \varepsilon k \left( [E + \Gamma M \Gamma^{-1}] J^{-1} \dot{\mathbf{G}}, J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_1} \right) \\ \dot{\varphi}_1 = P_2 + \varepsilon k \left( [E + \Gamma M \Gamma^{-1}] J^{-1} \dot{\mathbf{G}}, J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_1} \right) \\ \dot{\varphi}_2 = P_3 + \varepsilon k \left( [E + \Gamma M \Gamma^{-1}] J^{-1} \dot{\mathbf{G}}, J^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_2} \right) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \dot{\varphi}_3 = 0 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

где  $k = \frac{8\pi\rho}{525a_0^{7/2}}$ ,  $M = \frac{7}{10} \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ .

Так как момент количества движения  $\mathbf{G}$  не зависит явно от  $I_3, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\dot{I}_2 = 0$ , то его производная вычисляется как  $\dot{\mathbf{G}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_1} \dot{I}_1 + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1$ .

Если положить  $M = 0$ , т.е. эллипсоидальная полость вырождается в сферическую, то уравнения (2.2.6) совпадут с уравнениями предыдущей задачи для сферической полости и после процедуры осреднения по быстрой переменной  $\varphi_1$  превратятся в уравнения (1.3.1), описывающие эволюцию движения.

Добавочные члены в уравнениях (2.2.6), содержащие компоненты матрицы  $M \neq 0$ , описывают влияние геометрических параметров полости на эволюцию движения системы. В результате после усреднения соответствующих выражений по углу  $\varphi_1$  добавочные члены в первом уравнении системы (1.3.1) в линейном приближении по  $\varepsilon, \varepsilon_1$  представляются в форме

$$-\varepsilon k \frac{7J_1(I_2^2 - J_1^2)}{20A^3} \left[ \lambda \left( \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{1n}^2 + \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{2n}^2 \right) + \varepsilon_1 (2\lambda + 1) \left( \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{1n}^2 - \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{2n}^2 \right) \right]$$

Здесь  $\lambda = \frac{A-C}{C}$ ,  $\gamma_{ij}$  — компоненты ортогональной матрицы  $\Gamma$ , а также здесь учтено, что  $\Gamma^{-1} = \Gamma^T$  в силу свойств ортогональных матриц. Усреднение по переменной  $\varphi_1$  производится на том же основании, что и в главе 1 в задаче со сферической полостью.

Уравнение на переменную  $J_1$  с учетом добавочных членов имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 = & -\varepsilon k \frac{J_1(I_2^2 - J_1^2)}{A^3} \left\{ \lambda + \right. \\ & \left. + \frac{7}{20} \left[ \lambda \left( \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{1n}^2 + \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{2n}^2 \right) + \varepsilon_1 (2\lambda + 1) \left( \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{1n}^2 - \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{2n}^2 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

где  $J_1$  — усредненное значение переменной  $I_1$ .

Для эллипсоидальной полости по-прежнему есть два стационарных реше-

ния:  $J_1 = 0$  и  $J_1 = I_2$ .

Если тело осесимметрично, т. е.  $\varepsilon_1 = 0$ , то данное уравнение выглядит следующим образом:

$$\dot{J}_1 = -\varepsilon k \frac{J_1(I_2^2 - J_1^2)}{A^3} \lambda \left\{ 1 + \frac{7}{20} \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{1n}^2 + \frac{7}{20} \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{2n}^2 \right\}$$

Выражение в фигурных скобках можно снизу оценить  $1 + \frac{7}{10} \tilde{\mu}$ , где  $\tilde{\mu} = \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ , и в силу малости  $\mu_i$  считать строго положительным. Следовательно, эволюция движения зависит только от знака  $\lambda$ : при  $\lambda > 0$  нестационарные решения стремятся к аттрактору  $J_1 = 0$ , а стационарное движение  $J_1 = I_2$  неустойчиво, и при  $\lambda < 0$ , наоборот, нестационарные решения стремятся к аттрактору  $J_1 = I_2$ , а стационарное движение  $J_1 = 0$  неустойчиво.

Если тело близко к сферическому, т.е.  $\lambda = 0$ , то

$$\dot{J}_1 = -\varepsilon k \frac{J_1(I_2^2 - J_1^2)}{A^3} * \frac{7}{20} \varepsilon_1 \left[ \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{1n}^2 - \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{2n}^2 \right]$$

Знак правой части и, соответственно, тип нестационарных движений зависят от геометрических особенностей полости.

Таким образом, знак правой части уравнения для  $J_1$  может быть как положительным, так и отрицательным, а значит, при некотором подборе параметров тела с полостью будет происходить стационарное движение, независимо от вязкости жидкости.

Перепишем уравнение на  $J_1$  в следующем виде:

$$\dot{J}_1 = -\varepsilon k \frac{J_1(I_2^2 - J_1^2)}{A^3} \left\{ \lambda \left( 1 + \frac{7}{20} \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{1n}^2 + \frac{7}{20} \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{2n}^2 + \frac{7}{10} \varepsilon_1 \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{1n}^2 - \frac{7}{10} \varepsilon_1 \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{2n}^2 \right) + \frac{7}{20} \varepsilon_1 \left( \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{1n}^2 - \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{2n}^2 \right) \right\}$$

Так как в первых круглых скобках стоит величина положительная, а во вторых круглых скобках — величина, близкая к нулю, то для  $\lambda$  сильно отличного от нуля, знак всей фигурной скобки совпадает со знаком  $\lambda$  и можно говорить о тех же типах нестационарных движений, как и в задаче со сферической полостью.

Второе уравнение системы (2.2.6) после процедуры усреднения по быстрой переменной  $\varphi_1$  примет вид

$$\dot{\psi}_1 = \frac{J_1}{A} \lambda - \varepsilon k \frac{7\varepsilon_1}{10A^3} J_1^2 \sum_{n=1}^3 \mu_n \gamma_{1n} \gamma_{2n}. \quad (2.2.7)$$

Здесь  $\psi_1$  — усредненное значение переменной  $\varphi_1$ . Поправка в частоту изменения угловой переменной  $\psi_1$  зависит от геометрических параметров эллипсоидальной полости (коэффициенты  $\mu_n$ ) и от ориентации ее главных осей относительно главных осей тензора инерции системы (коэффициенты  $\gamma_{ij}$ ). Знак поправки совпадает со знаком суммы в уравнении (2.2.7) и может быть как положительный, так и отрицательный.

Для второй угловой переменной после усреднения все слагаемые сокращаются и поправка в эту переменную равна нулю. Усредненное значение переменной  $\varphi_2$  обозначим как  $\psi_2$ , тогда

$$\dot{\psi}_2 = \frac{I_2}{A}$$

Тем самым на эту переменную не влияют геометрические особенности полости с жидкостью.

Таким образом, общие результаты этой главы следующие. Если твердое тело сильно сплющено вдоль своей третьей оси, то решения  $J_1$  системы уравнений движения стремятся к  $I_2$ . Это означает, что главная ось инерции  $Ox_3$  и ось, проходящая через начало координат  $O$  и коллинеарная постоянно в инерциальной системе координат вектору момента количества движения  $\mathbf{G}$  постепенно сближаются, стремясь совпасть.

Если же твердое тело сильно вытянуто вдоль своей третьей оси, то решения для  $J_1$  стремятся к 0, т.е. вышеуказанные оси стремятся максимально разойтись и стать перпендикулярными друг к другу. Данный результат аналогичен решению задачи для сферической полости.

Однако если твердое тело близко к сферическому, то расположение полости и ее параметры влияют на решение задачи и могут приводить как к одному типу решений, так и к другому.

## Глава 3

# Вращение упругого шара вокруг центра масс в гравитационном поле двух притягивающих центров

В этой главе речь пойдет о модели Земли в гравитационном поле двух материальных точек Луны и Солнца. Земля представляется однородным упругим шаром и рассматривается ее движение вокруг центра масс. Деформации шара возникают за счет поля гравитационных сил и центробежных сил инерции. Гравитационный потенциал вычисляется в спутниковом приближении [11].

В общей постановке задача неинтегрируема, поэтому используется асимптотический метод разделения движения. Модуль упругости материала однородного шара считается очень большим, так что в задаче имеется малый параметр  $\varepsilon$ , обратно пропорциональный коэффициенту упругости  $E$ . Поле векторов упругого смещения ищется как решение задачи квазистатики в теории упругости [16],[26]. В результате деформации шара также оказываются малыми, т.к. поле упругих смещений линейным образом выражается через малый параметр.

Тензор инерции деформируемого шара является функцией времени, т.к. зависит от поля упругих смещений. В данной работе были получены явные выражения для всех компонент тензора инерции.

Для анализа изменения угловой скорости планеты задача была разделена на две части. Сначала было рассмотрено возмущение угловой скорости упругого шара под действием центробежных сил инерции. Влияние гравитационных полей Луны и Солнца не учитывалось. В силу того, что тензор инерции для поля упругих смещений, связанного только с центробежными силами инерции, является симметричным, то решением уравнений движения является регуляр-

ная прецессия. Данный факт согласуется с получаемыми значениями движения полюса Земли, период этой прецессии является периодом Чандлера, который равен 428 суток.

В рамках этой модели были также получены коэффициенты упругости, которые соответствовали бы Земле, если бы она была однородным упругим телом.

Во второй части задачи решались уравнения движения с учетом влияния гравитационных полей Луны и Солнца. С помощью линейного приближения по  $\varepsilon$  были получены уравнения для координат возмущенного значения угловой скорости. С помощью математических преобразований получают уравнения на возмущение угловой скорости, связанное только с гравитационными полями. В работе найдено решение этих уравнений в первом приближении по малому параметру  $\varepsilon$ .

В результате были получены общие выражения для возмущенного значения угловой скорости за счет центробежных сил инерции и гравитационных полей притяжения двух точек в линейном приближении. Формулы для угловой скорости описывают периодическое движение с биениями. После подстановки параметров Земли проанализированы формулы проекций угловой скорости на оси, жестко связанные с планетой. Они представляют собой сумму колебаний с чандлеровским периодом и колебаний с периодом одни сутки, амплитуды которых меняются с периодом полмесяца и полгода.

Найденные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, получаемыми для нашей планеты [104].

В представленной модели не учтены возмущения, связанные с сезонными климатическими факторами и с динамикой атмосферы.

### 3.1 Постановка задачи и уравнения движения.

Рассмотрим модельную задачу, в которой Земля представляется упругим однородным шаром, движущимся в гравитационном поле притяжения двух материальных точек – Луны и Солнца. В случае, когда деформации шара отсутствуют, мы имеем задачу о движении трех материальных точек, которая в общем случае не интегрируема, поэтому мы будем описывать движение трех тел приближенным образом. Поскольку расстояние между Землей и Луной много меньше расстояния между центром масс системы Земля-Луна и Солнцем, масса Солнца много больше суммарной массы системы Земля-Луна, а масса Земли много больше массы Луны, то приближенно будем считать выполненными сле-



дующие условия: Солнце неподвижно, а центр Земли движется вокруг него по круговой орбите; Луна движется вокруг центра Земли также по круговой орбите. Вращение Земли, представленной твердым однородным шаром, происходит с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг оси, имеющей постоянное направление в инерциальной системе координат. Это движение вокруг центра масс Земли с периодом одни сутки примем в качестве невозмущенного.

Будем рассматривать Землю как упругий шар, деформации которого определяются центробежными силами инерции и гравитационными силами притяжения двух материальных точек – Луны и Солнца. Принятая модель Земли существенно отличается от других моделей, в которых Земля представлена набором сферических слоев с различными механическими свойствами (вязкоупругая кора, жидкий сферический слой, твердое ядро). В земной коре наблюдаются продольные и поперечные волны, что характерно для упругих сред. Кроме того, в рамках модели упругой Земли представляется возможным описание ее формы и приливных деформаций. Задача настоящего исследования – определить закон вращения деформируемого шара (Земли) вокруг его центра масс.

Пусть шар в недеформированном состоянии занимает объем  $V$  трехмерного евклидова пространства  $E^3$ . Свяжем с центром масс шара систему координат Кенига  $C\xi_1\xi_2\xi_3$ , оси которой направлены на неподвижные звезды. В этой системе координат Луна и Солнце движутся вокруг Земли, а теоремы механики имеют вид, как в инерциальной системе координат. Пусть круговые орбиты двух материальных точек Луны и Солнца лежат в плоскости  $C\xi_1\xi_2$ , а их радиус-векторы представляются в виде

$$\mathbf{R}_k = R_k(\boldsymbol{\xi}_1 \cos \psi_k + \boldsymbol{\xi}_2 \sin \psi_k), \quad \psi_k = \Omega_k t, \quad k = 1, 2$$

Здесь  $\boldsymbol{\xi}_k$  – орт оси  $C\xi_k$ ,  $R_1, R_2$  – радиусы круговых орбит Луны и Солнца, а  $\Omega_1, \Omega_2$  – их угловые скорости орбитального движения соответственно (рис. 3.1). Предполагается, что в начальный момент времени Луна и Солнце находились на оси  $C\xi_1$ . Шар вращается вокруг неподвижной оси  $Cx_3$ , лежащей в плоскости  $C\xi_1\xi_3$  и составляющей с осью  $C\xi_3$  постоянный угол  $\theta$ . Угол  $\theta$  есть угол наклона оси вращения Земли от перпендикуляра к плоскости эклиптики.

