ФГБОУ ВПО "МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА"

На правах рукописи

Тарасов Павел Борисович

Об условиях равномерности систем функций многозначной логики

01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Колпаков Р. М.

Москва – 2014

Содержание

Введение

Работа относится к математической теории синтеза управляющих систем. В работе рассматривается задача о реализации функций k-значной формулами над конечными системами.

Синтез и сложность управляющих систем является одним из основных направление в математической кибернетики. Класс формул над конечными системами, реализующих функции k-значной логики ($k \geq 2$) — один из основных модельных классов управляющих систем. Задача изучения сложности формул заключается в построении формулы, которая реализует заданную функцию и является оптимальной относительно некоторой меры сложности. Наиболее часто используемыми мерами сложности для формул являются число символов переменных входящих в формулу (называемое сложностью формулы) и глубина. Сложность формулы можно интерпретировать как ее стоимость, а глубину — как время вычисления, при условии, что все вычисления можно производить параллельно. Очевидным способом построения оптимальной формулы является перебор, но, с точки зрения практики, такой метод не может быть использован в силу экспоненциального роста объема вычислений от числа переменных данной функции. Поэтому важное значение имеет задача построения формул, близких к оптимальным, без использования перебора.

Большое число методов синтеза формул было разработано для конечных систем, состоящих из булевых функций. Для полных базисов асимптотически оптимальные методы синтеза формул (и некоторых других классов управляющих систем) были разработаны О. Б. Лупановым [12–18] (см. также [11]). Оценки глубины формул в полных базисах были получены в работах [7, 10]. Сложность и глубина формул также изучалась для случая функционально неполных систем двузначной и k-значной логики при $k \geq 3$ (см., например, [2–4, 28, 29, 34, 35])

В последнее время все более актуальной становится проблема вычисления функций с помощью распараллеленных вычислений. Поскольку время распараллеленного вычисления формулы прямо пропорционально ее глубине, проблема минимизации таких вычислений сводится к задаче построения по заданной формуле эквивалентной формулы (то есть, формулы, реализующую ту же функцию), имеющей наименьшую возможную глубину. Если функцию f можно реализовать над конечной системой A формулой глубины не более l, то несложно получить верхнюю оценку $L \leq n^l$ сложности L реализации функции f формулами над A, где n — максимальное число переменных у функций из A. Таким образом, глубина реализации функции формулами не может быть меньше по порядку логарифма сложности этой реализации. В случае, если эта нижняя оценка достигается, говорят о равномерности системы A. Приведем точное определение.

Конечная система функций A называется равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f, реализуемой формулой над A, выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2 L_A(f) + d, \tag{1}$$

где $L_A(f)$ и $l_A(f)$ есть сложность и глубина реализации функции f формулами над системой A. Таким образом, равномерные системы функций — это системы, позволяющие оптимальным образом распараллеливать вычисление функций реализуемых формулами над этими системами.

Пусть $k \geq 2$. Положим $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$. Обозначим через P_k множество всех функций k-значной логики. Вопросы, связанные с равномерностью систем в P_k, изучались во многих работах. В работах В. М. Храпченко и Ф. Спиры [42, 64] независимо была доказана равномерность всех конечных полных систем булевых функций (см. также [49–51, 56]). В ряде работ [38, 39, 47, 55, 59, 63] рассматриваются методы оценки константы c из неравенства (1) для различных полных систем булевых функций. Методы, предложенные в работах [42, 64] нетрудно перенести на полные системы функций многозначной логики, однако они существенно используют полноту систем.

В работе И. Вегенера [65] установлена равномерность всех конечных систем, порождающих класс M всех монотонных булевых функций. А. Б. Угольниковым [30] установлена равномерность всех конечных систем булевых функций и приведены примеры неравномерных систем функций из P_3. Аналогичный результат был получен в работе [60].

Таким образом, вопрос о равномерности конечных систем функций из P_2 решен полностью, поэтому приобретает актуальность задача исследования равномерности систем k-значной логики при $k \geq 2$.

Данная задача является принципиально более сложной по сравнению с аналогичной задачей для P_2 в связи с тем, что для замкнутых классов булевых функций существует удобное описание, приведенное в работах Э. Поста [57, 58], в то время как для замкнутых классов функций из P_k при $k \geq 3$ описание отсутствует, что связано с существованием принципиальных отличий многозначных логик от двухзначной, в частности, с континуальностью [45] семейства всех замкнутых классов k-значной логики при $k \geq 3$ и отсутствием описания всех конечно-порожденных классов k-значной логики.

Ряд публикаций посвящен задаче о соотношении глубины и сложности формул над конечными системами функций, порождающими предполные классы P_k, при $k \geq 3$. Изучение данных классов облегчается существованием их полного предикатного описания, полученного в работах И. Розенберга [61, 62] (см. также [43, 54]).

Согласно данному описанию, все предполные классы функций P_k при $k \geq 3$ можно разделить на следующие семейства: классы линейных функций — классы типа $\mathbb{L}$; классы функций, сохраняющих разбиения множества E_k, — классы типа $\mathbb{E}$; классы функций, сохраняющих сильно гомоморфные прообразы элементарных h-адических отношений, — классы типа $\mathbb{B}$; классы функций, сохраняющих центральные отношения, — классы типа $\mathbb{C}$; классы самодвойственных функций — классы типа $\mathbb{P}$; классы монотонных функций — классы типа $\mathbb{O}$.

Пусть ρ — отношение частичного порядка на E_k, такое, что для любых двух элементов a и b из (E_k, ρ) существуют $\sup(a, b)$ и $\inf(a, b)$. Класс всех функций, сохраняющий отношение ρ, называется классом типа $\mathbb{O}^{\#}$. Конечно-порожденные предполные классы функций, монотонных относительно частично упорядоченного множества ширины 2, называются классами типа $\mathbb{O}_2$ (см. [8]). Классы типа $\mathbb{C}$, сохраняющие унарные и бинарные центральные отношения, называются классами типа $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ соответственно (см. [23]).

Равномерность всех конечных систем, порождающих предполные классы P_3, анонсирована в работе [1]. Равномерность любых конечных систем, порождающих предполные классы типов $\mathbb{L}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{O}^{\#}$, $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ в P_k, установлена в работах [23, 24]. Кроме того, в этих работах для любого $k \geq 3$ доказано существование равномерных порождающих систем для классов типа $\mathbb{C}$. В работе [25] показана равномерность всех конечных порождающих систем для классов типа $\mathbb{O}$ при $k \leq 7$. Для некоторых классов типа $\mathbb{O}_2$ в [8] показано существование в этих классах функции специального вида, поэтому применением метода из работ [38, 64] нетрудно установить равномерность всех конечных систем, порождающих эти классы. В работе [9] анонсирована равномерность порождающих систем некоторых предполных классов монотонных функций при $k > 7$.

Как отмечено выше, в многозначной логике не известно никакого полного описания множества замкнутых классов, более того, даже для конкретных известных семейств замкнутых классов функций k-значной логики остается открытым вопрос, являются эти семейства счетными или континуальными. Одним из самых распространенных методов доказательства конечности семейств классов и наличия в классах конечного базиса является метод мажоритарных функций, вытекающий из теоремы Бейкер-Пиксли [46] (см. также [54]). Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называется мажоритарной, если для любых $\alpha, \beta \in E_k$ выполнены равенства

$$f(\beta, \alpha, \ldots, \alpha) = f(\alpha, \beta, \alpha, \ldots, \alpha) = \ldots = f(\alpha, \ldots, \alpha, \beta) = \alpha.$$

Множество всех мажоритарных функций k-значной логики мы будем обозначать через $\mathrm{N}A_k$.

Также очень важной задачей теории управляющих систем является задача сравнения базисов. Конечные системы функций A и B, такие, что $[A] = [B]$, называются полиномиально эквивалентными, если существуют такие константы c_1 и c_2, что для любой функции $f \in [A]$ выполнены неравенства $L_A^{c_1}(f) \leq L_B(f) \leq L_A^{c_2}(f)$.

В работе [32] доказано, что все конечные системы функций $P_{k,2}$, порождающие один и тот же замкнутый класс полиноимально эквивалентны. В той же работе приведен пример систем функций из P_4, порождающих один и тот же замкнутый класс и не являющихся полиномиально эквивалентными. Примеров не полиномиально эквивалентных систем функций из P_3 до этой работы не приводилось. Кроме того, не было известно примеров систем порождающих один и тот же замкнутый класс, часть из которых равномерна, а часть нет.

Данная работа также посвящена задаче нахождения соотношения между глубиной и сложностью формул в многозначной логике. Найдены некоторые необходимые и достаточные условия равномерности систем функций многозначной логики. Кроме того, отдельно рассмотрены два выделенных семейства замкнутых классов P_k при $k \geq 3$: предполные классы P_k и замкнутые классы функций из множества $P_{k,2}$, определяемого далее. Дадим некоторые необходимые определения.

В представленной работе рассматривается более слабое соотношение между глубиной и сложностью реализации функций формулами. Конечную систему функций A будем называть квази-равномерной, если существуют такие константы c и d, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2^2 L_A(f) + d.$$

Работа состоит из введения, пяти глав, описания основных результатов и списка литературы.

В первой главе приводятся определения и обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей работы. В частности, даны следующие определения.

Положим $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Обозначим через $P_{k,s}$ множество всех функции k-значной логики, принимающих значения из множества E_s, $k \geq s \geq 2$. Будем говорить, что функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_s$ является проекцией функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$, если для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E_s^n$ выполнено $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\alpha})$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из $P_{k,s}$, а $g(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из P_s, такие, что для любого $\widetilde{\alpha} \in E_s^n$ выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\alpha})$. Функцию g будем называть проекцией функции f и обозначать через $\mathrm{pr}_s f$. Пусть $A \subseteq P_{k,s}$. Положим, $\mathrm{pr}_s A = \{\mathrm{pr}_s f | f \in A\}$.

Во второй главе приводятся методы доказательства достаточных условий равномерности конечных систем функций многозначной логики. В первом параграфе приведены методы общие для всех систем функций многозначной логики, во втором — методы для систем пожодающих в проекции класс всех монотонных булевых функций, а в третьем — методы специфичные для всех систем функций $P_{k,2}$.

В третьей главе доказывается критерий квази-равномерности конечных систем функций из $P_{k,2}$ и показывается, что данный критерий можно проверить за конечное время.

В четвертой главе приводятся пример систем функций из $P_{3,2}$, порождающих один и тот же замкнутый класс, одна из которых является равномерной, а другая не является равномерной, из чего в частности следует, что эти системы не являются полиномиально эквивалентными.

В пятой главе сводятся воедино все результаты работы и доказываются некоотрые теоремы, являющиеся следствиями доказанных в первых четырех главах.

В диссертации принята следующая нумерация утверждений: леммы, теоремы и утверждения нумеруются парами чисел — номер главы и номер утверждения, а следствия нумеруются по порядку для каждого утверждения. Ниже приведено описание результатов работы.

Теорема 1. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,s}$, где $k \geq s \geq 2$, такая, что множество* $[\mathrm{pr}_s A]$ *содержит мажоритарную функцию. Тогда система A равномерна.*

Следствие 1. Пусть A и B — конечные системы функций из $P_{k,s}$, такие, что $[\mathrm{pr}_s A] = [\mathrm{pr}_s B]$ и множество $[\mathrm{pr}_s A]$ содержит мажоритарную функцию, где $k \geq$ $\geq s \geq 2$. Тогда системы A и B полиномиально эквивалентны.

Теорема 2. *Пусть A — конечная система функций из P_k, порождающая предполный класс типа $\mathbb{C}$, $k \geq 3$. Тогда система A равномерна.*

Теорема 3. *Пусть A — конечная система функций из P_k, порождающая предполный класс, где $k \leq 7$. Тогда система A равномерна.*

Теорема 4. *Конечная система A функций из $P_{k,2}$, такая, что* $\mathrm{pr}_2 A$ *не содержится ни в одном из множеств*[1] $O^\infty, I^\infty, K, D, L$, *является равномерной.*

Некоторые соотношения между глубиной и сложностью реализаций функций формулами получены для конечных систем функций из $P_{k,2}$, монотонных относительно частичного порядка на множестве E_k, в котором $1 > 0$, а все остальные элементы не сравнимы. Функции из $P_{k,2}$ монотонные относительно данного частичного порядка в дальнейшем будем называть монотонными функциями.

В главе 3 для любого замкнутого класса B состоящего из монотонных функций из $P_{k,2}$ и любого числа $r \geq 3$ вводятся определения множеств $\#(B, r)$ и $\#_1(B, r)$.

Теорема 5. *Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$, такая, что $A \subset \#([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$, равномерна.*

[1] определения замкнутых классов булевых функций O^∞, I^∞,K,D,L вводятся в первой главе.

Теорема 6. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, такая, что для любой функции $f(x_1,\dots,x_n) \in [A]$ и любого $x_i \in \{x_1,\dots,x_n\}$ существует функция $g(x_1,\dots,x_{n-1},y_1,\dots,y_r) \in [A]$, такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$. Тогда система A равномерна.*

Множество формул F над конечной системой функций A будем называть равномерным, если существуют такие константы c и d, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над A эквивалентная Φ, для которой выполнено неравенство

$$l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d.$$

Подформулы $\Phi_1,\dots,\Phi_t$ формулы Φ вида $f(\Phi_1,\dots,\Phi_t)$ называются главными подформулами. Формула Φ над конечной системой функций A называется α-формулой, если у каждой подформулы Φ не более одной нетривиальной главной подформулы.

Теорема 7. *Пусть A — конечная система функций из P_k, такая, что множество всех α-формул над системой A равномерно над A. Тогда система A квази-равномерна.*

Теорема 8. *Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ квази-равномерна тогда и только тогда, когда $A \subseteq \#_1([A], n^{3^{k^n}+1})$, где n — максимальное число переменных, от которого зависят функции из A.*

Теорема 9. *Существуют конечные системы A и A' функций из $P_{3,2}$, такие, что $[A] = [A']$ и*

1. *система A равномерна;*

2. *система A' не равномерна;*

3. *системы A и A' не являются полиномиально эквивалентными.*

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [66–68].

Благодарности. Основная часть диссертации была выполнена под руководством доктора физико-математических наук, профессора Александра Борисовича Угольникова, которому автор выражает благодарность за постановку задачи и научное руководство. Также за научное руководство, обсуждение результатов и внимание к работе автор благодарит научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Р. М. Колпакова. Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук О. С. Дудаковой за ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению диссертации.

Глава 1

Определения и обозначения

Положим $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geq 2$. n-я декартова степень множества A обозначается через A^n.

Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, аргументы которой определены на множестве E_k, такую, что для всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E_k$ выполнено $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k$, называют функцией k-значной логики. Множество всех функций k-значной логики обозначается через P_k. Множество функций k-значной логики, принимающих значения только из множества E_s, $s \leq k$, обозначим через $P_{k,s}$. Переменная x_i функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$ называется существенной, если для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta, \gamma \in E_k$ выполнено неравенство

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \gamma, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Переменные, не являющиеся существенными называются фиктивными. Под равными функциями понимаются функции, одинаковые с точностью до добавления и удаления фиктивных переменных.

Для удобства, если это не вызывает двусмысленности, любой набор вида $(\alpha_k, \ldots, \alpha_n)$, элементы которого обозначены одинаковыми символами с последовательными порядковыми индексами, будем обозначать через $\widetilde{\alpha}$. Например, вместо $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_k^m$ мы будем использовать сокращенную запись $\widetilde{\alpha} \in E_k^m$.

Определим сигнатуру как конечное множество функциональных символов $\{f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}\}$, где каждому символу f_i соответствует число n_i, называемое арностью этого символа. Если $A = \{f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_{n_m})\}$ — конечная система функций из P_k, то сигнатурой A назовем множество функциональных символов $\{f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}\}$, состоящее из символов, обозначающих функции из A. Сигнатуру системы A будем обозначать через $\Sigma(A)$.

Через $x_1, x_2, \ldots$; $y_1, y_2, \ldots$ и $z_1, z_2, \ldots$ будем обозначать переменные.

Пусть Σ — произвольная сигнатура. Определим индуктивно понятие формулы над Σ:

1) символы переменных являются формулами над Σ, такие формулы называются тривиальными;

2) если $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над Σ, а $f^{(n)}$ — n-арный функциональный символ из Σ, то выражение $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над Σ:

Пусть X — некоторое множество переменных. Будем называть формулу формулой от переменных из X, если в этой формуле содержатся только символы переменных из X.

Будем говорить, что Φ является формулой над системой функций A, если Φ — формула над сигнатурой $\Sigma(A)$. Отметим, что в качестве формулы над A, формула Φ реализует некоторую функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ от переменных входящих в Φ. В этом случае мы говорим, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ реализуется формулой Φ над системой A. Будем также полагать, что формула Φ наряду с функцией f реализует все функции, равные f. Формулы Φ и Φ' над A, реализующие равные функции, будем называть эквивалентными над A. Если формулы Φ и Φ' являются эквивалентными над системой $A \subseteq P_k$, то будем писать $\Phi = \Phi'$ для системы A. В доказательстве утверждений будем также писать $\Phi = \Phi'$ без указания системы A, если это не вызвает двусмысленности.

Множество всех функций, реализуемых нетривиальными формулами над A, обозначается через $[A]$ и называется замыканием A. Будем говорить, что система A порождает множество функций $B \subseteq P_k$ если $B \subseteq [A]$.

Через $|A|$ будем обозначать максимальное число переменных, от которых зависят функции из A.

Сложностью формулы Φ назовем число входящих в Φ символов переменных. Сложность формулы Φ будем обозначать через $L(\Phi)$.

Дадим индуктивное определение глубины $l(\Phi)$ формулы Φ:

1. тривиальные формулы имеют *глубину* 0;

2. пусть Φ — формула вида $f_i(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$, где $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ — произвольные формулы. Положим

$$l(\Phi) = \max_{1 \le j \le m} (l(\Phi_j)) + 1.$$

Пусть A — конечная система функций из множества P_k, f — некоторая функция из $[A]$. Положим

$$L_A(f) = \min_{\Phi} L(\Phi), \quad l_A(f) = \min_{\Phi} l(\Phi),$$

где минимум берется по всем формулам Φ над A, реализующим функцию f. Величины $L_A(f)$ и $l_A(f)$ называются сложностью и глубиной реализации функции f над системой A соответственно. В дальнейшем для удобства вместо $L_A(f)$ и $l_A(f)$ будем писать $L(f)$ и $l(f)$ соответственно.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция из $P_{k,s}$, а $g(x_1, \dots, x_n)$ — функция из P_s, такие, что для любого $\widetilde{\alpha} \in E_s^n$ выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\alpha})$. Функцию g будем называть проекцией функции f и обозначать через $\mathrm{pr}_s f$. Пусть $A \subseteq P_{k,s}$. Положим, $\mathrm{pr}_s A = \{\mathrm{pr}_s f | f \in A\}$. Заметим, что $[\mathrm{pr}_s A] = \mathrm{pr}_s [A]$. Если $A \subseteq P_s$, то положим $\mathrm{pr}_k^{-1} A = \{f \in P_{k,s} | \mathrm{pr}_s f \in A\}$.

Дадим рекурсивное определение подформулы произвольной формулы Φ. Если Φ — тривиальная формула, то она сама является своей подформулой. Подформулами формулы Φ вида $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ будем называть саму формулу Φ и подформулы формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. В таком случае формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ будем называть главными подформулами формулы Φ. Подформулы, являющиеся тривиальными формулами, будем называть тривиальными подформулами.

Формулу, каждая подформула которой имеет не более одной нетривиальной главной подформулы, будем называть α-формулой.

Внешней формулой будем называть формулу, в которой выделены некоторые переменные, называемые внешними переменными, при этом каждая внешняя переменная встречается в формуле ровно один раз. Внешнюю формулу Φ с множеством $\{y_1, \dots, y_t\}$ внешних переменных будем обозначать через $\Phi[y_1, \dots, y_t]$.

Сложность внешней формулы определим как число всех (в том числе внешних) символов переменных, входящих в данную формулу. Для удобства любую обычную формулу будем рассматривать как частный случай внешней формулы с пустым множеством внешних переменных.

Пусть $\Phi[y_1,\dots,y_t]$, $\Psi_1[y_1^1,\dots,y_{n_1}^1]$, $\dots$, $\Psi_m[y_1^m,\dots,y_{n_m}^m]$ — внешние формулы, такие, что все переменные $y_1^1,\dots,y_{n_1}^1,\dots,y_1^m,\dots,y_{n_m}^m$ являются различными. Тогда через

$$\Phi[\Psi_1[y_1^1,\dots,y_{n_1}^1],\dots,\Psi_m[y_1^m,\dots,y_{n_m}^m]]$$

обозначим внешнюю формулу с внешними переменными

$$y_1^1,\dots,y_{n_1}^1,\dots,y_1^m,\dots,y_{n_m}^m,$$

полученную из формулы Φ подстановкой вместо каждой внешней переменной $y_1,\dots,y_t$ формулы $\Psi_1,\dots,\Psi_t$ соответственно.

В частности, будем говорить, что формула Φ представляется в виде

$$\Psi_1[\Psi_2[\dots\Psi_{n-1}[\Psi_n]\dots]],$$

если $\Psi_1[y],\dots,\Psi_{n-1}[y],\Psi_n$ являются некоторыми внешними формулы над A, такими, что Φ графически равна формуле $\Psi_1[\Psi_2[\dots,\Psi_{n-1}[\Psi_n]]\dots]$.

Внешнюю формулу $\Phi_0[y_1,\dots,y_t]$ будем называть внешней подформулой формулы Φ, если формула Φ может быть представлена в виде $\Phi_0[\Phi_1,\dots,\Phi_t]$, где $\Phi_1,\dots,\Phi_t$ — подформулы Φ.

