ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова»
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Подолько Дмитрий Константинович

О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО УСИЛЕННОЙ ОПЕРАЦИИ СУПЕРПОЗИЦИИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Кочергин.

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Оглавление

Введение **4**

1 Основные определения **12**

1.1 Двоичные представления 12

1.2 Двоичные перестановки 14

1.3 Операция двоичной суперпозиции 18

1.4 Эквивалентность S-замыкания и β-замыкания 23

1.5 Критерий полноты β-замкнутых классов 25

2 Классы функций из $P_{k|2}$ **28**

2.1 Счетность семейства β-замкнутых классов 28

2.2 Описание β-замкнутых классов 34

3 Классы функций из $P_{k|3}$ **43**

3.1 Континуальность семейства β-замкнутых классов 43

3.2 Конечные семейства β-замкнутых классов 46

3.2.1 Классы с булевым замыканием в U 46

3.2.2 Классы с булевым замыканием в D или K 47

3.2.3 Классы с булевым замыканием в L 49

3.2.4 Классы с булевым замыканием P_2, T_0, T_1, T_{01}, S или S_{01} 51

3.2.5 Классы с булевым замыканием O^2 53

3.2.6 Классы с булевым замыканием в M или T_{01} 58

3.2.7 Множества $C(k,k)$ и $C(k,3)$ 60

3.3 Семейство классов с булевым замыканием O^μ, $\mu \geq 3$ 62

3.4 Полная классификация 69

3.5 Случай с тремя фиксированными значениями 70

3.6 Подход к описанию классов 75

4 Классы функций из $P_{k|4}$ **77**

4.1 Обобщение результатов из $P_{k|3}$ . . . 77
4.2 Некоторые конечные семейства классов . . . 81
4.3 Семейство классов с булевым замыканием O^2 . . . 87
4.3.1 Случай $k = 4$ . . . 87
4.3.2 Случай $k = 2^m,\ m \geq 3$ . . . 88
4.4 Полная классификация . . . 93

5 Все функции k-значной логики . . . 96
5.1 Обобщение результатов из $P_{k|4}$ . . . 96
5.2 Классификация семейств β-замкнутых классов . . . 98

Литература . . . 100

Введение

Настоящая работа относится к одному из основных направлений дискретной математики и математической кибернетики — теории функциональных систем [27, 83, 89]. Функциональная система представляет собой пару $(\mathfrak{A}; \psi)$, где $\mathfrak{A}$ является некоторым множеством функций, а ψ — некоторым отображением множества всех подмножеств системы $\mathfrak{A}$ в себя. Функциональные системы, как правило, имеют содержательную связь с реальными кибернетическими моделями управляющих систем. К числу важнейших задач теории функциональных систем можно отнести задачи о полноте, о выразимости одних функций через другие, о структуре замкнутых классов, о тождественных преобразованиях и т.д. Результаты, получаемые при исследовании функциональных систем, позволяют разрабатывать новые подходы для решения других задач дискретной математики и математической кибернетики. Поэтому С. В. Яблонский утверждал [89], что роль функциональных систем в дискретной математике можно сравнить с ролью математического анализа в непрерывной математике.

Одним из центральных направлений в теории функциональных систем является изучение систем $(P_k; \varphi)$, где P_k — множество функций k-значной логики, $k \geq 2$, а φ — некоторый оператор на множестве всех подмножеств P_k. В качестве операторов φ часто рассматриваются операторы, являющиеся операторами замыкания, т.е. обладающие тремя свойствами (см., например, [21]): $\mathcal{A} \subseteq \varphi(\mathcal{A})$ (экстенсивность), $\varphi(\mathcal{A}) \subseteq \varphi(\mathcal{B})$ при $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ (монотонность) и $\varphi(\varphi(\mathcal{A})) = \varphi(\mathcal{A})$ (идемпотентность).

Основными типами задач, возникающих при исследовании функций k-значной логики являются задачи выразимости и полноты (см., например, обзор [79]). К первому из данных типов относятся задачи определения по множеству $\mathcal{A}$ и произвольной функции из P_k принадлежности этой функции множеству $\varphi(\mathcal{A})$. Задачи второго типа для заданных множеств F и $\mathcal{A}$ из P_k направлены на исследование вопроса порождаемости множеством F всех функций из $\mathcal{A}$, т.е. выполнения условия $\varphi(F) = \mathcal{A}$. При этом важное место занимают задачи исследования классов на наличие конечных порождающих систем, а также задачи о существовании базиса, то есть порождающей системы, при удалении любой функции из которой эта система уже перестает быть порождающей. Также важным направлением при изучении функций k-значной логики является исследование свойств семейства классов $\{\varphi(\mathcal{A}) \,|\, \mathcal{A} \subseteq P_k\}$. К этой проблематике можно отнести задачи определения мощности такого семейства классов, его структуры, свойств его элементов и т.д.

Для функциональных систем функций двузначной логики с операцией суперпозиции Э. Л. Пост показал [146, 147], что каждый класс булевых функций, замкнутый относительно данной операции, имеет конечный базис и описал все такие классы. Тем самым установлена счетность семейства замкнутых классов булевых функций и построена решетка замкнутых классов. Данные результаты в более доступном изложении позднее представлены в книге С. В. Яблонского, Г. П. Гаврилова и В. Б. Кудрявцева [84]. При этом в отличие от работ Поста, в этой книге рассматривались классы, замкнутые относительно двух операций: суперпозиции и введения несущественной переменной. Такой подход позволил получить более простую структуру замкнутых классов, исключив семнадцать классов, которые не являются замкнутыми относительно операции введения несущественной переменной.

Результаты, полученные в двузначной логике, способствовали развитию исследований функциональных систем функций k-значной логики при $k \geq 3$. С. В. Яблонский решил [82] задачу о полноте в множестве функций 3-значной логики с операциями суперпозиции и введения несущественной переменной и описал все 18 предполных классов в P_3, а А. В. Кузнецовым [29,30] установлена конечность семейства всех предполных классов в P_k при любом k. В работах многих исследователей выявлены различные семейства предполных классов (см., например., [2, 16, 17, 38, 138–141, 143]), а описание всех предполных классов функций из P_k завершено И. Розенбергом [151, 152].

Пост предполагал [146], что для исследования функций многозначной логики можно воспользоваться методом моделирования таких функций в двоичной системе и получить результаты, подобные результатам для булевых функций. Однако позднее были выявлены существенные различия между двузначной и k-значной логикой при $k \geq 3$. Так, Ю. И. Янов и А. А. Мучник привели примеры замкнутых классов без базиса и классов со счетным базисом [90], тем самым установив, что семейство замкнутых классов функций многозначной логики является континуальным.

Изучение семейства замкнутых классов функций k-значной логики при $k \geq 3$ наталкивается на значительные трудности в связи с его континуальностью. Поэтому для его исследования используются различные подходы, которые условно можно разделить на два направления: изучение свойств конкретных семейств замкнутых классов и изучение функциональных систем $P_k^+ = (P_k; \varphi^+)$, в которых в качестве оператора φ^+ рассматривается какое-либо усиление оператора суперпозиции φ (см., например, обзор [79]).

К первому из описанных направлений естественным образом относится задача исследования свойств предполных классов функций k-значной логики. Помимо их описания, для данных классов рассматривался вопрос наличия у них конечных базисов. Д. Лау приведе-

ны [120] конечные порождающие системы для всех предполных классов в P_k при любом k, кроме классов типа $\mathbb{O}$ (классов монотонных функций), а также для классов типа $\mathbb{O}$ при $k \leq 7$. Пример предполного класса монотонных функций из P_8, который не имеет конечного базиса, построен Г. Тардошем [169]. В работах Я. Деметровича, Л. Ханнака, Л. Роняи [110–112] описаны некоторые достаточные условия конечной порожденности предполных монотонных классов при любом k. В дальнейшем существенные продвижения в данном направлении получены в работах О. С. Дудаковой [13–15], в которых найден критерий наличия конечного базиса у предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины 2.

Также для каждого предполного класса функций k-значной логики рассматривалась задача нахождения мощности семейства замкнутых классов, которые в нем содержатся. В работах С. С. Марченкова, Я. Деметровича, Л. Ханнака [39, 41, 106–109] доказано, что при любом k множество замкнутых классов, содержащихся в любом предполном классе, является континуальным, за исключением классов типа $\mathbb{L}$ (классов линейных функций), в которых при простых k данное множество является конечным, а при k, равных степеням простых чисел — счетным.

Помимо исследования предполных классов большое внимание уделялось изучению семейств классов, содержащих простые естественные множества функций. Е. Слупецкий привел [162] критерий полноты замкнутых классов многозначной логики, содержащих все функции одной переменной, и показал, что число таких классов является конечным, а Г. А. Бурле описал [6] данные классы. С. В. Яблонским найден [83] критерий полноты классов функций многозначной логики, содержащих все одноместные функции, принимающие не более $k-1$ значения. В работах В.Б. Кудрявцева [24–26] изучаются свойства систем функций, которые принимают все значения из $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (такие системы называются S-системами), приводится описание всех S-предполных S-множеств, устанавливается асимптотическое поведение числа таких множеств и их типов.

При изучении конкретных семейств замкнутых классов функций из P_k одними из первых часто исследуются семейства $P_{k,l}$ функций k-значной логики, которые принимают только значения из множества E_l, где $l \geq 2$. В работах Д. Лау [117, 119, 128, 129] и Н. Грюнвальда [114–116] для каждого класса B булевых функций установлена мощность семейства замкнутых классов функций из $P_{3,2}$, которые содержат только функции, ограничение которых на множестве E_2 принадлежит классу B, и описаны такие семейства в тех случаях, когда они являются конечными или счетными. Также некоторые специальные семейства классов функций из $P_{k,2}$ исследовались в работах А. В. Михайлович [56, 57].

Относительная простота некоторых классов функций из $P_{k,l}$, достигнутые в этом направлении результаты и разработанные методы позволили в отдельных случаях исследовать задачи о сложности представления функций формулами. Д. А. Дагаевым [10, 11] для почти всех замкнутых классов булевых функций получены асимптотически совпадающие с «мощностными» нижними оценками верхние оценки функций Шеннона, характеризующих сложность множества всех функций из $P_{3,2}$ с проекцией (булевым ограничением) в заданный класс булевых функций, при реализации формулами над некоторыми порождающими системами, а для почти всех замкнутых классов псевдолинейных функций (проекции которых совпадают с классом всех линейных булевых функций) из $P_{3,2}$ установлен точный рост соответствующих функций Шеннона для некоторых порождающих систем.

Значительное число работ посвящено исследованиям функциональных систем $(P_k; \varphi^+)$, в которых оператор φ^+ является усилением оператора суперпозиции. Использование такого подхода позволяет, как правило, получать семейства замкнутых классов с более обозримой структурой. Стоит отметить, что упомянутые выше работы Е. Слупецкого и Г. А. Бурле можно отнести к данному направлению исследований, поскольку задачи, рассматриваемые в данных работах, естественным образом можно переформулировать в терминах усиленной операции суперпозиции, допускающей в качестве тривиальных формул формулы, реализующие функции одной переменной.

С. С. Марченков и Нгуен Ван Хоа рассматривали [43, 45, 47, 64–67] S-замкнутые классы функций k-значной логики (классы, которые вместе с каждой функцией содержат функции, двойственные к ней относительно заданной группы перестановок) и показали, что семейство таких классов является конечным при любом $k \geq 3$, и при этом число таких классов растет сверхэкспоненциально с ростом k.

В работе А. В. Кузнецова [32] введены понятия параметрической выразимости и оператора параметрического замыкания, а также установлены критерии параметической выразимости для k-значных логик при $k \geq 2$ и найдены все параметрически замкнутые классы при $k = 2$. В дальнейшем А. Ф. Данильченко установлена [12] конечность семейства параметрически замкнутых классов при $k = 3$, а С. Баррисом и Р. Уиллардом — при $k > 3$ [95]. На основе понятия параметрической выразимости О. М. Касим-Заде определено [19, 20] понятие неявной выразимости. Им установлена эквивалентность параметрической и неявной выразимости при $k = 2$ и, тем самым, установлена конечность множества классов неявно выразимых булевых функций. Критерии неявной полноты множеств функций k-значной логики получены О. М. Касим-Заде [20] и Е. А. Ореховой [68] при $k = 2$ и $k = 3$ соответственно. При этом

в [68] критерий неявной полноты для $k = 3$ формулируется не в терминах предполных (т.е. максимальных неполных) классов, а в терминах минимальных полных классов.

Функционально-предикатные системы с операциями замыкания программного типа, определяемые своими множествами предикатов, рассматривались в работе Ю. В. Голункова [9], в которой исследовалась задача полноты таких систем. Работы В. А. Тайманова и В. Д. Соловьева [70–72] посвящены изучению функциональных систем функций k-значной логики, $k \geq 2$, с операциями программного типа. В. А. Тайманов установил, что в зависимости от свойств множеств предикатов, семейства замкнутых классов могут быть конечными, счетными и континуальными. Примеры конечных описаний замкнутых классов для некоторых операций программного типа рассматривались В. Д Соловьевым.

К этому же направлению относятся и работы О. С. Тарасовой [73–75]. В них определены операторы замыкания относительно суперпозиции и перестановок, основанных на разбиении множеств E_k^n, и приведены примеры перестановок, при которых семейство замкнутых классов функций k-значной логики является счетным при $k \geq 3$, а также пример оператора, для которого семейство замкнутых классов функций из P_k является счетным при $k = 3$ и континуальным при $k \geq 5$.

Таким образом, при исследовании функциональных систем $(P_k; \varphi^+)$ в качестве оператора φ^+, как правило, выбирается оператор, возникающий при решении других задач или представляющий практический интерес. Немаловажное значение при этом имеет наличие новых качественных «эффектов», выявляемых при изучении семейств классов, замкнутых относительно оператора φ^+, и возможность использования полученных результатов для исследования классов, замкнутых относительно операции (обычной) суперпозиции.

В настоящей работе изучаются функции k-значной логики при $k = 2^m$, $m \geq 2$. Каждое число из множества $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ кодируется в двоичной системе счисления. Тем самым этому числу взаимно-однозначно сопоставляется двоичный вектор из множества $\{0, 1\}^m$. На основе этого кодирования каждой функции из P_k сопоставляется булева вектор-функция, состоящая из m компонент. Идея применения такого подхода для изучения функций многозначной логики была предложена, как уже говорилось, еще Э. Л. Постом [146] и часто используется в различных областях дискретной математики (см., например, [7, 69, 81, 88]), а в отдельных случаях является настолько эффективной, что позволяет получать в некотором смысле окончательные результаты (см., например, [22, 76]).

В диссертации на основе представления функций k-значной логики в виде булевых вектор-функций определен оператор β-замыкания, который является усилением оператора суперпо-

зиции. Основной целью работы является исследование свойств оператора β-замыкания и β-замкнутых классов функций k-значной логики при $k = 2^m$, $m \geq 2$.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, разделенных в совокупности на 19 разделов, и списка литературы. Основные утверждения работы формулируются в виде теорем. Утверждения нумеруются парой чисел, где первое означает номер главы, а второе — номер утверждения внутри главы.

Во введении кратко изложена история вопроса и описаны основные результаты работы.

В первой главе введены основные понятия и определены новые операторы замыкания. Каждая функция F из P_k, зависящая от n переменных, $n \geq 1$, естественным образом кодируется в двоичной системе счисления. Тем самым ей сопоставляется булева вектор-функция $\widehat{F}$, содержащая m компонент, каждая из которых зависит от mn переменных, и называемая двоичным представлением функции F. В разделе 1.2 определена операция двоичной S-суперпозиции, которая подобна операции (обычной) суперпозиции, но, в отличие от нее, позволяет при построении новых функций специальным образом переставлять компоненты двоичных представлений функций k-значной логики между собой. Для оператора замыкания относительно операции двоичной S-суперпозиции, который назван S_0-замыканием, на основе примера замкнутых классов со счетным базисом, предложенного Ю. И. Яновым и А. А. Мучником[11], установлена континуальность семейства S_0-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ (**теорема 1.1**).

В разделе 1.3 для каждого множества $\mathcal{A}$ из P_k определено его булево замыкание $B(\mathcal{A})$ — класс булевых функций, который равен замыканию всех компонент двоичных представлений функций из $\mathcal{A}$ относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной. Также определено β-замыкание множества $\mathcal{A}$ как множество всех функций k-значной логики с двоичным представлением $\widehat{F}(g_1, \ldots, g_{mn})$, где $F \in \mathcal{A}$ и $g_1, \ldots, g_{mn} \in B(\mathcal{A})$ (здесь n — число переменных функции F). В этом разделе доказаны некоторые свойства такого оператора, а в разделе 1.4 установлено, что оператор β-замыкания эквивалентен оператору замыкания относительно операций двоичной S-суперпозиции и введения несущественной переменной (**теорема 1.2**). В разделе 1.5 приведен критерий полноты β-замкнутых классов (**теорема 1.3**) и описаны все β-предполные классов. Оказалось, что их число не завивисит от k и равно шести. Пять из них соответствуют предполным классам булевых функций и состоят из всех функций k-значной логики, компоненты которых принадлежат соответствующему предполному классу булевых функций. Шестым β-предполным классом является множество всех функций из P_k, которые принимают не все значения.