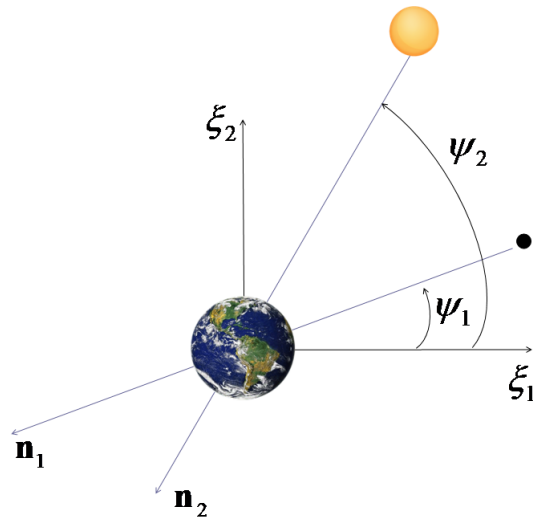


Рис. 3.1: Движение двух материальных точек Луны и Солнца вокруг центра Земли по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости

Свяжем с Землей, как твердым шаром, систему координат  $Cx_1x_2x_3$ , оси которой получаются в результате двух последовательных поворотов системы координат  $C\xi_1\xi_2\xi_3$  вокруг оси  $C\xi_2$  на постоянный угол  $\theta$ , а затем – на угол  $\varphi = \omega_0 t$  вокруг оси  $Cx_3$  (рис. 3.2).

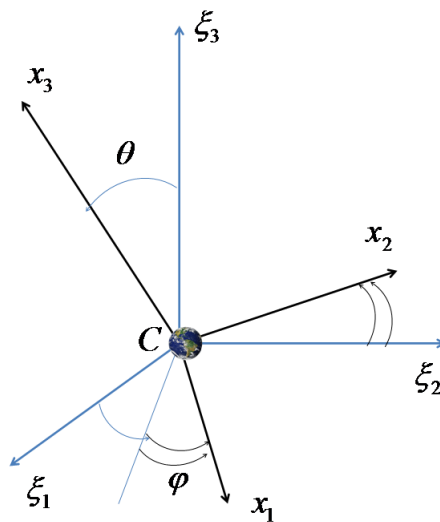


Рис. 3.2: Переход от системы Кенига  $C\xi_1\xi_2\xi_3$  к системе координат  $Cx_1x_2x_3$

Матрица перехода к этой системе координат равна произведению двух матриц поворота:

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Единичные векторы, противоположные направлениям на Луну и Солнце (рис. 3.1) в системе координат  $Cx_1x_2x_3$ , определяются формулами

$$\mathbf{n}_k = -\tilde{\Gamma}^{-1} \frac{\mathbf{R}_k}{R_k} = \gamma_{1k} \mathbf{e}_1 + \gamma_{2k} \mathbf{e}_2 + \gamma_{3k} \mathbf{e}_3,$$

$$\gamma_{1k} = -\cos \theta \cos \psi_k \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi_k,$$

$$\gamma_{2k} = -\sin \psi_k \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi_k,$$

$$\gamma_{3k} = -\sin \theta \cos \psi_k, \quad k = 1, 2$$

где  $\mathbf{e}_k$  — орт оси  $Cx_k$ . Начальный момент времени  $t = 0$  ( $\Rightarrow \varphi = 0, \psi_k = 0$ ) соответствует моменту зимнего солнцестояния, а Луна находится на отрезке, соединяющем Солнце с Землей.

Положение точки планеты в возмущенном случае задается вектором  $\Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u})$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки шара в недеформированном состоянии, а  $\mathbf{u}$  — вектор упругого смещения. Пусть поле перемещений точек шара  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  относительно системы координат  $Cx_1x_2x_3$  подчиняется условиям

$$\int_V \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) dx = 0, \quad \int_V \text{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) dx = 0, \quad \mathbf{r} \in V = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r}| \leq r_0\}$$

Здесь  $r_0$  — радиус шара в недеформированном состоянии. Эти условия однозначно задают систему координат, интегральным образом связанную с деформируемым шаром [15], [16]. Будем считать, что система координат, связанная с шаром, совпадает с уже построенной нами системой координат  $Cx_1x_2x_3$ , т.е.  $\Gamma = \tilde{\Gamma}$ . В дальнейшем это допущение будет обосновано.

Потенциальная энергия гравитационного поля задается функционалом

$$\Pi = - \sum_{k=1}^2 G m_k \int_V \frac{\rho dx}{|\mathbf{R}_k + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u})|}, \quad (3.1.1)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $m_1, m_2$  — масса Луны и Солнца соответственно.

Разложив потенциал в ряд по величине  $\frac{l}{R_k} \ll 1$ ,  $l = \max_V |\mathbf{r} + \mathbf{u}|$ , выпишем спутниковое приближение гравитационного потенциала:

$$\begin{aligned} \Pi &\approx - \sum_{k=1}^2 \frac{Gm_k}{R_k} \int_V \left( 1 + \frac{(\mathbf{n}_k, \mathbf{r} + \mathbf{u})}{R_k} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{r} + \mathbf{u})^2}{R_k^2} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{n}_k, \mathbf{r} + \mathbf{u})^2}{R_k^2} \right) \rho dx = \\ &= - \sum_{k=1}^2 \frac{4Gm_k \pi \rho r_0^2}{3R_k} - \sum_{k=1}^2 \frac{Gm_k}{2R_k^3} \int_V (3(\mathbf{n}_k, \mathbf{r} + \mathbf{u})^2 - (\mathbf{r} + \mathbf{u})^2) \rho dx \end{aligned}$$

Первое слагаемое — это константа, поэтому его можно опустить.

Будем предполагать, что  $\left| \frac{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)}{\partial x_j} \right| \ll 1$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ), и деформированное состояние планеты описывается функционалом  $\mathcal{E}[\mathbf{u}]$  потенциальной энергии деформаций в рамках классической теории упругости малых деформаций [15],[60]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\mathbf{u}] &= \int_V \alpha_1 (I_E^2 - \alpha_2 II_E) dx, \\ \alpha_1 &= \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha_2 = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}, \\ I_E &= \sum_{i=1}^3 e_{ii}, \quad II_E = \sum_{i<j} (e_{ii}e_{jj} - (e_{ij})^2), \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{e}_j)}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

где  $E$  — модуль упругости Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $I_E, II_E$  — инварианты тензора инерции малых деформаций. Функционал внутренних диссипативных сил согласно модели Кельвина-Фойгта  $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi \mathcal{E}[\dot{\mathbf{u}}]$ , где  $\chi > 0$  — коэффициент внутреннего вязкого трения.

Кинетическая энергия системы определяется функционалом

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{d}{dt} (\Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u})) \right)^2 \rho dx,$$

где  $\rho$  — плотность материала Земли.

$$T = \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 \rho dx + \int_V ([\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \dot{\mathbf{u}})], \dot{\mathbf{u}}) \rho dx + \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx,$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость шара,  $\boldsymbol{\omega} \times (\cdot) = \Gamma^{-1} \dot{\Gamma}(\cdot)$  [21].

Функционал Рауса определяется следующим соотношением

$$\mathcal{R} = T_2 - T_0 + \Pi + \mathcal{E}[\mathbf{u}],$$

где  $T_2$  — квадратичная часть кинетической энергии,  $T_0$  — свободные члены:

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 \rho dx,$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx.$$

Согласно вариационному принципу Д'Аламбера-Лагранжа

$$\int_V \left\{ \left( -\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} \mathcal{R} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{R} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} D + \boldsymbol{\lambda}_1, \delta \mathbf{u} \right) + (\boldsymbol{\lambda}_2, \text{rot } \delta \mathbf{u}) \right\} dx = 0 \quad (3.1.2)$$

Это равенство должно выполняться для любого вектора  $\delta \mathbf{u}$ . Здесь  $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$  — неопределенные множители Лагранжа.

Рассматриваемая задача содержит большой параметр — характеристику жесткости упругого шара. Поэтому безразмерный параметр  $\varepsilon = \rho \omega_0^2 r_0^2 E^{-1}$  считается малым. Соответствующим выбором масштабов единиц измерения можно добиться равенства  $\varepsilon = E^{-1}$ .

Если  $\varepsilon = 0$ , то поле векторов упругого смещения  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  также полагается равным нулю. В этом случае кинетическая энергия системы примет вид  $T = \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]^2 \rho dx$  и задача сводится к задаче о движении твердого шара в притяжении двух материальных точек, которая в общем случае неинтегрируема.

При  $\varepsilon \neq 0$ , согласно методу разделения движения [15], решение  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  ищется в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{u}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)} + \dots$$

При этом множители Лагранжа  $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$  также необходимо искать в виде разложений по степеням  $\varepsilon$ :

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_1^{(0)} + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_1^{(1)} + \dots$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}_2^{(0)} + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_2^{(1)} + \dots$$

Из (3.1.2) получим уравнение относительно функции  $\mathbf{u}^{(1)}$  первого приближения по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\int_V \left( \omega_0^2 \rho (\mathbf{r} - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3) + \sum_{k=1}^2 \frac{G m_k \rho}{R_k^2} (3(\mathbf{n}_k, \mathbf{r}) \mathbf{n}_k - \mathbf{r}) + \boldsymbol{\lambda}_1^{(0)}, \delta \mathbf{u} \right) dx + \varepsilon (\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{E}[\mathbf{u}^{(1)} + \chi \dot{\mathbf{u}}^{(1)}], \delta \mathbf{u}) + \int_{\partial V} [\boldsymbol{\lambda}_2^{(0)} \times \mathbf{n}] \delta \mathbf{u} d\sigma = 0.$$

При преобразовании здесь была использована формула Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \boldsymbol{\lambda}_2^{(0)} \operatorname{rot} \delta \mathbf{u} dx = \int_{\partial V} [\boldsymbol{\lambda}_2^{(0)} \times \delta \mathbf{u}] \mathbf{n} d\sigma,$$

где  $\partial V$  — поверхность шара,  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  — нормаль к поверхности шара. Также производные брались в силу невозмущенного движения, когда шар вращается вокруг оси  $Cx_3$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ .

Положим в формуле выше  $\delta \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ , где  $\delta \boldsymbol{\alpha}$  — произвольный вектор из  $E^3$ . Так как работа упругих и диссипативных сил на бесконечно малых поворотах равна нулю, то получаем

$$\int_{\partial V} \left( [\boldsymbol{\lambda}_2^{(0)} \times \frac{\mathbf{r}}{r}], \delta \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \right) d\sigma = 0$$

С учетом тождества

$$\int_{\partial V} \left( \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{b} \times \mathbf{r} \right) d\sigma = \int_{\partial V} \left( r(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \frac{1}{r} (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\mathbf{b}, \mathbf{r}) \right) d\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^3 (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^3,$$

где  $\partial V$  — поверхность шара радиуса  $r_0$ , получаем

$$\frac{8\pi}{3} r_0^3 (\boldsymbol{\lambda}_2^{(0)}, \delta \boldsymbol{\alpha}) = 0,$$

откуда в силу произвольности  $\delta \boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_2^{(0)} = 0$ .

Далее положим  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — произвольный вектор из  $E^3$ . В силу того, что на поступательном перемещении вдоль фиксированного направления работа упругих и диссипативных сил также равна нулю, получим равенство  $\boldsymbol{\lambda}_1^{(0)} = 0$ .

Таким образом уравнение для функции  $\mathbf{u}^{(1)}$  первого приближения примет следующий вид:

$$\varepsilon (\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{E}[\mathbf{u}^{(1)} + \chi \dot{\mathbf{u}}^{(1)}]) = \rho \left( \omega_0^2 (\mathbf{r} - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3) + \sum_{k=1}^2 \frac{Gm_k}{R_k^2} (3(\mathbf{n}_k, \mathbf{r}) \mathbf{n}_k - \mathbf{r}) \right) \quad (3.1.3)$$

Здесь

$$\varepsilon (\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{E}[\mathbf{u}^{(1)} + \chi \dot{\mathbf{u}}^{(1)}]) = -\frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{1-2\nu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \right).$$

Граничные условия для функции  $\mathbf{u}^{(1)}$  состоит в равенстве напряжений на поверхности шара:  $\sigma_{\mathbf{n}} = 0$ . Второе слагаемое в правой части уравнения (3.1.3) можно преобразовать, учитывая равенство силы гравитационного притяжения и центростремительной силы в задаче Кеплера-Ньютона о движении материальной точки по круговой орбите:  $\frac{\rho V R_k^2 \Omega_k^2}{R_k} = \frac{Gm_k \rho V}{R_k^2}$ . Таким образом, можно преобразовать

$$\rho \left( \omega_0^2 (\mathbf{r} - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3) + \sum_{k=1}^2 \frac{Gm_k}{R_k^2} (3(\mathbf{n}_k, \mathbf{r}) \mathbf{n}_k - \mathbf{r}) \right) = \rho \sum_{k=1}^4 \Omega_k^2 B_k \mathbf{r},$$

где операторы  $B_k, k = 1, 2, 3$ , в системе координат  $Cx_1x_2x_3$  определяются равенствами

$$B_k \mathbf{r} = 3(\mathbf{n}_k, \mathbf{r}) \mathbf{n}_k - \mathbf{r}, k = 1, 2;$$

$$B_3 \mathbf{r} = -\frac{1}{3} [3(\mathbf{e}_3, \mathbf{r}) \mathbf{e}_3 - \mathbf{r}];$$

$$B_4 = \frac{2}{3} \operatorname{diag}\{1, 1, 1\}.$$

В развернутом виде формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_k \mathbf{r} &= (3\gamma_{1k}^2 x_1 + 3\gamma_{1k}\gamma_{2k} x_2 + 3\gamma_{1k}\gamma_{3k} x_3 - x_1) \mathbf{e}_1 + \\ &+ (3\gamma_{1k}\gamma_{2k} x_1 + 3\gamma_{2k}^2 x_2 + 3\gamma_{2k}\gamma_{3k} x_3 - x_2) \mathbf{e}_2 + \\ &+ (3\gamma_{1k}\gamma_{3k} x_1 + 3\gamma_{2k}\gamma_{3k} x_2 + 3\gamma_{3k}^2 x_3 - x_3) \mathbf{e}_3, \quad k = 1, 2, \\ B_3 \mathbf{r} &= \frac{1}{3} x_1 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{3} x_2 \mathbf{e}_2 - \frac{2}{3} x_3 \mathbf{e}_3, \quad B_4 \mathbf{r} = \frac{2}{3} x_1 \mathbf{e}_1 + \frac{2}{3} x_2 \mathbf{e}_2 + \frac{2}{3} x_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Угловые скорости  $\Omega_1, \Omega_2$  соответствуют угловым скоростям при движении

по круговым орбитам Луны относительно Земли и Земли относительно Солнца. Угловая скорость  $\Omega_3 = \Omega_4 = \omega_0$  соответствует невозмущенному значению угловой скорости вращения Земли вокруг оси  $Cx_3$ . Удобно положить  $\Omega_k = \varepsilon_k \omega_0$ ,  $k = 1, 2$ . Заметим, что  $\psi_k = \varepsilon_k \varphi$ .

