

ФГБОУ ВО «Московский государственный  
университет имени М.В. Ломоносова»

На правах рукописи

**Подолько Дмитрий Константинович**

О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ,  
ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО УСИЛЕННОЙ ОПЕРАЦИИ  
СУПЕРПОЗИЦИИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Кочергин Вадим Васильевич**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор.

Официальные оппоненты: **Глухов Михаил Михайлович**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (Академия криптографии РФ,  
академик-секретарь отделения);  
**Дагаев Дмитрий Александрович**,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент (ФГАОУ ВПО «Национальный  
исследовательский университет «Высшая  
школа экономики», общеуниверситетская  
кафедра высшей математики).

Ведущая организация: **ФГБУН Институт математики имени  
С.Л. Соболева Сибирского отделения  
Российской академии наук.**

Защита состоится 13 февраля 2015 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д.27, сектор А, и на сайте <http://mech.math.msu.su/>

Автореферат разослан 13 января 2015 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д.501.001.84, созданного на базе  
ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

**Иванов Александр Олегович**

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Диссертация относится к одному из основных направлений дискретной математики и математической кибернетики — теории функциональных систем<sup>1</sup>. Функциональная система представляет собой пару  $(\mathfrak{A}; \psi)$ , где  $\mathfrak{A}$  является некоторым множеством функций, а  $\psi$  — некоторым отображением множества всех подмножеств системы  $\mathfrak{A}$  в себя. Функциональные системы, как правило, имеют содержательную связь с реальными кибернетическими моделями управляющих систем. К числу важнейших задач теории функциональных систем можно отнести задачи о полноте, о выразимости одних функций через другие, о структуре замкнутых классов, о тождественных преобразованиях и т.д. Результаты, получаемые при исследовании функциональных систем, позволяют разрабатывать новые подходы для решения других задач дискретной математики и математической кибернетики. Поэтому С. В. Яблонский утверждал<sup>2</sup>, что роль функциональных систем в дискретной математике можно сравнить с ролью математического анализа в непрерывной математике.

Одним из центральных направлений в теории функциональных систем является изучение систем  $(P_k; \varphi)$ , где  $P_k$  — множество функций  $k$ -значной логики,  $k \geq 2$ , а  $\varphi$  — некоторый оператор на множестве всех подмножеств  $P_k$ . В качестве операторов  $\varphi$  часто рассматриваются операторы, являющиеся операторами замыкания<sup>3</sup>, т.е. обладающие тремя свойствами:  $\mathcal{A} \subseteq \varphi(\mathcal{A})$  (экстенсивность),  $\varphi(\mathcal{A}) \subseteq \varphi(\mathcal{B})$  при  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  (монотонность) и  $\varphi(\varphi(\mathcal{A})) = \varphi(\mathcal{A})$  (идемпотентность).

Основными типами задач, возникающих при исследовании функций  $k$ -значной логики являются задачи выразимости и полноты<sup>4</sup>. К первому из данных типов относятся задачи определения по множеству  $\mathcal{A}$  и произвольной функции из  $P_k$  принадлежности этой функции множеству  $\varphi(\mathcal{A})$ . Задачи второго типа для заданных множеств  $F$  и  $\mathcal{A}$  из  $P_k$  направлены на исследование вопроса порождаемости множеством  $F$  всех функций из  $\mathcal{A}$ , т.е. выполнения условия  $\varphi(F) = \mathcal{A}$ . При этом важное место занимают задачи исследования классов на наличие конечных порождающих систем, а также задачи о существовании базиса, то есть порождающей системы, при удалении любой функции из которой эта система уже перестает быть порождающей. Также важным направлением при изучении

<sup>1</sup> Яблонский С. В. Функциональные построения в  $k$ -значной логике // Труды матем. ин-та АН СССР им. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5 – 142. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: Изд-во МГУ, 1982.

<sup>2</sup> Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2008.

<sup>3</sup> См.: Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

<sup>4</sup> См.: Угольников А. Б. О некоторых задачах в области многозначных логик. Мат-лы X Междунар. семинара “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, МГУ, 1–6 февраля, 2010 г.). М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2010. С. 18–34.

функций  $k$ -значной логики является исследование свойств семейства классов  $\{\varphi(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \subseteq P_k\}$ . К этой проблематике можно отнести задачи определения мощности такого семейства классов, его структуры, свойств его элементов и т.д.

Для функциональных систем функций двузначной логики с операцией суперпозиции Э. Л. Пост показал<sup>5</sup>, что каждый класс булевых функций, замкнутый относительно данной операции, имеет конечный базис и описал все такие классы. Тем самым установлена счетность семейства замкнутых классов булевых функций и построена решетка замкнутых классов. Данные результаты в более доступном изложении позднее представлены в книге С. В. Яблонского, Г. П. Гаврилова и В. Б. Кудрявцева<sup>6</sup>. При этом в отличие от работ Поста, в этой книге рассматривались классы, замкнутые относительно двух операций: суперпозиции и введения несущественной переменной. Такой подход позволил получить более простую структуру замкнутых классов, исключив семнадцать классов, которые не являются замкнутыми относительно операции введения несущественной переменной.