Дадим рекурсивное определение составной подформулы произвольной формулы Φ:

1. формула Φ является своей составной подформулой;

2. если формула Φ представляется в виде $\Phi_1[\Phi_2[\Phi_3]]$, где формула Φ_3 является нетривиальной, то все составные подформулы формулы $\Phi_1[\Phi_3]$ являются составными подформулами формулы Φ.

Конечная система A функций из множества P_k называется равномерной, если существуют такие константы c и d, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2 L_A(f) + d. \tag{1.1}$$

Конечная система A функций из множества P_k называется квази-равномерной, если существуют такие константы c и d, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2^2 L_A(f) + d. \tag{1.2}$$

В дальнейшем для удобства будем писать log вместо $\log_2$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называется мажоритарной, если для любых $\alpha, \beta \in E_k$ выполнены равенства

$$f(\beta, \alpha, \ldots, \alpha) = f(\alpha, \beta, \alpha, \ldots, \alpha) = \ldots = f(\alpha, \ldots, \alpha, \beta) = \alpha.$$

Множество всех мажоритарных функций из P_k будем обозначать через NA_k.

Введем на множестве E_k частичный порядок следующим образом: $1 > 0$, а остальные элементы несравнимы. Далее под монотонными функциями будем понимать функции, монотонные относительно данного частичного порядка. Заметим, что если $f \in P_{k,2}$ — монотонная функция, то $\mathrm{pr} f \in M$, где M — класс монотонных булевых функций.

Будем говорить что функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$ больше или равна функции $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$ если для любого $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ выполнено $f(\widetilde{\alpha}) \geq g(\widetilde{\alpha})$, где сравнение производится относительно частичного порядка введенного выше. В этом случае будем также писать $f \geq g$.

Обозначим через K, D и L множество булевых конъюнкций, дизъюнкций и линейных функций соответственно. Через O^∞ обозначим множество всех булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, таких, что $f(\widetilde{x}) \geq x_i$, где $n \geq 1$ и $1 \leq i \leq n$. Через I^∞ обозначим множество всех булевых функций $g(x_1, \ldots, x_n)$, таких, что $g(\widetilde{x}) \leq x_i$, где $n \geq 1$ и $1 \leq i \leq n$.

Конечные системы функций A и B, такие, что $[A] = [B]$ называются полиномиально эквивалентными, если существуют такие константы c_1 и c_2, что для любой функции $f \in [A]$ выполнены неравенства

$$L_A^{c_1}(f) \leq L_B(f) \leq L_A^{c_2}(f).$$

Нетрудно доказать, что если системы A и B равномерны, то для они не являются полиномиально эквивалентными.

Глава 2

Достаточные условия равномерности

2.1. Общие методы

Следующая лемма является обобщением утверждения, используемого в работах [38, 64].

Лемма 2.1 *Пусть Σ — некоторая конечная сигнатура, такая, что арносить функциональных символов из A не больше n. Пусть Φ — формула над Σ, такая, что, для некоторого $r \geq 2$ выполнено неравенство $L(\Phi) \geq 2(n+1)^r$. Тогда формула Φ представляется в виде*

$$\Phi_1[\Phi_2[\ldots \Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]],$$

где $\Phi_1[y], \ldots, \Phi_{r-1}[y], \Phi_r$ — внешние формулы над Σ, и для каждого $i \in \{1, \ldots, r\}$ выполняется неравенство

$$L(\Phi_i) \geq \frac{L(\Phi)+1}{(n+1)^{r-1}}.$$

Доказательство. Докажем лемму для $r = 2$. Пусть Φ — формула над Σ, такая, что $L(\Phi) \geq 2(n+1)^2$. Определим последовательность формул $\Psi_0, \ldots, \Psi_t$ следующим образом. Обозначим через Ψ_0 формулу Φ. Для всех i, $i \geq 1$, таких, что $l(\Psi_{i-1}) > 1$ через Ψ_i обозначим произвольную главную подформулу формулы Ψ_{i-1} максимальной сложности. Пусть t — минимальное число, такое, что $l(\Psi_t) = 1$. Заметим, что для всех i, $1 \leq i \leq t$ выполнены неравенства

$$L(\Psi_i) < L(\Psi_{i-1}) \quad \text{и} \quad L(\Psi_i) \geq \frac{L(\Psi_{i-1})}{n}.$$

Выберем максимальное i, $i \in \{1, \ldots, t\}$, такое, что $L(\Psi_i) \geq \frac{L(\Phi)+1}{n+1}$. Отметим, что $L(\Psi_t) \leq n \leq \frac{L(\Phi)+1}{n+1}$, следовательно $i < t$. Тогда имеем

$$\frac{L(\Phi)+1}{n+1} \leq L(\Psi_i) \leq nL(\Psi_{i+1}) \leq (L(\Phi)+1)\frac{n}{n+1}.$$

Обозначим формулу Ψ_i через Φ_2. Тогда формула Φ представляется в виде $\Phi_1[\Phi_2]$, где $\Phi_1[y]$ — внешняя формула над Σ. Заметим, что

$$L(\Phi_1) = L(\Phi) - L(\Phi_2) + 1 \geq L(\Phi) - (L(\Phi)+1)\frac{n}{n+1} + 1 \geq \frac{L(\Phi)+1}{n+1}.$$

$$L(\Phi_2) = L(\Psi_i) \geq \frac{L(\Phi)+1}{n+1}.$$

Утверждение леммы для произвольного r несложно получить применением индукции по r. Лемма доказана.

Пусть $\widetilde{f} = (f_1(x), ..., f_r(x))$ — некоторый набор одноместных функций. Обозначим через $\widetilde{f}(x)$ функцию

$$f_1(f_2(\ldots f_{r-1}(f_r(x))\ldots))$$

и для $1 \leq i < j \leq r$ через $\widetilde{f}_{i,j}(x)$ функцию[1]

$$f_1(f_2(\ldots f_{i-1}(f_j(f_{j+1}(\ldots f_{r-1}(f_r(x)))\ldots))$$

Через $\widetilde{x}^r$ будем обозначать набор переменных

$$(x_{1,2}, \ldots, x_{1,r}, x_{2,3}, x_{2,4}, \ldots, x_{2,r}, \ldots, x_{r-2,r-1}, x_{r-2,r}, x_{r-1,r}),$$

в котором индексы — это всевозможные упорядоченные пары элементов из множества $\{1, \ldots, r\}$, упорядоченные по возрастанию сначала второго, а затем первого индекса. Например,

$$\widetilde{x}^4 = (x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,4}).$$

Заметим, что в наборе $\widetilde{x}^r$ всего C_r^2 переменных.

Через $P_{k,s}(1)$ обозначим множество всех одноместных функций из $P_{k,s}$, зависящих от переменной x.

Лемма 2.2 *Пусть $d_m^{(m)}$ — m-арный функциональный символ, $m \geq 3$. Тогда существуют число $r \geq 2$ и формула Φ над сигнатурой $\{d_m^{(m)}\}$ от переменных*

[1] $\widetilde{f}_{1,j}(x) = f_j(f_{j+1}(\ldots f_{r-1}(f_r(x)))\ldots))$

из набора $\widetilde{x}^r$ *такие, что для любой функции* $d_m(x_1, ..., x_m) \in pr_k^{-1}NA_s$ *и любого упорядоченного набора функций* $\widetilde{f} = (f_1(x), ..., f_r(x)) \in P_{k,s}^r(1)$ *выполняется*

$$\widetilde{f}(x) = g(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x)), \tag{2.1}$$

где $g(\widetilde{x}^r)$ *— функция, реализуемая формулой* Φ *над системой* $\{d_m\}$*, а функция* $\widetilde{f}_{i,j}(x)$ *подставляется в функцию* g *вместо переменной* $x_{i,j}$*,* $1 \leq i < j \leq r$*.*

Доказательство. Заметим, что утверждение леммы эквивалентно следующему утверждению: существует формула Φ над $\{d_m^{(m)}\}$ от переменных из $\widetilde{x}^r$, такая, что для любой функции $d_m(x_1, ..., x_m) \in pr_k^{-1}NA_s$ функция $g(\widetilde{x}^r)$, реализуемая формулой Φ над системой $\{d_m\}$, удовлетворяет равенству (2.1) для всех наборов из $P_{k,s}^r(1)$.

Положим $r = s^{k(m-1)} + 2$. Докажем, что для любого множества $B \subseteq P_{k,s}^r(1)$ существует формула Φ над $d_m^{(m)}$, такая, что для любой функции $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ и любого набора $\widetilde{f} \in B$ справедливо соотношение (2.1). Доказательство проведем индукцией по мощности $t = |B|$ множества B.

База индукции. Пусть $t = |B| \leq m - 1$, $B = \{\widetilde{f}^1, \ldots, \widetilde{f}^{m-1}\}$. Без ограничения общности будем считать, что $t = m - 1$ (если $t < m - 1$, то в B можно добавить $m - 1 - |B|$ произвольных наборов из $P_{k,s}^r(1)$). Пусть

$$\widetilde{f}^1 = (f_1^1, \ldots, f_r^1), \ldots, \widetilde{f}^{m-1} = (f_1^{m-1}, \ldots, f_r^{m-1}).$$

Докажем, что существуют такие i, j, $1 \leq i < j \leq r$, что для всех l, $1 \leq l \leq m - 1$, выполнено равенство

$$f_1^l(f_2^l(\ldots(f_r^l(x))\ldots))) = f_1^l(f_2^l(\ldots, f_{i-1}^l(f_j^l(f_{j+1}^l(\ldots(f_r^l(x))))) \ldots)).$$

Положим $h_j^l(x) = f_j^l(f_{j+1}^l(\ldots(f_r^l(x)))\ldots)$, для $1 < j \leq r$, $1 \leq l \leq m - 1$. Рассмотрим $r - 1$ набор

$$\widetilde{h}_2 = (h_2^1(x), \ldots, h_2^{m-1}(x)),\ \widetilde{h}_3 = (h_3^1(x), \ldots, h_3^{m-1}(x)), \ldots, \widetilde{h}_r = (h_r^1(x), \ldots, h_r^{m-1}(x))$$

из $P_{k,s}^{m-1}(1)$. Заметим, что $|P_{k,s}^{m-1}(1)| = s^{k(m-1)} < r - 1$. Значит, существуют такие

i, j, $2 \le i < j \le r$, что $\widetilde{h}_i = \widetilde{h}_j$. Тогда для всех l, $1 \le l \le m-1$, выполняется

$$f_i^l(f_{i+1}^l(\ldots f_{r-1}^l(f_r^l(x))\ldots)) = f_j^l(f_{j+1}^l(\ldots f_{r-1}^l(f_r^l(x))\ldots))$$

Следовательно, для каждого $l \in \{1, \ldots, m-1\}$ выполняется

$$f_1^l(f_2^l(\ldots(f_r^l(x))\ldots)) = f_1^l(f_2^l(\ldots, f_{i-1}^l(h_i^l(x)\ldots))) =$$
$$= f_1^l(f_2^l(\ldots f_{i-1}^l(h_j^l(x))\ldots)) = f_1^l(f_2^l(\ldots, f_{i-1}^l(f_j^l(f_{j+1}^l(\ldots(f_r^l(x)))))\ldots)).$$

Возьмем в качестве Φ формулу $d_m(x_{i,j}, \ldots, x_{i,j})$. Так как для любой функции $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in pr_k^{-1}NA_s$ и любого $\alpha \in E_s$ выполняется $d_m(\alpha, ..., \alpha) = \mathrm{pr}_s d_m(\alpha, ..., \alpha) = \alpha$, получаем, что равенство (2.1) имеет место для любой функции $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}NA_s$ и всех наборов из B.

Переход индукции. Пусть утверждение индукции выполнено для всех подмножеств, состоящих не более чем из t_0 наборов функций, где $t_0 \ge m-1$. Докажем утверждение для $t = t_0 + 1$. Пусть B — произвольное множество, такое, что $B = \{\widetilde{f}^1, \ldots, \widetilde{f}^t\}$, где $\widetilde{f}^1, \ldots, \widetilde{f}^t$ — наборы из $P_{k,s}^r(1)$. По индуктивному предположению для множеств

$$B_1 = \{\widetilde{f}^2, \widetilde{f}^3, \ldots, \widetilde{f}^t\}, B_2 = \{\widetilde{f}^1, \widetilde{f}^3, \ldots, \widetilde{f}^t\}, \ldots, B_m = \{\widetilde{f}^1, \ldots, \widetilde{f}^{m-1}, \widetilde{f}^{m+1}, \ldots, \widetilde{f}^t\}$$

существуют формулы Φ_1,...,Φ_m над сигнатурой $d_m^{(m)}$ от переменных из $\widetilde{x}^r$ такие, что для любой функции $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in pr_k^{-1}NA_s$ и любого упорядоченного набора функций $\widetilde{f}^j$ из B_i выполняется

$$\widetilde{f}^j(x) = g_i(\widetilde{f}^j_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}^j_{r-1,r}(x)), \tag{2.2}$$

где $g_i(\widetilde{x}^r)$ — функция, реализуемая формулой Φ_i над системой $\{d_m\}$.

Возьмем в качестве Φ формулу $d_m^{(m)}(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$. Пусть $d_m(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторая функция из $pr_k^{-1}NA_s$, $\widetilde{f}(x)$ — некоторый набор из $B = \{\widetilde{f}^1, ..., \widetilde{f}^t\}$. Тогда формула Φ над системой $\{d_m\}$ реализует функцию

$$g(\tilde{x}^r) = d_m(g_1(\tilde{x}^r), ..., g_m(\tilde{x}^r)).$$

Из определения функций g_i следует, что соотношение (2.2) справедливо для всех j, i, где $j \in \{1, \ldots, t\}$, $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$. Таким образом, все функции

$$g_i(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x)),$$

кроме, возможно, одной, равны функции $\widetilde{f}(x)$ для каждого $\widetilde{f} \in B$. Так как d_m — мажоритарная функция, имеем

$$g(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x)) = d_m(g_1(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x)), \ldots$$
$$\ldots, g_m(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x))) = \widetilde{f}(x).$$

Следовательно, равенство (2.1) выполнено на всех наборах функций из множества B и всех функций $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$.

Таким образом, при $B \in P^r_{k,s}(1)$ получаем, что существует формула Φ над $\{d_m^{(m)}\}$, для любой функции $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ реализующая над d_m функцию g, удовлетворяющую условиям леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.3 *Пусть* $r \geq 2$ *и функция* $g(\widetilde{x}^r) \in P_{k,s}$ *такова, что для любого* $\widetilde{f} \in P^r_{k,s}(1)$ *выполнено равенство* (2.1). *Тогда для любой конечной системы* A *функций из* $P_{k,s}$ *и любых формул* $\Phi_1[y], \ldots, \Phi_{r-1}[y], \Phi_r$ *над* A *выполнено равенство*

$$\Phi_1[\Phi_2[\ldots, \Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]] = g(\Psi_{1,2}, \ldots, \Psi_{r-1,r}),$$

где $\Psi_{i,j}$ *— формула* [2] $\Phi_1[\Phi_2[\ldots[\Phi_{i-1}[\Phi_j[\Phi_{j+1}[\ldots\Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]]]\ldots]]$, *подставляемая в* g *вместо переменной* $x_{i,j}$.

Доказательство. Пусть без ограничения общности формулы

$$\Phi_1[y], \ldots, \Phi_{r-1}[y], \Phi_r$$

реализуют над A функции

$$g_1(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, g_{r-1}(x_1, \ldots, x_n, y), g_r(x_1, \ldots, x_n)$$

[2] $\Psi_{1,j}$ — формула $\Phi_j[\Phi_{j+1}[\ldots\Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]]$

соответственно. Тогда для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что

$$g_1(\widetilde{x}, g_2(\widetilde{x}, \ldots, g_{r-1}(\widetilde{x}, g_r(\widetilde{x}))\ldots)) = g(g_{1,1}((\widetilde{x}), g_{1,2}(\widetilde{x}), \ldots, g_{r-1,r}(\widetilde{x})),$$

где

$$g_{i,j}((\widetilde{x}) = g_1(\widetilde{x}, g_2(\widetilde{x}, \ldots, g_{i-1}(\widetilde{x}, g_j(\widetilde{x}, \ldots, g_{r-1}(\widetilde{x}, g_r(\widetilde{x}))\ldots)).$$

Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из E_k^n. Положим $\widetilde{f} = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x))$, где

$$f_1(x) = g(\widetilde{\alpha}, x);\ f_2(x) = g_2(\widetilde{\alpha}, x); \ldots f_{r-1}(x) = g_{r-1}(\widetilde{\alpha}, x);\ f_r(x) = g_r(\widetilde{\alpha})$$

Согласно условиям леммы для функции g и набора $\widetilde{f}$ выполнено равенство (2.1). Поэтому

$$g_1(\widetilde{\alpha}, g_2(\widetilde{\alpha}, \ldots g_{r-1}(\widetilde{\alpha}, g_r(\widetilde{\alpha}))\ldots)) = f_1(f_2(\ldots f_{r-1}(f_r(x))\ldots)) =$$
$$= g(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x)) = g(\widetilde{g}_{1,2}(\widetilde{\alpha}), \ldots, \widetilde{g}_{r-1,r}(\widetilde{\alpha})),$$

Отсюда в силу произвольности набора $\widetilde{\alpha}$ вытекает требуемое соотношение (2.3). Лемма доказана.

Лемма 2.4 *Пусть Σ — конечная сигнатура. Пусть $d_m^{(m)}$ – m-арный функциональный символ, $m \geq 3$. Тогда существуют константы c и d, такие, что для любой нетривиальной формулы Φ над Σ существуют формула Ψ над сигнатурой $\{d_m^{(m)}\}$ от переменных из множества $\{y_1, \ldots, y_t\}$ и составные подформулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ формулы Φ, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *$l(\Psi) \leq c \log L(\Phi)$;*

2. *$L(\Phi_i) \leq d$ для всех $1 \leq i \leq t$;*

3. *для любой конечной система функций $A \subset P_{k,s}$ сигнатуры Σ и функции $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ формула, полученная из формулы Ψ заменой переменных $y_1, \ldots, y_t$ на формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ соответственно, эквивалентна формуле Φ над системой $A \cup \{d_m\}$.*

Доказательство. По лемме 2.2 существуют число $r \geq 2$ и формула Ψ' над $\{d_m^{(m)}\}$ от переменных из $\tilde{x}^r$, такая, что для любой функции $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ и любого набора функций $\widetilde{f} = (f_1(x), \ldots, f_r(x)) \in P_{k,s}^r(1)$ формула Ψ' реализует функцию $g(\widetilde{x}^r)$ над $\{d_m\}$, для которой выполнено равенство (2.1).

Пусть функциональные символы из Σ имеют арность не более, чем n. Положим

$$c = \frac{l(\Psi')}{\log \frac{2(n+1)^r}{(n+1)^r - 1}}; \quad d = 2(n+1)^r.$$

Докажем утверждение леммы индукцией по сложности формулы Φ. В случае $L(\Phi) \leq d$, в качестве формулы $\Psi[y_1]$ и Φ_1 можно взять формулу y_1 и формулу Φ.

Пусть утверждение леммы выполнено для всех формул сложности не более N, $N \geq d$. Докажем утверждение для формулы Φ, такой, что $L(\Phi) = N+1$.

Так как $L(\Phi) \geq d = 2(n+1)^r$, то по лемме 2.1 формулу Φ можно представить в виде $\Phi_1[\Phi_2[\ldots \Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]]$, где $L(\Phi_i) \geq \frac{L(\Phi)+1}{(n+1)^r}$ для всех $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Для всех i, j, $1 \leq i < j \leq r$ через $\Phi_{i,j}$ обозначим формулу

$$\Phi_1[\Phi_2[\ldots[\Phi_{i-1}[\Phi_j[\Phi_{j+1}[\ldots \Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]]]\ldots]\ldots]].$$

Заменим в формуле Ψ' переменные $x_{i,j}$ на формулы $\Phi_{i,j}$ для всех i, j, $1 \leq i < j \leq r$. Обозначим полученную формулу через Φ'. По лемме 2.3 для любой функции $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ и любой системы $A \subset P_{k,s}$ сигнатуры Σ формулы Φ и Φ' эквивалентны над $\{d_m\} \cup A$.

Заметим, что сложность любой формулы Φ_i не меньше 2, поэтому сложность любой формулы $\Phi_{i,j}$ не превосходит N. Следовательно по предположению индукции для любой формулы $\Phi_{i,j}$, существуют формула $\Psi_{i,j}$ над $\{d_m^{(m)}\}$ от переменных из множества $\{y_{i,j,1}, \ldots, y_{i,j,q}\}$ и составные подформулы $\Phi_{i,j,1}, \ldots, \Phi_{i,j,q}$ формулы $\Phi_{i,j}$, такие, что:

1. $l(\Psi_{i,j}) \leq c \log L(\Phi_{i,j})$;

2. $L(\Phi_{i,j,p}) \leq d$ для всех $1 \leq p \leq q$;

3. для любой конечной системы функций $A \subset P_{k,s}$ сигнатуры Σ и функции $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ формула $\Theta_{i,j}$, полученная из формулы $\Psi_{i,j}$ заменой переменных $y_{i,j,1}, \ldots, y_{i,j,q}$ на формулы $\Phi_{i,j,1}, \ldots, \Phi_{i,j,q}$ соответственно, эквивалентна формуле $\Phi_{i,j}$ над $\{d_m\} \cup A$.

Заметим, что составные подформулы $\Phi_{i,j,p}$ составных подформул $\Phi_{i,j}$ формулы Φ, очевидно, являются составными подформулами Φ. Заменим в формуле Ψ' переменные $y_{i,j}$ на формулы $\Psi_{i,j}$. Полученную формулу обозначим через Ψ. Докажем, что формула Ψ и все составные подформулы $\Phi_{i,j,p}$ — удовлетворяют условиям леммы.