В главе 2 исследуются β-замкнутые классы функций из $P_{k|2}$. В разделе 2.1 показано, что для каждого замкнутого класса $\mathcal{B}$ булевых функций семейство β-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным и непустым (**теорема 2.1**). В качестве простого следствия этого утверждения установлена счетность семейства β-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ (**теорема 2.2**), в то время как семейство классов функций из $P_{k|2}$, замкнутых относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной, является континуальным. В разделе 2.2 приведено описание этого семейства β-замкнутых классов (**теорема 2.3**) и описан подход к построению решетки β-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$. При этом доказано, что при замыкании относительно операции двоичной S-суперпозиции семейство замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ является континуальным, а при замыкании относительно двоичной S-суперпозиции и введения несущественной переменной — счетным.

В разделе 3.1 приведен пример континуального семейства β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^∞ (**теорема 3.1**), и тем самым установлена континуальность семейства β-замкнутых классов. При их изучении в главах 3–5 применяется подход, намеченный в главе 2 — для каждого замкнутого класса $\mathcal{B}$ булевых функций исследуется семейство β-замкнутых классов функций из $P_{k|r}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$, где $k = 2^m,\ m \geq 2,\ r = 3, 4, k$. В этом разделе вводятся следующие обозначения: $Q(k, r)$ — множество классов булевых функций, для которых такие семейства β-замкнутых классов являются континуальным, $C(k, r)$ — множество классов булевых функций, для которых соответствующие семейства β-замкнутых классов являются конечными.

В разделе 3.2 установлена принадлежность некоторых классов булевых функций множеству $C(k, k)$, а также множеству $C(k, 3)$ (**теоремы 3.2 и 3.3**). На основе этих результатов показано, что для множества $Q(k, 3)$ справедливы следующие соотношения $\{O^\infty, I^\infty\} \subseteq Q(k, 3)$ и $Q(k, 3) \subseteq \{O^\infty, I^\infty\} \bigcup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 3\}$. В разделе 3.3 доказано, что на самом деле справедливы следующие равенства (**теоремы 3.4 и 3.5**):

$$Q(k, 3) = \{O^\infty, I^\infty\} \bigcup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 3\};$$

$$C(k, 3) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \,\big|\, [\mathcal{B}] = \mathcal{B},\ \mathcal{B} \notin Q(k, 3)\}.$$

В разделе 3.5 для каждой тройки попарно различных чисел a, b, c исследуются функции k-значной логики, которые принимают значения из множества $\{a, b, c\}$. Для каждого такого множества $\{a, b, c\}$ и класса $\mathcal{B}$ булевых функций из множества $Q(k, 3)$ установлено, что семейство β-замкнутых классов функций, которые принимают только значения из множества $\{a, b, c\}$, с булевым замыканием $\mathcal{B}$ может быть пустым, конечным или континуальным, и найдены соотношения для чисел a, b и c, при которых оно имеет соответствующую мощ-

ность (**теорема 3.6**). Также показано, что семейство β-замкнутых классов функций, которые принимают значения только из множества $\{a, b, c\}$, может быть конечным, счетным или континуальным и выявлен критерий, позволяющий это определить (**теорема 3.7**).

В главе 4 изучаются семейства β-замкнутых классов функций из $P_{k|4}$ с фиксированным булевым замыканием. В разделе 4.1 континуальные семейства β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ обобщены на случай функций из $P_{k|4}$ (**теорема 4.1**), в разделе 4.2 найдены некоторые классы из множества $C(k, 4)$ (**теорема 4.2**), а в разделе 4.3 показано, что класс O^2 содержится в множестве $C(k, 4)$ при $k = 4$ (**теорема 4.3**) и в множестве $Q(k, 4)$ при $k = 2^m,\ m \geq 3$ (**теорема 4.4**). На основе результатов этой и предыдущих глав доказаны следующие равенства (**теоремы 4.5 и 4.6**):

$$Q(4,4) = \{O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\} \bigcup$$
$$\bigcup \{O^\mu, O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu, I^\mu, I_1^\mu, MI^\mu, MI_1^\mu \mid \mu \geq 3\};$$

$$C(4,4) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \,\big|\, [\mathcal{B}] = \mathcal{B},\ \mathcal{B} \notin Q(4,4)\};$$

$$Q(k,4) = Q(4,4) \bigcup \{O^2, I^2\} \text{ при } k = 2^m,\ m \geq 3;$$

$$C(k,4) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \,\big|\, [\mathcal{B}] = \mathcal{B},\ \mathcal{B} \notin Q(k,4)\} \text{ при } k = 2^m,\ m \geq 3.$$

Таким образом приведена полная классификация семейств β-замкнутых классов функций из P_4 с фиксированным булевым замыканием по их мощности. В главе 5 получены следующие результаты относительно подобных семейств β-замкнутых классов для случая P_k, где $k = 2^m,\ m \geq 3$ (**теорема 5.1**):

$$\{P_2, T_0, T_1, T_{01}, S, S_{01}, L, L_0, L_1, SL, L_{01}\} \subseteq C(k,k);$$

$$\{D, D_0, D_1, D_{01}, K, K_0, K_1, K_{01}, U, SU, MU, U_0, U_1, U_{01}, C, C_0, C_1\} \subseteq C(k,k);$$

$$\{O_0^2, MO^2, MO_0^2, I_0^2, MI^2, MI_0^2\} \bigcup Q(k,4) \subseteq Q(k,k).$$

Глава 1

Основные определения

1.1 Двоичные представления

Пусть $k,\ n \geq 1$. Обозначим через E_k множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, а через E_k^n — множество всех наборов длины n, все компоненты которых принадлежат E_k. Пусть $F^{(n)}(x^1, \ldots, x^n)$ — функция, определенная на множестве E_k^n и принимающая значения из множества E_k. Тогда она называется n-местной функцией k-значной логики. Данную функцию будем обозначать также через $F(x^1, \ldots, x^n)$ и F. Через P_k обозначим множество всех функций k-значной логики.

Для каждой функции F из P_k через $D(F)$ будем обозначать множество значений функции F, а для каждого $r = 1, \ldots, k$ через $P_{k|r}$ — множество всех функций k-значной логики, которые принимают не более r значений.

Далее будем считать, что $k = 2^m$, где m — натуральное, $m \geq 2$. В этом случае каждое из чисел $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ можно записать в двоичной системе счисления:

$$
\begin{gathered}
0 \leftrightarrow (0, 0, \ldots, 0, 0); \\
1 \leftrightarrow (0, 0, \ldots, 0, 1); \\
2 \leftrightarrow (0, 0, \ldots, 1, 0); \\
\vdots \\
k-1 \leftrightarrow (1, 1, \ldots, 1, 1).
\end{gathered}
$$

Таким образом числу α из E_k сопоставляется двоичный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ из E_2^m. Для этого вектора будем использовать также обозначения $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \rangle$ или $\widehat{\alpha}$. Переменной x, принимающей значения из E_k, поставим в соответствие вектор-переменную $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$, где $x_1, \ldots, x_m$ являются переменными, принимающими значения из множества E_2, таким образом, что каждому значению α переменной x ставится в соответствие значение $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \rangle$ вектор-переменной $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$. Будем обозначать эту вектор-переменную также через $\widehat{x}$.

Произвольной n-местной функции $F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ k-значной логики сопоставим булеву вектор-функцию $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, где $f_1, \ldots, f_m$ — mn-местные функции алгебры логики,

каждая из которых зависит от переменных $x_1^j, \ldots, x_m^j$, где $\langle x_1^j, \ldots, x_m^j \rangle = \widehat{x}^j$, $j = 1, \ldots, n$. Для этой вектор-функции будем также использовать обозначения $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle(\widehat{x}^1, \widehat{x}^2, \ldots, \widehat{x}^n)$, $\widehat{F}(\widehat{x}^1, \widehat{x}^2, \ldots, \widehat{x}^n)$ и $\widehat{F}$.

Определение 1.1. *Указанные представления называются двоичными представлениями числа α, переменной x и функции F соответственно.*

Определение 1.2. *Пусть $F \in P_k$ и $\widehat{F} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Для каждого i, $1 \leq i \leq m$, функцию f_i будем называть i-й компонентой вектор-функции $\widehat{F}$ и обозначать через $b_i(F)$. Множество всех компонент функции F будем обозначать через $b(F)$.*

Определение 1.3. *Пусть $\widehat{x} = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$. Тогда переменные $x_1, \ldots, x_m$ будем называть компонентами вектор-переменной $\widehat{x}$.*

Пример. Пусть $m = 2$. $F(x, y) = x + y \pmod 4$ — сложение по модулю 4.

y \ x	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Пусть $\widehat{F} = \langle f_1, f_2 \rangle$, $\widehat{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$, $\widehat{y} = \langle y_1, y_2 \rangle$. Тогда

x_1	x_2	y_1	y_2	f_1	f_2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

Из таблицы видно, что справедливы равенства

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 + y_1 + x_2 \& y_2 \pmod 2;$$
$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_2 + y_2 \pmod 2.$$

1.2 Двоичные перестановки

В этом разделе для множеств функций k-значной логики при $k = 2^m,\ m \geq 2$, будет определен оператор S_0-замыкания, который строится на основе специальных перестановок компонент двоичных представлений функций из P_k. Для каждого $n \geq 1$ обозначим через S_n множество всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и введем ряд определений.

Определение 1.4. *Пусть $\omega \in S_{mp},\ p \geq 1$. Тогда отображение $\omega^{(mp)} : E_2^{mp} \to E_2^{mp}$, задаваемое функцией*

$$\omega^{(mp)}(x_1, \ldots, x_{mp}) = (x_{\omega(1)}, \ldots, x_{\omega(mp)}),$$

будем называть двоичной перестановкой порядка mp.

Пусть $x^1, \ldots, x^p$, $p \geq 1$ — переменные, принимающие значения из множества E_k. Вектор $(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^p)$, компоненты которого являются двоичными представлениями переменных

$x^1, \ldots, x^p$, можно рассматривать как вектор-переменную, принимающую значения из E_2^{mp}. Поэтому если $\omega^{(mp)}$ — двоичная перестановка порядка mp, то имеет место соотношение:

$$\omega^{(mp)}(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^p) = \Big(\langle x_{\omega(1)}, \ldots, x_{\omega(m)}\rangle, \ldots, \langle x_{\omega(m(p-1)+1)}, \ldots, x_{\omega(mp)}\rangle\Big),$$

где $\widehat{x}^i = \langle x_{m(i-1)+1}, \ldots, x_{mi}\rangle$ для $i = 1, \ldots, p$.

Определение 1.5. *Пусть $\mathcal{A}$ — множество функций из P_k. Введем понятие S-формулы над $\mathcal{A}$.*

1. *Пусть x — переменная. Тогда выражение $\widehat{x}$ будем называть S-формулой над $\mathcal{A}$. Такие S-формулы назовем тривиальными.*

2. *Пусть $F \in \mathcal{A}$, F зависит от p переменных, $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ — S-формулы над $\mathcal{A}$, а $\omega^{(mp)}$ — двоичная перестановка порядка mp. Тогда выражение $\widehat{F}\Big(\omega^{(mp)}\big(\Phi_1, \ldots, \Phi_p\big)\Big)$ будем называть S-формулой над $\mathcal{A}$.*

Если Φ является S-формулой над множеством $\mathcal{A}$, а $\{\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n\}$ — множество всех тривиальных S-формул, содержащихся в Φ, то будем обозначать S-формулу Φ через $\Phi(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ и говорить, что она зависит от вектор-переменных $\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n$. Значение $\Phi(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)$ S-формулы $\Phi(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n)$ для каждого набора $(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)$ из E_2^{mn} определяется стандартным образом.

Введем понятие S_0-замыкания для каждого множества функций $\mathcal{A}$ из P_k.

Определение 1.6. *Будем говорить, что функция $F(x^1, \ldots, x^n)$ из P_k реализуется S-формулой $\Phi(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n)$ над $\mathcal{A}$, если для всех наборов $(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)$ из E_2^{mn} верно соотношение $\Phi(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n) = \widehat{F}(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)$.*

Определение 1.7. *Если функция $F(x^1, \ldots, x^n)$ из P_k реализуется S-формулой $\Phi(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n)$ над $\mathcal{A}$, которая не является тривиальной, то будем говорить, что функция F получена при помощи операции двоичной S-суперпозиции из функций системы $\mathcal{A}$.*

Определение 1.8. *Множество всех функций k-значной логики, которые можно получить из функций системы $\mathcal{A}$ при помощи операции двоичной S-суперпозиции, будем называть S_0-замыканием множества $\mathcal{A}$ (обозначение $[\mathcal{A}]_{S_0}$).*

На основе введенных определений 1.5 и 1.8 несложно показать, что для оператора S_0-замыкания выполняются все условия, предъявляемые к операторам замыкания (см., например, [21]), а именно:

- $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{A}]_{S_0}$;

- если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, то $[\mathcal{A}]_{S_0} \subseteq [\mathcal{B}]_{S_0}$;
- $[[\mathcal{A}]_{S_0}]_{S_0} = [\mathcal{A}]_{S_0}$.

Тем самым использование термина «S_0-замыкание» правомерно, и можно ввести следующее определение.

Определение 1.9. *Множество $\mathcal{A}$ будем называть S_0-замкнутым, если выполняется равенство $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]_{S_0}$.*

Покажем, что семейство всех S_0-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ имеет мощность континуума. Для этого определим множества $R_n \subseteq E_k^n$ и $\widehat{R}_n \subseteq E_2^{mn}$ для всех $n \geq 2$ следующим образом:

$$R_n = \big\{(1, k-1, \ldots, k-1),\ (k-1, 1, k-1, \ldots, k-1),\ \ldots, (k-1, k-1, \ldots, k-1, 1)\big\};$$
$$\widehat{R}^n = \big\{(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n) \,|\, (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in R_n\big\}.$$

Определим n-местную функцию χ_n из P_k как характеристическую функцию множества R_n:

$$\chi_n(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} 1, \text{ если } (x^1, \ldots, x^n) \in R_n; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Положим также $\mathcal{W} = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \{\chi_n\}$. Для введенных функций имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть $n \geq 2$. Тогда верно соотношение $\chi_n \notin \big[\mathcal{W}\backslash\{\chi_n\}\big]_{S_0}$.*

Доказательство. Доказательство данной леммы основано на методе, который используется при доказательства леммы о континуальности семейства классов функций из P_k, замкнутых относительно операции суперпозиции (см., например, [89, 90]).

Предположим, что $\chi_n \in \big[\mathcal{W}\backslash\{\chi_n\}\big]_{S_0}$. Тогда χ_n реализуется нетривиальной S-формулой Φ над $\mathcal{W}\backslash\{\chi_n\}$. Без ограничения общности будем считать, что Φ зависит только от вектор-переменных $\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n$. Поэтому Φ имеет вид

$$\widehat{\chi_p}\Big(\omega^{(mp)}\big(\Phi_1(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n), \ldots, \Phi_p(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n)\big)\Big),$$

где $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ — некоторые S-формулы над $\mathcal{W}\backslash\{\chi_n\}$, а $\omega^{(mp)}$ — двоичная перестановка порядка mp, $p \geq 2$, $p \neq n$.

Рассмотрим произвольный набор $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ из R_n. Так как S-формула Φ реализует функцию χ_n, то $\Phi(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n) = \widehat{1}$. Значит набор $\Big(\omega^{(mp)}\big(\Phi_1(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n), \ldots, \Phi_p(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)\big)\Big)$ должен содержаться в $\widehat{R}_p$, а поскольку двоичная перестановка $\omega^{(mp)}$ сохраняет количество нулевых компонент в наборе, на котором она действует, то в наборе $\big(\Phi_1(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n), \ldots, \Phi_p(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)\big)$ должно быть ровно $m-1$ нулевая компонента. Покажем, что это не так. Тогда возможен ровно один из трех случаев.

1. Среди S-формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ имеются хотя бы две нетривиальные S-формулы. Каждая из таких S-формул реализует функцию, которая принимает только значения из множества $\{0,1\}$, а следовательно, в ее двоичное представление входит как минимум $m-1$ нулевая компонента. Тогда для любого набора $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ из R_n набор $\big(\Phi_1(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n), \ldots, \Phi_p(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)\big)$ содержит как минимум $2m-2$ нулевые компоненты, что неверно.