Результаты, полученные в двузначной логике, способствовали развитию исследований функциональных систем функций  $k$ -значной логики при  $k \geq 3$ . С. В. Яблонский решил<sup>7</sup> задачу о полноте в множестве функций 3-значной логики с операциями суперпозиции и введения несущественной переменной и описал все 18 предполных классов в  $P_3$ , а А. В. Кузнецовым<sup>8</sup> установлена конечность семейства всех предполных классов в  $P_k$  при любом  $k$ . В работах многих исследователей выявлены различные семейства предполных классов<sup>9</sup>, а описание всех предполных классов функций из  $P_k$  завершено И. Розенбергом<sup>10</sup>.

---

<sup>5</sup>Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. **43**, 3. 163–185. The two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press. 1941. **5**.

<sup>6</sup>Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

<sup>7</sup>Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады АН СССР. 1954. Т. 95, № 6. С. 1152–1156.

<sup>8</sup>Кузнецов А. В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 145–146.

<sup>9</sup>Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1960. Вып. 3. С. 49–60. Pan Jun-Cze. A solving method for finding all precomplete classes in many-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1962. V. 2. Lo Czu Kai. Precomplete classes defined by normal  $k$ -ary relations in  $k$ -valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1964. 3. 39–50. Lo Czu Kai, Lju Sjui Hua. Precomplete classes defined by binary relations in many-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1963. 4. Захарова Е. Ю. Критерий полноты системы функций из  $P_k$  // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1967. Вып. 18. С. 5–10. Байрамов Р. А. Об одной серии предполных классов в  $k$ -значной логике // Кибернетика. 1967. № 1. С. 7–9.

<sup>10</sup>Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris, Group 5. 1965. **260**. 3817–3819. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd., Praha. 1970. **80**. 3–93.

Пост предполагал<sup>5</sup>, что для исследования функций многозначной логики можно воспользоваться методом моделирования таких функций в двоичной системе и получить результаты, подобные результатам для булевых функций. Однако позднее были выявлены существенные различия между двузначной и  $k$ -значной логикой при  $k \geq 3$ . Так, Ю. И. Янов и А. А. Мучник привели примеры замкнутых классов без базиса и классов со счетным базисом<sup>11</sup>, тем самым установив, что семейство замкнутых классов функций многозначной логики является континуальным.

Изучение семейства замкнутых классов функций  $k$ -значной логики при  $k \geq 3$  наталкивается на значительные трудности в связи с его континуальностью. Поэтому для его исследования используются различные подходы, которые условно можно разделить<sup>4</sup> на два направления: изучение свойств конкретных семейств замкнутых классов и изучение функциональных систем  $P_k^+ = (P_k; \varphi^+)$ , в которых в качестве оператора  $\varphi^+$  рассматривается какое-либо усиление оператора суперпозиции  $\varphi$ .

К первому из описанных направлений естественным образом относится задача исследования свойств предполных классов функций  $k$ -значной логики. Помимо их описания, для данных классов рассматривался вопрос наличия у них конечных базисов. Д. Лау приведены<sup>12</sup> конечные порождающие системы для всех предполных классов в  $P_k$  при любом  $k$ , кроме классов типа  $\circlearrowleft$  (классов монотонных функций), а также для классов типа  $\circlearrowleft$  при  $k \leq 7$ . Пример предполного класса монотонных функций из  $P_8$ , который не имеет конечного базиса, построен Г. Тардошем<sup>13</sup>. В работах Я. Деметровича, Л. Ханнака, Л. Роняи<sup>14</sup> описаны некоторые достаточные условия конечной порожденности предполных монотонных классов при любом  $k$ . В дальнейшем существенные продвижения в данном направлении получены в работах О. С. Дудаковой<sup>15</sup>, в которых найден критерий наличия конечного базиса у предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины 2.

Также для каждого предполного класса функций  $k$ -значной логики рассматривалась задача нахождения мощности семейства замкнутых классов, кото-

---

<sup>11</sup> Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании  $k$ -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.

<sup>12</sup> Lau D. Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der  $k$ -wertigen Logik // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math. 1978. 24. 79–96.

<sup>13</sup> Tardos G. A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. 1986. 3. 211–218.

<sup>14</sup> Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L. Near unanimity functions and partial orderings // Proc. 14 ISMVL, Manitoba. 1984. 52–56. On algebraic properties of monotone clones // Order. 1986. 3. 219–225. On monotone clones // MTA SZTAKI Tanulmányok. 1987. 202. 39–62.