Для проверки условия 3) рассмотрим формулу, полученную из формулы Ψ заменой каждой переменной $y_{i,j,p}$ на формулу $\Phi_{i,j,p}$. Заметим, что данная формула может быть получена из формулы Ψ заменой каждой переменной $x_{i,j,p}$ на формулу $\Theta_{i,j}$, эквивалентную согласно индуктивному предположению формуле $\Phi_{i,j}$ над $\{d_m\} \cup A$. Поэтому рассмотренная формула эквивалентна формуле Φ' и, следовательно, эквивалентна формуле Φ над $\{d_m\} \cup A$.

Условие 2) для составных подформул $\Phi_{i,j,p}$ очевидным образом вытекает из индуктивного предположения. Проверим условие 1):

$$\begin{aligned} l(\Psi) \le l(\Psi') + \max_{1\le i<j\le r} l(\Psi_{i,j}) \le l(\Psi) + \max_{1\le i<j\le r} (c \log L(\Phi_{i,j}) \le \\ \le l(\Psi) + c\log(L(\Phi) - \min_{1\le i\le r} L(\Phi_i) + 1) \le \\ \le c\log((L(\Phi)+1)\frac{(n+1)^r-1}{(n+1)^r}) + l(\Psi) \le \\ \le c\log(2L(\Phi)\frac{(n+1)^r-1}{(n+1)^r}) + l(\Psi) \le \\ \le c\log L(\Phi) + l(\Psi) - c\log\frac{2(n+1)^r}{(n+1)^r-1} \le c\log L(\Phi). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1 *Любая конечная система* A *функций из* $P_{k,s}$*, такая, что множество* $[\mathrm{pr}_s A]$ *содержит мажоритарную функцию, равномерна.*

Доказательство. Пусть A — конечная система функций из $P_{k,s}$. Пусть функция $d_m(x_1,\dots,x_m) \in [A]$ такова, что $\mathrm{pr}_s d_m \in \mathrm{N}A_s$.

Положим $B = A \cup \{d_m\}$. Из леммы 2.4 следует существование констант c и d, таких, что для любой формулы Φ над A существует формула Ψ над B эквивалентная Φ, для которой выполнено неравенство $l(\Psi) \le c \log L(\Phi) + d$.

Пусть g — произвольная функция из $[A]$. Тогда

$$l_A(g) \le l_A(d_m) l_B(g) \le l_A(d_m)(c \log L_A(g) + d) \le c l_A(d_m) \log L_A(g) + d l_A(d_m).$$

В силу произвольности выбора функции g теорема доказана.

2.2. Равномерность конечных систем функций из $P_{k,2}$, в проекции порождающих класс монотонных булевых функций

Лемма 2.5 *Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $g(x_1,\dots,x_7)$ — произвольные функции из $P_{k,2}$, $k \ge 3$, такие, что*

$$\mathrm{pr}_2 g = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2 \& (x_4x_5 \vee x_4x_6 \vee x_5x_7). \tag{2.3}$$

Тогда выполнено равенство

$$\begin{aligned} &f_1(f_2(f_3(x))) = \\ &\quad = g(f_1(1), f_1(0), f_2(f_3(x)), f_1(f_2(1)), f_1(f_2(0)), f_3(x), f_1(f_3(x))). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Доказательство. Положим $g'(x_1,\dots,x_7) = \mathrm{pr}_2 g$, $h_i = \mathrm{pr}_2 f_i$ для всех $i \in \{1,2,3\}$. Заменим в равенстве 2.4 все вхождения $f_3(x)$ на переменную x, а все функции g, f_1 и f_2 на функции g', h_1 и h_2. Получим равенство

$$h_1(h_2(x)) = g'(h_1(1), h_1(0), h_2(x), h_1(h_2(1)), h_1(h_2(0)), x, h_1(x)). \tag{2.5}$$

Заметим, что так как функция $f_3(x)$ принимает только значения 0 и 1, то для доказательства равенства 2.4 достаточно доказать равенство 2.5.

Обозначим через Φ формулу [3]

$$h_1(h_2(1))\&h_1(h_2(0)) \vee h_1(h_2(1))\&x \vee h_1(h_2(0))\&h_1(x).$$

Рассмотрим случаи. Пусть $h_1(x) = c$. Тогда

$$g'(h_1(1), h_1(0), h_2(x), h_1(h_2(1)), h_1(h_2(0)), x, h_1(x)) =$$
$$= c \vee c\&h_2(x) \vee c\&\Phi = c = h_1(h_2(x)).$$

Пусть $h_1(x) = x$. Тогда

$$g'(h_1(1), h_1(0), h_2(x), h_1(h_2(1)), h_1(h_2(0)), x, h_1(x)) =$$
$$= 1\&0 \vee 1\&h_2(x) \vee 0\&\Phi = h_2(x) = h_1(h_2(x)).$$

Пусть $h_1(x) = \overline{x}$. Тогда

$$g'(h_1(1), h_1(0), h_2(x), h_1(h_2(1)), h_1(h_2(0)), x, h_1(x)) =$$
$$= 0\&1 \vee 0\&h_2(x) \vee 1\&(\overline{h_2(1)}\&\overline{h_2(0)} \vee \overline{h_2(1)}\&x \vee \overline{h_2(0)}\&\overline{x}) =$$
$$= \neg\big((h_2(1) \vee h_2(0))\&(h_2(1) \vee \overline{x})\&(h_2(0) \vee x)\big) =$$
$$= \neg\big(h_2(1)\&h_2(0) \vee h_2(1)\&x \vee h_2(1)\&\overline{x}\&h_2(0) \vee h_2(0)\&h_2(1)\&x \vee h_2(0)\&\overline{x}\big) =$$
$$= \neg\big(h_2(1)\&h_2(0) \vee h_2(1)\&x \vee h_2(0)\&\overline{x}\big) = \overline{h_2(x)} = h_1(h_2(x)).$$

Следовательно, равенство 2.4 выполнено для любых f_1, f_2 и f_3. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, такая, что $\mathrm{pr}_2 A \subseteq M$. Тогда для любой формулы Φ над A вида $\Phi_1[\Phi_2[\Phi_3]]$ выполнено равенство

$$\Phi = g(\Phi_1[1], \Phi_1[0], \Phi_2[\Phi_3[x]], \Phi_1[\Phi_2[1]], \Phi_1[\Phi_2[0]], \Phi_3[x], \Phi_1[\Phi_3]),$$

где $g(x_1, \ldots, x_7)$ — функция из $P_{k,2}$, удовлетворяющая условию 2.3.

[3] под константами 0 и 1 мы формально будем понимать некоторые формулы, реализующие функции, тождественно равные 0 и 1 соответственно

Теорема 2.2 *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, такая, что $[\mathrm{pr}_2 A] = M$ и функции из A зависят не более, чем от n переменных. Тогда для любой функции f из $[A]$ справедливо неравенство 1.1, где*

$$c = \frac{l_A(g)}{\log_2 \frac{2(n+1)^2}{2(n+1)^2-1}}, \; d = \max_{\substack{f\in[A] \\ L(f)\le 2\max(L_A(0),L_A(1))(n+1)^2}} l_A(f),$$

где $g(x_1,\ldots,x_7)$ — функция из $[A]$ удовлетворяющая условию 2.3 и реализуемая формулой над A с наименьшей глубиной, тем самым система A равномерна.

Доказательство теоремы аналогично доказательству леммы 2.4 и опирается на следствие 1 из леммы 2.5.

2.3. Достаточные условия равномерности конечных систем функций из $P_{k,2}$

Пусть σ —некоторая подстановка на множестве E_k. Функция $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ называется двойственной к функции $g(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ относительно σ, если для любого $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ выполнено

$$\sigma^{-1}(f(\sigma(\alpha_1),\ldots,\sigma(\alpha_n))) = g(\widetilde{\alpha}).$$

Принцип двойственности. Пусть σ —некоторая подстановка на множестве E_k, $\Sigma = (f_1^{n_1},\ldots,f_t^{n_t})$— некоторая сигнатура. Пусть A и B — конечные системы функций P_k сигнатуры Σ, такие, что функция f_i из A двойственна функции f_i из B относительно σ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Тогда произвольная формула Φ над Σ реализует функции над A и B двойственные относительно σ.t

В данной главе в качестве двойственных функций мы будем рассматривать функции, двойственные относительно фиксированной подстановки s, состоящей из одного цикла $(0,1)$. Такие функции в дальнейшем будем называть двойственными. Нетрудно заметить, что если f и g —двойственные функции из $P_{k,2}$, то их проекции $\mathrm{pr}_2 f$ и $\mathrm{pr}_2 g$ будут двойственными булевыми функциями (определения двойственности для булевых функций см., например [37]). Заметим, что булева функция содержится в O^∞ тогда и только тогда, когда двойственная к ней функция содержится в I^∞.

Будем говорить что множества функций $A, B \subseteq P_{k,2}$ двойственны, если они состоят из двойственных функций. Двойственную систему к системе A будем обозначать через A^*. Таким образом, если $A \subset P_{k,2}$, $\mathrm{pr}_2 A \subset O^\infty$, , то $\mathrm{pr}_2 A^* \subset I^\infty$. Аналогично, если $\mathrm{pr}_2 A \subset M_{01} \setminus O^\infty$, то $\mathrm{pr}_2 A^* \subset M_{01} \setminus I^\infty$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in E_k$. Положим

$$M_f^{x_i} = \{\mathrm{pr}_2 f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}) |\ \widetilde{\alpha} \in E_k^{n-1}\},$$

$$V_f^{x_i} = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-1} |\ \mathrm{pr}_2 f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, y, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq 0, 1\},$$

$$f|_{x_i}^{\beta} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \beta, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Для произвольных множества $X = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ и набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^t$ положим

$$f|_X^{\widetilde{\alpha}} = (\ldots (f|_{x_{i_1}}^{\alpha_1})|_{x_{i_2}}^{\alpha_2}) \ldots)|_{x_{i_t}}^{\alpha_t},$$

$$M_f^X = \bigcup_{x \in X} M_f^x, \quad \widehat{M}_f^X = \bigcup_{x \in X} \{M_f^x\},$$

$$V_f^X = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-t} |\ \mathrm{pr}_2 f|_{\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus X}^{\widetilde{\alpha}} \neq 0, 1\}.$$

Будем говорить, что монотонная функция[4] $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$ обладает свойством # уровня r по множеству переменных $X = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ относительно замкнутого класса $B \subseteq P_{k,2}$ и набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-q}$, если существует функция $g(x_1, \ldots, x_{n-q}, y_1, \ldots, y_r) \in B$, такая, что:

1. для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^X$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \notin [\{0, 1\}]$;

2. если $\{0, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

[4] без ограничения общности здесь пологаем, что все функции зависят от переменных $x_1, x_2, \ldots$

3. если $\{1, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;

4. если $\widehat{M}_f^X = \{\{0, 1, x\}\}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$.

Множество функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, таких, что f обладает свойством # уровня r по множеству переменных $X = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ относительно замкнутого класса B и набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-q}$, будем обозначать через $\#_X^{\widetilde{\alpha}}(B, n, r)$. Положим

$$\#_X(B, n, r) = \bigcap_{\widetilde{\alpha} \in E_k^{|X|}} \#_X^{\widetilde{\alpha}}(B, n, r);$$

$$\#(B, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{X \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}} \#_X(B, n, r);$$

Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, Φ — нетривиальная формула над A. Пусть Φ имеет вид $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_t)$, $t \geq 1$. Пусть $I \subseteq \{1, \ldots, t\}$ — множество индексов, такое, что для всех $i \in I$ формула Φ_i является нетривиальной, а для всех $j \in \{1, \ldots, t\} \setminus I$ формула Φ_j является тривиальной. Положим

$$w_A(\Phi) = \bigcup_{i \in I} M_f^{x_i}, \quad \widehat{w}_A(\Phi) = \bigcup_{i \in I} \{M_f^{x_i}\}.$$

Таким образом, если A — система монотонных функций, то $w_A(\Phi) \subseteq \{0, 1, x\}$, а $\widehat{w}_A(\Phi)$ — множество различных множеств $M_f^{x_i}$.

Пусть P — множество нетривиальных подформул формулы Φ. Положим

$$W_A(\Phi) = \bigcup_{\Psi \in P} w_A(\Psi); \quad \widehat{W}_A(\Phi) = \bigcup_{\Psi \in P} \widehat{w}_A(\Psi).$$

В дальнейшем для удобства будем писать $w(\Phi)$, $\widehat{w}(\Phi)$, $W(\Phi)$ и $\widehat{W}(\Phi)$ вместо $w_A(\Phi)$, $\widehat{w}_A(\Phi)$, $W_A(\Phi)$ и $\widehat{W}_A(\Phi)$ соответственно.

Лемма 2.6 *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$. Пусть Φ — нетривиальная формула над A, такая, что $W(\Phi) \subseteq \{0, x\}$. Пусть Ψ — составная подформула формулы Φ. Пусть формула Φ реализует функцию*

$f(x_1, \dots, x_n)$, *а формула* Ψ — *функцию* $g(x_1, \dots, x_n)$. *Тогда выполнено неравенство* $f \le g$.

Доказательство. Если формулы Φ и Ψ совпадают, то неравенство очевидно выполнено. В противном случае, формула Φ имеет вид $\Phi_1[\Phi_2[\Phi_3]]$, где формула Ψ является составной подформулой формулы Ψ вида $\Phi_1[\Phi_3]$. Таким образом, достаточно доказать неравенство $f \le g$ для составной подформулы Ψ вида $\Phi_1[\Phi_3]$, из чего утверждение леммы будет следовать для произвольной составной подформулы формулы Ψ.

Пусть Ψ есть формула $\Phi_1[\Phi_3]$. Пусть формулы $\Phi_1[y], \Phi_2[y], \Phi_3$ реализуют функции $f_1(\widetilde{x}, y)$, $f_2(\widetilde{x}, y)$ и f_3 соответственно. Так как $W(\Phi) \subseteq \{0, x\}$, то $V^y_{f_1} \in \{0, x\}$ и $V^y_{f_2} \in \{0, x\}$. Следовательно, имеем [5]

$$f(\widetilde{x}) = f_1(\widetilde{x}, f_2(\widetilde{x}, f_3(\widetilde{x}))) = f_1(\widetilde{x}, f_3(\widetilde{x})) \& f_2(\widetilde{x}, 1) \le f_1(\widetilde{x}, f_3(\widetilde{x})) = g(\widetilde{x}).$$

Лемма доказана.

Утверждение 2.7 *Пусть* $f(x_1, \dots, x_n)$ *и* $g(x_1, \dots, x_n)$ — *монотонные функции из* $P_{k,2}$. *Пусть* Φ — *нетривиальная формула над* $\{f\}$, *а* Ψ — *формула над* $\{g\}$, *полученная из* Φ *заменой каждого функционального символа* f *на* g. *Тогда если* $f \ge g$, *то выполнено* $f' \ge g'$, *где* f' *и* g' — *функции реализуемые формулами* Φ *и* Ψ *над* $\{f\}$ *и* $\{g\}$ *соответственно.*

Доказательство нетрудно провести индукцией по глубине формулы Φ.

Лемма 2.8 *Пусть* Σ — *конечная сигнатура. Пусть* $d_m^{(m)}$ – m*-арный функциональный символ,* $m \ge 3$. *Тогда существуют константы* c *и* d, *такие, что для любой нетривиальной формулы* Φ *над* Σ *существуют формула* Ψ *над сигнатурой* $\{d_m^{(m)}\}$ *от переменных из множества* $\{y_1, \dots, y_t\}$ *и составные подформулы* $\Phi_1, \dots, \Phi_t$ *формулы* Φ, *удовлетворяющие следующим условиям:*

1. $l(\Psi) \le c \log L(\Phi)$;

[5] так как рассматриваемые функции f_1, f_2, f_3 принадлежат множеству $P_{k,2}$, то к значениям этих функций можно применять логические операции, в том числе конъюнкцию.

2. *$L(\Phi_i) \le d$ для всех $1 \le i \le t$;*

3. *для любой конечной системы функций $A \subset P_{k,2}$ с сигнатурой Σ, такой, что $W(\Phi) \subseteq \{0, x\}$, и любой функции $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{pr}_k^{-1}(M_{01} \setminus O^\infty)$ формула, полученная из формулы Ψ заменой переменных $y_1, \ldots, y_t$ на формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ соответственно, эквивалентна формуле Φ над системой $A \cup \{d_m\}$.*

Доказательство. По лемме 2.4, существует формула Ψ' над сигнатурой $\{d_m'^{(m)}\}$ и составные подформулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ формулы Φ, удовлетворяющие свойствам 1—2, такие, что для любой функции $d'_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_2$ и любой системы A сигнатуры Σ формула, полученная из формулы Ψ' заменой переменных $y_1, \ldots, y_t$ на формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ соответственно, эквивалентна формуле Φ над системой $A \cup \{d'_m\}$. Заменим в формуле Ψ' все функциональные символы d'_m на d_m, полученную формулу обозначим через Ψ. Очевидно, что формулы Ψ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ удовлетворяют условиям 1 и 2 из условия леммы. Докажем, что формулы Ψ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ удовлетворяют условию 3.

Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$ сигнатуры Σ, такая, что $W(\Phi) \subseteq \{0, x\}$ и $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{pr}_k^{-1} M_{01} \setminus O^\infty$. Положим

$$d'_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \widetilde{\alpha} \in E_2^m \text{ и в наборе } \widetilde{\alpha} \text{ не более одного нуля;} \\ d_m(\widetilde{\alpha}), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что $d'_m \ge d_m$ и $\mathrm{pr} d'_m \in \mathrm{N}A_2 \cap M$. Пусть формула Ψ реализует функцию $g(y_1, \ldots, y_t)$, формула Φ — функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, а формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ реализуют функции $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_t(x_1, \ldots, x_n)$ соответственно. Пусть формула Ψ' реализует функцию $g'(y_1, \ldots, y_t)$. Заменим в формуле Ψ' все вхождения переменных $y_1, \ldots, y_t$ на формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ и обозначим полученную формулу Ψ''. Согласно приведенному выше построению формулы Ψ'' и Φ эквивалентны. Заметим, что формула Ψ'' реализует функцию $g'(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x}))$. Так как

$d'_m \geq d_m$ то из утверждения 2.7 следует, что $g' \geq g$ и поэтому

$$f(\widetilde{x}) = g'(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x})) \geq g(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x})).$$

С другой стороны, так как $g \in [d_m]$, то $g \in M_{01}$, следовательно $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{x}) \geq x_1 \& \ldots \& x_t$, и поэтому [6]

$$g(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x})) \geq f_1(\widetilde{x}) \& f_2(\widetilde{x}) \& \ldots f_t(\widetilde{x}).$$

По лемме 2.6 имеем $f_i(\widetilde{x}) \geq f(\widetilde{x})$. Следовательно выполнено неравенство

$$f_1(\widetilde{x}) \& f_2(\widetilde{x}) \& \ldots f_t(\widetilde{x}) \geq f(\widetilde{x}).$$

Следовательно, имеем

$$f(\widetilde{x}) = g'(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x})) \geq g(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x})) \geq \\ \geq f_1(\widetilde{x}) \& f_2(\widetilde{x}) \& \ldots f_t(\widetilde{x}) \geq f(x).$$

Таким образом выполнено равенство $f(\widetilde{x}) = g(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x}))$, следовательно справедливо свойство 3 утверждения леммы. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, $d_m^{(m)}$ — m-местный функциональный символ. Тогда существуют константы c и d, такие, что для любой формулы Φ над A, существует формула Ξ над $\Sigma(A) \cup \{d_m^{(m)}\}$, такая, что $l(\Xi) \leq c \log L(\Phi) + d$ и формула Φ эквивалентна Ξ над $A \cup \{d_m\}$, если выполнено одно из следующих условий:*

1. $\mathrm{pr}_2 d_m \in \mathrm{N}A_2$;
2. $W_A(\Phi) = \{0, x\}$ *и* $\mathrm{pr}_2 d_m \in M_{01} \setminus O^\infty$;
3. $W_A(\Phi) = \{1, x\}$ *и* $\mathrm{pr}_2 d_m \in M_{01} \setminus I^\infty$.

[6] см сноску 3

Утверждение непосредственно следует из лемм 2.4 и 2.8 и принципа двойственности.

Будем говорить, что функция $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_{k,2}$ обладает свойством $\widehat{\#}$ уровня r по множеству переменных $X = \{x_{i_1},\ldots,x_{i_q}\} \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$ относительно замкнутого класса $B \subseteq P_{k,2}$, если существует функция $g(x_1,\ldots,x_{n-q},y_1,\ldots,y_r) \in B$, такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполнено:

1. если $\{0,x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0,x\},\{1,x\},\{0,1,x\}\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;
2. если $\{1,x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0,x\},\{1,x\},\{0,1,x\}\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;
3. если $\widehat{M}_f^X = \{\{0,1,x\}\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$.

Напомним определение множетсва $\widehat{\#}(B,r)$. Множество всех функций[7] от переменных $x_1,\ldots,x_n$, обладающих свойством $\widehat{\#}$ уровня r по множеству переменных X относительно замкнутого класса B будем обозначать через $\widehat{\#}_X(B,n,r)$. Положим

$$\widehat{\#}(B,r) = \bigcup_{n\in\{1,2,\ldots\}} \bigcap_{X\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}} \widehat{\#}_X(B,n,r).$$

Лемма 2.9 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, $r \geq 3$, такая, что $A \subseteq \#([A],r)$. Тогда для любой функции $f(x_1,\ldots,x_n) \in A$ и любого множества $X \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$ существует число $q \geq 3$, такое, что $f \in \widehat{\#}_X([A],n,q)$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \in A$. Для доказательства леммы достаточно доказать, что для любого $X \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$ существует такое q, что f обладает свойством $\widehat{\#}$ уровня q по множеству переменных X относительно класса $[A]$. Пусть без ограничения общности $X = \{x_{t+1},\ldots,x_n\}$, $t \geq 0$.