В силу линейности правой части уравнения (3.1.3) на  $\mathbf{u}^{(1)}$ , решения для  $\chi = 0$  можно представить в виде суммы четырех функций, каждая из которых является решением уравнения (3.1.3) с оператором  $B_k$  в правой части:

$$-\frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{1-2\nu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_k^{(0)} + \Delta \mathbf{u}_k^{(0)} \right) = \rho \Omega_k^2 B_k \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\sigma}_n = 0.$$

Представим искомое решение  $\mathbf{u}^{(1)}$  в виде ряда по степеням  $\chi$ :  $\mathbf{u}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \chi^n$ . Из тождества  $\mathbf{u}^{(1)} + \chi \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{u}_1^{(0)} + \mathbf{u}_2^{(0)} + \mathbf{u}_3^{(0)} + \mathbf{u}_4^{(0)}$  получим

$$\mathbf{u}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\chi)^n \frac{\partial^n (\mathbf{u}_1^{(0)} + \mathbf{u}_2^{(0)} + \mathbf{u}_3^{(0)} + \mathbf{u}_4^{(0)})}{\partial t^n}$$

Предполагая, что диссипативные силы малы, ограничимся только первым слагаемым ряда [60],[62]. Таким образом, в нулевом приближении

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \sum_{k=1}^4 \mathbf{u}_k(\mathbf{r}, t) \quad (3.1.4)$$

где функции  $\mathbf{u}_k$  имеют вид [16], [26]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k(\mathbf{r}, t) &= \rho \Omega_k^2 [a_1 (B_k \mathbf{r}, \mathbf{r}) \mathbf{r} + (a_2 \mathbf{r}^2 + a_3 r_0^2) B_k \mathbf{r}], \quad k = 1, 2, 3, \\ \mathbf{u}_4(\mathbf{r}, t) &= -\rho \Omega_4^2 (d_1 \mathbf{r}^2 + d_2 r_0^2) B_4 \mathbf{r}, \\ a_1 &= \frac{1+\nu}{5\nu+7}, \quad a_2 = -\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{5\nu+7}, \quad a_3 = \frac{(1+\nu)(2\nu+3)}{5\nu+7}, \\ d_1 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{10(1-\nu)}, \quad d_2 = -\frac{(3-\nu)(1-2\nu)}{10(1-\nu)}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Заметим, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_V B_m \mathbf{r} \, dx &= \int_V \mathbf{r}^2 B_m \mathbf{r} \, dx = 0, \quad m = \overline{1, 4}, \quad \int_V (B_k \mathbf{r}, \mathbf{r}) \mathbf{r} \, dx = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \\ \int_V \operatorname{rot} B_m \mathbf{r} \, dx &= \int_V \operatorname{rot} (\mathbf{r}^2 B_m \mathbf{r}) \, dx = 0, \quad m = \overline{1, 4}, \quad \int_V \operatorname{rot} ((B_k \mathbf{r}, \mathbf{r}) \mathbf{r}) \, dx = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned}$$



где интеграл берется по шару.

Таким образом, выполняются условия  $\int_V \mathbf{u} dx = \int_V \text{rot} \mathbf{u} dx = 0$ , которые мы предполагали в начале, поэтому мы можем использовать выбранную систему координат  $Cx_1x_2x_3$ .

В формуле (3.1.4)  $\varepsilon$  выступает в роли малого параметра. Последнее означает, что поле перемещений точек упругого шара под действием центробежных сил инерции и поля градиента гравитационных сил малы по сравнению с модулем радиус-вектора точки шара  $\mathbf{r}$ . Слагаемые в формуле (3.1.5) имеют следующий смысл. Поля упругих смещений  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t)$  порождаются гравитационными полями Луны и Солнца соответственно и называются приливными деформациями. Поле перемещений  $\mathbf{u}_3(\mathbf{r})$  стационарно, возникает в результате действия поля центробежных сил инерции при вращении шара вокруг оси  $Cx_3$  и определяет сжатие шара по оси  $Cx_3$ , а стационарному полю  $\mathbf{u}_4$  соответствует сферически симметричная деформация шара.

Согласно асимптотическому методу разделения движения [6], далее необходимо подставить функции  $\mathbf{u}_k$  в уравнения движения.

Сначала посчитаем компоненты тензора инерции деформированного шара. Тензор инерции относительно осей  $Cx_1x_2x_3$  удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} (J[\mathbf{u}]\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \int_V [\mathbf{a} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})][\mathbf{b} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] \rho dx \cong \\ &\cong \int_V [\mathbf{a} \times \mathbf{r}][\mathbf{b} \times \mathbf{r}] \rho dx + \int_V \{[\mathbf{a} \times \mathbf{r}][\mathbf{b} \times \mathbf{u}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{u}][\mathbf{b} \times \mathbf{r}]\} \rho dx, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

В правой части соотношения (3.1.6) отброшены члены порядка малости  $\varepsilon^2$ . В результате тензор инерции деформируемого шара относительно его центра масс  $C$  представим в виде

$$J[\mathbf{u}] \cong J_0 \text{diag}\{1, 1, 1\} + J_1[\mathbf{u}], \quad J_1[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{12} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & J_{33} \end{pmatrix} \quad (3.1.7)$$

Здесь  $J_0 = \frac{8}{15} \pi r_0^5 \rho$  — момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр. Компоненты тензора инерции  $J_{ij}$  являются функ-

циями времени, поскольку таковой является функция  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . В общем виде

$$J_{ii} = 2 \int_V [\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_i \times \mathbf{u}] \rho dx,$$

$$J_{ij} = - \int_V \{[\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_j \times \mathbf{u}] + [\mathbf{e}_i \times \mathbf{u}][\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}]\} \rho dx, \quad i \neq j.$$

При вычислении таких интегралов используем сферическую замену переменных:

$$\int_V x_1^4 dx = \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{r}^6 \cos^4 \tilde{\varphi} \sin^5 \tilde{\theta} d\tilde{r} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} = \frac{4\pi r_0^7}{35},$$

$$\int_V x_2^4 dx = \int_V x_3^4 dx = \frac{4\pi r_0^7}{35},$$

$$\int_V x_1^2 dx = \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{r}^4 \cos^2 \tilde{\varphi} \sin^3 \tilde{\theta} d\tilde{r} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} = \frac{4\pi r_0^5}{15},$$

$$\int_V x_2^2 dx = \int_V x_3^2 dx = \frac{4\pi r_0^5}{15},$$

$$\int_V x_1^2 x_2^2 dx = \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{r}^6 \cos^2 \tilde{\varphi} \sin^2 \tilde{\varphi} \sin^5 \tilde{\theta} d\tilde{r} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} = \frac{4\pi r_0^7}{105},$$

$$\int_V x_1^2 x_3^2 dx = \int_V x_2^2 x_3^2 dx = \frac{4\pi r_0^7}{105},$$

$$\int_V x_1^3 x_2 dx = \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{r}^6 \cos^3 \tilde{\varphi} \sin \tilde{\varphi} \sin^5 \tilde{\theta} d\tilde{r} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} = 0,$$

$$\int_V x_i^3 x_j dx = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, 3},$$

$$\int_V x_1 x_2 dx = \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{r}^4 \cos \tilde{\varphi} \sin \tilde{\varphi} \sin^3 \tilde{\theta} d\tilde{r} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} = 0,$$

$$\int_V x_1 x_3 dx = \int_V x_2 x_3 dx = 0.$$

Итак, компоненты тензора инерции  $J_1[\mathbf{u}]$ :

$$J_{11}[\varepsilon \mathbf{u}_k] = 2\varepsilon \int_V [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_k] \rho dx = \frac{8}{105} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \varepsilon_k^2 \omega_0^2 (1 - 3\gamma_{1k}^2) (2a_1 + 5a_2 + 7a_3),$$

$$J_{22}[\varepsilon \mathbf{u}_k] = 2\varepsilon \int_V [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_k] \rho dx = \frac{8}{105} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \varepsilon_k^2 \omega_0^2 (1 - 3\gamma_{2k}^2) (2a_1 + 5a_2 + 7a_3),$$

$$J_{33}[\varepsilon \mathbf{u}_k] = 2\varepsilon \int_V [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_k] \rho dx = \frac{8}{105} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \varepsilon_k^2 \omega_0^2 (1 - 3\gamma_{3k}^2) (2a_1 + 5a_2 + 7a_3),$$

$$\begin{aligned} J_{12}[\varepsilon \mathbf{u}_k] &= \varepsilon \int_V \{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_k] + [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_k]\} \rho dx = \\ &= \frac{8}{35} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \varepsilon_k^2 \omega_0^2 (2a_1 + 5a_2 + 7a_3) \gamma_{1k} \gamma_{2k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{13}[\varepsilon \mathbf{u}_k] &= \varepsilon \int_V \{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_k] + [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_k]\} \rho dx = \\ &= \frac{8}{35} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \varepsilon_k^2 \omega_0^2 (2a_1 + 5a_2 + 7a_3) \gamma_{1k} \gamma_{3k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{23}[\varepsilon \mathbf{u}_k] &= \varepsilon \int_V \{[\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_k] + [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_k]\} \rho dx = \\ &= \frac{8}{35} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \varepsilon_k^2 \omega_0^2 (2a_1 + 5a_2 + 7a_3) \gamma_{2k} \gamma_{3k}, \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

$$J_{11}[\varepsilon \mathbf{u}_3] = 2\varepsilon \int_V [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_3] \rho dx = -\frac{8}{315} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \omega_0^2 (2a_1 + 5a_2 + 7a_3),$$

$$J_{22}[\varepsilon \mathbf{u}_3] = 2\varepsilon \int_V [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_3] \rho dx = -\frac{8}{315} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \omega_0^2 (2a_1 + 5a_2 + 7a_3),$$

$$J_{33}[\varepsilon \mathbf{u}_3] = 2\varepsilon \int_V [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_3] \rho dx = \frac{16}{315} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \omega_0^2 (2a_1 + 5a_2 + 7a_3),$$

$$J_{12}[\varepsilon \mathbf{u}_3] = \varepsilon \int_V \{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_3] + [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_3]\} \rho dx = 0,$$

$$J_{13}[\varepsilon \mathbf{u}_3] = \varepsilon \int_V \{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_3] + [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_3]\} \rho dx = 0,$$

$$\begin{aligned}
J_{23}[\varepsilon \mathbf{u}_3] &= \varepsilon \int_V \{[\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_3] + [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_3]\} \rho dx = 0, \\
J_{11}[\varepsilon \mathbf{u}_4] &= 2\varepsilon \int_V [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_4] \rho dx = -\frac{32}{315} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \omega_0^2 (5d_1 + 7d_2), \\
J_{22}[\varepsilon \mathbf{u}_4] &= 2\varepsilon \int_V [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_4] \rho dx = -\frac{32}{315} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \omega_0^2 (5d_1 + 7d_2), \\
J_{33}[\varepsilon \mathbf{u}_4] &= 2\varepsilon \int_V [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_4] \rho dx = -\frac{32}{315} \pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \omega_0^2 (5d_1 + 7d_2), \\
J_{12}[\varepsilon \mathbf{u}_4] &= \varepsilon \int_V \{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_4] + [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_4]\} \rho dx = 0, \\
J_{13}[\varepsilon \mathbf{u}_4] &= \varepsilon \int_V \{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_4] + [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}_4]\} \rho dx = 0, \\
J_{23}[\varepsilon \mathbf{u}_4] &= \varepsilon \int_V \{[\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_4] + [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}][\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_4]\} \rho dx = 0.
\end{aligned}$$

### 3.2 Решение задачи для деформируемого шара без учета влияния Луны и Солнца.

Пусть деформируемый шар движется по инерции, т.е. малые параметры  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , что означает отсутствие влияния гравитационных полей Луны и Солнца на движение шара. Форма шара изменяется за счет поля центробежных сил. В результате возникают деформации шара  $\mathbf{u}_3(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{u}_4(\mathbf{r})$ . Таким образом,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{u}_3(\mathbf{r}) + \varepsilon \mathbf{u}_4(\mathbf{r}).$$

Пусть в возмущенном движении угловая скорость вращения системы координат, связанной с деформируемым шаром, равна  $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{e}_3 + \Delta \boldsymbol{\omega}_1$ , где  $|\Delta \boldsymbol{\omega}_1| \ll \omega_0$ . Обозначим координаты вектора  $\Delta \boldsymbol{\omega}_1$  в системе координат  $Cx_1x_2x_3$  как  $(p_1, q_1, r_1)$ . Этот вектор отвечает за возмущение угловой скорости из-за центробежных сил инерции. Уравнение, описывающее изменение момента количества движения деформированного шара относительно центра масс, представляется в виде

$$\{J_0 + J_1[\mathbf{u}]\} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J_1[\mathbf{u}] \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{e}_3 + \Delta \boldsymbol{\omega}_1. \quad (3.2.1)$$

В силу найденных выше формул для тензора инерции  $J_{ij}[\mathbf{u}_3] = J_{kl}[\mathbf{u}_4] = 0$

для любых  $i \neq j, k \neq l$ , поэтому добавочный член в тензоре инерции  $J_1[\mathbf{u}]$  имеет в системе координат  $Cx_1x_2x_3$  диагональный вид. Из тех же формул видно, что тензор инерции деформированного шара симметричен относительно оси  $Cx_3$  и не зависит от времени в системе координат  $Cx_1x_2x_3$ . Обозначим главные моменты тензора инерции как  $A_1$  и  $C_1$ :  $J_1[\mathbf{u}] = \text{diag}\{A_1, A_1, C_1\}$ .