<sup>15</sup> Дудакова О. С. О классах  $k$ -значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. № 1. С. 31–37. О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2008. Вып. 17. С. 13–104.

рые в нем содержатся. В работах С. С. Марченкова, Я. Деметровича, Л. Ханнака<sup>16</sup> доказано, что при любом  $k$  множество замкнутых классов, содержащихся в любом предполном классе, является континуальным, за исключением классов типа  $\mathbb{L}$  (классов линейных функций), в которых при простых  $k$  данное множество является конечным, а при  $k$ , равных степеням простых чисел — счетным.

Помимо исследования предполных классов большое внимание уделялось изучению семейств классов, содержащих простые естественные множества функций. Е. Слупецкий привел<sup>17</sup> критерий полноты замкнутых классов многозначной логики, содержащих все функции одной переменной, и показал, что число таких классов является конечным, а Г. А. Бурле описал<sup>18</sup> данные классы. С. В. Яблонским найден<sup>1</sup> критерий полноты классов функций многозначной логики, содержащих все одноместные функции, принимающие не более  $k - 1$  значения. В работах В. Б. Кудрявцева<sup>19</sup> изучаются свойства систем функций, которые принимают все значения из  $E_k = \{0, 1, \dots, k - 1\}$  (такие системы называются  $S$ -системами), приводится описание всех  $S$ -предполных  $S$ -множеств, устанавливается асимптотическое поведение числа таких множеств и их типов.

При изучении конкретных семейств замкнутых классов функций из  $P_k$  одними из первых часто исследуются семейства  $P_{k,l}$  функций  $k$ -значной логики, которые принимают только значения из множества  $E_l$ , где  $l \geq 2$ . В работах Д. Лау<sup>20</sup> и Н. Грюнвальда<sup>21</sup> для каждого класса  $B$  булевых функций установлена мощность семейства замкнутых классов функций из  $P_{3,2}$ , которые содержат только функции, ограничение которых на множестве  $E_2$  принадлежит классу  $B$ , и описаны такие семейства в тех случаях, когда они являются конечными или

<sup>16</sup>Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики II // Проблемы кибернетики. 1983. Вып. 40. С. 261–266. Demetrovics J., Hannák L. The cardinality of closed sets in precomplete classes in  $k$ -valued logics // Acta Cybernetica. 1979. 4, 3. 273–277. On the cardinality of self-dual closed classes in  $k$ -valued logics // MTA SZTAKI Közlemenyek. 1979. 23. 7–16. Demetrovics J., Hannák L., Marchenkov, S. S. Some remarks on the structure of  $P_3$  // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1980. 2. 215–219.

<sup>17</sup>Slupecki J. Kriterion pełnosci wielowartosciowych systemow logiki zdań // C. R. Séanc. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III. 1939. 32. 102–109.

<sup>18</sup>Бурле Г. А. Классы  $k$ -значной логики, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. 1967. Вып. 10. С. 3–7.

<sup>19</sup>Кудрявцев В. Б. Относительно  $S$ -систем функций  $k$ -значной логики // ДАН СССР. 1971. Т. 199, № 1. С. 20–22. О свойствах  $S$ -систем функций  $k$ -значной логики // Дискретный анализ. 1971. Вып. 19. С. 15–47. О свойствах  $S$ -систем функций  $k$ -значной логики // Akademie-Verlag Berlin. EIK. 1973. 9, № 1/2. С. 81–105.

<sup>20</sup>Lau D. Kungruenzen auf gewissen Teilklassen von  $P_{k,l}$  // Rostock, Math. Kolloq. 1977. 3. 37–43. Über abgeschlossene Teilmengen von  $P_{k,2}$ . // J. Inform. Process. Cybern. EIK. 1988. 24, 10. 395–513.

<sup>21</sup>Grünwald N. Bestimmung sämtlicher abgeschlossenen Mengen aus  $P_{3,2}$ , deren Projektion  $F_8^n$  ist // Rostock, Math. Kolloq. 1983. 23. 5–26. Strukturaussagen über den Verband der abgeschlossenen Mengen von  $P_{k,2}$ , insbesondere von  $P_{3,2}$ . Dissertation A, Universität Rostock. 1984.

счетными. Также некоторые специальные семейства классов функций из  $P_{k,2}$  исследовались в работах А. В. Михайлович<sup>22</sup>.

Относительная простота некоторых классов функций из  $P_{k,l}$ , достигнутые в этом направлении результаты и разработанные методы позволили в отдельных случаях исследовать задачи о сложности представления функций формулами. Д. А. Дагаевым<sup>23</sup> для почти всех замкнутых классов булевых функций получены асимптотически совпадающие с «мощностными» нижними оценками верхние оценки функций Шеннона, характеризующих сложность множества всех функций из  $P_{3,2}$  с проекцией (булевым ограничением) в заданный класс булевых функций, при реализации формулами над некоторыми порождающими системами, а для почти всех замкнутых классов псевдолинейных функций (проекции которых совпадают с классом всех линейных булевых функций) из  $P_{3,2}$  установлен точный рост соответствующих функций Шеннона для некоторых порождающих систем.