2. Среди S-формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ имеется только одна нетривиальная. Так как $p \geq 2$, то среди данных S-формул имеется хотя бы одна тривиальная. Без ограничения общности будем считать, что это S-формула $\widehat{x}^1$. Рассмотрим набор $(1, k-1, \ldots, k-1)$ из R_n. Тогда набор $\big(\Phi_1(\widehat{1}, \widehat{k-1}, \ldots, \widehat{k-1}), \ldots, \Phi_p(\widehat{1}, \widehat{k-1}, \ldots, \widehat{k-1})\big)$ содержит как минимум $2m-2$ нулевые компоненты: по $m-1$ от каждой нетривиальной S-формулы и по $m-1$ от каждой S-формулы $\widehat{x}^1$.

3. Все S-формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ являются тривиальными. Поскольку все переменные функции χ_n существенные, то среди рассматриваемых S-формул должна содержаться каждая из S-формул $\widehat{x}^i$, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно $p > n$ и среди S-формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ найдутся как минимум две одинаковые S-формулы. Без ограничения общности будем считать, что они равны S-формуле $\widehat{x}^1$. Как и в предыдущем случае набор $\big(\Phi_1(\widehat{1}, \widehat{k-1}, \ldots, \widehat{k-1}), \ldots, \Phi_p(\widehat{1}, \widehat{k-1}, \ldots, \widehat{k-1})\big)$ содержит не менее $2m-2$ нулевых компонент, что неверно. Лемма доказана.

■

Теорема 1.1. *Пусть $k = 2^m$, $m \geq 2$. Тогда семейство различных S_0-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ континуально.*

Доказательство. Доказательство теоремы проводится с использованием леммы 1.1 аналогично доказательству теоремы о континуальности семейства классов функций из P_k, замкнутых относительно операции суперпозиции (см., например, [89, 90]).

Для каждого подмножества T множества $\{2, 3, 4, \ldots\}$ определим множество функций $\{\chi_i \,\big|\, i \in T\}$, которое будем обозначать через $\mathcal{X}(T)$.

Рассмотрим два различных подмножества R и Q множества $\{2, 3, 4, \ldots\}$. Для них найдется число n, такое, что $n \in R \backslash Q$ или $n \in Q \backslash R$. Без ограничения общности будем считать, что $n \in R \backslash Q$. Тогда $\chi_n \in [\mathcal{X}(R)]_{S_0}$, но по лемме 1.1 справедливо соотношение $F_n \notin [\mathcal{W} \backslash \{F_n\}]_{S_0}$, а значит $\chi_n \notin [\mathcal{X}(Q)]_{S_0}$.

Получили, что для различных подмножеств R и Q множества $\{2, 3, 4, \dots\}$ различны и S_0-замкнутые классы функций $[\mathcal{X}(R)]_{S_0}$ и $[\mathcal{X}(Q)]_{S_0}$. Так как семейство различных таких подмножеств имеет континуальную мощность, то семейство различных S_0-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ как минимум континуально.

Множество всех функций k-значной логики является счетным, а следовательно, семейство его подмножеств континуально. Поэтому семейство различных S_0-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ не более, чем континуально. Значит оно является континуальным, что и требовалось показать. ■

1.3 Операция двоичной суперпозиции

В предыдущей главе для множеств функций k-значной логики при $k = 2^m,\ m \geq 2$, введена операция двоичной S-суперпозиции и на основе этой операции определено понятие S_0-замыкания. Добавим к данной операции операцию введения несущественной переменной и рассмотрим новый оператор.

Определение 1.10. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Множество всех функций, которые можно получить из $\mathcal{A}$ при помощи операций двоичной S-суперпозиции и введения несущественной переменной, будем называть S-замыканием множества $\mathcal{A}$ (обозначение $[\mathcal{A}]_S$).*

Определение 1.11. *Множество $\mathcal{A}$ будем называть S-замкнутым, если справедливо равенство $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]_S$.*

Рассмотрим оператор, эквивалентный оператору S-замыкания, но являющийся более удобным для исследования S-замкнутых классов функций.

Определение 1.12. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Определим понятия вектор-формул над $\mathcal{A}$ и их компонент.*

1. *Пусть x — переменная, принимающая значения из E_k, и ее компонентами являются переменные $x_1, \dots, x_m$. Тогда выражение $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ будем называть вектор-формулой над $\mathcal{A}$, а выражение x_i — компонентой вектор-формулы $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$, $i = 1, \dots, m$. Такие вектор-формулы и их компоненты назовем тривиальными.*

2. *Если $\langle f_1, \dots, f_m \rangle(\widehat{x}^1, \dots, \widehat{x}^n)$ — двоичное представление функции F из $\mathcal{A}$, зависящей от переменных $x^1, \dots, x^n$, $n \geq 1$, а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{mn}$ — компоненты некоторых вектор-формул над $\mathcal{A}$, то выражение Φ вида*

$$\langle f_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{mn}), \dots, f_m(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{mn}) \rangle$$

будем называть вектор-формулой над $\mathcal{A}$. При этом выражение $f_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{mn})$ назовем компонентой вектор-формулы Φ, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть Φ — вектор-формула над $\mathcal{A}$, а φ — ее компонента. Пусть также $\{x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}\}$ — множество всех тривиальных компонент вектор-формул над $\mathcal{A}$, которые содержатся в φ, где $1 \leq j_q \leq m$ для всех $q = 1, \ldots, p$. Тогда будем обозначать компоненту φ через $\varphi(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p})$ и говорить, что в нее входят переменные $x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}$. Если при этом множество $\{i_1, \ldots, i_p\}$ равно множеству $\{a_1, \ldots, a_n\}$ попарно различных чисел, где $n \geq 1$, то будем обозначать Φ через $\Phi(\widehat{x}^{a_1}, \ldots, \widehat{x}^{a_n})$ и говорить, что в эту вектор-формулу входят переменные $\widehat{x}^{a_1}, \ldots, \widehat{x}^{a_n}$.

Для каждого набора $(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)$ из E_2^{mn} определим значение $\Phi(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)$ вектор-формулы $\Phi(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n)$ и значение $\varphi(\alpha_{j_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{j_p}^{i_p})$ компоненты $\varphi(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p})$ этой вектор-формулы (здесь $\widehat{\alpha}^i = \langle \alpha_1^i, \ldots, \alpha_m^i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

1. Пусть $\Phi(\widehat{x})$ имеет вид $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$. Тогда $\Phi(\widehat{\alpha}) = \widehat{\alpha}$. При этом, если $\varphi(x_i)$ — компонента этой вектор-формулы, имеющая вид x_i, $1 \leq i \leq m$, то $\varphi(\alpha_i) = \alpha_i$.

2. Пусть вектор-формула $\Phi(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n)$ не является тривиальной и имеет вид

$$\langle \varphi_1(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}), \ldots, \varphi_m(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}) \rangle,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — компоненты этой вектор-формулы. В этом случае каждая компонента $\varphi_r(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p})$, $1 \leq r \leq m$, имеет вид

$$f_r\Big(\psi_1\big(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}\big), \ldots, \psi_{mn}\big(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}\big)\Big),$$

где $f_1, \ldots, f_m$ — компоненты некоторой функции из $\mathcal{A}$, а $\psi_1, \ldots, \psi_{mn}$ являются компонентами вектор-формул над $\mathcal{A}$ и в них входят переменные из множества $\{x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}\}$. Причем множество компонент $\{\psi_q \mid q = 1, 2, \ldots, mn\}$ является одним и тем же для всех $r = 1, \ldots, m$. Тогда для данных значений r справедливы равенства

$$\varphi_r(\alpha_{j_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{j_p}^{i_p}) = f_r\Big(\psi_1\big(\alpha_{j_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{j_p}^{i_p}\big), \ldots, \psi_{mn}\big(\alpha_{j_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{j_p}^{i_p}\big)\Big),$$

и для вектор-формулы Φ имеет место соотношение

$$\Phi(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n) = \langle \varphi_1(\alpha_{j_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{j_p}^{i_p}), \ldots, \varphi_m(\alpha_{j_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{j_p}^{i_p}) \rangle.$$

Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$ и $\Phi(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n)$ — нетривиальная вектор-формула над $\mathcal{A}$.

Определение 1.13. *Будем говорить, что функция $F(x^1 \ldots, x^n)$ из P_k реализуется вектор-формулой $\Phi(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n)$, если для всех наборов $(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)$ из E_2^{mn} выполняется соотношение $\Phi(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n) = \widehat{F}(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n)$.*

Определение 1.14. *Если функция F реализуется некоторой вектор-формулой над $\mathcal{A}$, то будем говорить, что функция F получена при помощи операции двоичной суперпозиции из функций системы $\mathcal{A}$.*

Несложно показать, что операция двоичной суперпозиции является усилением операции (обычной) суперпозиции. Для этого достаточно при формировании новых вектор-формул использовать все m компонент ранее построенных вектор-формул.

Определение 1.15. *Множество всех функций k-значной логики, которые можно получить из функций системы $\mathcal{A}$ при помощи операций двоичной суперпозиции и введения несущественной переменной, будем называть β-замыканием множества $\mathcal{A}$ (обозначение $[\mathcal{A}]_\beta$).*

Определение 1.16. *Множество $\mathcal{A}$ будем называть β-замкнутым, если $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]_\beta$.*

В следующем разделе будет показано, что оператор β-замыкания эквивалентен оператору S-замыкания. Поэтому для него тоже выполняются три свойства, которые являются необходимыми для операторов замыкания, из чего следует непротиворечивость введенных определений.

По построению компоненты каждой нетривиальной вектор-формулы над $\mathcal{A}$ реализуют функции из P_2.

Определение 1.17. *Булевым замыканием множества $\mathcal{A}$ (обозначение $B(\mathcal{A})$) будем называть все функции из P_2, которые могут быть реализованы компонентами нетривиальных вектор-формул над $\mathcal{A}$ и получены из них при помощи операции введения несущественной булевой переменной.*

Пусть $\mathcal{B}$ — множество функций из P_2. Обозначим через $[\mathcal{B}]$ замыкание множества $\mathcal{B}$ относительно операции суперпозиции и введения несущественной переменной. Тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Тогда справедливо равенство $B(\mathcal{A}) = \big[\bigcup\limits_{F \in \mathcal{A}} b(F)\big]$.*

Доказательство данной леммы непосредственно следует из определения 1.12 компонент вектор-формул и определения 1.17 булевого замыкания.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Тогда справедливо равенство $B([\mathcal{A}]_\beta) = B(\mathcal{A})$.*

Доказательство. В силу утверждения леммы 1.2 выполняется равенство $B([\mathcal{A}]_\beta) = \big[\bigcup\limits_{F \in [\mathcal{A}]_\beta} b(F)\big]$. Если функция F принадлежит классу $[\mathcal{A}]_\beta$, то $b(F) \subseteq B(\mathcal{A})$. Значит выполняется соотношение $\big[\bigcup\limits_{F \in [\mathcal{A}]_\beta} b(F)\big] \subseteq B(\mathcal{A})$. А так как $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{A}]_\beta$, то $B(\mathcal{A}) \subseteq B([\mathcal{A}]_\beta)$. Что и требовалось показать. ■

Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Рассмотрим произвольную нетривиальную вектор-формулу $\Phi(\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^n)$ над $\mathcal{A}$. Она имеет вид

$$\langle \varphi_1(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}), \ldots, \varphi_m(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}) \rangle,$$

а каждая из ее компонент $\varphi_r(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p})$, $1 \leq r \leq m$, представляется в следующем виде:

$$f_r\Big(\psi_1\big(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}\big), \ldots, \psi_{mn}\big(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}\big)\Big),$$

где $f_1, \ldots, f_m$ — компоненты некоторой вектор-функции F из $\mathcal{A}$, а $\psi_1, \ldots, \psi_{mn}$ являются компонентами вектор-формул над $\mathcal{A}$ и в них входят переменные из множества $\{x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_p}^{i_p}\}$.

Для каждого числа t, $1 \leq t \leq mn$, рассмотрим компоненту ψ_t. Если она не является тривиальной, то она реализует некоторую функцию g_t из класса $B(\mathcal{A})$. Если данная компонента является тривиальной, то она имеет вид x_j^i для $i \geq 1$ и $1 \leq j \leq m$. Рассмотрим два случая.

- Пусть класс $B(\mathcal{A})$ содержит селекторные функции. Тогда компоненту ψ_t можно заменить на нетривиальную компоненту, которая реализует булеву функцию $g_t(x_j^i) = x_j^i$. При этом новая вектор-формула будет реализовывать ту же функцию, что и вектор-формула Φ.

- Пусть класс $B(\mathcal{A})$ не содержит селекторные функции. По свойствам классов булевых функций класс $B(\mathcal{A})$ содержит только константы (см., например, [78]). Так как для каждой функции F из множества $\mathcal{A}$ справедливо соотношение $b(F) \subseteq B(\mathcal{A})$, то все компоненты функции F являются константами и функция F тоже является константой. Поэтому если заменить компоненту ψ_t на компоненту, реализующую константную функцию $g_t = c$, где $c \in B(\mathcal{A})$, то новая новая вектор-формула будет реализовывать ту же константу, что и вектор-формула Φ.

Таким образом можно считать, что для каждого t, $1 \leq t \leq mn$, верно включение $g_t \in B(\mathcal{A})$. Поэтому, если вектор-формула Φ реализует некоторую функцию H из P_k, то справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \langle f_1(g_1, \ldots, g_{mn}), \ldots, f_m(g_1, \ldots, g_{mn}) \rangle = \\ &= \widehat{F}\big(\langle g_1, \ldots, g_m \rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn} \rangle\big). \end{aligned}$$

Согласно определению 1.15 каждая функция H из множества $[\mathcal{A}]_\beta$ равна некоторой функции, которая реализуется вектор-формулой Φ над $\mathcal{A}$, либо получена из такой функции путем добавления несущественных переменных. В первом из данных случаев, как было показано выше, выполняется равенство $\widehat{H} = \widehat{F}\big(\langle g_1, \ldots, g_m \rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn} \rangle\big)$ для некоторых

функций $g_1, \ldots, g_{mn}$ из множества $B(\mathcal{A})$. Но можно считать, что и во втором случае выполняется данное равенство, так как можно для каждого t, $1 \leq t \leq mn$, вместо функции g_t рассмотреть функцию g'_t, полученную из нее путем добавления всех компонент несущественных переменных для функции H.

Покажем теперь, что каждая функция H из P_k содержится в множестве $[\mathcal{A}]_\beta$, если найдутся функция F из множества $\mathcal{A}$ и функции $g_1, \ldots, g_{mn}$ из множества $B(\mathcal{A})$ (здесь n — число переменных функции F), такие, что выполняется следующее равенство

$$\widehat{H} = \widehat{F}\big(\langle g_1, \ldots, g_m\rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn}\rangle\big).$$

Пусть функции $g_1, \ldots, g_{mn}$ реализуются соответственно компонентами $\psi_1, \ldots, \psi_{mn}$ некоторых вектор-функций над $\mathcal{A}$ или получены из них при помощи операции введения несущественной переменной. Рассмотрим вектор-формулу $\langle f_1(\psi_1, \ldots, \psi_{mn}), \ldots, f_m(\psi_1, \ldots, \psi_{mn})\rangle$, где $\widehat{F} = \langle f_1, \ldots, f_m\rangle$. Она реализует функцию H', которая с точностью до несущественных переменных равна H. Так как в множество $[\mathcal{A}]_\beta$ входят все функции, полученные из функции H' при помощи операции введения несущественной переменной, то функция H тоже содержится в β-замыкании множества $\mathcal{A}$.

Таким образом доказано следующее утверждение.

Лемма 1.4. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Тогда множество $[\mathcal{A}]_\beta$ содержит все функция H из P_k, для которых найдутся функция F из множества $\mathcal{A}$ и функции $g_1, \ldots, g_{mn}$ из множества $B(\mathcal{A})$ (здесь n — число переменных функции F), такие, что выполняется следующее равенство:*

$$\widehat{H} = \widehat{F}\big(\langle g_1, \ldots, g_m\rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn}\rangle\big),$$

и только такие функции[1].

Замечание. При $k = 2^m$, $m \geq 2$, если произвольным образом закодировать все числа из множества E_k двоичными наборами длины m так, чтобы отображение из E_k в E_2^m, задаваемое данным кодированием, являлось биективным, то можно определить двоичные представления функций из P_k относительно этого способа кодирования аналогично тому, как это было сделано при стандартном кодировании (см. определение 1.1). Поскольку определение β-замыкания основано исключительно на двоичном представлении функций k-значной логики, то оператор β-замыкания будет корректно определен и относительно нового способа кодирования. При этом существует изоморфизм между функциональными системами функций k-значной логики с операторами β-замыкания, которые основаны на различных способах кодирования.

[1] В некоторых случаях мы будем опускать скобки $\langle$ и $\rangle$ в такой записи

Этот изоморфизм можно построить, если каждой функции из одной функциональной системы поставить в соответствие функцию из другой функциональной системы с таким же двоичным представлением.