Разность главных моментов инерции вычисляется по формуле

$$\Delta J = C_1 - A_1 = J_{33}[\mathbf{u}] - J_{11}[\mathbf{u}] = (J_{33}[\varepsilon\mathbf{u}_3] - J_{11}[\varepsilon\mathbf{u}_3]) + (J_{33}[\varepsilon\mathbf{u}_4] - J_{11}[\varepsilon\mathbf{u}_4]). \quad (3.2.2)$$

Т.к. поле перемещений  $\mathbf{u}_4$  сферически симметрично и его главные моменты инерции равны, то второе слагаемое в формуле (3.2.2) равно нулю:

$$J_{33}[\varepsilon\mathbf{u}_4] - J_{11}[\varepsilon\mathbf{u}_4] = 0.$$

А первое равно:

$$J_{33}[\varepsilon\mathbf{u}_3] - J_{11}[\varepsilon\mathbf{u}_3] = \frac{8}{105}\pi r_0^7 \varepsilon \rho^2 \omega_0^2 (2a_1 + 5a_2 + 7a_3).$$

Выражая коэффициенты  $a_i$  через модули упругости по формулам (3.1.5) и учитывая выражение для  $\varepsilon$ , получаем разность главных моментов инерции тела:

$$\Delta J = \frac{8\pi r_0^7 \rho^2 \omega_0^2 (\nu + 1)(9\nu + 13)}{105E(5\nu + 7)} \quad (3.2.3)$$

Найдем решение уравнения (3.2.1), представив его в скалярной форме

$$\begin{cases} (J_0 + A_1)\dot{p}_1 + \Delta J(\omega_0 + r_1)q_1 = 0, \\ (J_0 + A_1)\dot{q}_1 - \Delta J(\omega_0 + r_1)p_1 = 0, \\ (J_0 + C_1)\dot{r}_1 = 0. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Очевидно, что решением последнего уравнения системы (3.2.4) является константа. Не нарушая общности, примем  $r_1 = 0$ . Уравнения (3.2.4) описывают регулярную прецессию, как и в случае Эйлера движения симметричного твердого тела по инерции (рис. 3.3). Мгновенная угловая скорость при своем движении замечает конус в системе координат  $Cx_1x_2x_3$ , ось которого совпадает с осью  $Cx_3$ . В случае Земли это движение происходит с постоянной угловой скоростью и имеет период Чандлера  $T_c$  [104].

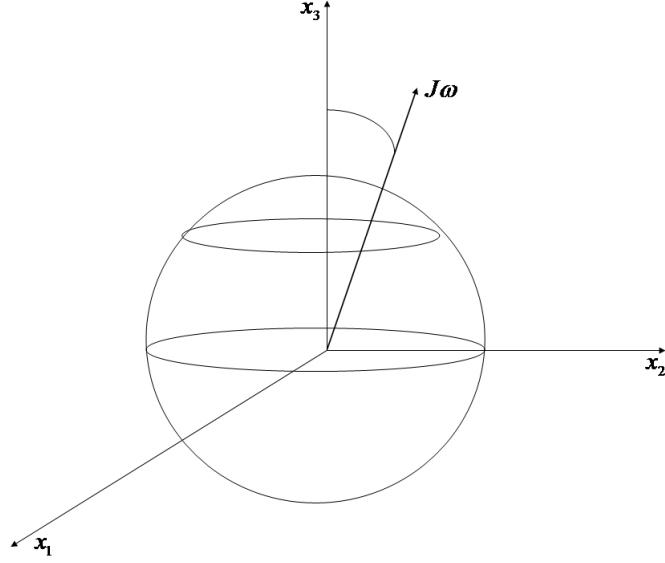


Рис. 3.3: Регулярная прецессия: вектор момента количества движения имеет постоянный угол с третьей осью инерции тела

Решение первых двух уравнений системы (3.2.4) запишем в виде

$$p_1 = b \cos \psi_0, \quad q_1 = b \sin \psi_0, \quad \psi_0 = \Omega t + \alpha, \quad \Omega = \frac{\Delta J \omega_0}{J_0 + A_1}, \quad (3.2.5)$$

где  $b, \alpha$  — произвольные постоянные. Заметим, что  $\Delta J$  и  $A_1$  порядка  $\varepsilon$ , поэтому в линейном приближении можно считать, что  $\Omega = \frac{\Delta J \omega_0}{J_0}$ .

Таким образом, вектор угловой скорости имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = b \cos \psi_0 \mathbf{e}_1 + b \sin \psi_0 \mathbf{e}_2 + \omega_0 \mathbf{e}_3.$$

Из уравнений (3.2.5) следует, что точка пересечения с шаром прямой (рис. 3.3), по которой направлен вектор угловой скорости шара, описывает на поверхности шара окружность малого радиуса. Поскольку возмущения угловой скорости  $b \ll \omega_0$ , то радиус этой окружности равен  $r_0 b / \omega_0$ .

Период Чандлера равен  $T_c = 2\pi / \Omega$ . Согласно формуле (3.2.3) получим выражение для  $\Omega$  через коэффициенты упругости. Имеем

$$\Omega = \frac{\Delta J \omega_0}{J_0} = \frac{\rho \omega_0^3 r_0^2 (1 + \nu)(13 + 9\nu)}{7E(7 + 5\nu)}. \quad (3.2.6)$$

Из формул (3.2.3) и (3.2.6) следует, что величины  $\Delta J, \Omega$  обратно пропорциональны модулю упругости  $E$  и, следовательно, имеют порядок малости  $\varepsilon$ . Если  $\varepsilon$  устремить к нулю, то в пределе согласно уравнениям (3.2.4) получим

$\dot{p}_1 = \dot{q}_1 = 0$  и, поскольку в невозмущенном движении  $p_1 = q_1 = 0$ , то в решении (3.2.5) коэффициент  $b$  тоже должен стремиться к нулю. Тем самым  $b = b(\varepsilon)$  должен иметь, по крайней мере, первый порядок малости по  $\varepsilon$ . В дальнейшем будем считать  $b = \varepsilon b_0$ .

Найдем относительное сжатие шара за счет центробежных сил, возникающих при его вращении вокруг оси  $Cx_3$ . Так как  $\mathbf{u}_4$  — сферически симметричная функция, то на сжатие влияет только функция  $\mathbf{u}_3$ . Согласно формулам (3.1.5) разность между экваториальным и полярным радиусами шара равна

$$\begin{aligned} \Delta R &= E^{-1}[\mathbf{u}_3(r_0 \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 - \mathbf{u}_3(r_0 \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3] = \\ &= \frac{\rho r_0^3 \omega_0^2 (a_1 + a_2 + a_3)}{E} = \frac{\rho r_0^3 \omega_0^2 (1 + \nu)(2 + \nu)}{E(7 + 5\nu)}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

### 3.3 Влияние возмущений от Луны и Солнца.

Теперь рассмотрим влияние гравитационных полей Луны и Солнца. В этом случае Земля вращается с некоторой угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\omega}_2$ , где  $\boldsymbol{\omega}_1 = (p_1, q_1, \omega_0)$  — угловая скорость, приобретаемая упругим шаром под воздействием центробежных сил инерции.

Уравнение, описывающее изменение момента количества движения деформируемого шара относительно центра масс, представляется в виде

$$\{J_0 + J_1[\mathbf{u}]\} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J_1[\mathbf{u}] \boldsymbol{\omega} + \dot{J}_1[\mathbf{u}] \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}. \quad (3.3.1)$$

Здесь  $\mathbf{M}$  — момент внешних сил, действующих на точки деформированного шара. Тензор инерции  $J_1[\mathbf{u}]$  содержит все четыре функции  $\mathbf{u}_k$ :  $J_1[\mathbf{u}] = \varepsilon J_1[\mathbf{u}_3] + \varepsilon J_1[\mathbf{u}_4] + \varepsilon J_1[\mathbf{u}_1] + \varepsilon J_1[\mathbf{u}_2]$ .

В развернутом виде уравнение (3.3.1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\{J_0 + J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2 + \varepsilon \mathbf{u}_3 + \varepsilon \mathbf{u}_4]\} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_2) + \\ &+ [(\boldsymbol{\omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\omega}_2) \times J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2 + \varepsilon \mathbf{u}_3 + \varepsilon \mathbf{u}_4] (\boldsymbol{\omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\omega}_2)] + \\ &+ \dot{J}_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2 + \varepsilon \mathbf{u}_3 + \varepsilon \mathbf{u}_4] (\boldsymbol{\omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\omega}_2) = \mathbf{M}. \end{aligned}$$

Вычитая из этого уравнения уравнение (3.2.1) изменения момента количества движения в случае отсутствия возмущений от Луны и Солнца, получим

$$\begin{aligned}
& J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2] \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + (J_0 + J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2 + \varepsilon \mathbf{u}_3 + \varepsilon \mathbf{u}_4]) \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \\
& + [\boldsymbol{\omega}_1 \times J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2] \boldsymbol{\omega}_1] + [\boldsymbol{\omega}_1 \times J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2 + \varepsilon \mathbf{u}_3 + \varepsilon \mathbf{u}_4] \Delta \boldsymbol{\omega}_2] + \\
& + [\Delta \boldsymbol{\omega}_2 \times J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2 + \varepsilon \mathbf{u}_3 + \varepsilon \mathbf{u}_4] (\boldsymbol{\omega}_1 + \Delta \boldsymbol{\omega}_2)] + \\
& + \dot{J}_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2 + \varepsilon \mathbf{u}_3 + \varepsilon \mathbf{u}_4] (\boldsymbol{\omega}_1 + \Delta \boldsymbol{\omega}_2) = \mathbf{M}.
\end{aligned}$$

Переменные  $\Delta \boldsymbol{\omega}_2$  и  $\mathbf{u}$  имеют первый порядок малости по  $\varepsilon$ . Отбрасывая члены малости порядка  $\varepsilon^2$ , получим упрощенное уравнение для нахождения угловой скорости:

$$\begin{aligned}
& J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2] \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + J_0 \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + [\boldsymbol{\omega}_1 \times J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2] \boldsymbol{\omega}_1] + \\
& + \dot{J}_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2 + \varepsilon \mathbf{u}_3 + \varepsilon \mathbf{u}_4] \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{M}.
\end{aligned}$$

В предыдущей главе было показано, что  $b = \varepsilon b_0$ , т.е. переменные  $p_1, q_1$  также порядка  $\varepsilon$ , поэтому в первом и последнем слагаемых можно положить  $\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_0 \mathbf{e}_3$ , сохраняя первый порядок малости по  $\varepsilon$ . Итак, в линейном приближении уравнение изменения момента количества движения имеет вид:

$$J_0 \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + [\boldsymbol{\omega}_1 \times J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2] \boldsymbol{\omega}_1] + \dot{J}_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2] \omega_0 \mathbf{e}_3 = \mathbf{M}.$$

В последнем слагаемом отсутствуют поля перемещений  $\mathbf{u}_3$  и  $\mathbf{u}_4$ , т.к. компоненты тензора инерции, связанные с ними, не зависят от времени.