Значительное число работ посвящено исследованиям функциональных систем  $(P_k; \varphi^+)$ , в которых оператор  $\varphi^+$  является усилением оператора суперпозиции. Использование такого подхода позволяет, как правило, получать семейства замкнутых классов с более обзримой структурой. Стоит отметить, что упомянутые выше работы Е. Слупецкого и Г. А. Бурле можно отнести к данному направлению исследований, поскольку задачи, рассматриваемые в данных работах, естественным образом можно переформулировать в терминах усиленной операции суперпозиции, допускающей в качестве тривиальных формул формулы, реализующие функции одной переменной.

С. С. Марченков и Нгуен Ван Хоа рассматривали<sup>24</sup>  $S$ -замкнутые классы функций  $k$ -значной логики (классы, которые вместе с каждой функцией содержат функции, двойственные к ней относительно заданной группы перестановок) и показали, что семейство таких классов является конечным при любом  $k \geq 3$ , и при этом число таких классов растет сверхэкспоненциально с ростом  $k$ .

---

<sup>22</sup>Михайлович А. В. О классах функций трехзначной логики, порожденных монотонными симметрическими функциями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 1. С. 33–37. О замкнутых классах функций многозначной логики, порожденных симметрическими функциями // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2013. Вып. 18. С. 123–212.

<sup>23</sup>Дагаев Д. А. О сложности псевдолинейных функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2010. № 2. С. 53–56. О сложности функций многозначной логики, принимающих два значения // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2013. Вып. 18. С. 35–122.

<sup>24</sup>Марченков С. С. Основные отношения  $S$ -классификации функций многозначной логики // Дискретная математика. 1996. Т. 8, вып. 1. С. 99–128.  $S$ -классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. 1997. Т. 9, вып. 3. С. 125–152. Нгуен Ван Хоа. Описание замкнутых классов  $k$ -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 16–19. Структура симметрических замкнутых классов  $k$ -значной логики. Докт. диссертация. Минск, 1995.

В работе А. В. Кузнецова<sup>25</sup> введены понятия параметрической выразимости и оператора параметрического замыкания, а также установлены критерии параметрической выразимости для  $k$ -значных логик при  $k \geq 2$  и найдены все параметрически замкнутые классы при  $k = 2$ . В дальнейшем А. Ф. Данильченко установлена<sup>26</sup> конечность семейства параметрически замкнутых классов при  $k = 3$ , а С. Баррисом и Р. Уиллардом<sup>27</sup> — при  $k > 3$ . На основе понятия параметрической выразимости О. М. Касим-Заде определено<sup>28</sup> понятие неявной выразимости. Им установлена эквивалентность параметрической и неявной выразимости при  $k = 2$  и, тем самым, установлена конечность множества классов неявно выразимых булевых функций. Критерии неявной полноты множеств функций  $k$ -значной логики получены О. М. Касим-Заде<sup>28</sup> и Е. А. Ореховой<sup>29</sup> при  $k = 2$  и  $k = 3$  соответственно. При этом в работе Ореховой критерий неявной полноты для  $k = 3$  формулируется не в терминах предполных (т.е. максимальных неполных) классов, а в терминах минимальных полных классов.

Функционально-предикатные системы с операциями замыкания программного типа, определяемые своими множествами предикатов, рассматривались в работе Ю. В. Голункова<sup>30</sup>, в которой исследовалась задача полноты таких систем. Работы В. А. Тайманова и В. Д. Соловьева<sup>31</sup> посвящены изучению функциональных систем функций  $k$ -значной логики,  $k \geq 2$ , с операциями программного типа. В. А. Тайманов установил, что в зависимости от свойств множеств предикатов, семейства замкнутых классов могут быть конечными, счетными и континуальными. Примеры конечных описаний замкнутых классов для некоторых операций программного типа рассматривались В. Д. Соловьевым.

К этому же направлению относятся и работы О. С. Тарасовой<sup>32</sup>. В них определены операторы замыкания относительно суперпозиции и перестановок,

<sup>25</sup>Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.

<sup>26</sup>Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397–416.

<sup>27</sup>Barris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. 1987. **101**, 3. 427–430.

<sup>28</sup>Касим-Заде О. М. О неявной выразимости булевых функций // О неявной выразимости булевых функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1995. № 2. С. 44–49.

<sup>29</sup>Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2003. Вып. 12. С. 27–75.

<sup>30</sup>Голунков Ю. В. Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции  $k$ -значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. 1980. Вып. 17. С. 23–24.