Замечание. В том случае, когда k не является степенью двойки, если попытаться определить двоичные представления функций k-значной логики на основе кодирования чисел из множества E_k в двоичной системе счисления, то эти двоичные представления не будут являться булевыми вектор-функциями. Так, если $2^{m-1} < k < 2^m$ для некоторого $m \geq 2$, то двоичное представление n-местной функции из P_k, $n \geq 1$, будет представлять собой вектор, компонентами которого являются m функций, определенных на некотором собственном подмножестве множества E_2^{mn} и принимающих значения из множества E_2. Поэтому при рассмотрении функциональной системы P_k, где $2^{m-1} < k < 2^m,\ m \geq 2$, с оператором, подобным оператору β-замыкания, возникнет необходимость каким-либо образом доопределить компоненты функций этой системы до булевых функций. В этой связи появляется дополнительная вариативность при выборе способа такого доопределения, а также получается, что каждая из функций k-значной логики доопределяется до функции 2^m-значной логики, и, следовательно, задачу исследования β-замкнутых классов функций из P_k можно свести к задаче исследования некоторых семейств β-замкнутых классов функций из P_{2^m}.

1.4 Эквивалентность S-замыкания и β-замыкания

Следующая теорема устанавливает эквивалентность понятий S-замыкания и β-замыкания.

Теорема 1.2. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Тогда выполняется равенство $[\mathcal{A}]_S = [\mathcal{A}]_\beta$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию H из множества $[\mathcal{A}]_\beta$. В силу утверждения леммы 1.4 для нее существует функция F из $\mathcal{A}$ функции $g_1, \ldots, g_{mn}$ из множества $B(\mathcal{A})$ (здесь n — число переменных функции F), такие, что выполняется равенство

$$\widehat{H} = \widehat{F}\big(\langle g_1, \ldots, g_m\rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn}\rangle\big).$$

Покажем, что $H \in [\mathcal{A}]_S$. Доказательство будем вести индукцией по глубине реализации функций $g_1, \ldots, g_{mn}$ над множеством функций $\bigcup\limits_{F\in\mathcal{A}} b(F)$.

Пусть глубина реализации каждой из функций $g_1, \ldots, g_{mn}$ равна нулю. Это означает, что g_i является компонентой $x_{j_i}^{a_i}$ переменной x^{a_i}, где $1 \leq j_i \leq m$, $a_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, mn$. Рассмотрим mn-местную функцию F' из P_k, полученную из функции F путем добавления $(m-1)n$

несущественных переменных и S-формулу $\widehat{F}'\big(\omega^{(m^2n)}\big(\widehat{x}^{a_1}, \ldots, \widehat{x}^{a_{mn}}\big)\big)$, где ω — некоторая перестановка множества $\{1, \ldots, m^2n\}$, которая переставляет число $m(i-1)+j_i$ на место i для всех $i = 1, \ldots, mn$. Очевидно, что такая S-формула реализует функцию H.

Предположим, что лемма доказана, если глубина реализации каждой функции g_i меньше d, $i = 1, \ldots, mn$. Докажем утверждение для глубины d.

Рассмотрим функцию g_i для каждого $i = 1, \ldots, mn$. Если она является компонентой $x_{j_i}^{a_i}$ переменной x^{a_i}, где $1 \leq j_i \leq m$, $a_i \geq 1$, то определим S-формулу Φ_i над $\mathcal{A}$, равную $\widehat{x}^{a_i}$. Если $g_i \in B(\mathcal{A})$, то $g_i = f_{j_i}^{a_i}(h_{i,1}, \ldots, h_{i,mn_i})$, где $f_{j_i}^{a_i}$ — компонента функции F^{a_i} из $\mathcal{A}$, которая зависит от n_i переменных, где $1 \leq j_i \leq m$, $a_i \geq 1$, а функция $h_{i,t}$ либо является компонентой переменной, либо содержится в $B(\mathcal{A})$ и имеет глубину реализации не более $d-1$, $t = 1, \ldots, mn_i$. По предположению индукции функция, соответствующая двоичному представлению вида

$$\langle f_1^{a_i}, \ldots, f_m^{a_i}\rangle(\langle h_{i,1}, \ldots, h_{i,m}\rangle, \ldots, \langle h_{i,m(n_i-1)+1}, \ldots, h_{i,mn_i}\rangle),$$

лежит в $[\mathcal{A}]_S$ и реализуется некоторой S-формулой Φ_i над $\mathcal{A}$.

Снова рассмотрим S-формулу $\widehat{F}'\big(\omega^{(m^2n)}\big(\Phi_1, \ldots, \Phi_{mn}\big)\big)$, где ω — некоторая перестановка множества $\{1, \ldots, m^2n\}$, которая переставляет число $m(i-1)+j_i$ на место i для всех $i = 1, \ldots, mn$. Очевидно, что данная S-формула реализует H, а следовательно верно соотношение $[\mathcal{A}]_\beta \subseteq [\mathcal{A}]_S$.

Рассмотрим теперь произвольную функцию H из множества $[\mathcal{A}]_S$. Она реализуется некоторой S-формулой Φ над $\mathcal{A}$, которая имеет вид:

$$\widehat{F}\Big(\omega^{(mn)}\big(\Phi_1, \ldots, \Phi_n\big)\Big),$$

где функция F содержится в $\mathcal{A}$, либо получена из функций системы $\mathcal{A}$ при помощи операции введения несущественной переменной, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — S-формулы над $\mathcal{A}$, а $\omega^{(mn)}$ — двоичная перестановка порядка mn. Обозначим через $F_1 \ldots, F_n$ функции, реализуемые S-формулами $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, а через $\langle g_1, \ldots, g_m\rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn}\rangle$ — их двоичные представления соответственно. Функция g_i либо содержится в $B(\mathcal{A})$, либо является компонентой некоторой вектор-переменной, а значит, реализуется компонентой некоторой вектор-формулы над $\mathcal{A}$ (возможно, тривиальной), $i = 1, \ldots, mn$. Обозначим эту компоненту через φ_i, а $\omega(i)$ — через ω_i, $i = 1, \ldots, mn$. Рассмотрим вектор-формулу над $\mathcal{A}$, имеющую вид:

$$\langle f_1(\varphi_{\omega_1}, \varphi_{\omega_2}, \ldots, \varphi_{\omega_{mn}}), \ldots, f_m(\varphi_{\omega_1}, \varphi_{\omega_2}, \ldots, \varphi_{\omega_{mn}})\rangle.$$

Очевидно, что данная вектор-формула реализует функцию H и $H \in [\mathcal{A}]_\beta$. Лемма доказана. ■

1.5 Критерий полноты β-замкнутых классов

В настоящем разделе найдем критерий полноты β-замкнутых классов. Для этого определим следующие множества функций k-значной логики:

$$T_0^m = \{F \in P_k \,|\, b(F) \subseteq T_0\},$$
$$T_1^m = \{F \in P_k \,|\, b(F) \subseteq T_1\},$$
$$S^m = \{F \in P_k \,|\, b(F) \subseteq S\},$$
$$M^m = \{F \in P_k \,|\, b(F) \subseteq M\},$$
$$L^m = \{F \in P_k \,|\, b(F) \subseteq L\},$$
$$N^m = \{F \in P_k \,|\, D(F) \neq E_k\},$$

где через $T_0,\ T_1,\ S,\ M$ и L обозначены предполные классы булевых функций.

Пусть $\mathcal{A}$ — одно из множеств $T_0^m, T_1^m, S^m, M^m, L^m$. Тогда класс $B(\mathcal{A})$ является классом T_0, T_1, S, M, L соответственно. Так как для каждой функции F из множества $[\mathcal{A}]_\beta$ справедливо включение $b(F) \subseteq B(\mathcal{A})$, то $F \in \mathcal{A}$ и класс $\mathcal{A}$ является β-замкнутым. Также очевидно, что класс N^m является β-замкнутым.

Приведенные ниже таблицы показывает, что при $m \geq 2$ все введенные β-замкнутые классы различны. По горизонтали в них указаны двоичные представления функций, которые содержатся в классе, соответствующем этой горизонтали, а по вертикали — не содержатся.

	$\boldsymbol{T_0^m}$	$\boldsymbol{T_1^m}$	$\boldsymbol{S^m}$	$\boldsymbol{M^m}$
$\boldsymbol{T_0^m}$		$\langle 0, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle 0, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle x_1 + x_2, 0, \ldots, 0\rangle$
$\boldsymbol{T_1^m}$	$\langle 1, 1, \ldots, 1\rangle$		$\langle 1, 1, \ldots, 1\rangle$	$\langle x_1 + x_2 + 1, 1 \ldots, 1\rangle$
$\boldsymbol{S^m}$	$\langle \overline{x_1}, x_2, \ldots, x_m\rangle$	$\langle \overline{x_1}, x_2, \ldots, x_m\rangle$		$\langle \overline{x_1}, x_2, \ldots, x_m\rangle$
$\boldsymbol{M^m}$	$\langle 1, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle 0, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle 0, 0, \ldots, 0\rangle$	
$\boldsymbol{L^m}$	$\langle 1, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle 0, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle 0, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle x_1 + x_2, 0, \ldots, 0\rangle$
$\boldsymbol{N^m}$	$\langle 1, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle 0, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle 0, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle x_1 + x_2, 0, \ldots, 0\rangle$

	$\boldsymbol{L^m}$	$\boldsymbol{N^m}$
$\boldsymbol{T_0^m}$	$\langle x_1 x_2, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$
$\boldsymbol{T_1^m}$	$\langle x_1 x_2, 1, \ldots, 1\rangle$	$\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$
$\boldsymbol{S^m}$	$\langle x_1^1 x_1^2 + x_1^1 x_1^3 + x_1^2 x_1^3, x_1^1, \ldots, x_1^1\rangle$	$\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$
$\boldsymbol{M^m}$	$\langle x_1 x_2, 0, \ldots, 0\rangle$	$\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$
$\boldsymbol{L^m}$		$\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$
$\boldsymbol{N^m}$	$\langle x_1 x_2, 0, \ldots, 0\rangle$	

Для введенных β-замкнутых классов функций справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть $k = 2^m,\ m \geq 2$, и $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Тогда $[\mathcal{A}]_\beta = P_k$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ целиком не лежит ни в одном из классов $T_0^m,\ T_1^m,\ S^m,\ M^m,\ L^m,\ N^m$.*

Доказательство. Пусть сначала множество $\mathcal{A}$ лежит хотя бы в одном из классов $T_0^m,\ T_1^m,\ S^m,\ M^m,\ L^m,\ N^m$. Тогда класс $[\mathcal{A}]_\beta$ лежит в этом же классе. Но ни один из рассматриваемых классов не содержит все функции из P_k, и поэтому $[\mathcal{A}]_\beta \neq P_k$.

Пусть теперь множество $\mathcal{A}$ целиком не содержится ни в одном из классов $T_0^m,\ T_1^m,\ S^m,\ M^m,\ L^m,\ N^m$. Тогда среди функций множества $\mathcal{A}$ существуют функции $F_{T_0^m},\ F_{T_1^m},\ F_{S^m},\ F_{M^m},\ F_{L^m},\ F_{N^m}$, которые не лежат в соответствующем β-замкнутом классе. В силу определения этих классов для функций $F_{T_0^m},\ F_{T_1^m},\ F_{S^m},\ F_{M^m},\ F_{L^m}$ справедливы соотношения $b(F_{T_0^m}) \nsubseteq T_0$, $b(F_{T_1^m}) \nsubseteq T_1$, $b(F_S) \nsubseteq S$, $b(F_M) \nsubseteq M$ и $b(F_L) \nsubseteq L$. Поскольку классы T_0, T_1, S, M, L являются предполными классами булевых функций, то $\left[b(F_{T_0^m}) \bigcup b(F_{T_1^m}) \bigcup b(F_S) \bigcup b(F_M) \bigcup b(F_L)\right] = P_2$, а следовательно, $B(\mathcal{A}) = P_2$.

Рассмотрим функцию F_{N^m}. Пусть она зависит от n переменных. Тогда она принимает все значения и для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ из множества E_2^m существует набор $\left(\beta_1^1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \beta_2^1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, \beta_m^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\right)$ из множества E_2^{mn}, на котором значение двоичного представления функции F_{N^m} равно $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m$ определим булеву функцию φ_j^i, зависящую от m переменных, следующим образом

$$\varphi_j^i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \beta_j^i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Все функции φ_j^i принадлежат классу $B(\mathcal{A})$. Следовательно, в силу утверждения леммы 1.4, в $[\mathcal{A}]_\beta$ содержится функция $E(x)$, имеющая двоичное представление

$$\widehat{F}_{N^m}\left(\langle \varphi_1^1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_m^1(x_1, \ldots, x_m)\rangle, \ldots, \langle \varphi_1^n(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_m^n(x_1, \ldots, x_m)\rangle\right).$$

Также очевидно, что $\widehat{E}(\widehat{x}) = \widehat{x}$ по построению функций φ_j^i.

Далее рассмотрим произвольную функцию F из P_k. Обозначим ее двоичное представление через $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Тогда функция, соответствующая двоичному представлению $\widehat{E}(\langle f_1, \ldots, f_m \rangle)$, лежит в классе $[\mathcal{A}]_\beta$. Но это и есть функция F, и, следовательно, $[\mathcal{A}]_\beta = P_k$, что и требовалось показать. ■

Введем следующее определение.

Определение 1.18. *Класс $\mathcal{A}$ функций из P_k, такой, что $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$, называется β-предполным классом, если для любой функции F, не принадлежащей $\mathcal{A}$, верно равенство $[\mathcal{A} \cup \{F\}]_\beta = P_k$.*

Поскольку каждый из β-замкнутых классов $T_0^m,\ T_1^m,\ S^m,\ M^m,\ L^m,\ N^m$ содержит функции, не принадлежащие другим классам, то в качестве следствия теоремы 1.3 легко получить следующее утверждение.

Следствие 1.5. *Пусть $k = 2^m,\ m \geq 2$. Тогда семейство всех β-предполных классов функций из P_k равно множеству $\{T_0^m,\ T_1^m,\ S^m,\ M^m,\ L^m,\ N^m\}$.*

Глава 2

Классы функций из $P_{k|2}$

2.1 Счетность семейства β-замкнутых классов

В настоящем разделе покажем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций. Тогда семейство β-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным и непустым.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуются некоторые леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{U},\ \mathcal{V} \subseteq P_k$ и $[\mathcal{U}]_\beta$=$[\mathcal{V}]_\beta$. Тогда выполняется соотношение $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$.*

Доказательство. Так как β-замкнутые классы $[\mathcal{U}]_\beta$ и $[\mathcal{V}]_\beta$ равны, то выполняется равенство $B([\mathcal{U}]_\beta) = B([\mathcal{V}]_\beta)$. Согласно утверждению леммы 1.3 для каждого множества $\mathcal{A}$ из P_k верно соотношение $B(\mathcal{A}) = B([\mathcal{A}]_\beta)$. Поэтому имеет место следующая цепочка равенств:

$$B(\mathcal{U}) = B([\mathcal{U}]_\beta) = B([\mathcal{V}]_\beta) = B(\mathcal{V}),$$

что и требовалось показать. ■

Лемма 2.2. *Пусть $F \in P_{k|2}$ и $|D(F)| = 2$. Тогда существует булева функция f, такая, что выполняются соотношения $\{f\} \subseteq b(F) \subseteq \{0,\ 1,\ f,\ \overline{f}\}$.*

Доказательство. Пусть двоичное представление функции $\widehat{F}$ равно $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$. По условию функция F принимает два значения. Тогда для некоторого $i,\ 1 \leq i \leq m$, булева функция f_i не является константой. Обозначим эту функцию через f. Покажем, что среди булевых функций $f_1, \ldots, f_m$ могут встречаться только функции $0,\ 1,\ f$ и $\overline{f}$.

Рассмотрим произвольную функцию g из множества $b(F)$. Покажем, что для функции g не выполняется ни одно из следующих условий.

1. Существуют наборы $\widetilde{\alpha}_0$ и $\widetilde{\alpha}_1$, для которых $f(\widetilde{\alpha}_0) = f(\widetilde{\alpha}_1) = 0$, но $g(\widetilde{\alpha}_0) = 0$ и $g(\widetilde{\alpha}_1) = 1$.

2. Существуют наборы $\widetilde{\beta}_0$ и $\widetilde{\beta}_1$, для которых $f(\widetilde{\beta}_0) = f(\widetilde{\beta}_1) = 1$, но $g(\widetilde{\beta}_0) = 0$ и $g(\widetilde{\beta}_1) = 1$.