Так как $f \in \#([A],r)$, то для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ существует функция

$$g_{\widetilde{\alpha}}(x_1,\ldots,x_t,y_1,\ldots,y_r) \in [A],$$

[7] без ограничения общности здесь пологаем, что все функции зависят от переменных $x_1, x_2, \ldots$

удовлетворяющая свойствам 1—4 из определения свойства $\#$. Пусть $V_f^X = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_p\}$. Положим $h_1(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_r) = g_{\widetilde{\alpha}_1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Для всех $i \in \{2, \ldots, p\}$ положим

$$\begin{aligned} h_i(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_{r^i}) = h_{i-1}(x_1, \ldots, x_t, g_{\widetilde{\alpha}_i}(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_r), \ldots \\ g_{\widetilde{\alpha}_i}(x_1, \ldots, x_t, y_{r+1}, \ldots, y_{2r}), \ldots, g_{\widetilde{\alpha}_i}(x_1, \ldots, x_t, y_{r^i-r+1}, \ldots, y_{r^i})). \end{aligned}$$

Положим $q = r^p$ и $g(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = h_p(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Докажем, что для функции g выполняются свойства 1—3 из определения свойства $\widehat{\#}$. Так как для всех $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g_{\widetilde{\alpha}_i}(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{y}) \in M_{01}$, то для всех $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполнено $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01}$.

Докажем пункт 1. Для этого индукцией по $j \in \{1, \ldots, p\}$ покажем, что для любого $\widetilde{\alpha}_i$, где $i \in \{1, \ldots, j\}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 h_j(\widetilde{\alpha}_y, \widetilde{y}) \notin O^\infty$. Для $j = 1$ это утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для всех $j \leq j_0$, где $j_0 \geq 1$. Докажем для $j \in \{j_0, \ldots, p\}$. Пусть $i \in \{1, \ldots, j-1\}$, $s \in \{1, \ldots, r^j\}$. Имеем

$$\begin{aligned} h_j(\widetilde{\alpha}_i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1 \text{ раз}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r^j - s \text{ раз}}) = h_{j-1}\bigl(\widetilde{\alpha}_i, \underbrace{g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_i, 0, \ldots, 0), \ldots, g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_i, 0, \ldots, 0)}_{[(s-1)/r] \text{ раз}}, \\ g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1-[(s-1)/r]r \text{ раз}}, 1, 0, \ldots, 0), \underbrace{g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_i, 0, \ldots, 0), \ldots, g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_i, 0, \ldots, 0)}_{r^{j-1}-1-[(s-1)/r] \text{ раз}}\bigr) \leq \\ \leq h_{j-1}(\widetilde{\alpha}_i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{[(s-1)/r] \text{ раз}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r^{j-1}-1-[(s-1)/r] \text{ раз}}) = 0 \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} h_j(\widetilde{\alpha}_j, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1 \text{ раз}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r^j - s \text{ раз}}) = h_{j-1}\bigl(\widetilde{\alpha}_j, \underbrace{g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_j, 0, \ldots, 0), \ldots, g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_j, 0, \ldots, 0)}_{[(s-1)/r] \text{ раз}}, \\ g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_j, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1-[(s-1)/r]r \text{ раз}}, 1, 0, \ldots, 0), \underbrace{g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_j, 0, \ldots, 0), \ldots, g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_j, 0, \ldots, 0)}_{r^{j-1}-1-[(s-1)/r] \text{ раз}}\bigr) \leq \\ \leq h_{j-1}(0, \ldots, 0) = 0 \end{aligned}$$

Аналогично, имеем $h_i(\widetilde{\alpha}_i, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = 0$. Следовательно, $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{y}) \notin O^\infty$ для всех $i \leq j \leq 1$ и $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \notin M_{01} \setminus O^\infty$.

Пункт 2 следует из пункта 1 по принципу двойственности, а пункт 3 следует из того, что $\mathrm{N}A_2 = M_{01} \setminus (O^\infty \cup I^\infty)$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \#([A], r)$, $r \geq 3$. Тогда существует такое $q \geq r$, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], q)$.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$. По лемме 2.9 для любой $f \in A$ и любого $X \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ существует число $q = q(f, X)$ и функция $g(x_1, \ldots, x_{n-|X|}, y_1, \ldots, y_q)$, такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполнены условия 1–3 из определения свойства $\widehat{\#}$.

Нетрудно заметить, что если $q_1 > q_2$ и $f \in \#_X(B, q_1)$, то $f \in \#_X(B, q_2)$ так как любую функцию g удовлетворяющую свойствам 1—3 из определения свойства $\widehat{\#}$ можно рассматривать как функцию от переменных $x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_{q_2}$.

Следовательно, за q можно взять число $\max\limits_{\substack{f \in A \\ X \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}}} q(f, X)$. Лемма доказана.

Лемма 2.10 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда следующие множества формул над A равномерны:*

1. *множество F_0 всех формул Φ над A, таких, что $\widehat{W}(\Phi) = \{\{0, x\}\}$;*

2. *множество F_1 всех формул Φ над A, таких, что $\widehat{W}(\Phi) = \{\{1, x\}\}$;*

3. *множество F' всех формул Φ над A, таких, что $\widehat{w}(\Phi) = \{\{0, 1, x\}\}$.*

Доказательство. Положим $p = \max\limits_{h(x_1, \ldots, x_{m+r}) \in [A]} l(h)$, где m — максимальное число переменных, от которых зависят функции из A. Пусть $d_r^{(r)}$ — r местный функциональный символ.

Пусть $F \in \{F_0, F_1, F'\}$. Тогда по следствию 1 из леммы 2.8 существуют такие константы c и d, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над $\Sigma(A) \cup \{d_r^{(r)}\}$ такая, что $l(\Psi) \le c \log L(\Phi) + d$ и Φ эквивалентна Ψ над $A \cup \{d_r\}$, если выполнено одно из следующих условий:

1. $\mathrm{pr}_2 d_r \in \mathrm{N}A_2$;

2. $\Phi \in F_0$ и $\mathrm{pr}_2 d_r \in M_{01} \setminus O^\infty$;

3. $\Phi \in F_1$ и $\mathrm{pr}_2 d_r \in M_{01} \setminus I^\infty$.

Пусть Φ — формула из F такая, что $l(\Phi) \ge 2$. Пусть без ограничения общности формула Φ имеет вид $f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q)$, где все формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ являются нетривиальными. Пусть $\Psi_1, \ldots, \Psi_q$ — формулы над $\Sigma(A) \cup \{d_r^{(r)}\}$, эквивалентные формулам $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ соответственно над $A \cup \{d_r\}$ для всех функций d_r, для которых выполнены условия 1—3, приведенные выше, и такие, что $l(\Psi_i) \le c \log L(\Phi_i) + d$.

Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$, то существует функция $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$, такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, где $X = \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+q}\}$, выполнено:

1. если $\widehat{M}_f^X = \widehat{w}(\Phi) = \{\{0, 1, x\}\}$, т.е. $\Phi \in F'$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$;

2. если $\widehat{M}_f^X = \widehat{W}(\Phi) = \{\{0, x\}\}$ т.е. $\Phi \in F_0$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

3. если $\widehat{M}_f^X = \widehat{W}\Phi) = \{\{1, x\}\}$ т.е. $\Phi \in F_1$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$.

Заменим в формулах $\Psi_1, \ldots, \Psi_q$ все подформулы вида $d_r(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r)$ на формулы $g(x_1, \ldots, x_n, \Phi'_1, \ldots, \Phi'_r)$. Полученные формулы обозначим через $\Psi'_1, \ldots, \Psi'_q$. Пусть формула Ψ_i реализуют функции $h_i(x_1, \ldots, x_p)$, а формулы Ψ'_i реализуют функции $h'_i(x_1, \ldots, x_p)$, где $p \ge n$. Так как при всех $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ функция $d_r^\alpha(x_1, \ldots, x_r) = g(\widetilde{\alpha}, x_1, \ldots, x_r)$ удовлетворяет условиям следствия 1 из леммы 2.8, то при всех $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ имеем

$$h_i(\widetilde{\alpha}, x_{n+1}, \ldots, x_p) = h'_i(\widetilde{\alpha}, x_{n+1}, \ldots, x_p) \qquad (2.6)$$

Обозначим черех Ψ' формулу $f(x_1, \ldots, x_n, \Psi'_1, \ldots, \Psi'_q)$. Пусть формулы Φ и Ψ реализуют функции $h(x_1, \ldots, x_p)$ и $h'(x_1, \ldots, x_p)$ соответственно. Из определения множества V_f^X следует, что для любого $\widetilde{\beta} \in E_k^n \setminus V_f^X$ выполнено

$$\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\beta}, x_1, \ldots, x_q) = h(\widetilde{\beta}, x_{n+1}, \ldots, x_p) = h'(\widetilde{\beta}, x_{n+1}, \ldots, x_p) = \mathrm{const}.$$

Кроме того, из (2.6) следует, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполнено $h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}) = h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x})$. Следовательно, Ψ' и Φ эквивалентны. Кроме того, имеем

$$l(\Psi') \leq 1 + \max_{i \in \{1,\ldots,q\}} l(\Psi'_q) \leq 1 + c \log L(\Phi') + d.$$

Так как $g \in [A]$, то существует формула Ψ над A, такая, что Ψ эквивалентна Ψ' и

$$l(\Psi) \leq l(\Psi') l(g) \leq cp \log L(\Phi') + dp + p.$$

Следовательно, поскольку формула Ψ' эквивалентна Φ над A, то лемма доказана.

Формулу Φ над конечной системой монотонных функций A будем называть приведенной, если $\widehat{W}(\Phi) \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$, т.е. в множестве $\widehat{W}(\Phi)$ не содержатся множества $\{0\}$, $\{1\}$, $\{x\}$ и $\{0, 1\}$.

Лемма 2.11 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Пусть F— множество всех приведенных формул Φ над A, таких, что $\{1, x\} \in \widehat{w}_A(\Phi)$. Тогда для любого $q \geq 3$ и q-местного функционального символа $d_q^{(q)}$ существуют константы c и d, такие, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над сигнатурой $\Sigma(A) \cup \{d_q^{(q)}\}$, удовлетворяющая следующим условиям: $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$, и для любой функции $d_q(x_1, \ldots, x_q) \in \mathrm{pr}_k^{-1} M_{01} \setminus O^\infty$ формулы Φ и Ψ эквивалентны над $A \cup \{d_q\}$.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности формула Φ имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_t, \Phi_1, \ldots, \Phi_m),$$

где $f \in A$ и все формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ являются нетривиальными и $M_f^{x_{t+m}} = \{1, x\}$. Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$, то существует функция $g(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_r)$, такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, где $X = \{x_{t+1}, \ldots, x_m\}$, выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$. Тогда для любой функции $d_q(x_1, \ldots, x_q) \in M_{01} \setminus O^\infty$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, выполнено

$$\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, d_q(x_1^1, \ldots, x_q^1), \ldots, d_q(x_1^r, \ldots, x_q^r)) \in \mathrm{N}A_2. \tag{2.7}$$

По пункту 1 из следствия 1 из леммы 2.8 существуют константы c' и d' зависящие только от A и числа qr, и формула Ψ' над сигнатурой $\Sigma(A) \cup \{d_{qr}^{(qr)}\}$, такая, что $l(\Psi) \le c' \log L(\Phi) + d'$, и для любой функции d_{qr}, такой, что $\mathrm{pr}_2 d_{qr} \in \mathrm{N}A_2$ формулы Φ и Ψ' эквивалентны над $A \cup \{d_{qr}\}$. Заменим в формуле Ψ' все подформулы вида $d_{qr}(\Phi_1, \ldots, \Phi_{qr})$ на формулы

$$g(x_1, \ldots, x_t, d_q(\Phi_1, \ldots, \Phi_q), d_q(\Phi_{q+1}, \ldots, \Phi_{2q}), \ldots, d_q(\Phi_{qr-q+1}, \ldots, \Phi_{qr}).$$

Полученную формулу обозначим через Ψ''. Пусть без ограничения общности формулы Φ и Ψ'' реализуют функции $h(x_1, \ldots, x_p)$ и $h'(x_1, \ldots, x_p)$ соответственно, где $p \ge t$. Из (2.7) следует, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполнено

$$h'(\alpha_1, \ldots, \alpha_t, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h(\alpha_1, \ldots, \alpha_t, x_{t+1}, \ldots, x_p). \tag{2.8}$$

Обозначим через Ψ''' формулу $f(x_1, \ldots, x_t, \Psi'', \ldots, \Psi'')$. Пусть формула Ψ''' реализует функцию $h'''(x_1, \ldots, x_p)$. Так как для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполнено $\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\alpha}, x, \ldots$ x, то из (2.8) следует, что $h'''(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p)$. Кроме того, для любого $\widetilde{\beta} \in E_k^t \setminus V_f^X$ выполнено

$$\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_{t+r}) = \mathrm{const} = h(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h'''(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p),$$

следовательно формулы Ψ''' и Φ эквивалентны. Пусть функции из A зависят не более, чем от m переменных. Положим

$$p = \max_{h(x_1, \ldots, x_{r+m}) \in [A]} l(h), \quad c = 2pc, \quad d = 2pd' + p$$

Имеем $l(g) \leq p$, следовательно существует формула Ψ над A, эквивалентная Ψ''', такая, что

$$l(\Psi) \leq pl(\Psi''') \leq p(1 + l(\Psi'')) \leq p(1 + 2l(\Psi)) \leq$$
$$\leq p(1 + 2(c' \log L(\Phi) + d')) = 2pc' \log L(\Phi) + 2pd' + p = c \log L(\Phi) + d.$$

Поскольку формула Ψ эквивалентна формуле Φ над $A \cup \{d_q\}$, то лемма доказана.

Лемма 2.12 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Пусть F— множество всех приведенных формул Φ над A, таких, что, $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$. Тогда существуют константы c и d, такие, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над A, удовлетворяющая следующим условиям: $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$ и выполнено неравенство $f(\widetilde{x}) \leq g(\widetilde{x})$, где $f(\widetilde{x})$ и $g(\widetilde{x})$ — функции, реализуемые формулами Φ и Ψ соответственно.*

Доказательство. Пусть F_1 —множество всех приведенных формул Ξ над A, таких, что $\{1, x\} \in \widehat{w}(\Xi)$. По лемме 2.11, существуют такие константы c_1 и d_1, что для любой формулы $\Phi' \in F_1$ существует формула Φ'' над сигнатурой $\Sigma(A) \cup \{d_r^{(r)}\}$, такая, что выполнено неравенство $l(\Phi'') \leq c_1 \log L(\Phi') + d_1$, и для любой функции $d_r(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{pr}_k^{-1}(M_{01} \setminus O^\infty)$ формулы Φ' и Φ'' эквивалентны над $A \cup \{d_r\}$.

По лемме 2.10 множество F' всех формул Ξ над A, таких, что $\widehat{w}(\Xi) = \{\{0, 1, x\}\}$, равномерно. Следовательно, существуют такие константы c_2 и d_2, что для любой формулы $\Xi \in F'$ существует формула Ξ' над A, эквивалентная Ξ, такая, что $l(\Xi') \leq c_2 \log L(\Xi) + d_2$.

Положим

$$u = \max_{h(x_1,\ldots,x_r) \in [A]} l(h); \quad c = u \max(c_1, c_2); \quad d = u \max(d_1, d_2) + 1$$

Докажем индукцией по глубине формулы Φ, что константы c и d удовлетворяют условиям леммы. Если $l(\Phi) = 1$, то утверждение леммы очевидно выполнено. Пусть утверждение леммы выполнено для всех формул Φ глубины не более M. Докажем это утверждение для формулы Φ, такой, что $l(\Phi) = M + 1$. Пусть без ограничения общности Φ имеет вид $h(x_1, \ldots, x_t, \Phi_{t+1}, \ldots, \Phi_n)$, где $h \in A$ и все формулы $\Phi_{t+1}, \ldots, \Phi_n$ являются нетривиальными.

Так как $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$, то существует такое i, $i \in \{t+1, \ldots, n\}$ что $M_h^{x_i} = \{0, x\}$. Без ограничения общности будем считать что $i = n$. Рассмотрим три случая: $\Phi_n \in F$, $\Phi_n \in F_1$ и $\Phi_n \in F'$.

Пусть $\Phi_n \in F$. Тогда по предположению индукции существует формула Φ'_n над A, такая, что

$$l(\Phi'_n) \le c \log L(\Phi_n) + d \le c \log L(\Phi) + d,$$

и выполнено неравенство $f'_n(\widetilde{x}) \le g'_n(\widetilde{x})$, где $f'_n(\widetilde{x})$ и $g'_n(\widetilde{x})$ — функции, реализуемые формулами Φ_n и Φ'_n соответственно. Следовательно, так как $M_h^{x_n} = \{0, x\}$, то $f \le f'_n \le g'_n$, поэтому в качестве формулы Ψ можно взять формулу Φ'_n.

Если $\Phi_n \in F'$, то существует формула Φ'_n над A, эквивалентная Φ_n, такая что $l(\Phi'_n) \le c_2 \log L(\Phi_n) + d_2$. Так как $M_h^{x_n} = \{0, x\}$, то функция реализуемая формулой Φ не превосходит функцию, реализуемую формулой Φ_n, и в качестве формулы Ψ можно взять формулу Φ'_n.

Если $\Phi_n \in F_1$, то как указано выше существует такая формула Ψ_n над $\Sigma(A) \cup d_r^{(r)}$, что для любой функции $d_r(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{pr}_k^{-1}(M_{01} \setminus O^\infty)$ формулы Φ_n и Ψ_n эквивалентны над $A \cup \{d_r\}$, и выполнено неравенство

$$l(\Psi_n) \le c_1 \log L(\Phi_n) + d_1.$$

Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$, то существует такая функция $w(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_h^X$, где $X = \{x_{t+1}, \ldots, x_n\}$, выполнено $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$. Заменим в формуле Ψ_n все подформулы вида $d_r(\Xi_1, \ldots, \Xi_r)$ на формулы

$$w(x_1, \ldots, x_t, \Xi_1, \ldots, \Xi_r).$$

Полученную формулу обозначим через Ψ'_n. Пусть формулы Φ_n и Ψ'_n реализуют функции $h_1(x_1, \ldots, x_p)$ и $h_2(x_1, \ldots, x_p)$ соответственно. Тогда согласно построению формулы Ψ'_n для любого $\widetilde{\alpha} \in V_h^X$ выполнено равенство

$$h_1(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h_2(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p).$$

Обозначим через Ψ' формулу $h(x_1, \ldots, x_t, \Psi'_n, \ldots, \Psi'_n)$. Пусть формула Ψ' реализует функцию $f'(x_1, \ldots, x_p)$. Заметим, что так как $M_h^{x_n} = \{0, x\}$, то $h_1 \geq f$, и, кроме того, если $\widetilde{\alpha} \in E_k^t \setminus V_f^X$, то $f(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = f'(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = 0$. Если $\widetilde{\beta} \in V_h^X$, то

$$f'(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h_2(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h_1(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p) \geq f(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p)$$

Следовательно, $g(\widetilde{x}) \geq f(\widetilde{x})$. Так как $w \in A$, то существует формула Ψ над A эквивалентная Ψ', такая, что $l(\Psi) \leq l(\Psi')l(w) \leq l(\Psi')u \leq c \log L(\Phi) + d$.

Лемма 2.13 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда существуют такие константы c и d, что для любой приведенной формулы Φ над A вида*

$$f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Psi_1, \ldots, \Psi_t),$$

где $q \geq 1$, $t \geq 0$ и все формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Psi_1, \ldots, \Psi_t$ являются нетривиальными и для функции $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_t)$ выполнены условия:

1. $\widehat{M}_f^{\{y_1, \ldots, y_q\}} = \{\{0, x\}\}$;
2. $\widehat{M}_f^{\{z_1, \ldots, z_t\}} \subseteq \{\{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$;

существуют формулы $\Xi_1, \ldots, \Xi_t$ над A, для которых выполнено $l(\Xi_i) \leq c \log L(\Phi) + d$ и $\Phi = f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Xi_1, \ldots, \Xi_t)$ над A.

Доказательство. Поскольку для $t = 0$ утверждение теоремы очевидно, будем полагать $t > 0$. Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ и $q \geq 1$, то существует функция $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$, такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{\{y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_t\}}$ выполнено $g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$.

По лемме 2.11 существуют константы c_1 и d_1 над A, такие, что для любой приведенной формулы Ψ над A, такой, что $\{1, x\} \in \widehat{w}(\Psi)$, существует формула Ψ' над $\Sigma(A) \cup \{d_r^{(r)}\}$, такая, что $l(\Psi') \leq c_1 \log L(\Psi) + d_1$ и для любой функции $d_r \in \mathrm{pr}_k^{-1}(M_{01} \setminus O^\infty)$ формулы Ψ и Ψ' эквивалентны.

По лемме 2.10 существуют такие константы c_2 и d_2 над A, что для любой приведенной формулы Ψ, такой, что $\widehat{w}(\Psi) = \{\{0, 1, x\}\}$, существует эквивалентная формула Ψ' над A, такая, что $l(\Psi') \leq c_2 \log L(\Psi) + d_2$.

По лемме 2.12 существуют константы c_3 и d_3, такие, что для любой приведенной формулы Ψ над A, такой, что $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$ существует формула Ψ' над A, для которой выполнено $l(\Psi') \leq c_3 \log L(\Psi) + d_3$, и выполнено неравенство $h' \geq h$, где h и h' — функции реализуемые формулами Ψ и Ψ' соответственно.