<sup>31</sup>Соловьев В. Д. Замкнутые классы в  $k$ -значной логике с операцией разветвления по предикатам // Дискретная математика. 1990. Т. 2, вып. 4. С. 18–25. Тайманов В. А. О функциональных системах  $k$ -значной логики операциями программного типа // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 6. С. 1307–1310. Функциональные системы с операциями замыкания программного типа. Диссертация. 1983.

<sup>32</sup>Тарасова О. С. Классы функций  $k$ -значной логики, замкнутые относительно операции суперпозиции и перестановки // Математические вопросы кибернетики. 2004. Вып. 13. С. 59–112.



основанных на разбиении множеств  $E_k^n$ , и приведены примеры перестановок, при которых семейство замкнутых классов функций  $k$ -значной логики является счетным при  $k \geq 3$ , а также пример оператора, для которого семейство замкнутых классов функций из  $P_k$  является счетным при  $k = 3$  и континуальным при  $k \geq 5$ .

Таким образом, при исследовании функциональных систем  $(P_k; \varphi^+)$  в качестве оператора  $\varphi^+$ , как правило, выбирается оператор, возникающий при решении других задач или представляющий практический интерес. Немаловажное значение при этом имеет наличие новых качественных «эффектов», выявляемых при изучении семейств классов, замкнутых относительно оператора  $\varphi^+$ , и возможность использования полученных результатов для исследования классов, замкнутых относительно операции (обычной) суперпозиции.

В настоящей работе изучаются функции  $k$ -значной логики при  $k = 2^m$ ,  $m \geq 2$ . Каждое число из множества  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  кодируется в двоичной системе счисления. Тем самым этому числу взаимно-однозначно сопоставляется двоичный вектор из множества  $\{0, 1\}^m$ . На основе этого кодирования каждой функции из  $P_k$  сопоставляется булева вектор-функция, состоящая из  $m$  компонент. Идея применения такого подхода для изучения функций многозначной логики была предложена, как уже говорилось, еще Э. Л. Постом и часто используется в различных областях дискретной математики<sup>33</sup>, а в отдельных случаях является настолько эффективной, что позволяет получать в некотором смысле окончательные результаты<sup>34</sup>.

В диссертации на основе представления функций  $k$ -значной логики в виде булевых вектор-функций определен оператор  $\beta$ -замыкания, который является усилением оператора суперпозиции, и исследуются структуры семейств  $\beta$ -замкнутых классов функций из множества  $P_{k|r}$  (множества функций  $k$ -значной логики, которые принимают не более  $r$  значений). Каждому  $\beta$ -замкнутому классу  $\mathcal{A}$  естественным образом сопоставлен класс булевых функций, равный замыканию компонент всех функций из  $\mathcal{A}$  и называемый булевым замыканием. Показано, что для каждого замкнутого класса  $\mathcal{B}$  булевых функций семейство  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|2}$  с булевым замыканием  $\mathcal{B}$  является конечным (и непустым) и описаны все такие классы. Тем самым установлена счетность множества  $\beta$ -замкнутых классов функций  $k$ -значной логики, которые принима-

<sup>33</sup>Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007. Шоломов Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. СПб.: Лань, 2011.

<sup>34</sup>Трахтенброт Б. А. Асимптотическая оценка сложности логических сетей с памятью. // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 281–284. Кочергин А. В. О глубине функций  $k$ -значной логики в бесконечных базисах // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 1. С. 56–59.

ют не более двух значений. При значениях  $r$ , равных трем и четырем, для каждого замкнутого класса  $\mathcal{B}$  булевых функций показано, что семейство  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|r}$  с булевым замыканием  $\mathcal{B}$  может быть либо конечным, либо континуальным, а также найдены условия, при которых это семейство имеет соответствующую мощность. В частности, приведена полная классификация семейств  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_4$  с фиксированным булевым замыканием по их мощности. Кроме того, указаны замкнутые классы  $\mathcal{B}$  булевых функций, для которых семейства  $\beta$ -замкнутых классов с булевым замыканием  $\mathcal{B}$  являются конечными при  $k = 4$  и континуальными при  $k = 2^m$ ,  $m \geq 3$ .

## Цель работы

Исследование свойств оператора  $\beta$ -замыкания и  $\beta$ -замкнутых классов функций  $k$ -значной логики при  $k = 2^m$ ,  $m \geq 2$ .

## Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, в частности, критерии выразимости и представимости функций над конечными системами в  $P_k$ .

## Научная новизна

Все результаты являются новыми, получены автором самостоятельно. В диссертации для функций  $k$ -значной логики ( $k = 2^m$ ,  $m \geq 2$ ) получены следующие основные результаты.