Возмущение угловой скорости, проистекающее от воздействия гравитационных полей Луны и Солнца, определяется в виде

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_2 = J_0^{-1} \int_0^t \{ \mathbf{M} - [\boldsymbol{\omega}_1 \times J_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2] \boldsymbol{\omega}_1] - \dot{J}_1[\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2] \omega_0 \mathbf{e}_3 \} dt. \quad (3.3.2)$$

Момент внешних сил порождается полем гравитационных сил притяжения двух материальных точек Луны и Солнца. Потенциальная энергия сил гравитации представляется интегралом по шару от удельного потенциала гравитационных сил. Форма шара изменяется под воздействием поля центробежных сил, представленным полями перемещений  $\mathbf{u}_3(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{u}_4(\mathbf{r})$ . В результате возникают деформации шара, тензор инерции деформированного шара становится осесимметричным относительно оси  $Cx_3$  и не зависящим от времени в системе



координат  $Cx_1x_2x_3$ .

Гравитационный потенциал определяется соотношением (3.1.1) [11],[14]. Рассмотрим первый добавочный член  $\Pi^*(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  в разложении потенциала гравитационных полей притяжения Луны и Солнца по сферическим функциям. Он зависит от векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ :

$$\Pi^* = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^2 \Omega_k^2 (J_1[\mathbf{u}]\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_k).$$

Момент сил, возникающий как результат притяжения точек деформированного шара двумя центрами — Луной и Солнцем, вычисляется по формуле [11]:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^2 [\mathbf{n}_k \times \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{n}_k}] = 3 \sum_{k=1}^2 \Omega_k^2 [\mathbf{n}_k \times J_1[\mathbf{u}]\mathbf{n}_k]. \quad (3.3.3)$$

Деформации  $\mathbf{u}_4$  и тензор  $J_1[\varepsilon\mathbf{u}_4]$  сферически симметричны. Соответственно, их вклад в момент сил равен нулю:

$$[\mathbf{n}_k \times J_1[\mathbf{u}_4]\mathbf{n}_k] = \begin{pmatrix} (J_{33}[\varepsilon\mathbf{u}_4] - J_{22}[\varepsilon\mathbf{u}_4])\gamma_{2k}\gamma_{3k} \\ (J_{11}[\varepsilon\mathbf{u}_4] - J_{33}[\varepsilon\mathbf{u}_4])\gamma_{1k}\gamma_{3k} \\ (J_{22}[\varepsilon\mathbf{u}_4] - J_{11}[\varepsilon\mathbf{u}_4])\gamma_{1k}\gamma_{2k} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Деформации шара  $\varepsilon(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$ , порождаемые градиентами гравитационных полей Луны и Солнца, определяют часть силовой функции, которая не зависит от поворотов системы координат, связанной с шаром, ввиду его сферической симметрии.

$$[\mathbf{n}_k \times J_1[\varepsilon\mathbf{u}_1]\mathbf{n}_k] = [\mathbf{n}_k \times J_1[\varepsilon\mathbf{u}_2]\mathbf{n}_k] = 0$$

Формулы выше проверяются непосредственной подстановкой. Из них следует, что соответствующие члены в выражении момента (3.3.3) равны нулю. Момент гравитационных сил появляется в результате деформаций шара из-за его вращения вокруг оси  $Cx_3$  с угловой скоростью  $\omega_0$ . Таким образом, момент гравитационных сил оказывается равным

$$\mathbf{M} = 3 \sum_{k=1}^2 \Omega_k^2 [\mathbf{n}_k \times J_1[\varepsilon\mathbf{u}_3]\mathbf{n}_k] = 3 \sum_{k=1}^2 \Omega_k^2 \begin{pmatrix} (J_{33}[\varepsilon\mathbf{u}_3] - J_{22}[\varepsilon\mathbf{u}_3])\gamma_{2k}\gamma_{3k} \\ (J_{11}[\varepsilon\mathbf{u}_3] - J_{33}[\varepsilon\mathbf{u}_3])\gamma_{1k}\gamma_{3k} \\ (J_{22}[\varepsilon\mathbf{u}_3] - J_{11}[\varepsilon\mathbf{u}_3])\gamma_{1k}\gamma_{2k} \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \sum_{k=1}^2 \Omega_k^2 \begin{pmatrix} \Delta J \gamma_{2k} \gamma_{3k} \\ - \Delta J \gamma_{1k} \gamma_{3k} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta J$  определяется соотношением (3.2.3). Итак, момент гравитационных сил представляет собой только два слагаемых:

$$\mathbf{M} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 = 3\Delta J \sum_{k=1}^2 \Omega_k^2 (\gamma_{2k} \gamma_{3k} \mathbf{e}_1 - \gamma_{1k} \gamma_{3k} \mathbf{e}_2).$$

Чтобы найти возмущение угловой скорости, необходимо вычислить интеграл по формуле (3.3.2). Проанализируем сначала первые два слагаемых. Первое равно

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} = \mathbf{M} J_0^{-1} = 3\Delta J \omega_0^2 J_0^{-1} \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k^2 \gamma_{3k} (\gamma_{2k} \mathbf{e}_1 - \gamma_{1k} \mathbf{e}_2) = 3\Omega \omega_0 \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k^2 \gamma_{3k} (\gamma_{2k} \mathbf{e}_1 - \gamma_{1k} \mathbf{e}_2)$$

Здесь было подставлено выражение для  $\Omega$  из формулы (3.2.6).

Второе слагаемое под знаком интеграла в формуле (3.3.2) представим с точностью до малых порядка  $\varepsilon$  в виде

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{22} &= -J_0^{-1} [\boldsymbol{\omega}_1 \times J_1 [\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2] \boldsymbol{\omega}_1] \cong -\omega_0^2 J_0^{-1} [\mathbf{e}_3 \times J_1 [\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2] \mathbf{e}_3] = \\ &= -\omega_0^2 J_0^{-1} (J_{23} \mathbf{e}_1 - J_{12} \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

Матрица тензора инерции берется согласно (3.1.7). Компоненты тензора инерции  $J_{ij}$  вычисляются для поля перемещений  $\varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon \mathbf{u}_2$ . Учитывая определение (3.2.6) угловой скорости  $\Omega$ , получим выражения для компонент тензора инерции в кратком виде:

$$J_{ii}[\varepsilon \mathbf{u}_k] = \Omega \omega_0^{-1} J_0 \varepsilon_k^2 (1 - 3\gamma_{ik}^2), \quad J_{ij}[\varepsilon \mathbf{u}_k] = 3\Omega \omega_0^{-1} J_0 \varepsilon_k^2 \gamma_{ik} \gamma_{jk}, \quad k = 1, 2, \quad i \neq j \quad (3.3.4)$$

Подставляя выражения (3.3.4), представим  $\Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{22}$  в форме

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{22} \cong -3\Omega \omega_0 \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k^2 \gamma_{3k} (\gamma_{2k} \mathbf{e}_1 - \gamma_{1k} \mathbf{e}_2).$$

Далее заметим  $\Delta\dot{\omega}_{21} + \Delta\dot{\omega}_{22} = 0$ .

Интеграл от последнего слагаемого в формуле (3.3.2) представляется в виде

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{23} &= -J_0^{-1} \int \dot{J}_1[\varepsilon\mathbf{u}_1 + \varepsilon\mathbf{u}_2]\boldsymbol{\omega}_1 dt \cong -\omega_0 J_0^{-1} J_1[\varepsilon\mathbf{u}_1 + \varepsilon\mathbf{u}_2]\mathbf{e}_3 = \\ &= \omega_0 J_0^{-1} (J_{13}\mathbf{e}_1 + J_{23}\mathbf{e}_2 - J_{33}\mathbf{e}_3).\end{aligned}$$

Итак, вариация угловой скорости  $\Delta\boldsymbol{\omega}_2$ , определяемая формулой (3.3.2), примет вид

$$\Delta\boldsymbol{\omega}_2 \cong \Omega \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k^2 (3\gamma_{3k}\gamma_{1k}\mathbf{e}_1 + 3\gamma_{3k}\gamma_{2k}\mathbf{e}_2 - (1 - 3\gamma_{3k}^2)\mathbf{e}_3)$$

Оставив только периодическую часть от  $J_{33}$ , получим

$$\Delta\boldsymbol{\omega}_2 = 3\Omega \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k^2 (\gamma_{3k}\gamma_{1k}\mathbf{e}_1 + \gamma_{3k}\gamma_{2k}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos 2\psi_k \mathbf{e}_3)$$

Обозначим координаты возмущенного значения угловой скорости шара  $\Delta\boldsymbol{\omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\omega}_2$  через  $p, q, r$  и получим

$$\left\{ \begin{aligned} p &= b \cos \varepsilon_0 \varphi + 3\Omega \sin \theta \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k^2 \cos \varepsilon_k \varphi (\sin \varphi \sin \varepsilon_k \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \varepsilon_k \varphi), \\ q &= b \sin \varepsilon_0 \varphi + 3\Omega \sin \theta \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k^2 \cos \varepsilon_k \varphi (\cos \varphi \sin \varepsilon_k \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \varepsilon_k \varphi), \\ r &= \frac{3\Omega}{2} \sin^2 \theta \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k^2 \cos 2\varepsilon_k \varphi. \end{aligned} \right. \quad (3.3.5)$$

Здесь  $\varepsilon_0 = \Omega/\omega_0$ . Величины  $p, q, r$  имеют порядок малости  $\varepsilon$  и представляются суммой трех слагаемых. Первые слагаемые, пропорциональные коэффициенту  $b$ , определяют чандлеровскую прецессию мгновенной оси вращения шара вокруг оси  $Cx_3$ , которая является осью вращения абсолютно твердого шара в невозмущенном движении. Вторая и третья группы слагаемых соответствуют значениям  $k = 1$  и  $k = 2$  в суммах, стоящих в правых частях соотношений (3.3.5), и определяют возмущения угловой скорости шара от воздействия гравитационных полей соответственно Луны и Солнца. Напомним, что угол  $\varphi$  в формулах (3.3.5) является углом поворота Земли в ее суточном вращении и связан со временем соотношением  $\varphi = \omega_0 t$ .

Из уравнений (3.3.5) следует, что мгновенная угловая скорость шара описывает кривую на плоскости  $(p, q)$  типа эллипса с изменяющейся формой и возмущенными участками, когда эллипс стягивается почти в точку, а затем увеличивается до исходных размеров. Направление движения точки отрицательное — по часовой стрелке, а центры эволюционирующих эллипсов движутся в положительном направлении — против часовой стрелки, что соответствует регулярной прецессии.

### 3.4 Применение полученных данных на примере планеты Земля

Применим полученные результаты для реальных параметров Земли, Луны и Солнца. Поскольку целью данной работы является получение общего представления о поведении полюсов Земли, а не точные характеристики, то подставляемые значения будут браться из общих справочных материалов. А также не будут высчитываться погрешности измерений и расчетов.

Угол наклона  $\theta$  оси вращения Земли от перпендикуляра к плоскости эклиптики равен  $23^\circ 27'$ .

Невозмущенное значение угловой скорости вращения Земли вокруг оси  $Cx_3$  собственного вращения  $\omega_0 = 7,29 * 10^{-5} c^{-1}$ . Эти же значения имеют параметры  $\Omega_3 = \Omega_4 = 7,29 * 10^{-5} c^{-1}$ . Угловые скорости вращения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли выражались через невозмущенное значение угловой скорости Земли вокруг своей третьей оси:  $\Omega_k = \varepsilon_k \omega_0$ ,  $k = 1, 2$ . Здесь безразмерные величины  $\varepsilon_1 = 3,66 * 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_2 = 2,74 * 10^{-3}$ .

Угловая скорость свободного движения полюсов Земли равна  $\Omega = 1,7 * 10^{-7} c^{-1}$ , а разность между экваториальным и полярным радиусами  $\Delta R = 22 * 10^3$  м. Радиус недеформированной планеты примем равным  $r_0 = 6,37 * 10^6$  м, а ее плотность  $\rho = 5,57 * 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Как было получено в задаче, не учитывающей влияние гравитационных полей Луны и Солнца, вектор угловой скорости описывают регулярную прецессию (см. уравнения (3.2.4)). Мгновенная угловая скорость при своем движении замещает конус в системе координат  $Cx_1x_2x_3$ , жестко связанной с Землей. Ось этого конуса совпадает с осью  $Cx_3$ . Это движение происходит с постоянной угловой скоростью и имеет период Чандлера  $T_c = 428$  суток [104].

Подставляя все параметры в формулы (3.2.6), (3.2.7) найдем константы, ха-

рактически упрощающие упругие свойства материала Земли:

$$E = 2,4 * 10^{10} \text{ кг/мс}^2, \quad \nu = -0,83$$

Таким образом, планета Земля в данной модели, оказывается, имеет отрицательный коэффициент Пуассона. Такие материалы называются ауксетиками, их особенностью является тот факт, что при растяжении материалы-ауксетики становятся толще в направлении, перпендикулярном приложенной силе.

Что касается амплитуды прецессии, то согласно измерениям (см. рис.1.7 в [104]) угловое отклонение оси вращения Земли от оси  $Cx_3$  равно  $0,25'' = 1,2 * 10^{-6}$  рад. Отсюда следует, что коэффициент  $b$  в формуле (3.2.5) равен  $1,2 * 10^{-6} \omega_0 = 8,8 * 10^{-11} c^{-1}$ .

Если учитывать влияние притяжения Луны и Солнца, то мы получим уравнения (3.3.5). Здесь  $\varepsilon_0 = \Omega/\omega_0 = 2,3 * 10^{-3}$ . Напомним, что угол  $\varphi$  в формулах (3.3.5) является углом поворота Земли в ее суточном вращении и связан со временем соотношением  $\varphi = 7.29 * 10^{-5} t$ .