Пусть функции из A зависят не более чем от m переменных. Положим

$$p = \max_{h(x_1, \ldots, x_{m+r}) \in [A]} l(h); \quad c = pc_1 + pc_2 + c_3; \quad d = pd_1 + pd_2 + d_3 + p \log m.$$

Пусть Φ — формула, удовлетворяющая условиям леммы. Пусть формула Φ реализует функцию $h(x_1, \ldots, x_u)$ над A, где $u \geq n$. Для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$ через Φ_i' обозначим формулу

$$f(x_1, \ldots, x_n, \underbrace{y, \ldots, y}_{q \text{ раз}}, \underbrace{\Psi_i, \ldots, \Psi_i}_{t \text{ раз}}).$$

Заметим, что $\widehat{w}(\Phi_i') \subseteq \{\{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$. Рассматривая отдельно случаи $\{1, x\} \in \widehat{w}(\Phi_i')$ и $\widehat{w}(\Phi_i') = \{\{0, 1, x\}\}$ получим, что существует формула Ψ_i' над $\Sigma(A) \cup \{d_r^{(r)}\}$, такая, что

$$l(\Psi_i') \leq \max(c_1, d_1) \log L(\Phi_i') + \max(d_1, d_2)$$

и для любой функции $d_r \in M_{01} \setminus O^\infty$ формулы Φ_i' и Ψ_i' эквивалентны над $A \cup \{d_r\}$. Заменим в формуле Ψ_i' все подформулы вида $d_r(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ на формулы $g(x_1, \ldots, x_n, \Omega_1, \ldots, \Omega_r)$. Полученную формулу обозначим через Ψ_i''.

Пусть формулы Ψ_i, Φ_i' и Ψ_i'' реализуют функции $h_i(x_1, \ldots, x_u)$, $h_i'(x_1, \ldots, x_u, y)$ и $h''(x_1, \ldots, x_u, y)$ соответственно, где $u \geq n$. Согласно построению формул Ψ_i'' и Φ_i'

для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, такого, что $(\widetilde{\alpha}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q \text{ раз}}) \in V_f^Z$, где $Z = \{z_1, \ldots, z_t\}$, (заметим, что в этом случае $\widetilde{\alpha} \in V_f^{\{y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_t\}}$) выполнено

$$h_i(\widetilde{\alpha}, x_{n+1}, \ldots, x_u) = h_i'(\widetilde{\alpha}, x_{n+1}, \ldots, x_u, 1) = h_i''(\widetilde{\alpha}, x_{n+1}, \ldots, x_u, 1). \tag{2.9}$$

Пусть Ψ_i''' — формула над A минимальной глубины эквивалентная Ψ_i''. Тогда

$$\begin{aligned} l(\Psi_i''') \leq l(\Psi_i'')l(g) \leq l(g)l(\Psi_i') \leq pl(\Psi_i') \leq \\ \leq p\max(c_1, c_2)\log L(\Phi_i') + p\max(d_1, d_2) \leq \\ \leq p\max(c_1, c_2)\log(mL(\Psi_i)) + p\max(d_1, d_2) \leq \\ \leq p\max(c_1, c_2)\log L(\Phi) + p\log m + p\max(d_1, d_2) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Пусть формула $f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Psi_1''', \ldots, \Psi_t''')$ реализует функцию $h''(x_1, \ldots, x_u, y)$. Докажем, что $h''(\widetilde{x}, 1) = h(\widetilde{x})$. Пусть $\widetilde{\beta} \in E_k^u$. Если $(\beta_1, \ldots, \beta_n, 1, \ldots, 1) \in V_f^X$, то $h''(\widetilde{\beta}, 1) = h(\widetilde{\beta})$ солгасно равенству (2.9). Если $(\beta_1, \ldots, \beta_n, 1, \ldots, 1) \notin V_f^X$ и $\beta_{n+1} = \ldots = \beta_{n+q} = 1$, то функция

$$\mathrm{pr}_2 f(\beta_1, \ldots, \beta_{n+q}, x_{n+q+1}, \ldots, x_{n+q+t})$$

является константой и равенство $h''(\widetilde{\beta}, 1) = h(\widetilde{\beta})$ очевидно выполнено. Если $(\beta_1, \ldots, \beta_n, 1, \ldots, 1) \notin V_f^X$ и существует j, $j \in \{n+1, \ldots, n+q\}$, такое, что $\beta_j = 0$, то $h''(\widetilde{\beta}, 1) = h(\widetilde{\beta}) = 0$ так как $M_f^{x_j} = \{0, x\}$.

Так как $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$, то существует формула Φ' над A, такая, что $l(\Phi') \leq c_3 \log L(\Phi) + d_3$ и $h' \geq h$, где $h'(x_1, \ldots, x_u)$ — функция, реализуемая формулой Φ'. Заменим в формулах Ψ_i'' все вхождения переменной y на формулу Φ'. Обозначим полученную формулу через Ξ_i. Заметим, что

$$\begin{aligned} l(\Xi_i) \leq l(\Psi_i'') + l(\Phi') \leq \\ \leq p\max(c_1, c_2)\log L(\Phi) + p\log m + p\max(d_1, d_2) + c_3\log L(\Phi) + d_3 \leq \\ \leq c\log L(\Phi) + d \end{aligned}$$

Так как $h' \geq h$, то пользуясь монотонностью функции h'' получим

$$h(\widetilde{x}) = h''(\widetilde{x}, 1) = h''(\widetilde{x}, h'(\widetilde{x})).$$

Заметим, что $h''(\widetilde{x}, h'(\widetilde{x}))$ — функция, реализуемая формулой $f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Xi_1, \ldots, \Xi_t)$. Следовательно формулы Ξ_i удовлетворяют условиям леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.14 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Пусть Ψ — формула над A, такая, что $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Psi)$. Тогда существуют такие константы c и d, что для любой подформулы Φ формулы Ψ, такой, что $\widehat{w}(\Phi) \subseteq \{\{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$ существует формула Φ' над A, такая, что $l(\Phi') \leq c \log L(\Phi) + d$, для которой выполнено равенство*

$$\Psi_0[\Phi] = \Psi_0[\Phi'],$$

где $\Psi_0[y]$ такая внешняя подформула формулы Ψ, что Ψ имеет вид $\Psi_0[\Phi]$.
Доказательство. Пусть формула Φ имеет вид

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, \Psi_1, \ldots, \Psi_t),$$

где $t \geq 1$ и все формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_t$ являются нетривиальными. Пусть формула Ψ имеет вид $f_2(z_1, \ldots, z_m, \Xi_1, \ldots, \Xi_u)$, где все формулы $\Xi_1, \ldots, \Xi_u$ — нетривиальные. Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$, $\{0, x\} \in w(\Phi)$ и $\widehat{w}(\Psi) \subseteq \{\{1, x\}, \{0, 1, x\}$, то существуют функции $g_1(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_r), g_2(z_1, \ldots, x_m, v_1, \ldots, v_r) \in [A]$, такие, что для любых наборов $\widetilde{\alpha} \in V_{f_1}^X, \widetilde{\beta} \in V_{f_2}^Z$, где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ выполнено

$$\mathrm{pr}_2 g_1(\widetilde{\alpha}, \widetilde{v}) \in M_{01} \setminus I^\infty, \quad pr_2 g_2(\widetilde{\beta}, \widetilde{v}) \in M_{01} \setminus O^\infty. \tag{2.11}$$

Положим

$$g(\widetilde{x}, \widetilde{z}, \widetilde{v}) = g_1(\widetilde{x}, g_2(\widetilde{z}, v_1, v_1, \ldots, v_r), g_2(\widetilde{z}, v_{r+1}, \ldots, v_{2r}), \ldots, g_2(\widetilde{z}, v_{r^2} - r+1, \ldots, v_{r^2})).$$

Из 2.11 имеем $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{v}) \in \mathrm{N}A_2$ для всех наборов $\widetilde{\alpha} \in V_{f_1}^X, \widetilde{\beta} \in V_{f_2}^Z$.

По следствию 1 из леммы 2.8 существуют такие константы c и d, что для любой формулы Ξ над A существует формула Ξ' над $A \cup \{d_{r^2}^{(r^2)}\}$, такая, что для любой функции $d_{r^2}(x_1, \dots, x_{r^2}) \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_2$ формулы Ξ и Ξ' эквивалентны над $A \cup \{d_{r^2}\}$ и $l(\Xi') \leq c \log L(\Xi) + d$.

Пусть Φ'' формула над $A \cup \{d_{r^2}^{(r^2)}\}$ эквивалентная Φ для любой функции $d_{r^2}(x_1, \dots, x_{r^2}) \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_2$, такая, что $l(\Phi'') \leq c \log L(\Phi) + d$. Заменим в формуле Φ'' все подформулы вида $d_{r^2}(\Phi_1, \dots, \Phi_{r^2})$ на формулы $g(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, \Phi_1, \dots,$ Полученную формулу обозначим через Φ'''. По построению формулы Ψ и $\Psi_0[\Phi''']$ эквивалентны над $A \cup \{g\}$. Так как $g \in [A]$, то существует формула Φ над A эквивалентная Φ'', такая, что $l(\Phi) \leq l(g)L(\Phi''') \leq cp \log L(\Phi) + dp$, где $p = \max\limits_{h(x_1, \dots, x_{q+r^2}) \in [A]} l(h)$ и q — максимальное количество переменных от которого зависят функции из A. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда существуют такие константы c и d, что для любой приведенной формулы Φ над A вида $\Phi_0[\Psi_1, \dots, \Psi_t]$, где*

1. *$\Phi_0[y_1, \dots, y_t]$ — максимальная* [8] *внешняя подформула формулы Φ такая, что $\widehat{W}(\Phi_0) = \{\{0, x\}\}$;*

2. *все формулы $\Psi_1, \dots, \Psi_t$ — являются нетривиальными*

существуют формулы $\Xi_1, \dots, \Xi_t$ над A, для которых выполнено $l(\Xi_i) \leq c \log L(\Phi) + d$ и $\Phi = \Phi_0[\Xi_1, \dots, \Xi_t]$ над A.

Доказательство. Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ то существуют константы c_1 и d_1 удовлетворяющие условиям леммы 2.13 и константы c_2 и d_2 удовлетворяющие условиям леммы 2.14. Положим $c = \max(c_1, c_2)$, $d = \max(d_1, d_2)$.

---

[8] заметим, что для каждой фломулы Φ внешняя подформула $\Phi_0[y_1, \dots, y_t]$ определяется однозначным образом

Пусть $\Psi'_1, \ldots, \Psi'_u$ — все подформулы Φ, такие, что формулы из множества $F = \{\Psi_1, \ldots, \Psi_t\}$ являются их главными подформулами. Заметим, что каждая подформула из множества F является главной подформулой только одной из формул из множества $\{\Psi'_1, \ldots, \Psi'_u\}$.

Пусть Ψ'_i — произвольная подформула из множества $\{\Psi'_1, \ldots, \Psi'_u\}$. Без ограничения общности формула Ψ'_i имеет вид $f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Psi_{i_1}, \ldots, \Psi_{i_p})$, где $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, t\}$ и $V_f^{x_{q+e}} = \{0, x\}$ для всех $e \in \{1, \ldots, q\}$. Тогда по леммам 2.13 и 2.14 существуют формулы $\Xi_{i_1}, \ldots, \Xi_{i_p}$, такие, что формулы Ψ'_i и $f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Xi_{i_1}, \ldots, \Xi_{i_p})$ эквивалентны и $l(\Xi_{i_u}) \leq c \log L(\Psi_{i_u}) + d$ для всех $u \in \{1, \ldots, p\}$.

Применяя аналогичную процедуру для всех подформул Ψ'_i, мы сопоставем каждой формуле Ψ_i формулу Ξ_i, так, что формулы $\Phi_0[\Xi_1, \ldots, \Xi_t]$ и Φ эквиваленты. Следовательно, формулы $\Xi_1, \ldots, \Xi_t$ — удовлетворяют условиям леммы, лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, $r \geq 3$, такие, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$. Пусть F — множество всех приведенных формул Φ над A, таких, что $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$. Тогда множество F равномерно над A.*

Доказательство. Пусть F_0 — множество всех формул Φ над A, таких, что $W(\Phi) \subseteq \{0, x\}$. По лемме 2.10 множество F_0 равномерно. Следовательно, существуют такие константы c_1 и d_1, что для любой формулы $\Phi \in F_0$ существует формула Ψ над A эквивалентная Φ, такая, что $l(\Psi) \leq c_1 \log L(\Phi) + d_1$.

Пусть $\Phi \in F$. Пусть $\Phi_0[y_1, \ldots, y_t]$ — внешняя подформула формулы Φ максимальной сложности, такая, что $\widehat{W}(\Phi_0) = \{\{0, x\}\}$. Пусть Φ имеет вид $\Phi_0[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$. Тогда по следствию 1 из леммы 2.13 существуют такие константы c_2 и d_2, зависящие только от A, и формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_t$ над A, для которых выполнены условия $l(\Psi_i) \leq c_2 \log L(\Phi) + d_2$ и $\Phi = \Phi_0[\Psi_1, \ldots, \Psi_t]$.

Так как $\Phi_0 \in F_0$, то существует формула Φ'_0 над A эквивалентная Φ, такая, что $l(\Phi_0') \leq c_1 \log L(\Phi_0') + d_1$. Заменим в формуле Φ_0' все вхождения переменных y_i на формулы Ψ_i. Полученную формулу обозначим через Ψ. Так как $\Phi = \Phi_0[\Psi_1, \ldots, \Psi_t]$, то выполнено $\Psi = \Phi$. Кроме того, имеем

$$l(\Psi) \leq l(\Phi_0') + \max_{i \in \{1,\ldots,t\}} l(\Psi_i) \leq c_1 \log L(\Phi_0) + d_1 + c_2 \max_{i \in \{1,\ldots,t\}} L(\Phi) + d_2 \leq$$
$$\leq (c_1 + c_2) \log L(\Phi) + d_1 + d_2.$$

Следовательно, множество формул F равномерно. Лемма доказана.

Следствие 3. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, $r \geq 3$, такие, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$. Пусть F — множество всех приведенных формул над A, таких, что если $\Phi \in F$, то $\{1, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$. Тогда множество F равномерно над A.*

Утверждение следует из принципа двойственности.

Слествие 4. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, $r \geq 3$, такие, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$. Тогда множество приведенных формул над A равномерно.*

Утверждение следует из леммы 2.10 и следствий 2 и 3 из леммы 2.13.

Лемма 2.15 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, Φ — формула над A, такая, что $\{x\} \in \widehat{W}(\Phi)$. Тогда существует формула Ψ над A эквивалентная Φ, такая, что $L(\Psi) \leq L(\Phi)$ и $\{x\} \notin \widehat{W}(\Psi)$.*

Доказательство. Если $\{x\} \in \widehat{W}(\Phi)$, то без ограничения общности формула Φ имеет вид $\Phi_0[f(x_1, \ldots, x_n, \Psi_1, \ldots, \Psi_t)]$, где $\Phi_0[y], \Psi_1, \ldots, \Psi_t$ — нетривиальные формулы над A, $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) \in A$ и для любого $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ выполнено $\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) = y_i$, где $i \in \{1, \ldots, t\}$. Тогда формула Φ эквивалентна формуле $\Phi_0[\Psi_i]$, из чего следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 2.3 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ и существует такое $r \geq 3$, что $A \subset \#([A], r)$. Тогда система A равномерна.*

Доказательство. Пусть Φ — нетривиальная формула над A, Φ реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. По лемме 2.15 существует формула Φ_0 над A, эквивалентная Φ, такая, что $L(\Phi_0) \leq L(\Phi)$ и $\{x\} \notin \widehat{W}(\Phi_0)$.

Пусть F — множество нетривиальных подформул формулы Φ_0. Пусть $\Psi_i \in F$ и Ψ_i является главной подформулой формулы Ψ_i', т.е. Ψ_i' имеет вид $g(\Phi_1, \ldots, \Phi_{j-1}, \Psi_i, \Phi_{j+1}, \ldots, \Phi_t)$. Сопоставим каждой формуле $\Psi_i \in F$ множество $M_g^{x_j}$, обозначим это множество через $u(\Psi_i)$. Пусть F' —множество таких формул Ψ из Φ, что $u(\Psi) \subseteq \{0, 1\}$. Заменим в формуле Φ_0 все подформулы из множества F' на переменную y. Полученную формулу обозначим через Φ'. Заметим, что формула Φ' —приведенная. Пусть формула Φ' реализует функцию $f'(x_1, \ldots, x_n, y)$. Заметим, что

$$f(\widetilde{x}) = f'(\widetilde{x}, 0) = f'(\widetilde{x}, 1). \tag{2.12}$$

По следствию 1 из леммы 2.9 существует такое q, что $A \subset \widehat{\#}([A], q)$. По следствию 4 из леммы 2.13 существуют константы c и d — такие , что для любой приведенной формула Ψ над A существует формула Ψ' над A эквивалентная Ψ, такая, что $l(\Psi') \leq c \log L(\Psi) + d$.

Пусть Φ'' — формула, эквивалентная Φ', такая, что $l(\Phi'') \leq c \log L(\Phi') + d$. Заменим в формуле Φ'' все вхождения переменной y на произвольную нетривиальную формулу глубины 1 над A. Полученную формулу обозначим через Ψ. Из (2.12) следует что формулы Φ и Ψ эквивалентны. Кроме того,

$$l(\Psi) \leq l(\Phi'') + 1 \leq c \log L(\Phi') + d + 1 \leq c \log L(\Phi) + d + 1,$$

следовательно множество всех формул над системой A равномерно, т.е. система A равномерна. Теорема доказана.

Теорема 2.4 *Пусть A —конечная система функций из $P_{k,2}$, такая, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ и любой $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$, такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ выполнено* $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$. *Тогда система A равномерна.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от n переменных и

$$A = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$$

Так как при добавлении несущественных переменных функция остается мажоритарной, то, добавляя, если необходимо, дополнительные переменные в качестве несущественных, будем считать что для любых i, j, где $i \in \{1, \dots, m\}$ и $j \in \{1, \dots, n\}$ существует функция

$$g_i^j(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_r) \in [A],$$

такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_{f_i}^{x_j}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$. По леммам 2.2 и 2.3 существуют число $q \geq r$ и функции

$$h_i^j(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{q(q-1)})) \in [A]$$

такие, что для любой формулы Φ над A вида $\Phi_1[\Phi_2[\dots, \Phi_{r-1}[\Phi_r] \dots]]$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_{f_i}^{x_j}$ выполнено

$$\Phi = h_i^j(\widetilde{\alpha}, \Phi_{1,2}, \dots, \Phi_{q-1,q}),$$

где $\Phi_{i,j}$ — формула

$$\Phi_1[\Phi_2[\dots \Phi_{i-1}[\Phi_j[\Phi_{j+1}[\dots \Phi_{q-1}[\Phi_q] \dots]]] \dots]].$$

Положим

$$c = \frac{\max\limits_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{1, \dots, n\}}} l(g_i^j) + 1}{\log \frac{2(n+1)^q}{2(n+1)^q - 1}}; \quad d = 2n(n+1)^q.$$

Пусть Φ — произвольная формула над A. Докажем индукцией по сложности $L(\Phi)$ формулы Φ, что существует такакя формула Ψ над A эквивалентная Φ для которой выполнено неравенство $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$. Если $l(\Psi) \leq d$, то утверждение очевидно выполнено. Пусть утверждение выполнено для всех формул, сложности не более N, где $N \geq d$.

Пусть $L(\Phi) = N + 1$. Пусть без ограничения общности Φ имеет вид $f_1(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, где

$$L(\Phi_1) \geq L(\Phi_2) \geq \dots L(\Phi_n).$$

Тогда $L(\Phi_1) \geq 2(n+1)^q$ и $L(\Phi_i) \leq Ł(\Phi_1) \leq \frac{L(\Phi)}{2}$ при всех $i \in \{2, \dots, n\}$. По лемме 2.1 существуют такие формулы $\Psi_1[y], \dots, \Psi_{q-1}[y], \Psi_q$ над A, что формула Φ_1 имеет вид $\Psi_1[\dots[\Psi_{q-1}[\Psi_q]]\dots]$ и для всех $j \in \{1, \dots, q\}$ выполнено $L(\Psi_j) \geq \frac{L(\Phi)+1}{(n+1)^{q-1}}$. Следовательно, пользуясь леммами 2.2 и 2.3, аналогично доказательству леммы 2.11 можно показать, что формула

$$f_1(g_1^1(\Phi_2, \dots, \Phi_n, \Psi_{1,1}, \dots, \Psi_{q-1,q}), \Phi_2, \dots, \Phi_n),$$

эквивалентна формуле Φ, где $\Psi_{i,j}$ — формула

$$\Psi_1[\Psi_2[\dots\Psi_{i-1}[\Psi_j[\Psi_{j+1}[\dots\Psi_{q-1}[\Psi_q]\dots]]]\dots]],$$

Учитывая, что $L(\Phi) \geq 2(n+1)^q$, заметим, что

$$L(\Psi_{i,j}) \leq L(\Phi) - \max_{i \in \{1,\dots,q\}} L(\Phi_i) + 1 \leq (L(\Phi)+1)\frac{(n+1)^q - 1}{(n+1)^q} \leq L(\Phi)\frac{2(n+1)^q - 1}{2(n+1)^q}$$

По предположению индукции существуют формулы $\Phi'_2, \dots, \Phi'_n, \Psi'_{1,1}, \dots, \Psi'_{q-1,q}$ эквивалентные формулам $\Phi_2, \dots, \Phi_n, \Psi_{1,1}, \dots, \Psi_{q-1,q}$ над A соответственно, для которых выполнены неравенства

$$l(\Phi'_i) \leq c \log L(\Phi_i) + d \quad \text{и} \quad l(\Psi'_{i,p}) \leq c \log L(\Psi_{j,p}) + d$$

Поэтому формула Ψ' вида

$$f_1(g_1^1(\Phi'_2, \dots, \Phi'_n, \Psi'_{1,1}, \dots, \Psi'_{q-1,q}), \Phi'_2, \dots, \Phi'_n),$$

эквивалентна формуле Φ и выполнено

$$l(\Psi') \leq 2 + c\log \max(\max_{i\in\{2,\dots,n\}} \Phi'_i, \max_{1\leq j<p\leq q} \Psi'_{i,j}) + d \leq$$

$$\leq 2 + c\log(L(\Phi)\max(\frac{2}{3}, \frac{2(n+1)^q-1}{2(n+1)^q}) + d \leq$$

$$\leq 2 + c\log L(\Phi) + d - c\log\frac{2(n+1)^q}{2(n+1)^q-1} \leq$$

$$\leq c\log L(\Phi) + d + 1 - \max_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} l(g_i^j)$$

Так как $g_i^j \in [A]$, то существует формула Ψ'' эквивалентная Ψ' , такая, что

$$l(\Psi'') \leq l(\Psi') + l(g_1^1) - 1 \leq c\log L(\Phi) + d,$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Глава 3

Критерий квази-равномерности конечных систем монотонных функций из $P_{k,2}$

3.1. Формулировки и основная лемма о квази-равномерности

Конечную систему A функций из $P_{k,2}$ будем называть квази-равномерной, если существуют такие константы c и d, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$l(f) \le c \log^2 L(f) + d.$$

Множество формул F над конечной системой функций A будем называть равномерным, если существуют такие константы c и d, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над A эквивалентная Φ, для которой выполнено неравенство

$$l(\Psi) \le c \log L(\Phi) + d.$$

Утверждение 3.1 *Пусть A — конечная система функций из P_k, Φ — нетривиальная формула над A. Тогда Φ можно представить в виде $\Phi_0[\Phi_1, \dots, \Phi_t]$, где $\Phi_0[y_1, \dots, y_t]$ — α-формула, а $\Phi_1, \dots, \Phi_t$ — некоторые подформулы Φ, такие, что $l(\Phi_i) \le L(\Phi)/2$ для всех $i \in \{1, \dots, t\}$.*

Доказательство. Построим рекурсивно следующую последовательность подформул формулы Φ: в качестве Ψ_0 возьмем саму формулу Φ и если формула Ψ_i нетривиальная, то в качетсве формулы Ψ_{i+1} возьмем произвольную главную подформулу формулы Ψ_i максимальной сложности. Пусть получилась последовательность формул $\Psi_0, \dots, \Psi_u$.