Предположим, что это не так, и для функции g выполняется хотя бы одно из этих условий. Без ограничения общности будем считать, что выполняется первое из них. Так как функция f не является константой, то множество $\{\widetilde{\beta} \mid f(\widetilde{\beta}) = 1\}$ не является пустым. Поэтому двоичное представление $\widehat{F}$ принимает уже как минимум 3 значения на трех различных наборах.

- На наборе $\widetilde{\alpha}_0$, для которого $f(\widetilde{\alpha}_0) = 0$ и $g(\widetilde{\alpha}_0) = 0$.
- На наборе $\widetilde{\alpha}_1$, для которого $f(\widetilde{\alpha}_1) = 0$ и $g(\widetilde{\alpha}_1) = 1$.
- На наборе $\widetilde{\beta}$, для которого $f(\widetilde{\beta}) = 1$.

Таким образом пришли к противоречию с тем, что функция F принимает только 2 значения. Значит для функции g не выполняется ни одно из приведенных условий. Поэтому на множестве наборов $\{\widetilde{\alpha} \mid f(\widetilde{\alpha}) = 0\}$ функция g принимает либо только значение 0, либо только значение 1. Аналогично и для множества наборов $\{\widetilde{\beta} \mid f(\widetilde{\beta}) = 1\}$. Получили четыре возможности для функции g — как раз $0,\ 1,\ f$ или $\overline{f}$. В силу произвольности выбора функции g из множества $b(F)$ получаем, что справедливо включение $b(F) \subseteq \{0,\ 1,\ f,\ \overline{f}\}$, причем $b_i(F) = f$. Что и требовалось показать ■

Лемма 2.3. *Пусть $F \in P_k$, $F \notin P_{k|1}$. Тогда в β-замкнутом классе $[\{F\}]_\beta$ найдется функция, зависящая от одной переменной, и множество компонент которой содержит селекторную функцию.*

Доказательство. Обозначим двоичное представление функции F через $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$, а число ее переменных — через n. Если все компоненты функции F являются константами, то функция F принимает одно значение, что неверно по условиям леммы. Поэтому среди компонент функции F найдется функция, не являющаяся константой. Без ограничения общности положим, что это функция f_1. Тогда класс $[\{f_1\}]$ содержит селекторные функции (см., например, [78]). Поэтому $x_1 \in [\{f_1\}]$ и верно равенство $x_1 = f_1(g_1, \ldots, g_{mn})$ для некоторых функций $g_1, \ldots, g_{mn}$, которые принадлежат классу $[\{f_1\}]$. Поскольку функция x_1 зависит только от переменной x_1, то без ограничения общности можно считать, что функции $g_1, \ldots, g_{mn}$ тоже зависят только от переменной x_1, а так как $[\{f_1\}] \subseteq B(\{F\})$, то $\{g_1, \ldots, g_{mn}\} \subseteq B(\{F\})$.

Обозначим через H функцию, имеющую следующее двоичное представление:

$$\langle f_1, \ldots, f_m\rangle\big(\langle g_1, \ldots, g_m\rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn}\rangle\big).$$

По построению функция H содержится в классе $[\{F\}]_\beta$ и зависит от одной переменной. А так как выполняется соотношение $f_1(g_1, \ldots, g_{mn}) = x_1$, то $x_1 \in b(H)$, что и требовалось показать. ■

Лемма 2.4. *Пусть $F \in P_{k|2}$ и $|D(F)| = 2$. Тогда найдется функция $G \in [\{F\}]_\beta$, такая, что выполняются соотношения $\{x\} \subseteq b(G) \subseteq \{0, 1, x, \overline{x}\}$.*

Доказательство. Согласно утверждению леммы 2.3 в множестве $[\{F\}]_\beta$ существует функция G, в состав которой входит селекторная функция, которую обозначим через x_1. Так как в этом множестве содержатся только функции, принимающие не более двух значений, то функция G принимает ровно 2 значения. Поэтому в силу утверждения леммы 2.2 в справедливы соотношения $\{g\} \subseteq b(G) \subseteq \{0, 1, g, \overline{g}\}$ для некоторой булевой функции g. Но тогда либо функция g равна функции x_1, либо функция $\overline{g}$ равна функции x_1. В первом случае получаем необходимо утверждение леммы, а во втором можно рассмотреть вместо функции g функцию $g' = \overline{g}$ и тоже получить необходимое утверждение. ■

Следствие 2.5. *Пусть $D(F) = \{p, q\}$, где*

$$\widehat{p} = \langle \overbrace{0, \ldots, 0}^{k_{00}}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{k_{01}}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{k_{10}}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{k_{11}} \rangle,$$
$$\widehat{q} = \langle 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1 \rangle,$$

где k_{00}, k_{01}, k_{10}, k_{11} — неотрицательные целые числа, такие что $k_{00} + k_{01} + k_{10} + k_{11} = m$, а $k_{01} + k_{10} > 0$. Тогда существует такая булева функция f, что выполняется соотношение

$$\widehat{F} = \langle \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_{00}}, \underbrace{f, \ldots, f}_{k_{01}}, \underbrace{\overline{f}, \ldots, \overline{f}}_{k_{10}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_{11}} \rangle,$$

А также класс $[\{F\}]_\beta$ содержит функцию, имеющую двоичное представление

$$\langle \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_{00}}, \underbrace{x, \ldots, x}_{k_{01}}, \underbrace{\overline{x}, \ldots, \overline{x}}_{k_{10}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_{11}} \rangle.$$

Доказательство. По условию $k_{01} + k_{10} > 0$. Без ограничения общности будет считать, что $k_{01} > 0$ (иначе просто поменяем p и q местами).

Пусть $\widehat{F} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, $\widehat{p} = \langle p_1, \ldots, p_m \rangle$ и $\widehat{q} = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$. Очевидно, что функции f_i, $i = 1, \ldots, k_{00}$, являются константами 0, а функции f_i, $i = k_{00} + k_{01} + k_{10} + 1, \ldots, m$, являются константами 1. Так как при $i = k_{00} + 1, \ldots, k_{00} + k_{01}$ значения p_i равны 0, а значения q_i равны 1, то все функции f_i, $i = k_{00} + 1, \ldots, k_{00} + k_{01}$ не являются константами и равны между собой. Обозначим все рассматриваемые функции через f. Покажем, что функция f — искомая.

Если $k_{10} = 0$, то первое утверждение следствия доказано.

Если $k_{10} > 0$, то все функции f_i, $i = k_{00} + k_{01} + 1, \ldots, k_{00} + k_{01} + k_{10}$ не являются константами и тоже равны между собой. Обозначим их через g. Так как значения компонент

p_i и q_i с номером $i = k_{00} + 1$ равны 0 и 1 соответственно, а значения компонент p_j и q_j с номером $j = k_{00} + k_{01} + 1$ равны 1 и 0 соответственно, то $g = \overline{f}$, что и требовалось показать.

Доказательство второго утверждения следствия проводится абсолютно аналогично доказательству леммы 2.4. ■

Для всех β-замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$ введем следующие определения.

Определение 2.1. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$ и $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$. Положим*

$$\mathcal{A}_{pp} = \{F \in \mathcal{A} \mid D(F) = \{p\}\} \text{ для всех } p \in E_k,$$
$$\mathcal{A}_{pq} = \{F \in \mathcal{A} \mid D(F) = \{p, q\}\} \text{ для всех } p, q \in E_k,\ p < q.$$

Определение 2.2. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$ и $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$. Положим*

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = \{(p, q) \mid \mathcal{A}_{pq} \neq \varnothing,\ p, q \in E_k,\ p \leq q\}.$$

Очевидно, что для всех β-замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$ справедливо равенство $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}_{pq}$, где объединение берется по всем значениям $p, q \in E_k$, $p \leq q$.

Лемма 2.6. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{pq} \neq \varnothing$ для некоторых значений p и q, $p \neq q$,. Тогда выполняется равенство*

$$\mathcal{A}_{pq} = \{G \in P_{k|2} \mid D(G) = \{p, q\},\ b(G) \subseteq B(\mathcal{A})\}.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что

$$\widehat{p} = \langle \overbrace{0, \ldots, 0}^{k_{00}}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{k_{01}}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{k_{10}}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{k_{11}} \rangle;$$
$$\widehat{q} = \langle 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1 \rangle,$$

где k_{00}, k_{01}, k_{10}, k_{11} — неотрицательные целые числа, такие что $k_{00} + k_{01} + k_{10} + k_{11} = m$, а $k_{01} > 0$.

Если $H \in \mathcal{A}_{pq}$, то справедливы соотношения $b(H) \subseteq B(\mathcal{A}_{pq}) \subseteq B(\mathcal{A})$. Поэтому множество $\mathcal{A}_{pq}$ содержит только функции из $P_{k|2}$, которые принимают значения p и q и в двоичное представление которых входят только функции из $B(\mathcal{A})$, т.е. имеет место включение $\mathcal{A}_{pq} \subseteq \{G \in P_{k|2} \mid D(G) = \{p, q\},\ b(G) \subseteq B(\mathcal{A})\}$.

Покажем теперь, что если множество $\mathcal{A}_{pq}$ не пусто, то в него входят все функции k-значной логики, принимающие только значения p и q, и в двоичное представление которых входят только функции из $B(\mathcal{A})$. Для этого рассмотрим произвольную функцию H, такую

что $D(H) = \{p, q\}$ и $b(H) \subseteq B(\mathcal{A})$ и покажем, что она принадлежит $\mathcal{A}_{pq}$. По следствию 2.5 двоичное представление функции H имеет вид:

$$\widehat{H} = \langle \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_{00}}, \underbrace{h, \ldots, h}_{k_{01}}, \underbrace{\overline{h}, \ldots, \overline{h}}_{k_{10}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_{11}} \rangle.$$

Поскольку $b(H) \subseteq B(\mathcal{A})$, то $h \in B(\mathcal{A})$.

Так как по условию леммы множество $\mathcal{A}_{pq}$ не пусто, то по следствию 2.5 в классе $[\mathcal{A}_{pq}]_\beta$ найдется функция G, такая, что

$$\widehat{G} = \langle \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_{00}}, \underbrace{x, \ldots, x}_{k_{01}}, \underbrace{\overline{x}, \ldots, \overline{x}}_{k_{10}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_{11}} \rangle.$$

Очевидно, что при подстановке функции h в $\widehat{G}$ вместо переменной x мы получим $\widehat{H}$. Так как $h \in B(\mathcal{A})$ и $G \in [\mathcal{A}_{pq}]_\beta \subseteq [\mathcal{A}]_\beta$, то в силу утверждения леммы 1.4 справедливо включение $H \in [\mathcal{A}]_\beta$. Но $D(H) = \{p, q\}$, а значит, $H \in \mathcal{A}_{pq}$, что и требовалось показать. ■

Лемма 2.7. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{pp} \neq \varnothing$ для некоторого значения p. Тогда выполняется равенство*

$$\mathcal{A}_{pp} = \big\{G \in P_{k|2} \mid D(G) = \{p\}\big\}.$$

Доказательство. Включение $\mathcal{A}_{pp} \subseteq \big\{G \in P_{k|2} \mid D(G) = \{p\}\big\}$ является очевидным. Покажем, что верно и обратное включение. Для этого рассмотрим произвольную функцию F из множества $\mathcal{A}_{pp}$. Так как класс $\mathcal{A}$ содержит все функции, которые могут быть получены из $\mathcal{A}$ с использованием операций двоичной суперпозиции и введения несущественной переменной, то он содержит все функции, полученные из функции F путем введения и удаления несущественных переменных. Множество таких функций равно $\big\{G \in P_{k|2} \mid D(G) = \{p\}\big\}$, а значит, оно содержится в классе $\mathcal{A}$ и, очевидно, содержится также во множестве $\mathcal{A}_{pp}$. ■

Лемма 2.8. *Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{U}]_\beta = \mathcal{U}$, $[\mathcal{V}]_\beta = \mathcal{V}$ и $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$. Тогда для выполнения равенства $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}) = \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$.

Доказательство. Если совпадают два класса β-замкнутых класса $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, то очевидно, что верно равенство $\mathcal{U}_{pq} = \mathcal{V}_{pq}$ для всех наборов индексов (p, q), и, значит, совпадают множества $\mathrm{Ind}(\mathcal{U})$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$.

Докажем утверждение в другую сторону. Для этого покажем, что для каждого набора индексов (p, q), $p, q = 0, \ldots, k-1$, $p \leq q$, совпадают множества $\mathcal{U}_{pq}$ и $\mathcal{V}_{pq}$, а как следствие и сами классы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

Пусть $(p, q) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{U})$. Если $p \neq q$, то по лемме 2.6 получим, что множество $\mathcal{U}_{pq}$ равно множеству всех функций из $P_{k|2}$, принимающих только значения p и q, и в двоичное представление которых входят только функции из $B(\mathcal{U})$. Но по той же лемме этому множеству равно и $\mathcal{V}_{pq}$, а следовательно, $\mathcal{U}_{pq} = \mathcal{V}_{pq}$. Аналогично рассматривается случай $p = q$.

Если же $(p, q) \notin \mathrm{Ind}(\mathcal{U})$, то $\mathcal{U}_{pq} = \mathcal{V}_{pq} = \varnothing$, что и требовалось показать. ■

Лемма 2.9. *Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый класс алгебры логики. Тогда существует β-замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.*

Доказательство. Зададим множество функций $A(\mathcal{B})$ функций из $P_{k|2}$ следующим образом — функция F принадлежит множеству $A(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда $b(F) = \{f\},\ f \in \mathcal{B}$. То есть в множество $A(\mathcal{B})$ входят все функции, соответствующие двоичным представлениям $\langle f, \ldots, f\rangle$, где $f \in \mathcal{B}$ и f зависит от mn переменных для некоторого $n \geq 1$, и только они.

Покажем, что множество $A(\mathcal{B})$ как раз и удовлетворяет условиям леммы. Для этого нужно показать, что $B\big(A(\mathcal{B})\big) = \mathcal{B}$ и $A(\mathcal{B})$ является β-замкнутым классом.

Сначала докажем, что $B\big(A(\mathcal{B})\big) = \mathcal{B}$. По лемме 1.2 множество $B\big(A(\mathcal{B})\big)$ равно множеству $\Big[\bigcup\limits_{F \in A(\mathcal{B})} b(F)\Big] = \Big[\{f^{(mn)} \in \mathcal{B},\ n \geq 1\}\Big]$. Рассмотрим произвольный базис $\{f_1^{(n_1)}, \ldots, f_p^{(n_p)}\}$ класса $\mathcal{B}$. Для каждой функции $f_i^{(n_i)}$ из данного базиса. определим число r_i как наименьшее число, кратное m и большее n_i, а функцию $f_i^{(r_i)}(x_1, \ldots, x_{n_i}, x_{n_i+1}, \ldots, x_{r_i})$ как полученную из функции $f_i^{(n_i)}$ введением несущественных переменных $x_{n_i+1}, \ldots, x_{r_i}$. Очевидно, что верно равенство $\mathcal{B} = [\{f_1^{(r_1)}, \ldots, f_p^{(r_p)}\}]$, а следовательно, $\Big[\{f^{(mn)} \in \mathcal{B},\ n \geq 1\}\Big] = \mathcal{B}$. Поэтому $B\big(A(\mathcal{B})\big) = \mathcal{B}$.

Теперь покажем, что множество функций $A(\mathcal{B})$ является β-замкнутым классом. Для этого рассмотрим произвольную функцию H из множества $[A(\mathcal{B})]_\beta$. Согласно лемме 1.4 для нее найдутся функция F из множества $\mathcal{A}$ и функции $g_1, \ldots, g_{mr}$ из множества $B\big(A(\mathcal{B})\big)$ (здесь r — число переменных функции F), такие, что выполняется следующее равенство:

$$\widehat{H} = \widehat{F}\big(\langle g_1, \ldots, g_m\rangle, \ldots, \langle g_{m(r-1)+1}, \ldots, g_{mr}\rangle\big),$$

Очевидно, что все компоненты функции F зависят от mr переменных, равны между собой и равны некоторой функции f из класса $B\big(A(\mathcal{B})\big)$, который равен $\mathcal{B}$. Поэтому все компоненты функции H тоже равны между собой, реализуют функции из класса $\mathcal{B}$ и зависят от mn переменных для некоторого $n \geq 1$. Поэтому, по определению множества $A(\mathcal{B})$, функция H содержится в этом множестве, и, следовательно, $A(\mathcal{B}) = [A(\mathcal{B})]_\beta$, что и требовалось показать. ■

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.1.