Интересно заметить, что возмущения от Луны больше возмущений от Солнца в  $\varepsilon_1^2/\varepsilon_2^2 \cong 178$  раз.

Из уравнений (3.3.5) следует, что мгновенная угловая скорость шара описывает кривую на плоскости  $(p, q)$  типа эллипса с изменяющейся формой и возмущенными участками, когда эллипс стягивается почти в точку, а затем увеличивается до исходных размеров. Направление движения точки отрицательное — по часовой стрелке, а центры эволюционирующих эллипсов движутся в положительном направлении — против часовой стрелки, что соответствует чандлеровской прецессии.

Подставим численные значения коэффициентов в формулы (3.3.5) и получим

$$\begin{aligned} p * 10^{10} &= 0,88 \cos 0,0023\varphi + 1,38 \sin 0,073\varphi \sin \varphi + 1,26 \cos \varphi(1 + \cos 0,073\varphi) + \\ &+ 0,00261 \sin 0,0055\varphi \sin \varphi + 0,0024 \cos \varphi(1 + \cos 0,0055\varphi), \\ q * 10^{10} &= 0,88 \sin 0,0023\varphi + 1,38 \sin 0,073\varphi \cos \varphi - 1,26 \sin \varphi(1 + \cos 0,073\varphi) + \\ &+ 0,00261 \sin 0,0055\varphi \cos \varphi - 0,0024 \sin \varphi(1 + \cos 0,0055\varphi) \\ r * 10^{10} &= 0,54 \cos 0,073\varphi + 0,003 \cos 0,0055\varphi. \end{aligned}$$

Графики функций, стоящих в правых частях этих формул, представлены на рис. 3.4 - 3.9.

На рис. 3.4, 3.5 представлены графики первой координаты угловой скорости  $p * 10^{10}$ . На первом рисунке промежуток времени охватывает 2 года земного времени, на втором — один месяц.

На рис. 3.6, 3.7 нарисованы графики второй координаты угловой скорости  $q * 10^{10}$ . Также на первом рисунке промежуток времени охватывает 2 года земного времени, на втором — один месяц.

На рис. 3.8, 3.9 нарисованы графики третьей координаты угловой скорости  $r * 10^{10}$  в течение 2 лет и 1 месяца.

Как видно из графиков, координаты  $p, q$  возмущенного значения угловой скорости представляют собой суперпозицию колебаний с изменяющимися амплитудами. Большие колебания происходят с периодом Чандлера 428 дней, а малые колебания с периодом одни сутки. Их амплитуды меняются с периодом 13,6 суток (полмесяца) и 182,5 суток (полгода). Возмущения угловой скорости в проекции на ось  $Cx_3$  складываются из постоянной величины, которой мы пренебрегли при выписывании общих формул, и периодических добавок с периодами полмесяца и полгода.

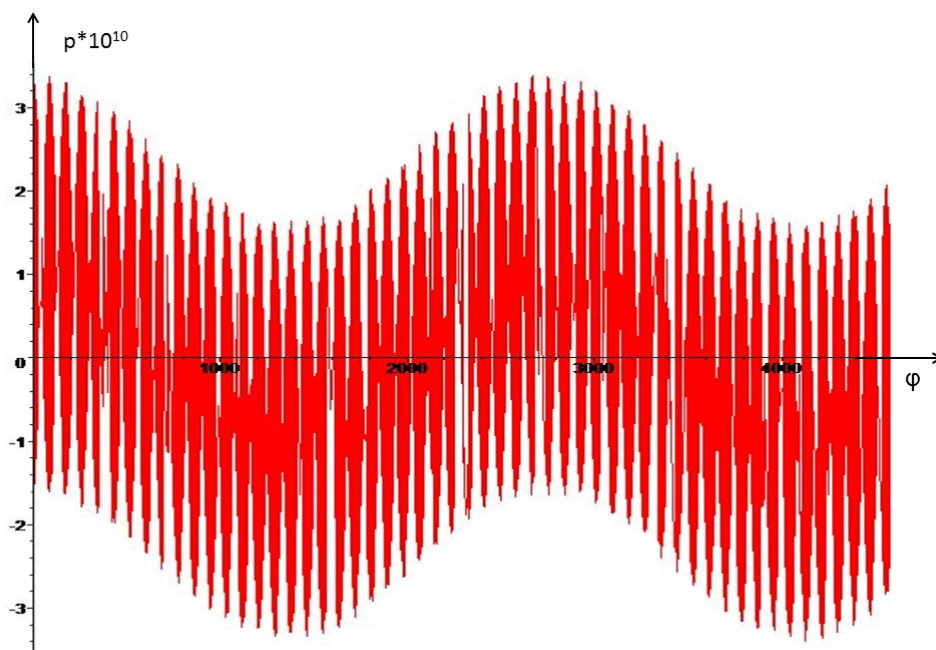


Рис. 3.4: График первой координаты угловой скорости  $p \cdot 10^{10}$  для  $0 \leq \varphi \leq 4584$  (2 года земного времени)

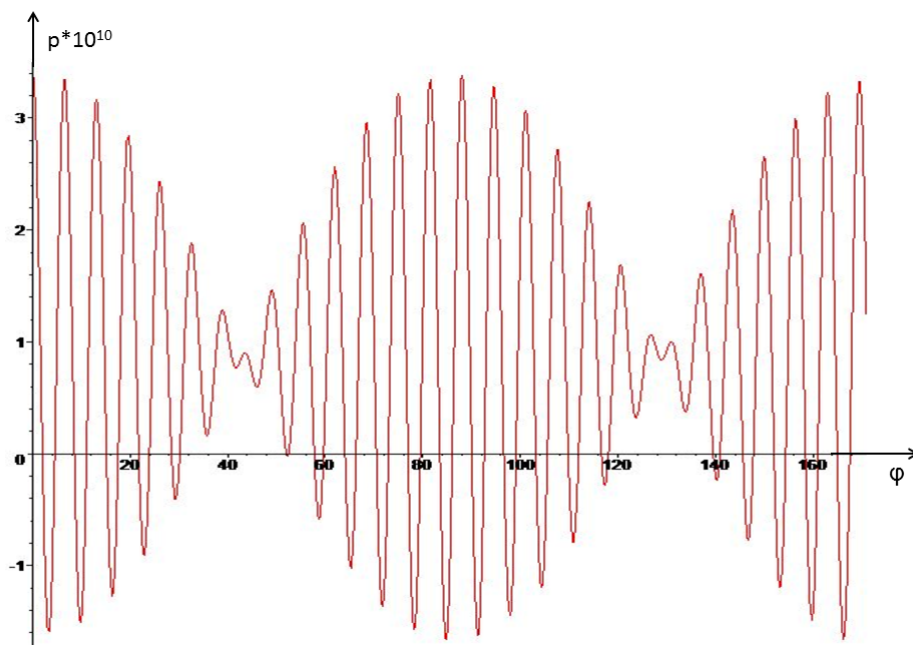


Рис. 3.5: График первой координаты угловой скорости  $p \cdot 10^{10}$  для  $0 \leq \varphi \leq 171$  (один месяц земного времени)

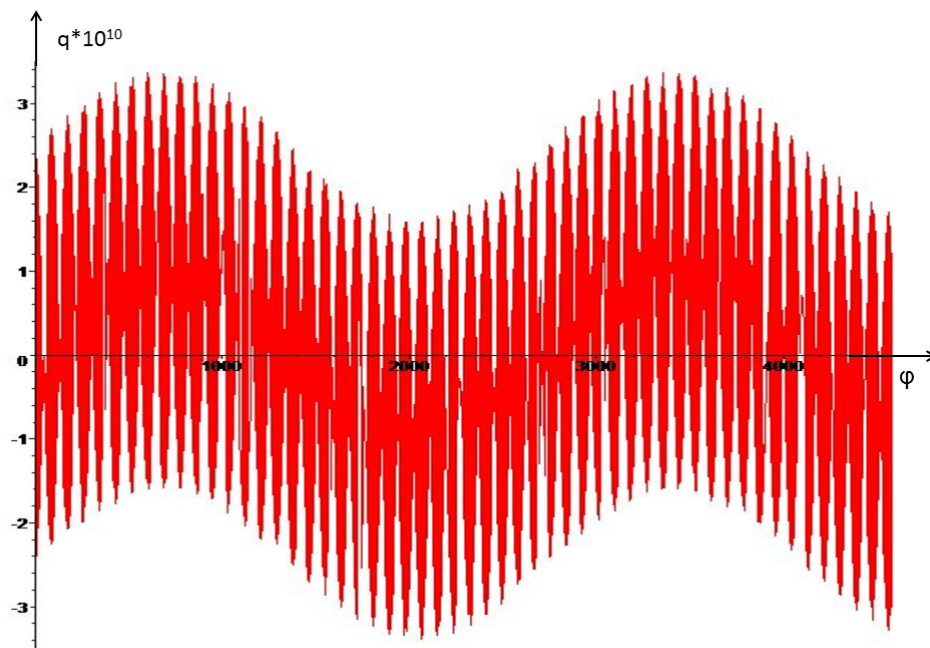


Рис. 3.6: График второй координаты угловой скорости  $q * 10^{10}$  для  $0 \leq \varphi \leq 4584$  (2 года земного времени)

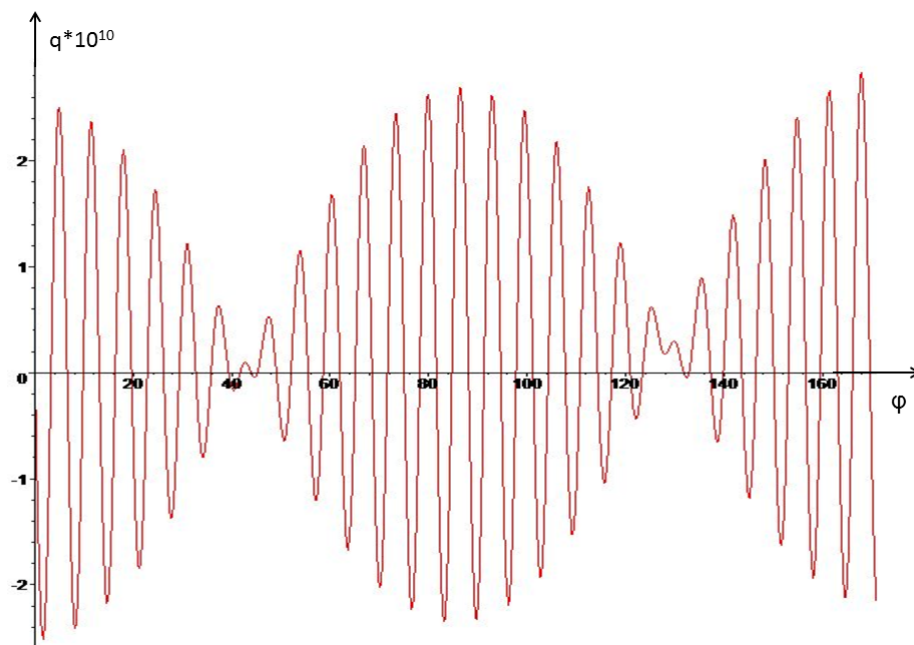


Рис. 3.7: График второй координаты угловой скорости  $q * 10^{10}$  для  $0 \leq \varphi \leq 171$  (один месяц земного времени)



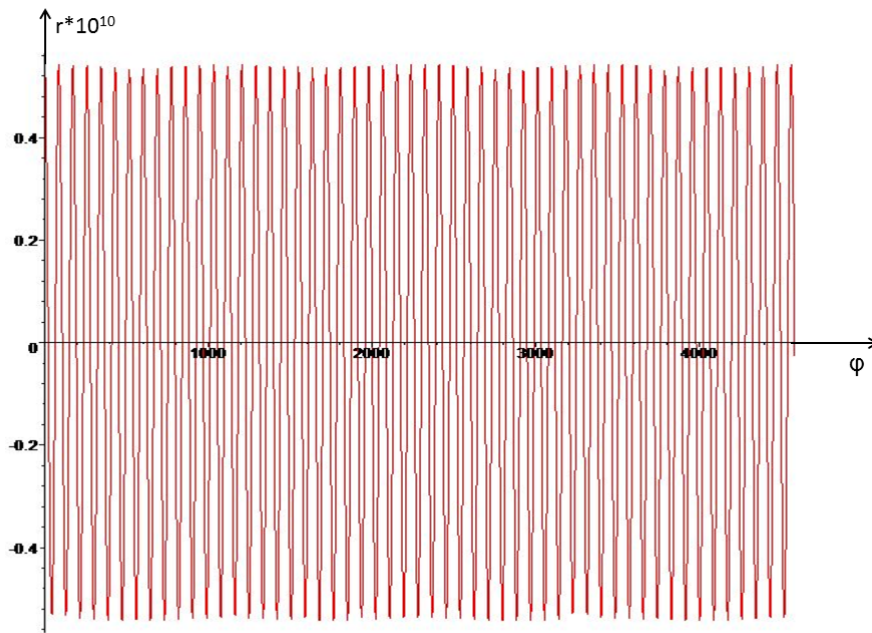


Рис. 3.8: График третьей координаты угловой скорости  $r * 10^{10}$  для  $0 \leq \varphi \leq 4584$  (2 года земного времени)