Пусть без ограничения общности для всех i, $i \in \{1, \dots, u-1\}$ формула Ψ_i имеет вид $f_i(\Psi_{i+1}, \Xi_i^1, \dots, \Xi_i^{t_i}, x_i^1, \dots, x_i^{p_i})$, где все формулы $\Xi_i^1, \dots, \Xi_i^{t_i}$ нетривиальные и формула Ψ_u имеет вид $f_u(x_u^1, \ldots, x_u^{p_u})$. Через Φ_0' обозначим формулу

$$f_1(f_2(\ldots f_{u-1}(f_u(x_u^1, \ldots, x_u^{p_u}), y_{u-1}^1, \ldots, y_{u-1}^{t_{u-1}}, x_{u-1}^1, \ldots, x_{u-1}^{p_{u-1}}) \ldots), \\ y_1^1, \ldots, y_1^{t_1}, x_1^1, \ldots, x_1^{p_1})$$

Положим $t = \sum_{i \in \{1,\ldots,u-1\}} t_i$. Через $\Phi_0[y_1, \ldots, y_t]$ обозначим формулу из Φ_0', полученную заменой переменных

$$y_{u-1}^1, \ldots, y_{u-1}^{t_{u-1}}, y_{u-2}^1, \ldots, y_{u-2}^{t_{u-2}}, \ldots, y_1^1, \ldots, y_1^{t_1}$$

на переменные $y_1, \ldots, y_t$ соответственно.

Тогда формула Φ имеет вид

$$\Phi_0[\Xi_{u-1}^1, \ldots, \Xi_{u-1}^{t_{u-1}}, \Xi_{u-2}^1, \ldots, \Xi_{u-2}^{t_{u-2}}, \ldots, \Xi_1^1, \ldots, \Xi_1^{t_1}].$$

За $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ обозначим формулы

$$\Xi_{u-1}^1, \ldots, \Xi_{u-1}^{t_{u-1}}, \Xi_{u-2}^1, \ldots, \Xi_{u-2}^{t_{u-2}}, \ldots, \Xi_1^1, \ldots, \Xi_1^{t_1}$$

соответственно. Тогда формула Φ имеет вид $\Phi_0[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$.

Заметим, что если у формулы Ψ_i есть главная подформула сложности более чем $\frac{L(\Phi)}{2}$, то это формула Ψ_{i+1}. Следовательно все формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ имеют сложность не более $\frac{L(\Phi)}{2}$ и найденное представление удовлетворяет условием утверждения. Утверждение доказано.

Лемма 3.2 *Пусть A — конечная система функций из P_k, такая, что множество всех α-формул над системой A равномерно над A. Тогда система A квази-равномерна.*

Доказательство. Так как множество α-формул над A равномерно, то существуют такие константы c и d, что для любой α-формулы Φ над A существует формула Ψ над A, эквивалентная Φ, такая, что $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$. Положим

$$d_1 = \max(\max_{\substack{f \in [A] \\ L(f) \leq 4}} l(f), d), \quad c_1 = 2\max(c, d_1)$$

Докажем, что для любой $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$l(f) \leq c_1 \log^2(L(f)) + d. \tag{3.1}$$

Тем самым, мы докажем что система A квази-равномерна. Проведем доказательство индукцией по сложности функции f. Если $L(f) \leq 4$, то неравенство (3.1) выполнено очевидным образом. Пусть неравенство (3.1) выполнено для всех функций $f \in [A]$, таких, что $L(f) \leq N$, $N \geq 4$. Докажем неравенство (3.1) для функции $f \in [A]$, такой, что $L(f) = N + 1$.

Пусть Φ — формула реализующая f над A, такая, что $L(\Phi) = L(f) = N + 1$. Из утверждения 3.1 следует, что формула Φ представляется в виде $\Phi_0[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$, где $t \geq 0$, $\Phi_0[y_1, \ldots, y_t]$ — α-формула и $L(\Phi_i) \leq \frac{L(\Phi)}{2}$ для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$. Пусть формулы $\Phi_0, \ldots, \Phi_t$ реализуют функции

$$f_0(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t), f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_t(x_1, \ldots, x_n)$$

соответственно. Так как формула Φ_0 является α-формулой, Φ_0 реализует функцию f_0 и множество α -формул над системой A равномерно, то $l(f_0) \leq c \log L(f_0) + d$. По индуктивному предположению для всех i, $i \in \{1, \ldots, t\}$, выполнено неравенство $l(f_i) \leq c_1 \log^2 L(\Phi_i) + d_1$. Поэтому

$$\begin{aligned}
l(f) \leq l(f_0) + \max_{i \in \{1,\ldots,t\}} l(f_i) &\leq c \log L(\Phi_0) + d + c_1 \log^2 \frac{L(\Phi)}{2} + d_1 \leq \\
&\leq c \log L(\Phi) + c_1 (\log L(\Phi) - 1)^2 + 2d_1 \leq \\
&\leq c_1 \log^2 L(\Phi) + c \log L(\Phi) - 2c_1 \log L(\Phi) + 2d_1 + c_1 \leq \\
&\leq c_1 \log^2 L(f) + 2d_1 + c_1 - c_1 \log L(\Phi) \leq \\
&\leq c_1 \log^2 L(f) + 2d_1 + c_1 - 2c_1 \leq c_1 \log^2 L(f) + d_1
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

3.2. Достаточные условия квази-равномерности конечных систем функций из $P_{k,2}$

Пусть $B \subseteq P_{k,2}$, $r \geq 3$. Через $\#_1(B, r)$ обозначим множество функций $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$, где $n \geq 1$, таких, что для любого $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ существует такая функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in B$, что выполнено

1. если $M_f^{x_i} = \{0, x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;
2. если $M_f^{x_i} = \{1, x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;
3. если $M_f^{x_i} = \{0, 1, x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$;
4. для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \neq 0, 1$.

Таким образом

$$\#_1(B, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \in \{1, \ldots, n\}} \#_{\{x_i\}}(B, n, r).$$

Через $\widehat{\#}_1(B, r)$ обозначим множество функций $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$, где $n \geq 1$, таких, чточто для любого $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in B$, такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ выполнено:

1. если $M_f^{\{x_i\}} = \{0, x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;
2. если $M_f^{\{x_i\}} = \{1, x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;
3. если $M_f^{\{x_i\}} = \{0, 1, x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$.

Таким образом

$$\widehat{\#}_1(B, r) = \bigcup_{n \in \{1, 2, \ldots\}} \bigcap_{i \in \{1, \ldots, n\}} \widehat{\#}_{x_i}(B, n, r).$$

Лемма 3.3 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \#_1([A], r)$, где $r \geq 3$. Тогда для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ существует такое число $q \geq 3$, что $f \in \widehat{\#}_1([A], q)$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.9.

Лемма 3.4 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \widehat{\#}_1([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$, $g(y_1, \ldots, y_m) \in A$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, такие, что*

$$\{M_f^{\{x_i\}}\} \cup \{M_g^{\{y_j\}}\} \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}.$$

Тогда существует функция

$$h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_{r^2}) \in [A],$$

такая, что для любых $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$, $\widetilde{\beta} \in V_g^{y_j}$ выполнены условия

1. *если $\{0, x\} \in \{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\}$, то $\mathrm{pr}_2(h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;*
2. *если $\{1, x\} \in \{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\}$, то $\mathrm{pr}_2(h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^\infty$.*
3. *если $\{0, 1, x\} \in \{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\}$, то $\mathrm{pr}_2(h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in \mathrm{N}A_2$;*
4. *если $\{\{0, x\}, \{1, x\}\} \subseteq \{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\}$, то $\mathrm{pr}_2(h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in \mathrm{N}A_2$;*

Доказательство. Докажем пункт 4, пункты 1 — 3 доказываются аналогично. Пусть без ограничения общности $m = n = i = j$ и $\widehat{M}_f^{x_n} = \{0, x\}$, $\widehat{M}_g^{y_n} = \{1, x\}$. По лемме 3.3 существуют числа $q_1 \geq 3$, $q_2 \geq 3$ и функции

$$f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, z_1, \ldots, z_{q_1}) \text{ и } f_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, z_1, \ldots, z_{q_2})$$

такие, что для любых $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$, $\widetilde{\beta} \in V_g^{y_j}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 f_1(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus O^\infty$ и $\mathrm{pr}_2 f_1(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^\infty$. Положим $r = q_1 q_2$ и

$$h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, z_1, \ldots, z_r) = f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, f_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, z_1, \ldots, z_{q_2}),$$
$$f_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, z_{q_2+1}, \ldots, z_{2q_2}), \ldots, f_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, z_{q_1 q_2 - q_2 + 1}, \ldots, z_{q_1 q_2}))$$

Нетрудно проверить, что данная функция удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Лемма 3.5 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \widehat{\#}_1([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда следуюшие множества приведенных α-формул над A равномерны:*

1. *множество F_0 формул Φ_0, таких, что $\widehat{W}(\Phi_0) = \{\{0, x\}\}$;*
2. *множество F_1 формул Φ_1, таких, что $\widehat{W}(\Phi_1) = \{\{1, x\}\}$;*
3. *множество F_{01} формул Φ_{01}, таких, что Φ_{01} имеет вид*

$$f_1(x_1 \dots, x_{i-1}, g(y_1, \dots, y_{j-1}, \Psi, y_{j+1}, \dots, y_m), x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где Ψ — некоторая α-формула, и

$$\{\{0, x\}, \{1, x\}\} \subseteq \widehat{M_f^{x_i}} \cup \widehat{M_g^{y_j}} \quad \textit{или} \quad \{0, 1, x\} \in \{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\}.$$

Доказательство [1]**.** Пусть $F \in \{F_0, F_1, F_{01}\}$. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от n переменных. По следствию 1 из леммы 2.8 существуют такие константы c и d, что для любой формулы Φ над A существует формула Ψ над сигнатурой $\Sigma(A) \cup \{d_{r^2}^{(r^2)}\}$, такая, что $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$ и формулы Φ и Ψ эквивалентны над $A \cup \{d_{r^2}\}$, если выполнено одно из следующих условий:

a) $\mathrm{pr}_2 d_{r^2} \in \mathrm{N}A_2$;

b) $\widehat{W}(\Phi) = \{0, x\}$ и $\mathrm{pr}_2 d_{r^2} \in M_{01} \setminus O^\infty$;

c) $\widehat{W}(\Phi) = \{1, x\}$ и $\mathrm{pr}_2 d_{r^2} \in M_{01} \setminus I^\infty$.

Пусть без ограничения общности формула $\Phi \in F$ имеет вид

$$f_1(x_1, \dots, x_{n-1}, f_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \Phi')),$$

[1] Доказательство данной леммы во многом эквивалентно доказательству леммы 2.10

где $f_1.f_2 \in A$ и Φ' — произвольная α-формула. Пусть Ψ — формула над сигнатурой $\Sigma(A) \cup \{d_{r^2}^{(r^2)}\}$, такая, что $l(\Psi) \le c \log L(\Phi') + d$ и формулы Φ' и Ψ эквивалентны, если для функции d_{r^2} выполнены условия a—c, приведенные выше.

По лемме 3.4 существует такая функция $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, z_1, \ldots, z_{r^2})$, что для любых $\widetilde{\alpha} \in V_{f_1}^{x_n}$, $\widetilde{\beta} \in V_{f_2}^{y_n}$ выполнены условия

1. если $F \in F_0$, то $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;
2. если $F \in F_1$, то $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;
3. если $F \in F_{01}$, то $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in \mathrm{N}A_2$.

Заменим в формуле Ψ все подформулы вида $d_{r^2}(\Psi_1, \ldots, \Psi_{r^2})$ на формулы $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, \Psi_1, \ldots, \Psi_{r^2})$. Полученную формулу обозначим через Ψ'. Пусть формулы Φ' и Ψ' реализуют функции $g_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, \widetilde{z})$ и $g_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, \widetilde{z})$ соответственно. Так как для любых $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$, $\widetilde{\beta} \in V_g^{y_j}$ функция $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z})$ удовлетворяет условиям a— c, то имеем $g_1(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) = g_2(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z})$. Обозначим через Ψ'' формулу

$$f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, f_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, \Psi')).$$

Очевидно, что формулы Φ и Ψ' эквивалентны и выполнено неравенство $l(\Psi') \le c \log L(\Phi') + d$. Положим $u = \max\limits_{w(x_1, \ldots, x_{n+r^2}) \in [A]} l(w)$. Так как $h \in [A]$, то существует формула Ψ'' над A эквивалентная Ψ', такая, что выполнены неравенства

$$l(\Psi'') \le l(h) l(\Psi') \le uc \log L(\Phi) + ud.$$

Так как формулы Φ и Ψ'' эквивалентны, то множества F_0, F_1 и F_{01} равномерны. Лемма доказана.

Лемма 3.6 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \#_1([A], r)$ для некоторого $r \ge 3$. Тогда множество всех приведенных α-формул над A равномерно.*

Доказательство. Пусть F_0, F_1 и F_{01} — множества приведенных α-формул над A, определенных в формулировке леммы 3.5. Нетрудно заметить, что любую приведенную α-формулу Ψ над системой A можно представить в виде $\Psi_1[\Psi_2]$, где $\Psi_1 \in F_0 \cup F_1$ и $\Psi_2 \in F_{01}$. Следовательно, множество приведенных α-формул над A равномерно. Лемма доказана.

Теорема 3.1 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \#_1([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда система A квази-равномерна.*

Доказательство. По лемме 3.6 множество приведенных формул над A равномерно, следовательно существуют такие константы c и d, что для любой приведенной α-формулы Ψ над A существует формула Ψ' эквивалентная Ψ над A, такая, что $l(\Psi') \leq c \log L(\Psi) + d$.

Пусть Φ — произвольная α-формула над A. Следуя доказательству леммы 2.15 нетрудно показать, что существует α-формула Φ' над A эквивалентная Φ, такая, что $\{x\} \notin \widehat{W}(\Phi')$ и $l(\Phi') \leq l(\Phi)$.

Пусть $\Psi_0[y]$ — внешняя подформула формулы Φ' максимальной сложности, такая, что $\Psi_0[y]$ — приведенная формула. Пусть формулы Φ' и $\Psi_0[y]$ реализуют функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ соответственно. По построению имеем $f(\widetilde{x}) = g(\widetilde{x}, 0) = g(\widetilde{x}, 1)$. Пусть Ξ —произвольная формула глубины 1 над A, тогда формулы Φ' и $\Psi_0[\Xi]$ эквивалентны. Так как формула $\Psi_0[y]$ приведенная, то существует эквивалентная формула Ψ_0' над A, такая, что $l(\Psi_0') \leq c \log L(\Psi_0) + d$. Заменим в формуле Ψ_0' все вхождения переменной y на формулу Ξ. Полученную формулу обозначим через Ψ. По построению $\Phi = \Phi' = \Psi$ и $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d + 1$. Следовательно, множество α-формул над системой A равномерно и по лемме 3.2 система A квази-равномерна. Теорема доказана.

3.3. Необходимые условия квази-равномерности конечных систем монотонных функций из $P_{k,2}$

Лемма 3.7 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, Φ — формула над A. Пусть $\Psi[y_1, \ldots, y_t]$ — внешняя подформула формулы Φ. Пусть формулы Φ и $\Psi[y_1, \ldots, y_t]$ реализуют функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ соответственно. Тогда для любых $m < n$ и $\widetilde{\alpha} \in E_2^m$, таких, что $\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\alpha}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in M_{01}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, x_{m+1}, \ldots, x_n, \widetilde{y}) \in M_{01}$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, x_{m+1}, \ldots, x_n, \widetilde{y}) \notin M_{01}$, т.е. $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, x_{m+1}, \ldots, x_n, \widetilde{y}) = c$, где $c = 0, 1$. Пусть Φ имеет вид $\Psi[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$ где формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ реализуют функции $h_1(\widetilde{x}), \ldots, h_t(\widetilde{x})$. Тогда

$$f(\widetilde{\alpha}, 1, \ldots, 1) = \mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, 1, \ldots, 1, h_1(\widetilde{\alpha}, 1, \ldots, 1), \ldots, h_t(\widetilde{\alpha}, 1, \ldots, 1)) =$$
$$= c = \mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, 0, \ldots, 0, h_1(\widetilde{\alpha}, 0, \ldots, 0), \ldots, h_t(\widetilde{\alpha}, 0, \ldots, 0)) = f(\widetilde{\alpha}, 0, \ldots, 0),$$

таким образом получили противоречие. Лемма доказана.

Конечную систему функций A из $P_{k,2}$ будем называть псевдо-равномерной, если для любого $r \geq 1$ существует $n = n(r) \geq 1$, такое, что для любой α-формулы Ψ над A, такой, что $l(\Psi) \geq n$, существует формула Φ над A, эквивалентная Ψ, для которой выполнено неравенство $l(\Phi) \leq \frac{l(\Psi)}{r}$.

Имеет место следующее очевидное утверждение:

Утверждение 3.8 *Пусть A — конечная квази-равномерная система функций из $P_{k,2}$. Тогда A является псевдо-равномерной.*

Теорема 3.2 *Пусть A — конечная псевдо-равномерная система монотонных функций из $P_{k,2}$. Тогда существует такое $r \geq 3$, что $A \subseteq \#_1([A], r)$.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от n переменных. Необходимо доказать, что для произвольной функции $f \in A$, произвольного $i \in \{1, \ldots, n\}$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ существуют число $r' \geq 3$ и функция $w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'}) \in [A]$, такая, что выполнено:

1. если $\{1, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то выполнено $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;

2. если $\{0, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то выполнено $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

3. для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \neq 0, 1$.

Пусть f — произвольная функция из A. Без ограничения общности будем считать, что $i = n$. Докажем существование функции w удовлетворяющей пунктам 1 и 3, аналогично можно доказать существование функции удовлетворяющий пунктам 2 и 3.

Для любого $q \geq 1$, рассмотрим формулу

$$f(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1, f(x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2, \ldots, f(x_1^q, \ldots, x_{n-1}^q, y) \ldots)),$$

обозначим ее через Ψ_q. Согласно определению псевдо-равномерности существует такое m и формула Φ над A, эквивалентная Ψ_m, что $l(\Phi) < \frac{l(\Psi_m)}{n} = \frac{m}{n}$. Пусть Φ реализует функцию

$$g(\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^m, y) = f(\widetilde{x}^1, f(\widetilde{x}^2(\ldots f(\widetilde{x}^{m-1}, f(\widetilde{x}^m, y)) \ldots))),$$

где $\widetilde{x}^i = (x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i)$. Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из множества $V_f^{x_n}$. Обозначим набор $(\underbrace{\widetilde{\alpha}, \ldots, \widetilde{\alpha}}_{m \text{ раз}})$ через $\widehat{\alpha}$, а через $\widehat{x}$ обозначим набор переменных

$$(\overbrace{x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1}^{\widetilde{x}^1}, \overbrace{x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2}^{\widetilde{x}^2}, \ldots, \overbrace{x_1^m, \ldots x_{n-1}^m}^{\widetilde{x}^m}).$$

Пусть, без ограничения общности, нетривиальная подформула $\widehat{\Phi}$ формулы Φ имеет вид $h(\widetilde{x}', y, y, \ldots, y, \widehat{\Phi}_1, \ldots, \widehat{\Phi}_u)$, где $\widehat{\Phi}_1, \ldots, \widehat{\Phi}_u$ — нетривиальные подформулы формулы Φ и $\widetilde{x}' = (x_1', \ldots, x_p')$ — набор (возможно, одинаковых) переменных из $\widehat{x}$. Обозначим через $\widetilde{\alpha}' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_p')$ набор значений переменных из $\widetilde{x}'$, взятых для этих переменных из набора значений $\hat{\alpha}$. Обозначим через H_0 множество всех подформул $\widehat{\Phi}$, таких, что $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}', y, \ldots, y, z_1, \ldots, z_u) = 0$. Через H_0' обозначим подмножество формул из H_0, не являющихся нетривиальными подформулами никаких подформул из H_0 кроме их самих.