1. Установлена счетность семейства  $\beta$ -замкнутых классов функций  $k$ -значной логики, которые принимают не более двух значений. Приведено описание всех  $\beta$ -замкнутых классов из этого семейства.
2. Построены примеры континуальных семейств  $\beta$ -замкнутых классов, содержащих только функции  $k$ -значной логики, принимающие не более трех значений. Для каждого класса  $\mathcal{B}$  булевых функций установлено, что семейство  $\beta$ -замкнутых классов, которые содержат только такие функции и имеют булево замыкание  $\mathcal{B}$ , является либо конечным, либо континуальным. Установлено явное разбиение всех замкнутых классов булевых функций по этому признаку.
3. Для каждого класса  $\mathcal{B}$  булевых функций показано, что семейство  $\beta$ -замкнутых классов с булевым замыканием  $\mathcal{B}$  и содержащих только функции  $k$ -значной логики, принимающие не более четырех значений, является либо

конечным, либо континуальным. Установлено явное разбиение всех замкнутых классов булевых функций по этому признаку. В частности, приведена полная классификация семейств  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_4$  с фиксированным булевым замыканием по их мощности.

### **Теоретическая и практическая ценность**

Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по теории функциональных систем, теории синтеза и сложности управляющих систем.

### **Апробация результатов**

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и общеуниверситетских, всероссийских и международных конференциях.

1. Семинар “Функции многозначной логики и смежные вопросы” под руководством профессоров А. Б. Угольников, С. Б. Гашкова и Р. М. Колпакова, механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011 г.
2. Семинар “Синтез управляющих систем” под руководством профессора О. М. Касим-Заде, механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2014 г.
3. Семинар “Математические вопросы кибернетики” под руководством профессора О. М. Касим-Заде, механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2014 г.
4. XI Международный семинар “Дискретная математика и ее приложения”, Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 18–23 июня 2012 г.
5. XXI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”, Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 8–12 апреля 2013 г.
6. Научная конференция “Ломоносовские чтения”, Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2013–2014 гг.
7. IX молодежная научная школа по дискретной математике и ее приложениям, Москва им. М. В. Ломоносова, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 16–21 сентября 2013 г.
8. XXI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”, Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 7–11 апреля 2014 г.

9. XVII международная конференция “Проблемы теоретической кибернетики”, Казань, КФУ, 16–20 июня 2014 г.

## Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата [1–6].

## Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Полный объем диссертации — 113 страниц, список литературы содержит 176 наименований.

## Содержание работы

Обозначим через  $P_k$  множество всех функций  $k$ -значной логики для каждого  $k \geq 2$ , а через  $P_{k|r}$  — множество всех функций из  $P_k$ , принимающих не более  $r$  значений, где  $1 \leq r \leq k$ . Для замкнутых классов булевых функций будем использовать следующие обозначения<sup>35</sup>:  $T_0$  — множество всех функций, сохраняющих константу 0;  $T_1$  — множество всех функций, сохраняющих константу 1;  $M$  — множество монотонных функций;  $L$  — множество линейных функций;  $S$  — множество самодвойственных функций;  $O^\mu$  — множество всех булевых функций  $f$ , таких, что у произвольных  $\mu$  наборов, на которых функция  $f$  равна 0, имеется общая нулевая компонента,  $\mu = 2, 3, \dots$ ;  $O^\infty$  — множество всех булевых функций  $f$ , для которых справедливо соотношение  $f \geq x$ , где  $x$  — одна из переменных функции  $f$ ;  $I^\mu$  — классы, двойственные к  $O^\mu$ ,  $\mu = 2, 3, \dots, \infty$ ;  $D$  — множество всех дизъюнкций;  $K$  — множество всех конъюнкций;  $U$  — множество всех одноместных функций;  $C$  — множество всех констант. Пусть  $\mu = 2, 3, \dots, \infty$ .

<sup>35</sup>См.: Угольников А. Б. Классы Поста. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008.

Положим:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &= \mathcal{B} \cap T_0, \quad \mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cap T_1, \quad \text{где } \mathcal{B} \text{ равен } M, L, D, K, U \text{ или } C; \\
&T_{01} = T_0 \cap T_1; \\
\mathcal{B}_{01} &= \mathcal{B} \cap T_{01}, \quad \text{где } \mathcal{B} \text{ равен } M, L, S, D, K \text{ или } U; \\
SM &= S \cap M, \quad SL = S \cap L, \quad SU = S \cap U, \quad MU = M \cap U; \\
MO^\mu &= M \cap O^\mu, \quad MI^\mu = M \cap I^\mu; \\
O_0^\mu &= O^\mu \cap T_0, \quad I_1^\mu = I^\mu \cap T_1; \\
MO_0^\mu &= MO^\mu \cap T_0; \quad MI_1^\mu = MI^\mu \cap T_1.
\end{aligned}$$

В диссертации рассматриваются функциональные системы функций из  $P_k$  при  $k = 2^m$ ,  $m \geq 2$ , со специальными операциями суперпозиции.

Во введении кратко изложена история вопроса и описаны основные результаты работы.