Доказательство. По лемме 2.8 два β-замкнутых класса $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ функций из $P_{k|2}$, такие, что $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V}) = \mathcal{B}$, отличаются тогда и только тогда, когда отличаются множества $\mathrm{Ind}(\mathcal{U})$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$. Но так как число различных подмножеств множества $\{(p,q),\ p,q \in E_k,\ p \le q\}$ конечно, то семейство β-замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, таких, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, является конечным. По лемме 2.9 существует β-замкнутый класс $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ функций из $P_{k|2}$, такой, что $B\big(\mathcal{A}(\mathcal{B})\big) = \mathcal{B}$. Поэтому рассматриваемое семейство классов не пусто, что и требовалось показать. ■

В качестве простого следствия теоремы 2.1 и леммы 2.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Семейство всех β-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ счетно.*

2.2 Описание β-замкнутых классов

В силу утверждения теоремы 2.1 для каждого замкнутого класса $\mathcal{B}$ функций алгебры логики существует конечное число различных β-замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, таких, что верно равенство $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Изучим свойства таких классов. Для этого сначала введем некоторые обозначения.

Пусть I — подмножество множества $\big\{(p,q) \,|\, p,q \in E_k,\ p \le q\big\}$. Положим

$$I^{(1)} = \big\{(p,p) \,|\, (p,p) \in I\big\},$$
$$I^{(2)} = \big\{(p,q) \,|\, (p,q) \in I,\ p \ne q\big\},$$
$$d(I) = \bigcup_{(p,q)\in I} \big(\{p\} \cup \{q\}\big).$$

Если $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций, то множество $\mathcal{B} \bigcap \{0, 1, x, \overline{x}\}$ называется *основанием* класса $\mathcal{B}$ (см., например, [84]). Для основания класса $\mathcal{B}$ будем использовать обозначение $U(\mathcal{B})$.

Лемма 2.10. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$, $(p,q) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{A})$ и $\widehat{p} = \langle p_1, \ldots, p_m\rangle$, а $\widehat{q} = \langle q_1, \ldots, q_m\rangle$. Тогда для всех $i = 1, \ldots, m$ выполняются следующие соотношения:*

1) *если $x \notin U(B(\mathcal{A}))$, то $p_i = q_i$;*

2) *если $\overline{x} \notin U(B(\mathcal{A}))$, то $p_i \le q_i$;*

3) *если $0 \notin U(B(\mathcal{A}))$, то $p_i \vee q_i = 1$, где $x \vee y$ — дизъюнкция в P_2;*

4) *если $1 \notin U(B(\mathcal{A}))$, то $p_i \,\&\, q_i = 0$, где $x \,\&\, y$ — конъюнкция в P_2.*

Доказательство. Все случаи рассматриваются аналогично, поэтому изучим только идин из них. Пусть $1 \notin U(B(\mathcal{A}))$. Предположим, что найдется число i, $1 \leq i \leq m$, такое, что $p_i \& q_i = 1$. Так как $(p, q) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{A})$, то найдется функция F из $\mathcal{A}$, для которой верно равенство $D(F) = \{p, q\}$. Обозначим ее двоичное представление через $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Так как $p_i = 1$ и $q_i = 1$, то булева функция f_i на некоторых наборах принимает значение 1. Предположим, что она также принимает значение 0. Тогда функция F принимает значения p, q, а также значение r, у которого в двоичном представлении i-я компонента равна нулю, что неверно. Поэтому функция f_i равна константе 1, и тогда $1 \in b(F) \subseteq B(\mathcal{A})$, что противоречит условиям рассматримаемого случая. Значит, $p_i \& q_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Лемма доказана. ■

Теорема 2.3. *Пусть $I \subseteq \{(p, q) \,|\, p, q \in E_k,\ p \leq q\}$, а $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций. Тогда существует не более одного β-замкнутого класса $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, такого, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = I$. Необходимые и достаточные условия существования такого β-замкнутого класса в зависимости от основания класса $\mathcal{B}$ задаются следующими ограничениями на множество I:*

1) $U(\mathcal{B}) = \{0, 1, x, \overline{x}\}$: $I^{(2)} \neq \varnothing$ *и* $d(I^{(2)}) \subseteq d(I^{(1)})$;

2) $U(\mathcal{B}) = \{x, \overline{x}\}$: $I^{(2)} \neq \varnothing$ *и* $p + q = k - 1$ *для всех* $(p, q) \in I$;

3) $U(\mathcal{B}) = \{0, 1, x\}$: $I^{(2)} \neq \varnothing$, $d(I^{(2)}) \subseteq d(I^{(1)})$ *и* $\widehat{p} \leq \widehat{q}$ *для всех* $(p, q) \in I$;

4) $U(\mathcal{B}) = \{0, x\}$: $I^{(2)} \neq \varnothing$, $I^{(1)} = \{(0, 0)\}$ *и* $p = 0$ *для всех* $(p, q) \in I$;

5) $U(\mathcal{B}) = \{1, x\}$: $I^{(2)} \neq \varnothing$, $I^{(1)} = \{(k - 1, k - 1)\}$ *и* $q = k - 1$ *для всех* $(p, q) \in I$;

6) $U(\mathcal{B}) = \{x\}$: $I = \{(0, k - 1)\}$;

7) $U(\mathcal{B}) = \{0, 1\}$: $I^{(2)} = \varnothing$, $I^{(1)} \neq \varnothing$, $I^{(1)} \neq \{(0, 0)\}$ *и* $I^{(1)} \neq \{(k - 1, k - 1)\}$;

8) $U(\mathcal{B}) = \{0\}$: $I = \{(0, 0)\}$;

9) $U(\mathcal{B}) = \{1\}$: $I = \{(k - 1, k - 1)\}$.

Доказательство. Пусть существует β-замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, для которого верны равенства $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = I$. Единственность такого класса следует из утверждения леммы 2.8. Докажем необходимость указанных в утверждении теоремы соотношений для множества I в зависимости от основания класса $\mathcal{B}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $x \in U(\mathcal{B})$. Предположим, что множество $I^{(2)}$ является пустым. Это означает, что каждая функция F из $\mathcal{A}$ принимает только одно значение, а следовательно, все ее компоненты являются константами. Но в этом случае $B(\mathcal{A}) \subseteq [\{0,1\}]$, что неверно. Значит, $I^{(2)} \neq \varnothing$.

Если основание класса $\mathcal{B}$ равно одному из множеств $\{x\}$ или $\{x, \overline{x}\}$, то оставшиеся соотношения для множества I легко выводятся из леммы 2.10.

Пусть теперь $\{0, 1, x\} \subseteq \mathcal{A}$. Так как $I^{(2)} \neq \varnothing$, то $d(I^{(2)}) \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольное число s из $d(I^{(2)})$. Покажем, что $s \in d(I^{(1)})$. Так как $s \in d(I^{(2)})$, то либо существует число p, $p \in E_k$, $p < s$, такое, что $(p, s) \in I^{(2)}$, либо существует число q, $q \in E_k$, $q > s$, такое, что $(s, q) \in I^{(2)}$, либо и то и другое. Без ограничения общности будем считать, что $(p, s) \in I^{(2)}$ для некоторого числа p, $1 \leq p < s$. Это означает, что множество $\mathcal{A}_{ps}$ не является пустым. Обозначим двоичные представления p и s через $\langle p_1, \ldots, p_m \rangle$ и $\langle s_1, \ldots, s_m \rangle$ соответственно. Для каждого i, $1 \leq i \leq m$, определим булеву функций f_i, зависящую от переменных $x_1, \ldots, x_m$, следующим образом:

$$f_i = 0, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 0;$$
$$f_i = x_1, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 1;$$
$$f_i = \overline{x_1}, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 0;$$
$$f_i = 1, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 1.$$

Рассмотрим вектор $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ булевых функций. Он является двоичным представлением некоторой функции $F(x)$ из P_k. Так как $p \neq s$, то $D(F) = \{p, s\}$, а также найдется число i, $1 \leq i \leq m$, такое, что $p_i < s_i$. Поэтому $x_1 \in b(F)$. Если $\overline{x} \notin U(\mathcal{B})$, то по лемме 2.10 среди компонент функции F не содержится функции $\overline{x_1}$, а значит, $b(F) \subseteq \{0, 1, x_1\} \subseteq \mathcal{B}$. Если $\overline{x} \in U(\mathcal{B})$, то выполняется соотношение $b(F) \subseteq \{0, 1, x_1, \overline{x_1}\} \subseteq \mathcal{B}$. Поэтому по лемме 2.6 верно включение $F \in \mathcal{A}_{ps}$.

В рассматриваемом случае булевы функции c_0 и c_1, реализующие константы 0 и 1 соответственно, содержатся в $B(\mathcal{A})$. Так как класс $\mathcal{A}$ является β-замкнутым, то функции H_0 и H_1, соответствующие двоичным представлениям $\widehat{F}(\langle c_0, \ldots, c_0 \rangle)$ и $\widehat{F}(\langle c_1, \ldots, c_1 \rangle)$, принадлежат $\mathcal{A}$. Очевидно, что данные функции принимают ровно одно значение, а поскольку среди компонент функции $b(F)$ содержится функция x_1, то $H_0 \neq H_1$. Следовательно, либо функция H_0, либо функция H_1 принимает значение s. Поэтому $(s, s) \in I^{(1)}$ и $s \in d(I^{(1)})$. Что и требовалось показать.

Доказано, что если основание класса $\mathcal{B}$ совпадает с множеством $\{0, 1, x, \overline{x}\}$, то выполняются соотношения $I^{(2)} \neq \varnothing$ и $d(I^{(2)}) \subseteq d(I^{(1)})$, что и требовалось. Если же $U(\mathcal{B}) = \{0, 1, x\}$, то оставшееся соотношение для множества I следует из леммы 2.10.

Случаи, когда основание класса $\mathcal{B}$ равно множеству $\{0, x\}$ или $\{1, x\}$, рассматриваются аналогично.

Если основание класса $\mathcal{B}$ равно одному из множеств $\{0\}$ или $\{1\}$, то все нужные соотношения для I вытекают из утверждений леммы 2.10, а если $U(\mathcal{B}) = \{0, 1\}$ — из утверждений этой леммы и исключения вариантов, когда множество $I^{(1)}$ является пустым или равно множеству $\{(0, 0)\}$ или $\{(k-1, k-1)\}$ (в этих случаях $U(\mathcal{B}) = \varnothing$, $U(\mathcal{B}) = \{0\}$ и $U(\mathcal{B}) = \{1\}$ соответственно).

Таким образом установлена необходимость указанных в утверждении теоремы соотношений для множества I (в зависимости от основания класса $\mathcal{B}$) для того, чтобы существовал β-замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = I$. Покажем, что данные условия для множества I являются достаточными.

Пусть $I \subseteq \big\{(p, q) \,|\, p, q \in E_k,\ p \leq q\big\}$, $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций, и для I выполняются соотношения, приведенные в утверждении теоремы. Построим β-замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = I$.

Рассмотрим произвольную пару индексов (p, q) из I. Обозначим двоичные представления p и q через $\langle p_1, \ldots, p_m\rangle$ и $\langle q_1, \ldots, q_m\rangle$ соответственно. Для каждого i, $1 \leq i \leq m$, определим булеву функцию $h_{pq,i}$, зависящую от переменных $x_1, \ldots, x_m$, следующим образом:

$$h_{pq,i} = 0, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 0;$$
$$h_{pq,i} = x_1, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 1;$$
$$h_{pq,i} = \overline{x_1}, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 0;$$
$$h_{pq,i} = 1, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 1.$$

Рассмотрим вектор $\langle h_{pq,1}, \ldots, h_{pq,m}\rangle$ булевых функций. Он является двоичным представлением некоторой функции $H_{pq}(x)$ из P_k. Если $p \neq q$, то $D(H_{pq}) = \{p, q\}$, а если $p = q$, то $D(H_{pp}) = \{p\}$. Значит, $H_{pq} \in P_{k|2}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $x \notin U(\mathcal{B})$. Тогда $\mathcal{B}$ является одним из классов C_0, C_1 или C. В каждом из этих случаев β-замкнутый класс $\mathcal{A}$, задаваемый равенством $\mathcal{A} = \big[\big\{H_{pp} \,\big|\, (p, p) \in I\big\}\big]_\beta$, является искомым, поскольку для него, очевидно, выполняются соотношения $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = I$ и $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $x \in U(\mathcal{B})$. Пусть $\{g_1, \ldots, g_r\}$ — базис класса $\mathcal{B}$. Если n_j — число переменных функции g_j, то через c_j обозначим минимальное натуральное

число, превосходящее n_j и кратное m, $j = 1, \ldots, r$. Для каждого $j,\ 1 \leq j \leq r$, определим функцию $g'_j(x_1, \ldots, x_{c_j})$ как функцию, полученную из функции g'_j путем добавления несущественных переменных $x_{n_j+1}, \ldots, r_{c_j}$. Очевидно, что $[\{g'_1, \ldots, g'_r\}] = \mathcal{B}$.

Так как $x \in U(\mathcal{B})$, то выполняется соотношение $I^{(2)} \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольную пару индексов (p, q) из $I^{(2)}$. Обозначим через $\langle p_1, \ldots, p_m\rangle$ и $\langle q_1, \ldots, q_m\rangle$ двоичные представления чисел p и q соответственно. Для каждой пары чисел j и $i,\ 1 \leq j \leq r,\ 1 \leq i \leq m$, определим c_j-местную булеву функцию $g_{j,i}$ следующим образом:

$$g_{j,i} = 0, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 0;$$
$$g_{j,i} = g'_j, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 1;$$
$$g_{j,i} = \overline{g'_j}, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 0;$$
$$g_{j,i} = 1, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 1.$$

Для каждого значения $j,\ 1 \leq j \leq r$, рассмотрим вектор $\langle g_{j,1}, \ldots, g_{j,m}\rangle$ булевых функций. Он является двоичным представлением некоторой функции G_j из P_k, зависящей от $\frac{c_j}{m}$ переменных, и по построению $G_j \in P_{k|2}$, $j = 1, \ldots, r$, причем поскольку $p < q$, то найдется такой номер t, $1 \leq t \leq m$, для которого $p_t = 0$, а $q_t = 1$. Значит, $g'_j \in b(G_j)$, $j = 1, \ldots, r$.

Определим множество $\mathcal{S} = \left\{H_{pq} \,\middle|\, (p, q) \in I\right\} \bigcup \left\{G_1, \ldots, G_r\right\}$ и класс $\mathcal{A} = [\mathcal{S}]_\beta$. По построению верны соотношения $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$ и $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$. Покажем, что $\mathcal{A}$ — искомый класс.

Докажем сначала, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Так как по лемме 1.3 верно равенство $B(\mathcal{A}) = B(\mathcal{S})$, то достаточно доказать равенство $B(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$. По построению функций $G_1, \ldots, G_r$ справедливо включение $\{G_1, \ldots, G_r\} \subseteq \mathcal{S}$, а значит, $\{g'_1, \ldots, g'_r\} \subseteq \bigcup\limits_{F \in \mathcal{S}} b(F)$ и $\mathcal{B} \subseteq B(\mathcal{S})$. По построению функций из множества $\mathcal{S}$ и по лемме 2.10 если $0 \notin U(\mathcal{B})$, то среди компонент функций из $\mathcal{S}$ не содержится функций, реализующих константу 0, если $1 \notin U(\mathcal{B})$, то не содержится функций, реализующих константу 1, а если $\overline{x} \notin U(\mathcal{B})$ — функций $\overline{x_1}$ и $\overline{g'_1}, \ldots, \overline{g'_r}$. Поэтому независимо от множества $U(\mathcal{B})$ получим, что для каждой функции F из S выполняется соотношение $b(F) \subseteq \mathcal{B}$. А значит, выполняется соотношение $B(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{B}$, и, следовательно, $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Теперь покажем, что имеет место равенство $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = I$. Включение $I \subseteq \mathrm{Ind}(\mathcal{A})$ очевидно в силу определения класса $\mathcal{A}$. Перейдем к доказательству включения $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) \subseteq I$. Рассмотрим произвольную пару индексов $(p, q) \notin I^{(2)}$, $p \neq q$. По построению среди функций множества $\mathcal{S}$ не содержится функций, принимающих оба значения p и q, а значит, таких функций нет и в классе $\mathcal{A}$. Следовательно, верны соотношения $(p, q) \notin (\mathrm{Ind}(\mathcal{A}))^{(2)}$ и $(\mathrm{Ind}(\mathcal{A}))^{(2)} \subseteq I^{(2)}$.

Для доказательства включения $(\mathrm{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)} \subseteq I^{(1)}$ рассмотрим сначала случай, когда $\{0, 1\} \nsubseteq U(\mathcal{B})$. Предположим, что найдется такая пара $(s, s) \in (\mathrm{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)}$, что $(s, s) \notin I^{(1)}$. Тогда найдется функция H из $\mathcal{A}$, такая, что $D(H) = \{s\}$. Если $U(\mathcal{B}) \bigcap \{0, 1\} = \varnothing$, то $b(H) \nsubseteq \mathcal{B}$,

так как среди компонент функции H содержатся только константы. Значит, $B(\mathcal{A}) \neq \mathcal{B}$, что неверно. Если $U(\mathcal{B}) \bigcap \{0,1\} = \{0\}$, то $I^{(1)} = \{(0,0)\}$. Поскольку $(s,s) \notin I^{(1)}$, то $s \neq 0$ и среди компонент функции H содержится функция, реализующая константу 1. Значит, $b(H) \not\subseteq \mathcal{B}$ и $B(\mathcal{A}) \neq \mathcal{B}$, что неверно. Случай, когда $U(\mathcal{B}) \bigcap \{0,1\} = \{1\}$, рассматривается аналогично предыдущему.