Заметим, что формулу Φ можно представить в виде $\Phi'[\Phi_1^0, \dots, \Phi_q^0]$, где $\Phi'[z_1, \dots, z_q]$ — внешняя подформула Φ, $\{\Phi_1^0, \dots, \Phi_q^0\} = H_0'$. Через Ξ' обозначим формулу $\Phi'[z_1, \dots, z_q]$.

Заменим в формуле Ξ' все вхождения переменной y на различные переменные $y_1, \dots, y_t$, $t \geq 0$. Полученную формулу обозначим черех Ξ. Пусть Ξ реализует функцию $h'(\widehat{x}, y_1, \dots, y_t, z_1, \dots, z_q)$. Заметим, что если $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \leq z_i$, то

$$1 = g(\widehat{\alpha}, 1) = h'(\widehat{\alpha}, \underbrace{1, \dots, 1}_{t \text{ раз}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{q \text{ раз}}) = 0,$$

тем самым получаем противоречие. Следовательно, $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\leq z_i$ для любого $i \in \{1, \dots, q\}$.

Докажем, что для всех j, $j \in \{1, \dots, t\}$, выполнено $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\leq y_j$. Допустим противное, пусть существует такое j, $j \in \{1, \dots, t\}$, что $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \leq y_j$. Без ограничения общности будем считать, что $j = 1$.

Нетрудно увидеть, что формулу Ξ можно представить в виде $\Xi''[y_1, \Xi_1, \dots, \Xi_u]$ так, что формула $\Xi''[y_1, v_1, \dots, v_u]$ является α-формулой минимальной глубины содержащей y_1, $u \geq 0$, а $\Xi_1, \dots, \Xi_u$ — некоторые формулы над A. Пусть формула Ξ'' реализует функцию $h''(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, \widetilde{v})$, а формулы $\Xi_1, \dots, \Xi_u$ — формулы $h_1(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}), \dots, h_u(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ соответственно. Заметим, что переменная y_1 входит в формулу Ξ только один раз, следовательно функции h_i не зависят существенно от переменной y_1.

Докажем, что $pr_2 h_i(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in M \setminus \{0\}$. Допустим противное, т.е. $\mathrm{pr}_2 h_i(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = 0$. тогда у формулы Ξ_i существует подформула Ω, такая, что Ω реализует[2] функцию нулевую в проекции, а все подформулы формулы Ω реализуют функции не нулевые в проекции. Пусть Ω имеет вид $w'(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, \widehat{\Psi}_1, \dots, \widehat{\Psi}_l)$, где $w'(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, u_1, \dots, u_l) \in A$. Тогда заметим, что $\mathrm{pr}_2 w'(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, \widetilde{u}) = 0$. Поэтому подформула формулы Φ, из которой была получена подформула Ω принадле-

[2] Функцию $h \in P_{k,2}$ будем называть нулевой в проекции, если $\mathrm{pr}_2 h = 0$

жит H_0, что противоречит построению формулы Ξ'. Следовательно,

$$h_i(\widehat{\alpha}, 1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1) = h_i(\widehat{\alpha}, 0, 1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1) = 1.$$

Поэтому

$$0 = h'(\widehat{\alpha}, 0, 1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1) = \\ = h''(\widehat{\alpha}, 0, 1, \ldots, 1, h_1(\widehat{\alpha}, 0, 1, \ldots, 1), \ldots, h_u(\widehat{\alpha}, 0, 1, \ldots, 1)) = \\ = h''(\widehat{\alpha}, 0, 1, \ldots, 1)$$

Следовательно, $\mathrm{pr}_2 h''(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \leq y_1$. Заметим, что

$$L(\Xi'') \leq nl(\Phi') < nl(\Phi) \leq m,$$

следовательно, существует такое i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, что переменные $x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i$ не входят в формулу Ξ''. Пусть $\widetilde{\beta}$ — набор из E_k^{n-1}, такой, что $\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\beta}, y) = 1$. Тогда

$$1 = g(\underbrace{\widetilde{\alpha}, \ldots, \widetilde{\alpha}}_{i-1 \text{ раз}}, \widetilde{\beta}, \underbrace{\widetilde{\alpha}, \ldots, \widetilde{\alpha}}_{m-i \text{ раз}}, 0) \leq h'(\underbrace{\widetilde{\alpha}, \ldots, \widetilde{\alpha}}_{i-1 \text{ раз}}, \widetilde{\beta}, \underbrace{\widetilde{\alpha}, \ldots, \widetilde{\alpha}}_{m-i \text{ раз}}, 0, 1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1) = \\ = h''(\widehat{\alpha}, 0, 1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1) = 0,$$

т.е. получаем противоречие.

Так как формула Ξ получается из внешней подформулы формулы Φ переименованием переменной y на переменные $y_1, \ldots, y_t$, то для всех $\widetilde{\gamma} \in V_f^{x_n}$ по лемме 3.7 выполнено

$$\mathrm{pr}_2 h'(\underbrace{\widetilde{\gamma}, \ldots, \widetilde{\gamma}}_{m \text{ раз}}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in M_{01}. \tag{3.2}$$

Положим

$$w(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = h'(\underbrace{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots, x_1, \ldots, x_{n-1}}_{m \text{ раз}}, y_1, \ldots, y_r),$$

где $r' = t + q$. Заметим, что поскольку в силу соотношения (3.2) выполнено $\mathrm{pr}_2 h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01}$, и как показано выше

$$\mathrm{pr}_2 h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\leq y_i, \quad \mathrm{pr}_2 h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\leq z_j$$

для любых $i \in \{1, \ldots, t\}, j \in \{1, \ldots, q\}$, то $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \backslash I^\infty$, т.е. функция w удовлетворяет условию 1. В силу соотношения (3.2) для w выполнено условие 3.

Таким образом, для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$, любой переменной $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ и любого набора $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ найдутся число $r' = r'(f, x_i, \widetilde{\alpha})$ и функция $w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'})$, удовлетворяющая условиям 1 и 3. Обозначим эту функцию через w_1. Аналогично найдется число $r'' = r''(f, x_i, \widetilde{\alpha})$, для которого можно построить функцию $w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r''})$ удовлетворяющую условиям 2 и 3. Обозначим эту функцию через w_2. Тогда нетрудно показать, что функция

$$\begin{aligned} w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'r''}) = w_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, w_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'}), \\ w_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_{r'+1}, \ldots, y_{2r'}), \ldots, w_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_{r'r''-r'+1}, \ldots, y_{r'r''})) \end{aligned}$$

удовлетворяет условиям 1–3. Поэтому, в качестве числа r можно взять $\max\{r'(f, x_i, \widetilde{\alpha}) r''(f, x_i, \widetilde{\alpha})\}$, где максимум берется по всем функциям f из A, переменным x_i функции f и всем наборам $\widetilde{\alpha}$ из $V_f^{x_i}$. Теорема доказана.

3.4. Алгоритм проверки критерия квази-равномерности.

Пусть $A \subseteq P_{k,2}$, $r \geq 3$. Будем говорить что система функций A обладает свойством $\#_1'(r)$ если для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$, любой переменной $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ существует такая функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$, что выполнено

1. если $\{0, x\} \subseteq M_f^{x_i} =$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;
2. если $\{1, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;
3. для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \neq 0, 1$;
4. существует формула Ψ над A, реализующая функцию g, такая, что каждая из переменных $y_1, \ldots, y_r$ входит в формулу Ψ ровно один раз.

Для свойства $\#_1'(r)$ справедливы следующие очевидные утверждения.

Утверждение 3.9 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что A обладает свойством $\#_1'(r)$. Тогда для любого $r' > r$ система A обладает свойством $\#_1'(r')$.*

Утверждение 3.10 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая, что A обладает свойством $\#_1'(r)$. Тогда $A \subseteq \#_1([A], r)$.*

Утверждение 3.11 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, такая что $A \subseteq \#_1([A], r)$. Тогда существует такое $r' \geq 2$, что A обладает свойством $\#_1'(r')$.*

Лемма 3.12 *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, функции из A зависят не более, чем от n переменных и A обладет свойством $\#_1'(r')$, где $r \geq 3$. Тогда A обладает свойством $\#_1'(n^{3^{k^n+1}})$.*

Доказательство. Пусть q — минимальное число, такое, что A обладает свойством $\#_1'(q)$. Докажем, что $q \leq n^{3^{k^n+1}}$. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от переменных $x_1, \dots, x_n$ и $n > 1$. Тогда существуют такие

$$f(x_1, \dots, x_n) \in A, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad \widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i},$$

что q является минимальным числом, таким, что найдется функция $g(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_q) \in [A]$ удовлетворяющая условиям 1—4 свойства $\#_1'$.

Пусть Φ — формула над A минимальной сложности реализующая функцию g, удовлетворяющую условиям 1–4 свойства $\#_1'$. Пусть $F = \{\Phi_1, \dots, \Phi_t\}$ — множество нетривиальных подформул формулы Φ. Тогда для любого i, $i \in \{1, \dots, t\}$ формулу Φ можно представить в виде $\Psi_i[\Phi_i]$, где $\Psi_i[z]$ — внешняя подформула формулы Φ. Пусть формулы Φ_i и Ψ_i реализуют функции $f_i(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_q)$ и $h_i(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_q, z)$ соответственно для всех $i \in \{1, \dots, t\}$. Пусть $V_f^{x_i} = \{\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_v\}$. Сопоставим каждой формуле $\Phi_i \in F$ набор $\widetilde{\gamma}^i = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_{v+1}^i) \in E_3^{v+1}$ следующим образом:

1. если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{y}) = 0$, то $\gamma_j^i = 0$;
2. если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{y}) = 1$, то $\gamma_j^i = 1$;
3. если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{y}) \neq 0, 1$, то $\gamma_j^i = 2$;
4. если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in I^\infty$, то $\gamma_{v+1}^i = 0$;
5. если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in O^\infty$, то $\gamma_{v+1}^i = 1$;
6. если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$, то $\gamma_{v+1}^i = 2$;

Предположим, что в формуле Φ есть две подформулы Φ_i и Φ_j, такие, что $i \neq j$, Φ_j является подформулой Φ_i и $\widetilde{\gamma}^i = \widetilde{\gamma}^j$. Рассмотрим формулу $\Psi_i[\Phi_j]$, обозначим ее через Φ'. Пусть формула Φ' реализует функцию $g'(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_q)$. Докажем что функция g' удовлетворяет условиям:

a) если $\{0, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$

b) если $\{1, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$

c) для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \neq 0, 1$.

Докажем сначала условие c. Пусть $u \in \{1, \ldots, v\}$, рассмотрим случаи:

1. если $\gamma_u^i = \gamma_u^j = 0, 1$ или функция $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}, z)$ не зависит существенно от переменной z, то очевидно что $g'(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}) = g(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y})$ и условие c следует из условия 3 для функции g;

2. если функция $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}, z)$ зависит существенно от переменной z, и $\gamma_u^i = \gamma_u^j = 2$, то $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}, z) \in M_{01}$ и $\mathrm{pr}_2 f_j(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}) \in M_{01}$ и следовательно функция
$$\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}) = \mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}, \mathrm{pr}_2 f_j(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y})) \in M_{01}$$
существенно зависит от хотя бы одной из переменных $y_1, \ldots, y_q$.

Таким образом, функция g' удовлетворяет условию c.

Пусть без ограничения общности $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_1$. Докажем пункт a, пункт b следует из пункта A согласно принципу двойственности. Согласно пункту c выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \in M_{01}$, следовательно достаточно доказать, что $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \notin O^\infty$. Если $\gamma_1^i = \gamma_1^j = 0, 1$ или функция $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z)$ не зависит существенно от переменной z, то аналогичным образом имеем $g'(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) = g(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y})$ и пункт a для функции g' следуют из пункта 1 для функции g.

Пусть $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$, $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \neq 0, 1$ и функция $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}, z)$ существенно зависит от переменной z. Заметим, что так как каждая из переменных $y_1, \ldots, y_q$ входит в формулу Φ только один раз, то функции $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y})$ и $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z)$ существенно зависят от непересекающихся множеств переменных.

Рассмотрим случаи:

I) Пусть $\gamma_{v+1}^i = \gamma_{v+1}^j \in \{0, 2\}$. Тогда $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$ и $\mathrm{pr}_2 f_j(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$. Следовательно $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$.

II) Пусть $\gamma_{v+1}^i = \gamma_{v+1}^j = 1$. Тогда возможны два варианта:

а. Пусть $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z) \geq z$. Но тогда $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$, что противоречит тому, что $\gamma^i_{v+1} = 1$.

б. Пусть $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z) \not\geq z$. Тогда для любой переменной y_u, такой, что f_j существенно зависит от y_u выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \not\geq y_u$. Следовательно, для всех переменных y_l, от которых существенно зависит функция $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z)$ выполнено неравенство $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \not\geq y_l$. Из того, что $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z) \not\geq z$ следует что для любой переменной y_b от которой существенно зависит $\mathrm{pr}_2 f_j(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y})$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \not\geq y_b$. Следовательно $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$.

Следовательно пункт 1 доказан, пункт 2 следует из принципа двойственности. Так как $L(\Phi') < L(\Phi)$, то получаем противоречие с минимальностью сложности формулы Φ, следовательно таких подформул Φ_i и Φ_j не существует. Поэтому для любой вложенной последовательности подформул Φ_i формулы Φ все вектора γ^i различны, следовательно

$$l(\Phi) \leq |E_3^{v+1}| \leq 3^{v+1} \leq 3^{k^n+1}$$

Поэтому $q \leq L(\Phi) \leq n^{l(\Phi)} \leq n^{3^{k^n+1}}$, лемма доказана.

Следующая теорема вытекает из утверждений 3.9, 3.10, 3.11 и леммы 3.12:

Теорема 3.3 *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, функции из A зависят не более, чем от n переменных и $A \subseteq \#([A], r)$, где $r \geq 3$. Тогда $A \subseteq \#([A], n^{3^{k^n+1}})$.*

Теорема 3.4 *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, функции из A зависят не более, чем от n переменных и $A \subseteq \#([A], r)$, где $r \geq 3$. Тогда $A \subseteq \#([A], n^{3^{k^n+1}})$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.3.

Глава 4

Контрпримеры.

Обозначим через $d_3(x_1, x_2, x_3)$ функцию $x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$ из P_2.

Определим функцию $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3)$ из $P_{3,2}$ следующим образом: пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in E_k^{11}$ — набор значений переменных функции f_1, тогда

$$f_1(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) = \begin{cases} \beta_1 \& \beta_2 \& d_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), & \text{если } \widetilde{\alpha} \in \{(2,2,2,2,1,1), (2,2,1,1,2,2), \\ & (2,2,1,1,1,1)\} \text{ и } \beta_i, \gamma_j \in E_2; \\ \beta_1 \vee \beta_2 \vee d_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), & \text{если } \widetilde{\alpha} = (1,1,2,2,2,2) \text{ и } \beta_i, \gamma_j \in E_2; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Положим

$$f_2(x_1, x_2, x_3, y, z_1, z_2, z_3) = f_1(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, y, y, z_1, z_2, z_3),$$

$$A = \{f_1\}, \quad A' = \{f_1, f_2\}$$

Очевидно, что $[A] = [A']$.

Лемма 4.1 *Система A равномерна.*

Доказательство. Покажем, что для системы A выполнены условия теоремы 2.4. Заметим, что $f(x_1, x_1, \ldots, x_1) = 0$, следовательно $0 \in [A]$. Заметим, что функция f симметрична относительно множеств переменных $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$, $\{y_1, y_2\}$ и $\{z_1, z_2, z_3\}$, следовательно достаточно показать существование функций f_{x_1}, f_{x_3}, f_{y_1} и f_{z_1} удовлетворяющих условиям теоремы для переменных x_1, x_3, x_5, y_1 и z_1 соответственно. Положим

$$f_{x_1}(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3) = f(x_2, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, 0, 0, v_1, v_2, v_3);$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3) = f(x_1, x_2, x_4, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3);$$

$f_{x_5}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_6,y_1,y_2,z_1,z_2,z_3,v_1,v_2,v_3) = f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_6,x_6,y_1,y_2,v_1,v_2,v_3);$

$f_{y_1}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,y_2,z_1,z_2,z_3,v_1,v_2,v_3) = f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,y_2,y_2,v_1,v_2,v_3);$

$f_{z_1}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,y_1,y_2,z_2,z_3,v_1,v_2,v_3) = f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,y_1,y_2,v_1,v_2,v_3).$

Нетрудно проверить, что для любого $u \in \{x_1,x_3,x_5,y_1,z_1\}$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^u$ выполнено $\mathrm{pr}_2 f_u(\widetilde{\alpha},v_1,v_2,v_3) = v_1v_2 \vee v_2v_3 \vee v_1v_3 \in \mathrm{N}A_2$. Лемма доказана.

Утверждение 4.2 *Системы A и A' состоят из монотонных функций*

Доказательство. Так как $[\{f\}] = [A] = [A']$, то достаточно доказать что функция f является монотонной. Если функция f не является монотонной, то существует такое $X \subseteq \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,y_1,y_2,v_1,v_2,v_3\}$, и $\widetilde{\alpha} = (\underbrace{2,\ldots,2}_{|X| \text{ раз}})$, что $\mathrm{pr}_2 f|_X^{\widetilde{\alpha}} \notin M$. Предположим, что $X \notin \{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{x_1,x_2,x_5,x_6\},$ $\{x_3,x_4,x_5,x_6\}\}$, тогда нетрудно заметить что $\mathrm{pr}_2 f|_X^{\widetilde{\alpha}} = 0$, получаем противоречие. Следовательно $X \in \{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{x_1,x_2,x_5,x_6\},\{x_3,x_4,x_5,x_6\}\}$ Имеем

$$\mathrm{pr}_2 f|_{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}^{(2,2,2,2)} = x_5 \& x_6 \& y_1 \& y_2 \& d_3(z_1,z_2,z_3) \in M,$$

$$\mathrm{pr}_2 f|_{\{x_3,x_4,x_5,x_6\}}^{(2,2,2,2)} = x_1 \& x_2 \& (y_1 \vee y_2 \& d_3(z_1,z_2,z_3)) \in M,$$

$$\mathrm{pr}_2 f|_{\{x_1,x_2,x_5,x_6\}}^{(2,2)} = x_3 \& x_4 \& y_1 \& y_2 \& d_3(z_1,z_2,z_3) \in M,$$

$$\mathrm{pr}_2 f|_{\{x_1,x_2\}}^{(2,2)} = x_3 \& x_4 \& x_5 \& x_6 \& (y_1 \vee y_2 \vee d_3(z_1,z_2,z_3)) \in M,$$

Таким образом, f — монотонная функция. Утверждение доказано.

Лемма 4.3 *Система A' не является псевдо-равномерной.*

Доказательство. Предположим противное: пусть система A псевдо-равномерна. По теореме 3.2, если система A является псевдо-равномерной то существуют минимальное число $t \geq 3$ и функция $g(x_1,x_2,x_3,z_1,z_2,z_3,v_1,\ldots,v_t) \in [A]$, такие, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_{f_2}^y$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{v}) \in \mathrm{N}A_2$. Тогда для любых $\widetilde{\beta} \in \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ и $\widetilde{\gamma} \in \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ следующие функции являются мажоритарными

$$\mathrm{pr}_2 g(2,2,1,\widetilde{\beta},\widetilde{v}); \quad \mathrm{pr}_2 g(2,1,2,\widetilde{\beta},\widetilde{v}); \quad \mathrm{pr}_2 g(2,1,1,\widetilde{\beta},\widetilde{v})$$

$$\mathrm{pr}_2 g(1,2,2,\widetilde{\gamma},\widetilde{v})$$

Так как A' — система монотонных функций, то функция $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{z},\widetilde{v})$ является монотонной. Следовательно для любого $\widetilde{\alpha} \in \{(2,2,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,1,1)\}$ выполнено

$$\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},1,1,1,\widetilde{v}) \in M_{01} \setminus I^{\infty}$$

$$\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},0,0,0,\widetilde{v}) \in M_{01} \setminus O^{\infty},$$

поэтому

$$\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},0,0,0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) = 0 \ \text{ и } \ \mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},1,1,1,1,\ldots,1,0,1,\ldots,1) = 1$$

Кроме того, нетрудно заметить что для любого

$$\widetilde{\beta} \in \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$$

и любого

$$\widetilde{\gamma} \in \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$$

выполнены равенства

$$\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},0,\ldots,0) = 0 \ \text{ и } \ \mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma},1,\ldots,1) = 1$$

Следовательно получаем

$$\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{z},\widetilde{v}) \in \mathrm{N}A_2. \tag{4.1}$$

Пусть Q — множество функций $q(x_1,x_2,z_1,\ldots,z_p) \in [A]$, таких, что $p > 0$, $\mathrm{pr}_2 q(2,2,1,\widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^{\infty}$, $\mathrm{pr}_2 q(2,1,2,\widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^{\infty}$, $\mathrm{pr}_2 q(2,1,1,\widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^{\infty}$ и $\mathrm{pr}_2 q(1,2,2,\widetilde{z}) \in M_{01} \setminus O^{\infty}$. Заметим, что множество Q не пусто так как $g(x_1,x_2,x_3,z_1,\ldots,z_{t+3}) \in Q$. Пусть функция $h(x_1,x_2,x_3,z_1,\ldots,z_p) \in Q$ такова, что $l_A(h) = \min\limits_{h' \in Q} l_A(h')$.