В первой главе введены основные понятия и определены новые операторы замыкания. Каждая функция  $F$  из  $P_k$ , зависящая от  $n$  переменных,  $n \geq 1$ , естественным образом кодируется в двоичной системе счисления. Тем самым ей сопоставляется булева вектор-функция  $\widehat{F}$ , содержащая  $m$  компонент, каждая из которых зависит от  $mn$  переменных, и называемая двоичным представлением функции  $F$ . В разделе 1.2 определена операция двоичной  $S$ -суперпозиции, которая подобна операции (обычной) суперпозиции, но, в отличие от нее, позволяет при построении новых функций специальным образом переставлять компоненты двоичных представлений функций  $k$ -значной логики между собой. Для оператора замыкания относительно операции двоичной  $S$ -суперпозиции, который назван  $S_0$ -замыканием, на основе примера замкнутых классов со счетным базисом, предложенного Ю. И. Яновым и А. А. Мучником<sup>11</sup>, установлена непрерывность семейства  $S_0$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|2}$  (теорема 1.1).

В разделе 1.3 для каждого множества  $\mathcal{A}$  из  $P_k$  определено его булево замыкание  $B(\mathcal{A})$  — класс булевых функций, который равен замыканию всех компонент двоичных представлений функций из  $\mathcal{A}$  относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной. Также определено  $\beta$ -замыкание множества  $\mathcal{A}$  как множество всех функций  $k$ -значной логики с двоичным представлением  $\widehat{F}(g_1, \dots, g_{mn})$ , где  $F \in \mathcal{A}$  и  $g_1, \dots, g_{mn} \in B(\mathcal{A})$  (здесь  $n$  — число переменных функции  $F$ ). В этом разделе доказаны некоторые свойства такого оператора, а в разделе 1.4 установлено, что оператор  $\beta$ -замыкания эквивалентен оператору замыкания относительно операций двоичной  $S$ -суперпозиции и введения несущественной переменной (теорема 1.2). В разделе 1.5 приведен критерий полноты  $\beta$ -замкнутых классов (теорема 1.3) и описаны все  $\beta$ -предполные классы. Оказалось, что их число не зависит от  $k$  и равно шести. Пять из них соответствуют предполным классам булевых функций и состоят из всех

функций  $k$ -значной логики, компоненты которых принадлежат соответствующему предполному классу булевых функций. Шестым  $\beta$ -предполным классом является множество всех функций из  $P_k$ , которые принимают не все значения.

В главе 2 исследуются  $\beta$ -замкнутые классы функций из  $P_{k|2}$ . В разделе 2.1 показано, что для каждого замкнутого класса  $\mathcal{B}$  булевых функций семейство  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|2}$  с булевым замыканием  $\mathcal{B}$  является конечным и непустым (теорема 2.1). В качестве простого следствия этого утверждения установлена счетность семейства  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|2}$  (теорема 2.2), в то время как семейство классов функций из  $P_{k|2}$ , замкнутых относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной, является континуальным. В разделе 2.2 приведено описание этого семейства  $\beta$ -замкнутых классов (теорема 2.3) и описан подход к построению решетки  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|2}$ . При этом доказано, что при замыкании относительно операции двоичной  $S$ -суперпозиции семейство замкнутых классов функций из  $P_{k|2}$  является континуальным, а при замыкании относительно двоичной  $S$ -суперпозиции и введения несущественной переменной — счетным.

В разделе 3.1 приведен пример континуального семейства  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|3}$  с булевым замыканием  $O^\infty$  (теорема 3.1), и тем самым установлена континуальность семейства  $\beta$ -замкнутых классов. При их изучении в главах 3–5 применяется подход, намеченный в главе 2 — для каждого замкнутого класса  $\mathcal{B}$  булевых функций исследуется семейство  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|r}$  с булевым замыканием  $\mathcal{B}$ , где  $k = 2^m$ ,  $m \geq 2$ ,  $r = 3, 4, k$ . В этом разделе вводятся следующие обозначения:  $Q(k, r)$  — множество классов булевых функций, для которых такие семейства  $\beta$ -замкнутых классов являются континуальным,  $C(k, r)$  — множество классов булевых функций, для которых соответствующие семейства  $\beta$ -замкнутых классов являются конечными.