Таким образом, установлено, что если $\{0,1\} \not\subseteq U(\mathcal{B})$, то $(\mathrm{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)} \subseteq I^{(1)}$, и для завершения доказательства теоремы осталось доказать включение $(\mathrm{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)} \subseteq I^{(1)}$ в тех случаях, когда $\{0,1,x\} \subseteq U(\mathcal{B})$. Для этого рассмотрим произвольную пару $(s,s) \in (\mathrm{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)}$, где $s \in E_k$, и произвольную функцию $H \in \mathcal{A}_{ss}$. Тогда выполняется равенство $\widehat{H} = \widehat{F}\big(\langle g_1, \ldots, g_m\rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn}\rangle\big)$, где F — некоторая функция из $\mathcal{S}$, которая зависит от n переменных, а $g_1, \ldots, g_{mn}$ — функции из $\mathcal{B}$. Если $D(F) = \{s\}$, то по определению множества $\mathcal{S}$ пара индексов (s,s) принадлежит $I^{(1)}$. Если $D(F) = \{s_1, s_2\}$, где $s_1, s_2 \in E_k$, $s_1 < s_2$, то $s \in \{s_1, s_2\}$. В силу определения множества $\mathcal{S}$ пара индексов (s_1, s_2) принадлежит $I^{(2)}$. Поэтому $s \in d(I^{(2)})$, а так как верно соотношение $d(I^{(2)}) \subseteq d(I^{(1)})$, то $s \in d(I^{(1)})$. Значит, пара индексов (s,s) принадлежит множеству $I^{(1)}$ и для рассматриваемых случаев справедливо включение $(\mathrm{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)} \subseteq I^{(1)}$, что и требовалось показать. Теорема доказана. ■

Теорема 2.3 утверждает, что для каждого класса $\mathcal{B}$ алгебры логики и множества индексов I, которые удовлетворяют приведенным в условии теоремы условиям, однозначным образом определяется β-замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = I$. В свою очередь, для каждого β-замкнутого класса функций из $P_{k|2}$ однозначным образом определяются такой класс $\mathcal{B}$ и множество соответствующих индексов. Покажем, как используя данное утверждение можно описать решетку таких β-замкнутых классов функций.

Лемма 2.11. *Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{U}]_\beta = \mathcal{U}$ и $[\mathcal{V}]_\beta = \mathcal{V}$. Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения $B(\mathcal{U}) \subseteq B(\mathcal{V})$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$.*

Доказательство. Пусть сначала имеет место вложение $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Тогда $\bigcup\limits_{F \in \mathcal{U}} b(F) \subseteq \bigcup\limits_{F \in \mathcal{V}} b(F)$, а значит, по определению 1.2, имеет место вложение $B(\mathcal{U}) \subseteq B(\mathcal{V})$. Также для каждых значений чисел p и q, таких, что $p, q \in E_k$, $p \leq q$, выполняется соотношение $\mathcal{U}_{pq} \subseteq \mathcal{V}_{pq}$, и, поэтому, по определению множеств $\mathrm{Ind}(\mathcal{U})$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{U})$ верно включение $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$.

Пусть теперь выполняются соотношения $B(\mathcal{U}) \subseteq B(\mathcal{V})$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$. Тогда для каждых значений чисел p и q, таких, что $p, q \in E_k$, $p \leq q$, в силу утверждения лемм 2.6 и 2.7 выполняются соотношения $\mathcal{U}_{pq} \subseteq \mathcal{V}_{pq}$, а следовательно, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. ■

Лемма 2.12. *Пусть* $\mathcal{U},\ \mathcal{V} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{U}]_\beta = \mathcal{U}$, $[\mathcal{V}]_\beta = \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ *и* $U(B(\mathcal{U})) = U(B(\mathcal{V}))$. *Тогда* $\mathcal{U}$ *является предполным в* $\mathcal{V}$ *тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев:*

1) $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$ *и мощность множества* $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})\backslash\mathrm{Ind}(\mathcal{U})$ *равна единице;*

2) $B(\mathcal{U})$ *является предполным в* $B(\mathcal{V})$ *и* $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}) = \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$.

Доказательство. Обозначим мощность множества $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})\backslash\mathrm{Ind}(\mathcal{U})$ через N.

Сначала докажем необходимость приведенных в утверждении леммы соотношений. Пусть $\mathcal{U}$ является предполным в $\mathcal{V}$. Тогда в силу утверждения леммы 2.11 справедливы вложения $B(\mathcal{U}) \subseteq B(\mathcal{V})$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$.

Рассмотрим случай, когда $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$. Обозначим этот класс через $\mathcal{B}$. Если $N = 0$, то $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}) = \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$, и в силу утверждения леммы 2.8 выполняется соотношение $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, что неверно. Значит $N \geq 1$.

Пусть теперь $N \geq 2$. Тогда найдутся наборы $(p_1, q_1) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ и $(p_2, q_2) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ для которых $(p_1, q_1) \notin \mathrm{Ind}(\mathcal{U})$ и $(p_2, q_2) \notin \mathrm{Ind}(\mathcal{U})$.

Пусть выполняется соотношение $p_1 \neq q_1$. Тогда рассмотрим функцию $F' \in \mathcal{V}_{p_2 q_2}$ и β-замкнутый класс $[\mathcal{U} \bigcup \{F'\}]_\beta$, который обозначим через $\mathcal{U}'$. Так как $F' \notin \mathcal{U}$, то $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{V}$, а так как $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$, то $B(\mathcal{U}') = \mathcal{B}$. Покажем, что $\mathcal{U}'_{p_1 q_1} = \varnothing$. Для этого рассмотрим произвольную функцию H из класса $[\mathcal{U} \bigcup \{F'\}]_\beta$. Она имеет вид

$$\widehat{F}\big(\langle g_1, \ldots, g_m\rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn}\rangle\big),$$

где функция F принадлежит множеству $\mathcal{U} \bigcup \{F'\}$, зависит от n переменных, а $g_1, \ldots, g_{mn}$ — некоторые функции из $\mathcal{B}$. Если $F \in \mathcal{U}$, то в силу утверждений лемм 2.6 и 2.7 функция H принадлежит $\mathcal{U}$, а следовательно, $D(H) \neq \{p_1, q_1\}$. Если $F = F'$, то функция H может принимать только значения из множества $\{p_2, q_2\}$, и $D(H) \neq \{p_1, q_1\}$. Значит среди функций класса $\mathcal{U}'$ нет функций, которые принимают значения p_1 и q_1, и поэтому $\mathcal{U}$ не является предполным в $\mathcal{V}$. Случай, когда $p_2 \neq q_2$, рассматривается аналогично.

Если $p_1 = q_1$ и $p_2 = q_2$, то рассмотрим функцию $F' \in \mathcal{V}_{p_2 p_2}$ и β-замкнутый класс $[\mathcal{U} \bigcup \{F'\}]_\beta$. Рассуждениями, аналогичными предыдущему случаю, получим, что константа p_1 не принадлежит классу $[\mathcal{U} \bigcup \{F'\}]_\beta$. Поэтому класс $\mathcal{U}$ не является предполным в $\mathcal{V}$. Значит в рассматриваемом случае $N = 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда $B(\mathcal{U}) \subset B(\mathcal{V})$. Покажем, что в этом случае $B(\mathcal{U})$ является предполным в $B(\mathcal{V})$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}) = \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$. Предположим, что найдется класс $\mathcal{B}$ функций алгебры логики, такой, что $B(\mathcal{U}) \subset \mathcal{B} \subset B(\mathcal{V})$. Тогда найдется функция $f \in P_2$, такая, что

$f \notin B(\mathcal{U})$ и $f \in \mathcal{B}$. Так как равны основания классов $B(\mathcal{U})$ и $B(\mathcal{V})$, то функция f не может содержаться в множестве $\{0, 1, x, \overline{x}\}$. Поэтому по свойствам булевых функций $x \in \left[\{f\}\right] \subset B(\mathcal{V})$ (см., например, [78]), и в силу утверждения теоремы 2.3 для класса $\mathcal{V}$ выполняется соотношение $\mathrm{Ind}^{(2)}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$.

Рассмотрим $(p, q) \in \mathrm{Ind}^{(2)}(\mathcal{V})$. Определим функцию $F \in P_{k|2}$ через ее двоичное представление $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Для каждого $i,\ 1 \leq i \leq m$, положим:

$$f_i = 0, \text{ если } p_i = 0,\ q_i = 0;$$
$$f_i = f, \text{ если } p_i = 0,\ q_i = 1;$$
$$f_i = \overline{f}, \text{ если } p_i = 1,\ q_i = 0;$$
$$f_i = 1, \text{ если } p_i = 1,\ q_i = 1.$$

Рассмотрим класс $\left[\mathcal{U} \bigcup \{F\}\right]_\beta$, который обозначим через $\mathcal{U}'$. Поскольку $p < q$, то найдется $i,\ 1 \leq i \leq m$, для которого $p_i < q_i$, а следовательно $f \in b(F)$ и $F \notin \mathcal{U}$. Если множество $U(B(\mathcal{V}))$ не содержит функцию 0, то в силу утверждения леммы 2.10 для каждого $i,\ 1 \leq i \leq m$, выполняется соотношение $q_i = 1$; не содержит функцию 1 — соотношение $p_i = 0$; не содержит функцию $\overline{x}$ — соотношение $p_i < q_i$. В любом из этих случаев $b(F) \subseteq \mathcal{B}$. Поэтому $B(\mathcal{U}') \subseteq \mathcal{B} \subset B(\mathcal{V})$, и в силу утверждения леммы 2.1 β-замкнутые классы $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{V}$ различны. Значит $\mathcal{U}$ не является предполным в $\mathcal{V}$, что противоречит условию.

Поэтому $B(\mathcal{U})$ является предполным в $B(\mathcal{V})$. Предположим, что $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}) \neq \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$. Рассмотрим $(p, q) \notin \mathrm{Ind}(\mathcal{V}) \backslash \mathrm{Ind}(\mathcal{U})$. Определим одноместную функцию $F \in P_{k|2}$ через ее двоичное представление $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Для каждого $i,\ 1 \leq i \leq m$, положим:

$$f_i = 0, \text{ если } p_i = 0,\ q_i = 0;$$
$$f_i = x_1, \text{ если } p_i = 0,\ q_i = 1;$$
$$f_i = \overline{x_1}, \text{ если } p_i = 1,\ q_i = 0;$$
$$f_i = 1, \text{ если } p_i = 1,\ q_i = 1.$$

По построению $D(F) = \{p, q\}$, а значит, $F \notin \mathcal{U}$. Рассмотрим β-замкнутый класс $\left[\mathcal{U} \bigcup \{F\}\right]_\beta$, который обозначим через $\mathcal{U}'$. Если множество $U(B(\mathcal{V}))$ не содержит функцию 0, то в силу утверждения леммы 2.10 для каждого $i,\ 1 \leq i \leq m$, выполняется соотношение $q_i = 1$; не содержит функцию 1 — соотношение $p_i = 0$; не содержит функцию $\overline{x}$ — соотношение $p_i < q_i$. В любом из этих случаев $b(F) \subseteq U(B(\mathcal{V})) = U(B(\mathcal{U}))$. Поэтому $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{U}') \subset B(\mathcal{V})$, и в силу утверждения леммы 2.1 β-замкнутые классы $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{V}$ различны. Поэтому $\mathcal{U}$ не является предполным в $\mathcal{V}$, что противоречит условию. Значит в рассматриваемом случае $B(\mathcal{U})$ является предполным в $B(\mathcal{V})$ и $N = 0$.

Перейдем к доказательству достаточности приведенных в утверждении леммы соотношений. Пусть сначала $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$ и $N = 1$. Тогда существует набор (p, q), такой, что $\mathcal{U}_{pq} = \varnothing$ и $\mathcal{V}_{pq} \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольную функцию F из $\mathcal{V}\backslash\mathcal{U}$ и β-замкнутый класс $\left[\mathcal{U}\bigcup\{F\}\right]_\beta$, который обозначим через $\mathcal{U}'$. Так как $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$, то согласно утверждениям лемм 2.6 и 2.7 для всех $(a, b) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{U})$ справедливо равенство $\mathcal{U}_{ab} = \mathcal{V}_{ab}$. Поэтому $D(F) = \{p, q\}$. Из этого следует, что $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{Ind}(\mathcal{U}') \subseteq \mathcal{V}$. В рассматриваемом случае $N = 1$, а значит выполняется соотношение $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}') = \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$. Так как $B(\mathcal{U}') = B(\mathcal{V})$, то в силу утверждения леммы 2.8 имеет место равенство $\mathcal{U}' = \mathcal{V}$. Поэтому класс $\mathcal{U}$ является предполным в $\mathcal{V}$.

Пусть теперь $B(\mathcal{U})$ является предполным в $B(\mathcal{V})$ и $N = 0$. Рассмотрим произвольную функцию F из $\mathcal{V}\backslash\mathcal{U}$ и β-замкнутый класс $\left[\mathcal{U}\bigcup\{F\}\right]_\beta$, который обозначим через $\mathcal{U}'$. Тогда $D(F) = \{p, q\}$ для некоторого набора $(p, q) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$, а следовательно, $(p, q) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{U})$. Поэтому если $b(F) \subseteq B(\mathcal{U})$, то согласно леммам 2.6 и 2.7 выполняется соотношение $F \in \mathcal{U}$. Значит среди функций множества $b(F)$ найдется булева функция f, которая не содержится в классе $B(\mathcal{U})$. Поэтому $B(\mathcal{U}') = B(\mathcal{V})$ в силу предполноты класса $B(\mathcal{U})$ в $B(\mathcal{V})$. Так как $\mathrm{Ind}(\mathcal{U}') = \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$, то в силу утверждения леммы 2.8 выполняется соотношение $\mathcal{U}' = \mathcal{V}$, а значит, класс $\mathcal{U}$ является предполным в $\mathcal{V}$. ■

Полностью описание решетки β-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ не приводится в этой работы, так как, несмотря на простоту, разбор всех случаев достаточно громоздок и, главное, при этом не выявляется никаких новых содержательных эффектов.

Глава 3

Классы функций из $P_{k|3}$

3.1 Континуальность семейства β-замкнутых классов

Приведем пример континуального семейства β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$. Для каждого $n \geq 2$ определим функцию W_n из P_k, зависящую от переменных $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, через ее двоичное представление $\langle w_{n,1}, \ldots, w_{n,m}\rangle$:

$$w_{n,1} = x_1^1 \vee x_1^2 \vee \ldots \vee x_1^n \vee y_1^1 \& y_1^2 \& \ldots \& y_1^n,$$
$$w_{n,i} = y_1^1 \vee y_1^2 \vee \ldots \vee y_1^n \vee d_n(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n) \vee \overline{x_1^1} \& \overline{x_1^2} \& \ldots \& \overline{x_1^n} \text{ для всех } i,\ 2 \leq i \leq m,$$

где $x \vee y$, $x \& y$, $\overline{x}$ — соответственно дизъюнкция, конъюнкция и отрицание в двузначной логике, а $d_n(x_1^1, \ldots, x_1^n) = \bigvee\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_1^i \& x_1^j$.

Так как каждая из компонент функции W_n зависит только от первых компонент переменных $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, то в дальнейшем будем обозначать булевы переменные x_1^i, y_1^i через x_i и y_i соответственно, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$w_{n,1} = x_1 \vee \ldots \vee x_n \vee y_1 \& \ldots \& y_n,$$
$$w_{n,i} = y_1 \vee \ldots \vee y_n \vee d_n(x_1, \ldots, x_n) \vee \overline{x_1} \& \ldots \& \overline{x_n} \text{ для всех } i,\ 2 \leq i \leq m.$$

Установим некоторые свойства функций W_n для каждого $n \geq 2$.

1. Справедливо равенство $B(\{W_n\}) = O^\infty$ (все обозначения для классов булевых функций заимствованы из работы [78]).

   Данное утверждение следует из того, что все компоненты функции W_n содержатся в классе O^∞, а функция $w_{n,2}$ не содержится в классах MO^∞ и O_0^∞, обоих предполных классах в классе O^∞ (см., например, [78]) , и, тем самым, порождает все функции из этого класса.

2. Справедливо равенство $D(W_n) = \{\alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}\}$, где двоичные представления чисел α_{01}, α_{10}, α_{11} равны $\langle 0, 1, 1, \ldots, 1\rangle$, $\langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle$ и $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1\rangle$ соответственно.