Пусть Φ — формула над A минимальной глубины реализующая функцию h. Пусть формула Φ имеет вид $f_1(\Psi_1,\ldots,\Psi_{11})$ и формулы $\Psi_1,\ldots,\Psi_{11}$ реализуют функции $h_1(x_1,x_2,x_3,\widetilde{z}),\ldots,h_{11}(x_1,x_2,x_3,\widetilde{z})$ соответственно. Докажем, что

$$(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3,\Psi_4,\Psi_5,\Psi_6) \in \{(x_1,x_1,x_2,x_2,x_3,x_3),(x_1,x_1,x_3,x_3,x_2,x_2)\}. \tag{4.2}$$

Предположим противное. Заметим, что среди формул $\Psi_1, \dots \Psi_6$ найдется хотя бы одна переменная x_1 (в противном случае $h(2,1,1,1,\dots,1) = 0$) и хотя бы одна одна из переменных x_2, x_3 (в противном случае $h(1,2,2,1,\dots,1) = 0$).Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть одна из формул $\Psi_1, \dots, \Psi_6$ — является символом переменной из множества $\{z_1, \dots, z_p\}$. Пусть без ограничения общности одна из этих формул есть z_1. Тогда $h(1,2,2,0,1,\dots,1) = 0$, следовательно $\mathrm{pr}_2 h(1,2,2,\widetilde{z}) \notin M_{01} \setminus I^\infty$, т.е. получаем противоречие.

2. Пусть для некоторого i, $i \in \{1,2,3\}$ одна из формул Ψ_{2i-1}, Ψ_{2i} является нетривиальной, а другая формула одной из переменных из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда для некоторого $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \in (2,2,1), (1,2,2)$ выполнено $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}) = 0$, т.е. получаем противоречие.

3. Пусть для некоторого i, $i \in \{1,2,3\}$ одна из формул Ψ_{2i-1}, Ψ_{2i} является переменной x_a а другая формула переменной x_b, где $a \neq b$. Тогда для некоторого $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \in (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2)$ выполнено $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}) = 0$, т.е. получаем противоречие.

4. Пусть формулы Ψ_1 и Ψ_2 есть переменные x_1, а Ψ_3, Ψ_4 — нетривиальные формулы. Тогда Ψ_5, Ψ_6 являются либо переменными x_2 либо переменными x_3. Поэтому

$$1 = h(1,2,2,1,\dots,1) = f_1(1,1,h_3(1,2,2,1,\dots,1), h_4(1,2,2,1,\dots,1), 2, 2,$$
$$h_7(1,2,2,1\dots,1), \dots, h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) \leq$$
$$\leq f_1(1,1,1,1,2,2,h_7(1,2,2,1\dots,1), \dots, h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) = 0$$

   Тем самым получаем противоречие. Аналогичным образом получаем противоречие в случае, когда формулы Ψ_1 и Ψ_2 являются переменными x_1, а Ψ_5 и Ψ_6 являются нетривиальными формулами.

5. Пусть формулы Ψ_1 и Ψ_2 есть переменные x_2 и формулы Ψ_3 и Ψ_4 являются нетрививальными. Тогда имеем:

$$1 = h(2,1,2,1,\dots,1) = f_1(1,1,h_3(1,2,2,1\dots,1),\dots,h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) \leq$$
$$\leq h_1(1,1,1,1,f_5(1,2,2,1\dots,1),\dots,h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) = 0$$

Тем самым получаем противоречие. Аналогично рассматриваются случаи когда Ψ_1 и Ψ_2 есть переменные x_2, а формулы Ψ_5 и Ψ_6 являются нетривиальными и когда Ψ_1 и Ψ_2 есть переменные x_3 и либо формулы Ψ_3 и Ψ_4 либо формулы Ψ_5 и Ψ_6 являются нетривиальными.

6. Пусть Ψ_1 и Ψ_2 — тривиальные формулы. Тогда либо формулы Ψ_3 и Ψ_4 есть переменные x_1, либо формулы Ψ_5 и Ψ_6 есть переменные x_1. Получим противоречие в предположении что Ψ_3 и Ψ_4 есть переменные x_1, случай когда Ψ_5 и Ψ_6 есть переменные x_1 рассматривается аналогично. Имеем

$$1 = h(1,2,2,1\dots,1) = f_1(h_1(1,2,2,1,\dots,1),h_2(1,2,2,1\dots,1),$$
$$h_5(1,2,2,1,\dots,1),\dots,h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) \leq$$
$$f_1(1,1,1,1,h_5(1,2,2,1,\dots,1),\dots,h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) = 0,$$

тем самым получаем противоречие

7. Пусть формулы $\Psi_1,\dots,\Psi_6$ есть переменные x_1, x_2 и x_3. Если хотя бы одна из переменных x_1, x_2 или x_3 не встречается среди формул $\Psi_1,\dots,\Psi_6$, то для некоторого $\widetilde{\alpha} \in \{(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$ имеем

$$h(\widetilde{\alpha},1,\dots,1) = f_1(2,2,2,2,2,2,h_7(\widetilde{\alpha},1,\dots,1),\dots,h_{11}(\widetilde{\alpha},1,\dots,1)) = 0,$$

получаем противоречие.

8. Из невозможности рассмотренных выше случаев вытекает, что пары $(\Psi_1,\Psi_2),(\Psi_3,\Psi_4),(\Psi_5,\Psi_6)$ есть различные пары переменных

$(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)$. Пусть пара (Ψ_1, Ψ_2) не является парой переменных (x_1, x_1). Тогда нетрудно проверить, что для набора $(2, 1, 1)$ выполнено $\mathrm{pr}_2 h(2, 1, 1, \widetilde{z}) = 0$, тем самым получаем противоречие.

Таким образом мы доказали соотношение 4.2. Пусть формула Ψ_7 реализует функцию $h'(x_1, x_2, x_3, z_1, \ldots, z_p)$. Заметим, что тогда из соотношения 4.2 вытекает, что

$$\mathrm{pr}_2 h'(2, 2, 1, \widetilde{z}) \geq \mathrm{pr}_2 h(2, 2, 1, \widetilde{z}); \quad \mathrm{pr}_2 h'(2, 1, 2, \widetilde{v}) \geq \mathrm{pr}_2 h(2, 1, 2, \widetilde{v}).$$

$$\mathrm{pr}_2 h'(2, 1, 1, \widetilde{z}) \geq \mathrm{pr}_2 h(2, 1, 1, \widetilde{z}); \quad \mathrm{pr}_2 h'(1, 2, 2, \widetilde{v}) \leq \mathrm{pr}_2 h(1, 2, 2, \widetilde{v}).$$

Следовательно

$$\mathrm{pr}_2 h'(2, 2, 1, \widetilde{z}) \in M \setminus I^\infty; \quad \mathrm{pr}_2 h'(2, 1, 2, \widetilde{z}) \in M \setminus I^\infty.$$

$$\mathrm{pr}_2 h'(2, 1, 1, \widetilde{z}) \in M \setminus I^\infty; \quad \mathrm{pr}_2 h'(1, 2, 2, \widetilde{z}) \in M \setminus O^\infty.$$

Таким образом получаем $h' \in Q$. С другой стороны $l_A(h') \leq l_A(h) - 1$, поэтому получаем противоречие. Следовательно, по теореме 3.2 система A не является псевдо-равномерной. Лемма доказана.

Таким образом, мы привели пример систем A и A' из $P_{3,2}$, порождающих один и тот же замкнутый класс, и таких, что A равномерна, а A' не является псевдо-равномерной.

Лемма 4.4 *Системы A и A' не являются полиномиально эквивалентными.*

Доказательство. Докажем утверждение от противного. Пусть существует такая константа p, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено $L_{A'}(f) \leq L_A^p(f)$. Так как система A' не является псевдо-равномерной, то существует такая константа q и последовательность функций $f_1, f_2, \ldots \in [A']$, такие, что $L_{A'}(f_i) > i$ и $l_{A'}(f_i) \geq \frac{L_{A'}(f_i)}{q}$. Заметим, что для любой $f \in [A]$ выполнено $l_A(f) = l_{A'}(f)$. Поэтому имеем:

$$l_{A'}(f_i) = l_A(f_i) \leq c \log L_A(f_i) + d \leq c \log L_{A'}^P(f_i) + d \leq cp \log L_{A'}(f_i) + d \leq$$
$$\leq cp \log(l_{A'}(f_i) q) + d \leq cp \log l_{A'}(f_i) + d + cp \log q$$

Очевидно, что при достаточно большом i данное неравенство не будет выполнено независимо от констант c, p и q. Тем самым получаем противоречие. Лемма доказана.

Глава 5

Основные результаты работы

В данной главе мы дадим формулировки основных результатов и приведем их доказательства опирающиеся на доказанные ранее факты.

Теорема 1. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,s}$, где $k \geq s \geq 2$, такая, что множество $[\mathrm{pr}_s A]$ содержит мажоритарную функцию. Тогда система A равномерна.*

Доказательство этой теоремы приведено в главе 2 (см. теорему 2.1).

Следствие 1. Пусть A и B — конечные системы функций из $P_{k,s}$, такие, что $[\mathrm{pr}_s A] = [\mathrm{pr}_s B]$ и множество $[\mathrm{pr}_s A]$ содержит мажоритарную функцию, где $k \geq s \geq 2$. Тогда системы A и B полиномиально эквивалентны.

Теорема 2. *Пусть A — конечная система функций из P_k, порождающая предполный класс типа $\mathbb{C}$, $k \geq 3$. Тогда система A равномерна.*

Доказательство. В [20] доказано, что все предполные классы типа $\mathbb{C}$ содержат мажоритарную функцию. Тогда из теоремы 1 следует, что все конечные системы, порождающие предполные классы типа $\mathbb{C}$, равномерны.

Теорема 3. *Пусть A — конечная система функций из P_k, где $k \leq 7$, порождающая предполный класс. Тогда система A равномерна.*

Доказательство. Известно, что все предполные классы P_k можно разделить на классы типов $\mathbb{L}, \mathbb{P}, \mathbb{E}, \mathbb{B}, \mathbb{O}, \mathbb{C}$ (см., например, [43, 54]). В работах [23, 24] доказано, что при $k \leq 7$, все конечные системы функций порождающие классы $\mathbb{L}, \mathbb{P}, \mathbb{E}, \mathbb{B}, \mathbb{O}$ равномерны. Равномерность всех конечных систем порождающих предполные классы типа $\mathbb{C}$, следует из теоремы 2. Теорема доказана.

Теорема 4. *Конечная система A функций из $P_{k,2}$, такая, что* $\mathrm{pr}_2 A$ *не содержится ни в одном из множеств $O^\infty, I^\infty, K, D, L$, является равномерной.*

Доказательство. Как известно из теоремы Поста (см., например [32]), если $\mathrm{pr}_2 A$ не содержится ни в одном из множеств $O^\infty, I^\infty, K, D, L,$, то множество $[\mathrm{pr}_2 A]$ содержит мажоритарную функцию. Следовательно, по теореме 1, система A равномерна.

Теорема 5. *Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$, такая, что $A \subseteq \#([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$, равномерна.*

Доказательство этой теоремы приведено в главе 2 (см. теорему 2.3).

Теорема 6. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, такая, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ и любого $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$, такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ выполнено* $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$. *Тогда система A равномерна.*

Доказательство этой теоремы приведено в главе 2 (см. теорему 2.4).

Теорема 7. *Пусть A — конечная система функций из P_k, такая, что множество всех α-формул над системой A равномерно над A. Тогда система A квази-равномерна.*

Доказательство этой теоремы приведено в главе 3 (см. лемму 3.2).

Теорема 8. *Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ квази-равномерна тогда и только тогда, когда $A \subseteq \#_1([A], n^{3^{k^n+1}})$, где n — максимальное число переменных, от которого зависят функции из A.*

Утверждение теоремы непосредственно следует из теорем 3.1, 3.2, 3.3 и утверждение 3.8. Нетрудно заметить, что множество $\#_1([A], n^{3^{k^n+1}})$ конечное, следовательно условие теоремы 8 можно проверить за конечное время.

Теорема 9. *Существуют конечные системы A и A' функций из $P_{3,2}$, такие, что $[A] = [A']$ и*

1. *система A равномерна;*

2. *система A' не равномерна;*

3. системы A и A' не являются полиномиально эквивалентными.

Системы A и A' в явном виде приведены в главе 4. Так же в данной главе приведено доказательство пунктов 1—3 (см. леммы 4.1, 4.3, 4.4).

Литература

1. *Ахметова Л. И.* О глубине формул для предполных классов трехзначной логики // Методы и системы технической диагностики, выпуск 18. Саратов: Изд-во Саратовского университета

2. *Андреев А. А.* Об одной последовательности функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. №6. С. 3-7.

3. *Андреев А. Е.* О сложности монотонных функций // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. М.: Изд-во МГУ, 1985. Вып 4. С. 83-87.

4. *Андреев А. Е.* О синтезе функциональных сетей // Докт. диссертация. М.: МГУ им М. В. Ломоносова, 1985.

5. *Буевич В. А.* Вариант доказательства критерия полноты для функций k-значной логики // Дискретная математика. Том 8, выпуск 4. 1996. С. 11-36.

6. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. Москва: Факториал Пресс. 2002. 544 с.

7. *Гашков С. Б.* О глубине булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 34. М.: Наука, 1978. С. 265-268

8. *Дудакова О.С.* О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины 2 // Вестник Московского университета Математика и Механика 2008. 1. 31-37.

9. *Дудоров Д. Ю.* Материалы X Межд. сем. "Дискр. матем. и ее прилож."М. 2010. 18-20.

10. *Ложкин С. А.* О связи между глубиной и сложность эквивалентных формул и о глубине монотонных функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 269-270.

11. *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. 1996. С. 189-214

12. *Лупанов О. Б.* Об одном методе синтеза схем // Известия ВУЗов. Радиофизика. Т. 1, №1, 1958. С. 120-140.

13. *Лупанов О. Б.* Об асимптотических оценках сложности формул, реализующих функции алгебры логики // ДАН СССР. 128, 3. 1959. С. 464-467

14. *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61-80.

15. *Лупанов О. Б.* О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\&, \vee, \neg$, // Проблемы кибернетики. Вып. 6. М.: Физматгиз, 1961. С. 63-97.

16. *Лупанов О. Б.* О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63-97.

17. *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14, М.: Физматгиз, 1965. С. 21-110.

18. *Лупанов О. Б.* О сложности реализации степеней булевой (n, n)-функции // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. №1. С. 59-67.

19. *Марченков. С. С., Угольников А. Б.* Замкнутые классы булевых функций. М.: Изд-во ИПМ АН СССР, 1990

20. *Марченков. С. С.* Об *id*—разложениях класса P_k над предполными классами, Дискрет. матем., 5:2 (1993), 98–110

21. *Марченков. С. С.* Предполнота замкнутых классов в P_k: предикатный подход. // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. Под ред С. В. Яблонского. М.: Наука. Физматлит, 1996. 368 с.

22. *Марченков. С. С.* Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000. 126 с.

23. *Сафин Р. Ф.* О глубине и сложности формул в некоторых классах k-значной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2000. № 6. С. 65-68.

24. *Сафин Р.Ф.* О соотношении между глубиной и сложностью формул для предполных классов k-значной логики // Математические вопросы кибернетики. М. Физматлит. 2004. С. 223–278.

25. *Сафин Р.Ф.* О равномерности систем монотонных функций // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. №2. с 15-20

26. *Субботовская Б. А.* О реализации линейных функций формулами в базисе $\vee, \&, \neg$ // ДАН СССР. 136, 3. 1961. С. 553-555.

27. *Севидж Д. Э.* Сложность вычислений. М.: Факториал. 1998. 368 с.

28. *Угольников А. Б.* Синтез схем и формул в неполных базисах // Докл. АН. СССР. 1979. **249**, 1. 60-62.

29. *Угольников А. Б.* Синтез схем и формул в неполных базисах // Препринт ИПМ АН СССР. 1980. Вып. 112.

30. *Угольников А. Б.* О полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // V|| Всесоюзная конференция "Проблемы

теоретической кибернетики": тезисы докладов. Часть 1. Иркутск: Изд-во Иркутского государственного университета. 1985. С. 194-195

31. *Угольников А. Б.* О соотношении между глубиной и сложностью формул для замкнутых классов двузначной логики //IV Всесоюзная конференция "Применение методов математической логики": тезисы докладов. Таллин. 1986. С. 184.

32. *Угольников А. Б.* О глубине и полиномиальное эквивалентности формул для замкнутых классов двухзначной логики. Математические заметки, том 42, выпуск 4, октябрь 1987. М.: Наука, 1987. С. 603-612.

33. *Угольников А. Б.* О замкнутых классах Поста // Изв. вузов. Сер. Матем. 1988. №7. С. 79-88.

34. *Угольников А. Б.* О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики, вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 242-245.

35. *Угольников А. Б.* О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики, вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 174-176.

36. *Угольников А. Б.* Сложность функций из замкнутых классов // Сборник трудов семинара по дискретной математике и ее приложениям (2 – 4 февраля 1993 г.) Москва. Издательство механико-математического факультета МГУ. 1998. С. 49-56.

37. *Угольников А.Б.* Классы Поста. Учебное пособие: М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова. 64с.

38. *Храпченко В. М.* О соотношении между сложностью и глубиной формул // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. Вып 32. Новосибирск, ИМ СО АН СССР. 1978. С. 76 – 94.

39. *Храпченко В. М.* О соотношении между сложностью и глубиной формул в базисе, содержащем медиану // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Вып 37. Новосибирск, ИМ СО АН СССР. 1981. С. 77 – 84.

40. *Яблонский С. В.* Функциональный построения в k-значной логике // Труды математического института имени В. А. Стеклова. М.: Издв-во АН СССР, 1958, т. 51. С. 3 142.

41. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966. С. 3 – 15.

42. *Яблонский С. В., Козырев В. П.* Математические вопросы кибернетики // Информационные материалы Научного совета по комплексной проблеме "Кибернетика"АН СССР. Вып. 19а. М.: Издв-во МЭИ, 1997.

43. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А.* Предполные классы в многозначных логиках. М.: Изд-во МЭИ, 1997.

44. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа 2001. 384с

45. *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов не имеющих конечного базиса// Докл. АН СССР. 1959. **127**, 1. С. 44-46.

46. *Baker K. A., Pixley A. F.* Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems //Mathematische Zeitschrift. – 1975. – Т. 143. – №. 2. – С. 165-174.

47. *Barak R.P. Shamir E.* On the parallel evaluation of boolean expressions // SIAM Journal on Computing. Volume 5, Number 4, December 1976. P. 678-681.

48. *Bonet M.L., Buss S.R.* Size-Depth Tradeoff for Boolean Formulae // Information Processing Letters, Volume 49 Issue 3 (February 1994) P. 151-155.

49. *Brent P. P., Kuck D. J., Maryama K.* The parallel evaluation of arithmetic expressions without division // IEEE Transactions on Computers C-22. 1973. P. 532-534.

50. *Brent P. P.* The parallel evaluation of arithmetic expressions in logarithmic time // Complexity of Sequential and Parallel Numerical Algorithms, Academic Press, New York. 1973. P. 83 – 102.

51. *Brent P. P.* The parallel evaluation of general arithmetic expressions // Journal of the ACM, 21(2). 1974. P. 201 – 206.

52. *Bshouty N.H., Cleve R., Elberly W.* Size-depth tradeoffs for algebraic formulae // 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, San Juan, Puerto Rico, 1-4 October 1991. IEEE. P. 334-341.

53. *Kuntzman J.* Algebra de Boole. Bibliothegue de I'Ingenieur. // Automaticien (Dunod, Paris). 1965. №1.

54. *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006

55. *Muller D. E., Preparata F. P.* Restructuring of arithmetic expressions for parallel evaluation // Journal of the ACM, 23(3). July 1976. P. 534-543. (Русский перевод: Мюллер. Д. Е. Препарата Ф. П. Перестроение арифметических выражений для параллельного вычисения // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 16. М.: Мир, 1979. С. 5-22.).

56. *Pratt V. R.* The Efect of Basis on the Size of Boolean Expression // Proc. 16th Annual IEEE Symposium of Foundations of Computer Science. New York, 1975. P. 119-121 (Русский перевод: Пратт. В. Р. Влияние базиса на сложность булевых формул // Кибернетический сборник (новая серия). Выпуск 17. М. Мир, 1980. С. 114-123).

57. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. 43, N3. 163-185.

58. *Post E.L.* Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princenton Univ. Press. 1941. 5.

59. *Preparata F. P., Muller D. E.* Efficient Parallel Evaluation of Boolean Expression // IEEE Trans. Computers 25(5). 1976. P. 548-549.

60. *Ragaz M. E.* Parallelizable algebras. Archiv fur mathematische Logik und Grundlagenforschung 26 (1986/7). P. 77-99

61. *Rosenberg I.* La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini. C. R. Acad. Sci. Paris Ser A, 260 (1965), 3817-19.

62. *Rosenberg I.* Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. Rozpravy Československe Akad. Ved. Řada Mat. Prirod. Věd 80, 3–93 (1970)

63. *Shamir E., Snir M.* On the depth and complexity of formulas // Mathematical Systems Theory, Volume 13, N 4. 1980. P. 301-322.

64. *Spira P. M.* On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawai Symposium on System Sciences, North Hollywood, 1971, Western Periodicals Company, P. 525-527.

65. *Wegener I.* Relating Monotone Formula Size and Monotone Depth of Boolean Functions // Information Processing Letters, 16. 1983. P. 41-42.

66. *Тарасов П. Б.* О равномерности некоторых систем функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. №2. 61–64.

67. *Тарасов П.Б.* О некоторых достаточных условиях равномерности систем функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. 5. 41-46.

68. *Тарасов П.Б.* Некоторые условия равномерности функций k-значной логики принимающих значения 0 и 1 // Ученые записки Казанского университета. 2014. №3. 123 -129.