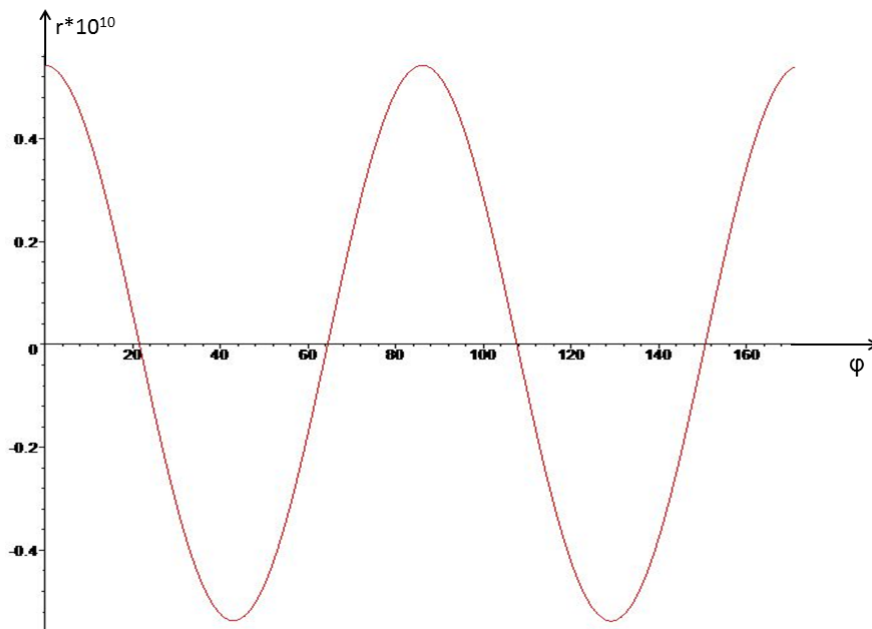


Рис. 3.9: График третьей координаты угловой скорости  $r * 10^{10}$  для  $0 \leq \varphi \leq 171$  (один месяц земного времени)

На рис. 3.10 представлена траектория точки на плоскости  $(10^{10}p, 10^{10}q)$  для  $0 \leq \varphi \leq 50$ , что составляет первые 8 дней, а на рис. 3.11 — траектория точки  $(10^{10}p, 10^{10}q)$  для  $716 \leq \varphi \leq 766$  (от 114 дня до 122 дня). Из вида графика на рис. 3.10 - 3.11 следует, что мгновенная угловая скорость шара описывает кривую на плоскости  $(p, q)$  типа эллипса с изменяющейся формой и возмущенными участками, когда эллипс стягивается почти в точку, а затем увеличивается до исходных размеров. Направление движения точки отрицательное — по часовой стрелке, а центры эволюционирующих эллипсов движутся в положительном направлении — против часовой стрелки, что соответствует чандлеровской прецессии. В работе [104] приведены графики вариаций угловой скорости вращения Земли, в которых также наблюдается эффект биений.

В представленной модели не учтены возмущения, связанные с сезонными климатическими факторами и с динамикой атмосферы [104].

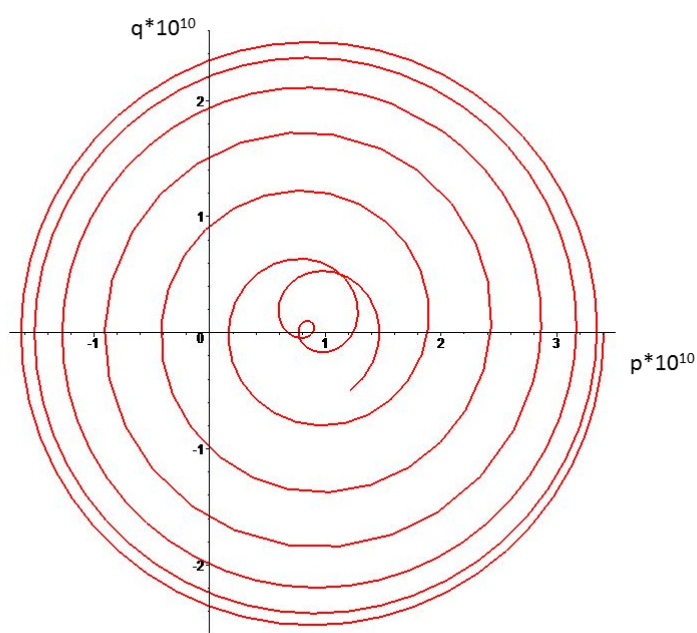


Рис. 3.10: Траектория конца вектора угловой скорости на плоскости  $(10^{10}p, 10^{10}q)$  для  $0 \leq \varphi \leq 50$  (первые 8 дней)

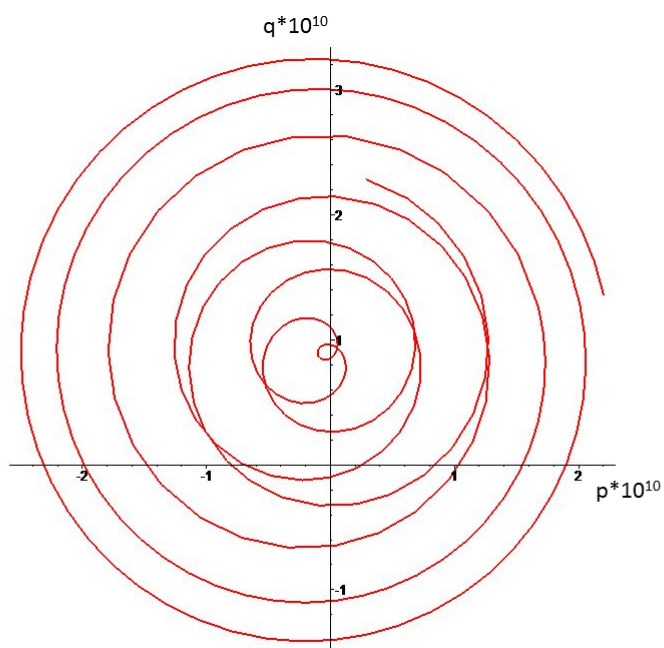


Рис. 3.11: Траектория конца вектора угловой скорости на плоскости  $(10^{10}p, 10^{10}q)$  для  $716 \leq \varphi \leq 766$  (от 114 дня до 122 дня)

# Заключение

В настоящей работе проведено исследование некоторых задач эволюции вращательных движений механических систем.

Рассмотрено движение твердого тела с неподвижной точкой и полостью, заполненной вязкой жидкостью, при условии отсутствия внешних сил. Пустота рассматривалась двух типов: сферическая и эллипсоидальная, но близкая к сферической. Вязкость жидкости считалась достаточно большой, что позволило методом разделения движения и усреднения получить систему уравнений, описывающих эволюцию движения тела с жидкостью.

Были выписаны уравнения движения в переменных Андуайе. Для сферической полости тело рассматривалось либо близким к шару, либо близким к осесимметричному телу. Для обоих случаев получены решения в линейном приближении по малым параметрам задачи. Показано, что если тело вытянуто вдоль одной из своих главных осей инерции, то эта ось асимптотически стремится максимально отклониться от постоянного вектора момента количества движения. Если тело сплющено вдоль одной из своих главных осей инерции, то эта ось стремится совпасть с вектором момента количества движения.

Для эллипсоидальной полости рассмотрено твердое тело, близкое к осесимметричному. Получено и проанализировано решение в линейном приближении по малым параметрам задачи. Результат зависит от геометрических особенностей полости, но при ярко выраженном сплюснутом или вытянутом твердом теле решение аналогично тому, что получено для задачи со сферической полостью.

Отдельно рассмотрено движение вязкоупругой планеты в гравитационном поле притяжения двух материальных точек. Планета моделируется однородным изотропным вязкоупругим телом из материала Кельвина-Фойгта и в естественном недеформированном состоянии имеют форму шара.

Проведено исследование вращательного движения планеты вокруг центра масс, считая, что притягивающие материальные точки лежат в одной плос-

кости и двигаются вокруг центра масс шара по круговым орбитам. Описано деформированное состояние упругого шара в первом приближении по малому параметру. Методом разделения движения получена система уравнений, описывающая эволюцию вращательного движения шара вокруг центра масс.

Показано, что возмущенное значение угловой скорости складывается из двух составляющих. Одна из них — это регулярная прецессия, порожденная центробежными силами инерции. Вторая — это вращательные движения, при которых координаты возмущенного значения угловой скорости образуют биения, а на плоскости первых двух координат траектория полюса имеет форму сходящегося и расходящегося эллипса. В рамках рассмотренной модели были получены выражения угловой скорости для планеты Земля и проанализированы в сравнении с экспериментальными данными, полученные в [104].

Получены также выражения для компонент тензора инерции в первом приближении по малому параметру. В случае отсутствия гравитационных полей, было выражено относительное сжатие упругого шара вдоль оси вращения через коэффициенты упругости: модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Эти коэффициенты упругости посчитаны для данных Земли как однородного упругого шара. Показано, что в рамках данной модели материал Земли является ауксетиком.

# Литература

- [1] Вариационные методы в задачах о колебании жидкости и тела с жидкостью. Сборник статей. М., ВЦ АН СССР, 1962.
- [2] *Авсюк Ю.Н.* Приливные силы и природные процессы. М.: Изд-во ОИФЗ РАН, 1996. 188 с.
- [3] *Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Марков Ю.Г.* Движение полюса Земли// Докл. РАН. 2002. Т. 382. N 2. С. 199-205.
- [4] *Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Марков Ю.Г., Рышлова Л.В.* Модель движения полюса деформируемой Земли, адекватная астрометрическим данным// Астрон. ж. 2002. Т. 79. N 1. С. 81-89.
- [5] *Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Марков Ю.Г., Рышлова Л.В.* Прогноз движения полюса деформируемой Земли// Астрон. ж. 2002. Т. 79. N 10. С. 952-960.
- [6] *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [7] *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М. Наука, 1977. 328 с.
- [8] *Баранова Е.Ю., Вильке В.Г.* Вращение упругого шара вокруг центра масс в гравитационном поле двух притягивающих центров. Вестник МГУ, Сер. 1, Мат. мех., 2014, № 3. С. 33-40
- [9] *Баранова Е.Ю., Вильке В.Г.* Эволюция движения твердого тела с неподвижной точкой и эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью. Вестник МГУ, Сер. 1, Мат. мех., 2013, № 1. С. 44-50
- [10] *Баркин Ю.В.* Объяснение эндогенной активности планет и спутников и ее цикличности // Изв. РАЕН. Сек. Наук о Земле. 2002. Вып. 9. С. 45-97
- [11] *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

- [12] *Беляева М.А., Мышкис А.Д., Тюпцов А.Д.* Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механ, и машиностр., 1984, №5, с.39-46.
- [13] *Болотин В.В.* О движении жидкости в колеблющемся сосуде. ПММ, 1958, т.20, №2, с. 293-294.
- [14] *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика. М.: Академия, 2010.
- [15] *Вильке В.Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч. 1,2. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1997, Ч.1. 216 с., Ч.2. 160 с.
- [16] *Вильке В.Г.* Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил// ПММ.1980. Т.44. Вып. 3. С. 395 – 402.
- [17] *Вильке В.Г.* О движении планеты со сложной структурой. Космич. исследования. 2004. Т. 42, № 4. С. 388-396
- [18] *Вильке В.Г.* Об относительном движении осесимметричного упругого тела.// Вестник МГУ, сер.1, математика-механика, 1988, №3, с.25-30.
- [19] *Вильке В.Г.* Об относительном движении ядра и оболочки планеты в гравитационном поле точечной массы // Прикладная математика и механика, 2006. Т. 70, вып. 4, с. 617-630
- [20] *Вильке В.Г.* Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы.// Вестник МГУ, сер.1, математика-механика, 1983, №5, с.54-59.
- [21] *Вильке В.Г.* Теоретическая механика. СПб.: Лань, 2003. 301 с.
- [22] *Вильке В.Г.* Эволюция движения симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью. Вестник Московского университета. Серия математика, механика, 1993, № 1, с. 71-76.
- [23] *Вильке В.Г., Копылов С.Л., Марков Ю.Г.* Об эволюции вращений вязкоупругой планеты на круговой орбите в центральном поле сил.// *Астрономический журнал*, 1984, т.61, вып. 6, с. 1198-1204.
- [24] *Вильке В.Г., Копылов С.Л., Марков Ю.Г.* Эволюция вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил.// *Прикладная математика и механика*, 1985, т.49, вып. 1, с. 25-34.