В разделе 3.2 установлена принадлежность некоторых классов булевых функций множеству  $C(k, k)$ , а также множеству  $C(k, 3)$  (теоремы 3.2 и 3.3). На основе этих результатов показано, что для множества  $Q(k, 3)$  справедливы следующие соотношения  $\{O^\infty, I^\infty\} \subseteq Q(k, 3)$  и  $Q(k, 3) \subseteq \{O^\infty, I^\infty\} \cup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 3\}$ . В разделе 3.3 доказано, что на самом деле справедливы следующие равенства (теоремы 3.4 и 3.5):

$$Q(k, 3) = \{O^\infty, I^\infty\} \cup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 3\};$$

$$C(k, 3) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(k, 3)\}.$$

В разделе 3.5 для каждой тройки попарно различных чисел  $a, b, c$  исследуются функции  $k$ -значной логики, которые принимают значения из множества  $\{a, b, c\}$ . Для каждого такого множества  $\{a, b, c\}$  и класса  $\mathcal{B}$  булевых функций из

множества  $Q(k, 3)$  установлено, что семейство  $\beta$ -замкнутых классов функций, которые принимают только значения из множества  $\{a, b, c\}$ , с булевым замыканием  $\mathcal{B}$  может быть пустым, конечным или континуальным, и найдены соотношения для чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , при которых оно имеет соответствующую мощность (теорема 3.6). Также показано, что семейство  $\beta$ -замкнутых классов функций, которые принимают значения только из множества  $\{a, b, c\}$ , может быть конечным, счетным или континуальным и выявлен критерий, позволяющий это определить (теорема 3.7).

В главе 4 изучаются семейства  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|4}$  с фиксированным булевым замыканием. В разделе 4.1 континуальные семейства  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_{k|3}$  обобщены на случай функций из  $P_{k|4}$  (теорема 4.1), в разделе 4.2 найдены некоторые классы из множества  $C(k, 4)$  (теорема 4.2), а в разделе 4.3 показано, что класс  $O^2$  содержится в множестве  $C(k, 4)$  при  $k = 4$  (теорема 4.3) и в множестве  $Q(k, 4)$  при  $k = 2^m$ ,  $m \geq 3$  (теорема 4.4). На основе результатов этой и предыдущих глав доказаны следующие равенства (теоремы 4.5 и 4.6):

$$\begin{aligned} Q(4, 4) &= \{O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\} \cup \\ &\quad \cup \{O^\mu, O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu, I^\mu, I_1^\mu, MI^\mu, MI_1^\mu \mid \mu \geq 3\}; \\ C(4, 4) &= \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(4, 4)\}; \\ Q(k, 4) &= Q(4, 4) \cup \{O^2, I^2\} \text{ при } k = 2^m, m \geq 3; \\ C(k, 4) &= \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(k, 4)\} \text{ при } k = 2^m, m \geq 3. \end{aligned}$$

Таким образом приведена полная классификация семейств  $\beta$ -замкнутых классов функций из  $P_4$  с фиксированным булевым замыканием по их мощности. В главе 5 получены следующие результаты относительно подобных семейств  $\beta$ -замкнутых классов для случая  $P_k$ , где  $k = 2^m$ ,  $m \geq 3$  (теорема 5.1):

$$\begin{aligned} \{P_2, T_0, T_1, T_{01}, S, S_{01}, L, L_0, L_1, SL, L_{01}\} &\subseteq C(k, k); \\ \{D, D_0, D_1, D_{01}, K, K_0, K_1, K_{01}, U, SU, MU, U_0, U_1, U_{01}, C, C_0, C_1\} &\subseteq C(k, k); \\ \{O_0^2, MO^2, MO_0^2, I_0^2, MI^2, MI_0^2\} \cup Q(k, 4) &\subseteq Q(k, k). \end{aligned}$$

## Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему первому научному руководителю ныне покойному доктору физико-математических наук, профессору Александру Борисовичу Угольникову, под чьим руководством была выработана постановка задачи и получены первые результаты при ее решении. Автор также искренне благодарен научному руководителю доктору физико-математических

наук, профессору Вадиму Васильевичу Кочергину за обсуждение диссертации, ценные рекомендации и постоянное внимание к работе.

## **Публикации автора по теме диссертации**

1. *Подолько Д. К.* О классах функций, замкнутых относительно специальной операции суперпозиции // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 6. С. 54 – 57.
2. *Подолько Д. К.* Об одном континуальном семействе бета-замкнутых классов функций многозначной логики // Прикладная дискретная математика. 2014. № 2(24). С. 12 – 20.
3. *Подолько Д. К.* О классах функций  $k$ -значной логики, принимающих не более трех значений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2014. Т. 156, кн. 3. С. 98 – 109.
4. *Подолько Д. К.* О некоторых свойствах операции суперпозиции специального вида // Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.). / Под редакцией О.М. Касим-Заде. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 213 – 215.
5. *Подолько Д. К.* Об особенностях специальной операции суперпозиции в многозначной логике // Материалы IX молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 16–21 сентября 2013 г.). Под редакцией А.В. Чашкина. М.: Изд-во ИПМ РАН, 2013. С. 92 – 97.
6. *Подолько Д. К.* О мощности некоторых семейств бета-замкнутых классов функций многозначной логики // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVII международной конференции (Казань, 16–20 июня 2014 г.). Под редакцией Ю.И. Журавлева. Казань: Отечество, 2014. С. 232 – 234.