- [25] *Вилюке В.Г., Лебедев К.М.* Резонансные явления при эволюции поступательно-вращательного движения вязкоупругой планеты. // Космические исследования, 1987, т.25, вып. 1, с.148-153.
- [26] *Вилюке В.Г., Шатина А.В.* О поступательно-вращательном движении вязкоупругого шара в гравитационном поле притягивающего центра и спутника // Космич. исслед., 2004, т.42, № 1, с. 95-106
- [27] *Вилюке В.Г., Шатина А.В.* Эволюция движения вязкоупругого шара в ограниченной круговой задаче трех тел // Прикладная математика и механика, т.64, вып.5, 2000, с.772-782
- [28] *Вилюке В.Г., Шатина А.В.* Эволюция движения вязкоупругого шара в ограниченной круговой задаче трех тел // Нелинейная механика. М.: Наука, Физматлит, 2001, с.385-401
- [29] *Вилюке В.Г., Шатина А.В.* Эволюция движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Космические исследования, т.39, №3, 2001, с.303-315
- [30] *Вилюке В.Г., Шатина А.В.* Эволюция движения двойной планеты // Космические исследования, 2001, т.39, №3, с.316-323
- [31] *Вилюке В.Г., Шатина А.В.* Эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями в центральном ньютоновском поле сил // Космические исследования, т.37, вып.3, 1999, с.289-295
- [32] *Вилюке В.Г., Шатина А.В., Шатина Л.С.* Движение трех вязкоупругих планет в поле сил взаимного притяжения // Космические исследования, 2009, т.47, №5, с.471-476
- [33] *Вилюке В.Г., Шатина А.В., Шатина Л.С.* Эволюция движения двух вязкоупругих планет в поле сил взаимного притяжения // Космические исследования, 2011, т.49, №4, с.355-362
- [34] *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром/УМН. 1857, т. 12, вып.5, с.3-122.
- [35] *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 2000, 719 с.
- [36] *Дарвин Дж.Г.* Приливы и родственные им явления в Солнечной системе. М.: Наука, 1965. 360 с.



- [37] *Жак С.В.* Об устойчивости некоторых частных случаев движения симметричного гироскопа, содержащего жидкие массы. ПММ 1958, т. 22, с. 245-249.
- [38] *Жарков В.Н.* Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука, 1983. 415 с.
- [39] *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Избр.соч. Т.1, М.-Л., Гостехтеоретиздат, 1948, с.31-152
- [40] *Зленко А.А.* Одна модельная задача о приливной эволюции Земли и Луны. Жур. В мире научных открытий, 2010, №4(10), ч.4, с. 17-19
- [41] *Иевлева О.Б.* Малые колебания маятника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, с. 1132-1134.
- [42] *Иевлева О.Б.* О колебаниях тела, наполненного вязкой жидкостью. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1966, №6, с. 27-34.
- [43] *Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е.* О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1960, 3, с. 65-75.
- [44] *Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е.* Об устойчивости вращения на струне твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 30-41.
- [45] *Карапетян А.В., Лагутина И.С.* Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов. // Изв. АН СССР. МТТ, 2000, №1, с. 53-57.
- [46] *Карапетян А.В., Самсонов В.А., Сумин Т.С.* Об устойчивости и ветвлении перманентных вращений тяжелого тела с жидким наполнением. // ПММ. Т. 68. Вып. 6. 2004. С. 994-998.
- [47] *Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А.* Колебания полюса деформируемой земли. // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2010, №2 (8). С. 198-206.
- [48] *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во Московск. ун-та, 1980, 234 с.
- [49] *Колесников Н.Н.* Об устойчивости свободного твердого тела с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 606-612.
- [50] *Копачевский Н.Д., Мышкис А. Д.* Гидродинамика в слабых силовых полях. О малых колебаниях вязкой жидкости в потенциальном поле массовых сил. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1866, т.6, №8, с. 1054-1063.

- [51] *Костандян Б.А.* Об устойчивости вращательных движений волчка с полостью, неполностью наполненной жидкостью. *Ж. прикл. мех. и техн. физ.*, 1960, 3, с. 56-64.
- [52] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика, тт. I,II — М.: Физматгиз, 1963.
- [53] *Краснощекоев П.С.* Малые колебания твердого тела, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью/В сб.: Численные методы решения задач математической физики — М.: Изд-во Наука, 1966, с. 258-266.
- [54] *Краснощекоев П.С.* О колебаниях физического маятника, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью. *ПММ*, 1963, т. 27, вып. 2, с. 193-202.
- [55] *Крейн С.Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. *ДАН СССР*, 1964, т. 159, №2, с. 262-265.
- [56] *Крейн С.Г., Моисеев Н.Н.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. *ПММ*, 1957, т. 21, вып. 2, с. 169-174.
- [57] *Крушинская С.И.* Колебания тяжелой вязкой жидкости в подвижном сосуде. *Ж. вычисл. Матем. и матем. физ.*, 1965, №3, с. 519-536.
- [58] *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
- [59] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
- [60] *Лейбензон Л.С.* Краткий курс теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1942, 304 с.
- [61] *Лидов М.Л.* Курс лекций по теоретической механике. М.: Физматлит, 2001. 478 с.
- [62] *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935, 674 с.
- [63] *Малашенко С.В., Темченко М.Е.* Об одном методе экспериментального исследования устойчивости движения волчка, внутри которого имеется полость, наполненная жидкостью. *Ж. прикл. мех. и техн. физ.*, 1960, 3, с. 76-80.
- [64] *Манк У., Макдональд Г.* Вращение Земли / Пер. с англ. В.В. Нестерова, под ред. Я.Я. Успенского. — М.: Мир, 1964. — 384 с.
- [65] *Маржеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990, 416 с.
- [66] *Микишев Г.Н., Дорожкин Н.Я.* Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах. *Изв. АН СССР, Механ. и машиностр.*, 1961, №4, с. 48-53.

- [67] *Микишев Г.Н., Невская Е.А., Мельникова И.М., Дорожкин Н.Я.* Об экспериментальном исследовании возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. *Космические исследования*, 1965, т. 3, вып. 2, с. 208-220.
- [68] *Моисеев Н.Н.* Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью. *ДАН СССР*, 1952, т. 85, №4, с. 719-722.
- [69] *Моисеев Н.Н.* Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность, *Математический сборник*, 1953, т.32, вып. 1, с. 61-96.
- [70] *Моисеев Н.Н.* Задача о малых колебаниях открытого сосуда с жидкостью под действием упругой силы. *Укр. матем. журн.* 1952, т. 4, №2, с.168-173.
- [71] *Моисеев Н.Н.* О колебаниях тяжелой идеальной и несжимаемой жидкости в сосуде. *ДАН СССР*, 1952, т. 85, №5, с. 963-965.
- [72] *Моисеев Н.Н.* О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье - Стокса в случае, когда вязкость мала. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1961, т. I, №3, с. 548-550.
- [73] *Моисеев Н.Н., Петров А.А.* Численные методы расчета, собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М., ВЦ АН СССР, 1966.
- [74] *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
- [75] *Моисеев Н.Н., Черноусько Ф.Л.* Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1965, т.5, №6, с. 1071-1095.
- [76] *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев. Науковадумка. 1992.
- [77] *Нариманов Г.С.* О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движения последней. "ИМ 1957, т.20, вып.4, с.513-525.
- [78] *Нариманов Г.С.* О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. *ПММ*, 1956, т. 20, вып. 1, с. 21-38.
- [79] *Нариманов Г.С.* О колебаниях жидкости в подвижных полостях. -"Известия АН СССР ОТН, 1957, В 10, с.71-74.

- [80] *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М., "Машиностроение 1977, 208 с.
- [81] *Новожиллов И.В.* Фракционный анализ. М.: МГУ, 1991, 190 с.
- [82] *Охоцимский Д.Е.* К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1, с. 3-20.
- [83] *Петров В.М., Черноусько Ф.Л.* Об определении формы равновесия жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения. Изв. АН СССР, Механ. жидкости и газа, 1966, №5, с. 152-156.
- [84] *Подобед В.В., Нестеров В.В.* Общая астрометрия. - М.: Наука, 1975, 552с.
- [85] *Пожарицкий Г.К., Румянцев В.В.* Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1, с. 16-26.
- [86] *Пожарицкий Р.К.* О влиянии вязкости на устойчивость равновесия и стационарных вращений твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, с. 60-68.
- [87] *Рабинович Б.И.* Введение в динамику ракетносителей космических аппаратов. М., "Машиностроение 1975, 416 с.
- [88] *Рабинович Б.И.* Колебания элементов с полостями, содержащими жидкость. В кн.: Вибрация в технике. М., "Машиностроение 1980, т.3, с.61-90.
- [89] *Рабинович Б.И.* Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью. ПММ. 1956. т. 20, вып. 1, с. 39-50.
- [90] *Рабинович Б.И., Докучаев Л.В., Полякова З.М.* О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Космические исследования, 1965, т. 3, вып. 2, с. 179-207.
- [91] *Румянцев Б.Н.* О движении твердого тела, содержащего полости, заполненные вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, с. 1127-1132
- [92] *Румянцев В.В.* К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 51-66.
- [93] *Румянцев В.В.* Методы Ляпунова в исследовании устойчивости движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. Изв. АН СССР, Механ. и машиностр., 1963, №6, с. 119-140.

- [94] *Румянцев В.В.* Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6, с. 1057-1065.
- [95] *Румянцев В.В.* Об устойчивости вращения волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, с. 603-609.
- [96] *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, с. 746-753.
- [97] *Румянцев В.В.* Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, с. 877-991.
- [98] *Румянцев В.В.* Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6, с. 740-748.
- [99] *Садов Ю.А.* Переменные действие-угол в задаче Эйлера-Пуансо // ПММ, 1970, т.34, вып. 5, с. 962-964
- [100] *Самсонов В.А., Досаев М.З.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого тела с вязким наполнителем. Отчет Института механики МГУ №4521, 1998. 29 с.
- [101] *Самсонов В.А., Филиппов В.В.* К оценке влияния жидкости в полости тела на его движение. Отчет Института механики МГУ №2386, 1980. 39 с.
- [102] *Самсонов В.А., Филиппов В.В.* Об оценке момента сил вязкости, действующих на прецессирующее тело. // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1982. №4. С. 53-56.
- [103] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М. Наука, 1970. Т. 1. 492 с., Т.2 568 с.
- [104] *Сидоренков Н.С.* Физика неустойчивостей вращения Земли. М.: Физматлит, 2002. 380 с.
- [105] *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой жидкости. — М.: Гостехиздат, 1955.
- [106] *Соболев С.Л.* О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1960, 3, с. 20-55.
- [107] *Сретенский Л.Н.* Колебание жидкости в подвижном сосуде. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1951, №10, с. 1483-1494.
- [108] *Татаринов Я.В.* Лекции по классической механике. М.: Изд-во МГУ, 1984, 295 с.
- [109] *Тюлина И.А.* История и методология механики. М.: Изд-во МГУ, 1979. 282 с.

- [110] *Черноусько Ф.Л.* Автомодельное движение жидкости под действием поверхностного натяжения. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, с. 54-61.
- [111] *Черноусько Ф.Л.* Вращательные движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3, с. 416-432.
- [112] *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, №6, с. 1049—1070.
- [113] *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: Наука, 1968.- 232 с.
- [114] *Черноусько Ф.Л.* Движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при больших числах Рейнольдса. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3, с. 476-494.
- [115] *Черноусько Ф.Л.* Движение тонкого слоя жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5, с. 856-862.
- [116] *Черноусько Ф.Л.* Колебания сосуда с вязкой жидкостью. Изв. АН СССР, Механ. жидкости и газа, 1967, №1, с. 58-66.
- [117] *Черноусько Ф.Л.* Колебания твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Механика твердого тела, 1967, №1, с.3-14.
- [118] *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость и пузырь воздуха. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, с. 735-745.
- [119] *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1968, №1, с. 73-79.
- [120] *Черноусько Ф.Л.* О движении тела с полостью, содержащей вязкую жидкость. Международный Конгресс математиков. Москва, 1966, Тезисы кратких научных сообщений. Секция 12, с. 55.
- [121] *Черноусько Ф.Л.* О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, с. 977-992.
- [122] *Черноусько Ф.Л.* О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде. ПММ. 1966, т. 30, вып. 5, с. 836-847.
- [123] *Четаев Н.Г.* Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2, с. 157-168.
- [124] *Andoyer H.* Cours de mecanique celeste. Paris. Gauthier-Villars, v.1, 1923; v.2, 1926.

- [125] *Cooper R.M.* Dynamics of liquids in moving containers. ARS Journal, vol. 30, №8, 1960, p. 725-729.
- [126] *Greenspan H.P.* On the general theory of contained rotating fluid motions. Journal of fluid mechanics, 1965, vol. 22, part 3, p. 449-462.
- [127] *Greenspan H.P.* On the transient motion of a contained rotating fluid. Journal of fluid mechanics, 1964, vol. 20, part 4, p. 673-696.
- [128] *Greenspan H.P., Howard L.N.* On a time dependent motion of a rotating fluid. Journal of fluid mechanics, 1963, vol.17, part 3, p. 385-404.
- [129] *Hough S.S.* The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. Philosophical Transactions of the Royal Soc. of London. A., 1895, vol. 186, part 1, p. 469-506.
- [130] *Kubo Y.* Solution to the Rotation of the Elastic Earth by Method of Rigid Dynamics. Celestial Mechanics, 1991. v.50, pp.165-187.
- [131] *Moissejev N.N.* Sur certains problemes mathematiques du mouvement relatif des satellites. Dynamics of satellites. Symposium, Paris, 1962. Springer-Verlag, Berlin-Gottingen - Heidelberg, 1963, p. 313—335.
- [132] *Poincare H.* Sur la precession des corps deformables. Bulletin astronomique, 1910, t. 27, p. 321-356.
- [133] *Stewartson K.* On almost rigid rotations. Part 2. Journal of fluid mechanics, 1966, vol.26, part 1, p. 131-144.
- [134] *Stewartson K., Roberts P.H.* On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. Journal of fluid mechanics, 1963, vol.17, part 1, p. 1-20.
- [135] *Stokes G.* Mathematical and Physical Papers, vol. I. Cambridge, 1880.
- [136] *Stokes.* Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. VIII, 1849, p. 105-137, 533-583