Так как функции $w_{n,2}, \ldots, w_{n,m}$ равны между собой, то двоичное представление функции W_n может принимать только значения из множества

$$\{\langle 0,0,0,\ldots,0\rangle,\ \langle 0,1,1,\ldots,1\rangle,\ \langle 1,0,0,\ldots,0\rangle,\ \langle 1,1,1,\ldots,1\rangle\}.$$

Функция $w_{n,1}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $x_1 = \cdots = x_n = 0$ и хотя бы одна из переменных $y_1, \ldots, y_n$ равна 0. Но если $x_1 = \cdots = x_n = 0$, то функция $w_{n,2}$ будет равна единице, поэтому двоичное представление функции W_n не принимает значение $\langle 0,0,0\ldots,0\rangle$, а значения $\langle 0,1,1,\ldots,1\rangle,\ \langle 1,0,0,\ldots,0\rangle,\ \langle 1,1,1,\ldots,1\rangle$ принимает соответственно при следующих значениях переменных:

- $x_1 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_n = 0$;
- $x_1 = 1,\ x_2 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_n = 0$;
- $x_1 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_n = 1$.

Положим $\mathcal{W} = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty}\{W_n\}$. Отметим, что похожее множество функций использовалось в работе [41] для доказательства континуальности семейства самодвойственных классов функций k-значной логики.

Лемма 3.1. *Для всех $n \geq 2$ справедливо соотношение $W_n \notin \left[\mathcal{W}\backslash\{W_n\}\right]_\beta$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Значит, в силу утверждения леммы 1.4, имеет место соотношение

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}\big(\langle\omega_1,\ldots,\omega_m\rangle,\ldots,\langle\omega_{m(r-1)+1},\ldots,\omega_{mr}\rangle\big), \tag{3.1}$$

где функция H принадлежит множеству $\mathcal{W}\backslash\{W_n\}$, r — число переменных функции H, а булевы функции $\omega_1, \ldots, \omega_{mr}$ принадлежат множеству $B(\mathcal{W}\backslash\{W_n\})$. Поэтому $H = W_p$ для некоторого числа $p,\ p \geq 2,\ p \neq n$, и $r = 2p$. Так как верно равенство $B(\{W_i\}) = O^\infty$ для любого $i \geq 2$, то $B(\mathcal{W}\backslash\{W_n\}) = O^\infty$, а следовательно, все функции $\omega_1, \ldots, \omega_{2mp}$ принадлежат классу O^∞. Поскольку все компоненты функции W_n существенно зависят только от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, то без ограничения общности можно считать, что булевы функции $\omega_1, \ldots, \omega_{2mp}$ зависят только от тех же переменных.

Для всех $i,\ 1 \leq i \leq p$, обозначим функцию $\omega_{m(i-1)+1}$ через g_i, а функцию $\omega_{m(p+i-1)+1}$ — через h_i. В данных обозначениях соотношение (3.1) можно записать при помощи эквивалентной системы равенств:

$$\begin{cases} w_{n,1} = g_1 \vee \ldots \vee g_p \vee h_1 \& \ldots \& h_p, & (3.2)\\ w_{n,i} = h_1 \vee \ldots \vee h_p \vee d_p(g_1,\ldots,g_p) \vee \overline{g_1} \& \ldots \& \overline{g_p},\ i = 2,\ldots,m. & (3.3)\end{cases}$$

Так как $g_i \in O^\infty$, то g_i мажорирует некоторую переменную из множества $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$, $i = 1, \ldots, p$. Предположим, что для некоторого числа i, $1 \leq i \leq p$, функция g_i мажорирует переменную y_j, $1 \leq j \leq n$. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ из E_2^{2n}, у которого все компоненты равны нулю, кроме компоненты с номером $n + j$ (она соответствует переменной y_j). Тогда $g_i(\widetilde{\alpha}) = 1$. Но $w_{n,1}(\widetilde{\alpha}) = 0$, а значит, не выполняется соотношение (3.2). Следовательно, ни одна из функций $g_1, \ldots, g_p$ не мажорирует ни одну из переменных $y_1, \ldots, y_n$. Аналогичными рассуждениями получаем, что ни одна из функций $h_1, \ldots, h_p$ не мажорирует ни одну из переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Далее предположим, что выполняется неравенство $p > n$. Так как каждая из функций $g_1, \ldots, g_p$ мажорирует хотя бы одну переменную из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, то найдется переменная x_i, $1 \leq i \leq n$, которая мажорируется как минимум двумя функциями g_{i_1} и g_{i_2}, $1 \leq i_1 < i_2 \leq p$. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ из E_2^{2n}, у которого все компоненты равны нулю, кроме компоненты с номером i (она соответствует переменной x_i). Тогда $g_{i_1}(\widetilde{\alpha}) = g_{i_2}(\widetilde{\alpha}) = 1$, а следовательно, $d_p\big(g_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, g_p(\widetilde{\alpha})\big) = 1$. Но $w_{n,2}(\widetilde{\alpha}) = 0$, так как $d_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \overline{\alpha_1}\& \ldots \&\overline{\alpha_n} = \alpha_{n+1} \vee \ldots \vee \alpha_{2n} = 0$. Поэтому не выполняется соотношение (3.3).

Теперь предположим, что $p < n$. Для каждого числа i, $1 \leq i \leq p$, функция h_i мажорирует хотя бы одну переменную из множества $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Это означает, что найдется число j_i, $1 \leq j_i \leq n$, для которого $h_i \geq y_{j_i}$. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ из E_2^{2n}, у которого компоненты с номерами $n + j_1, \ldots, n + j_p$ равны единице (они соответствуют переменным $y_{j_1}, \ldots, y_{j_p}$), а остальные компоненты равны нулю. Тогда $h_1(\widetilde{\alpha}) = \cdots = h_p(\widetilde{\alpha}) = 1$, а следовательно, $h_1(\widetilde{\alpha})\& \ldots \&h_p(\widetilde{\alpha}) = 1$. Поскольку $p < n$, то $\{i_1, \ldots, i_p\} \neq \{1, \ldots, n\}$. Поэтому найдется число j, $1 \leq j \leq n$, такое, что $\alpha_{n+j} = 0$. Значит $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n = \alpha_{n+1}\& \ldots \&\alpha_{2n} = 0$ и на наборе $\widetilde{\alpha}$ функция $w_{n,1}$ равна нулю. Поэтому не может выполняться соотношение (3.2), что и требовалось доказать. ■

Теорема 3.1. *Пусть $k = 2^m$, где $m \geq 2$. Тогда семейство различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^∞ является континуальным.*

Доказательство. Для каждого подмножества S множества $\{2, 3, 4, \ldots\}$ определим множество функций k-значной логики $\{W_i \,\big|\, i \in S\}$, которое будем обозначать через $\mathcal{W}(S)$.

Рассмотрим два различных подмножества R и Q множества $\{2, 3, 4, \ldots\}$. Для них найдется число n, такое, что $n \in R\backslash Q$ или $n \in Q\backslash R$. Без ограничения общности будем считать, что $n \in R\backslash Q$. Тогда $W_n \in [\mathcal{W}(R)]_\beta$, но по лемме 3.1 выполняется соотношение $W_n \notin [\mathcal{W}\backslash\{W_n\}]_\beta$, а значит, $W_n \notin [\mathcal{W}(Q)]_\beta$.

Получили, что для различных подмножеств R и Q множества $\{2, 3, 4, \dots\}$ различны и β-замкнутые классы функций $[\mathcal{W}(R)]_\beta$ и $[\mathcal{W}(Q)]_\beta$. Так как семейство различных таких подмножеств имеет континуальную мощность, то семейство различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^∞ как минимум континуально. Очевидно, что это семейство имеет мощность не более континуума, и, значит, оно континуально. Теорема доказана. ■

Таким образом получили, что семейство β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ является континуальным. При этом согласно утверждению теоремы 2.2 семейство β-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ является счетным. Для исследования этого «эффекта» будем рассматривать семейства замкнутых классов функций из $P_{k|r}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$, где $r \geq 1$ и $\mathcal{B}$ — некоторый замкнутый класс булевых функций. Введем следующее определение.

Определение 3.1. *Пусть $k = 2^m$, $m \geq 2$ и $1 \leq r \leq m$. Обозначим через $C(k, r)$ множество замкнутых классов $\mathcal{B}$ булевых функций, для которых семейство различных β-замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|r}$, удовлетворяющих условию $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, является конечным, а через $\mathcal{Q}(k, r)$ — множество всех классов булевых функций, для которых такое семейство β-замкнутых классов являются континуальным.*

В настоящей главе будет показано, что справедливы равенства

$$Q(k,3) = \{O^\infty,\, I^\infty\} \bigcup \{O^\mu,\, I^\mu \,|\, \mu \geq 3\},$$
$$C(k,3) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \,\big|\, [\mathcal{B}] = \mathcal{B},\ \mathcal{B} \notin Q(k,3)\}.$$

3.2 Конечные семейства β-замкнутых классов

Текущий раздел посвящен исследованию множеств $C(k, k)$ и $C(k, 3)$ при $k = 2^m$, $m \geq 2$. В каждом из подразделов 3.2.1-3.2.6 рассматриваются некоторые множества классов булевых функций. Для таких множеств доказываются леммы, которые затем обобщаются в подразделе 3.2.7 и позволяют установить принадлежность исследуемых множеств классу $C(k, k)$ или $C(k, 3)$.

3.2.1 Классы с булевым замыканием в U

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов U, SU, MU, U_0, U_1, U_{01}, C, C_0, C_1 булевых функций, $F \in P_k$ и $b(F) \subseteq \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более, чем от m переменных, и такая, что $F \in [\{G\}]_\beta$.*

Доказательство. Так как $b(F) \subseteq \mathcal{B} \subseteq U$, то каждая из компонент функции F существенно зависит не более, чем от одной переменной. Значит функция F существенно зависит не более, чем от m переменных.

Рассмотрим функцию G из P_k, которая получена из функции F путем удаления всех несущественных переменных. Тогда функция G зависит не более, чем от m переменных, и принадлежит множеству $[\{F\}]_\beta$. Также, очевидно, что функция F может быть получена из функции G путем введения несущественных переменных, а следовательно, $F \in [\{G\}]_\beta$. ■

3.2.2 Классы с булевым замыканием в D или K

Лемма 3.3. *Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов D_{01}, D_0, D_1, D булевых функций, $F \in P_k$, $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более, чем от k переменных, и такая, что $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$.*

Доказательство. Обозначим через n число переменных функции F, через $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ — ее двоичное представление, а через $x_1, \ldots, x_{mn}$ — переменные, от которых зависит двоичное представление функции F.

Введем на множестве $X = \{x_1, \ldots, x_{mn}\}$ отношение эквивалентности. Рассмотрим переменные x_i и x_j из множества X. Положим $x_i \sim x_j$ тогда и только тогда, когда для каждого числа $s,\ 1 \leq s \leq m$, одновременно верны соотношения $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_j$ или данные соотношения одновременно не выполняются. Чтобы показать, что введенное отношение является отношением эквивалентности покажем, что если $x_i \sim x_j$ и $x_j \sim x_l$, то $x_i \sim x_l$. Если $x_i \sim x_j$, то для каждого числа $s,\ 1 \leq s \leq m$, либо верны соотношения $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_j$, либо данные соотношения одновременно не выполняются. Рассмотрим каждый из данных случаев.

1. Пусть $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_j$. Так как $x_j \sim x_l$ и верно соотношение $f_s \geq x_j$, то $f_s \geq x_l$. Это значит, что $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_l$.

2. Пусть не выполняются соотношения $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_j$. Так как $x_j \sim x_l$ и не выполняется соотношение $f_s \geq x_j$, то не выполняется соотношение $f_s \geq x_l$. Поэтому одновременно не выполняются соотношения $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_l$.

Получили, что для каждого числа $s,\ 1 \leq s \leq m$, либо верны соотношения $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_l$, либо данные соотношения одновременно не выполняются. Поэтому $x_i \sim x_l$.

Оценим число t классов эквивалентности. Для этого каждой переменной x_i из множества X поставим в соответствие двоичный вектор $(a_1(i), \ldots, a_m(i))$ из E_2^m следующим образом: $a_s(i) = 1$, если $f_s \geq x_i$, и $a_s(i) = 0$ в противном случае, $s = 1, \ldots, m$. Тогда переменные

x_i и x_j эквиваленты тогда и только тогда, когда справедливо равенство $(a_1(i), \ldots, a_m(i)) = (a_1(j), \ldots, a_m(j))$. Поэтому число t классов эквивалентности не превосходит $2^m = k$.

Обозначим через $X_1, \ldots, X_t$ классы эквивалентности на множестве X. Для каждого числа $i,\ 1 \le i \le mn$, обозначим через $q(i)$ номер класса эквивалентности, которому принадлежит переменная x_i, и для каждого класса эквивалентности $X_q,\ 1 \le q \le t$, определим булеву функцию

$$V_q(x_1, \ldots, x_{mn}) = \bigvee_{x_i \in X_q} x_i.$$

Так как $x \vee y \in \mathcal{B}$, то $V_q \in \mathcal{B}$. В силу определения функции V_q, для каждого числа $s,\ 1 \le s \le m$, либо выполняется соотношение $f_s \ge V_q$, либо для каждой переменной x_i из X_q не выполняется соотношение $f_s \ge x_i$.

Рассмотрим двоичное представление $\widehat{F}(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)})$. Обозначим через $g_1, \ldots, g_m$ булевы функции $f_1(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)}), \ldots, f_m(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)})$ соответственно, а через G — функцию, которая соответствует двоичному представлению $\langle g_1, \ldots, g_m \rangle$. Отметим, что таких функций много, но все они равны с точностью до фиктивных переменных. Поскольку каждая из функций $g_1, \ldots, g_m$ зависит только от переменных из множества $\{y_1, \ldots, y_t\}$, то можно считать, что функция G тоже существенно зависит не более, чем от t переменных.

Покажем, что функция G является искомой. Для этого докажем равенство

$$\widehat{G}\big(V_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, V_t(x_1, \ldots, x_{mn})\big) = \widehat{F}(x_1, \ldots, x_{mn}),$$

которое эквивалентно системе равенств:

$$g_j\big(V_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, V_t(x_1, \ldots, x_{mn})\big) = f_j(x_1, \ldots, x_{mn}),\ j = 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим каждое из данных равенств. Если функция f_j равна константе c, где $c \in E_2$, то $g_j(y_1, \ldots, y_t) = f_j(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)}) = c$ и доказываемое равенство очевидно. Если функция f_j не является константой, то в силу условия $f_j \in \mathcal{B} \subseteq D$ верно соотношение $f_j = x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_p}$, где $p \ge 1$ и $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_p \le mn$. Так как $f_j \ge x_{j_s}$ при $1 \le s \le p$, то $f_j \ge V_{q(j_s)}$ и верна следующая цепочка соотношений:

$$f_j \ge V_{q(j_1)} \vee \ldots \vee V_{q(j_p)} \ge x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_p} = f_j.$$

Таким образом $f_j = V_{q(j_1)} \vee \ldots \vee V_{q(j_p)}$. Поэтому справедливы равенства:

$$g_j(V_1, \ldots, V_t) = f_j(V_{q(1)}, \ldots, V_{q(mn)}) = V_{q(j_1)} \vee \ldots \vee V_{q(j_p)} = f_j,$$

что и требовалось показать.

Значит $\widehat{F}(\widetilde{x}) = \widehat{G}\big(V_1(\widetilde{x}), \ldots, V_t(\widetilde{x})\big)$, а так как каждая из функций $V_1, \ldots, V_t$ содержится в классе $\mathcal{B} = B(R)$, то $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$. Лемма доказана. ■

3.2.3 Классы с булевым замыканием в L

Лемма 3.4. *Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов L_{01}, L_0, L_1, SL, L булевых функций, $F \in P_k$, $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более, чем от $2k$ переменных, и такая, что $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$.*

Доказательство. Обозначим через n число переменных функции F, через $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ — ее двоичное представление, а через $x_1, \ldots, x_{mn}$ — переменные, от которых зависит двоичное представление функции F. Тогда булевы функции $f_1, \ldots, f_m$ являются линейными.

Введем на множестве $X = \{x_1, \ldots, x_{mn}\}$ отношение эквивалентности. Рассмотрим переменные x_i и x_j из множества X. Положим $x_i \sim x_j$ тогда и только тогда, когда для каждого числа $s,\ 1 \leq s \leq m$, функция f_s существенно зависит от переменных x_i и x_j, либо обе эти переменные являются несущественными для функции f_s. Очевидно, что введенное отношение является отношением эквивалентности.

Оценим число t классов эквивалентности. Для этого каждой переменной x_i из множества X поставим в соответствие двоичный вектор $(a_1(i), \ldots, a_m(i))$ из E_2^m следующим образом: $a_s(i) = 1$, если f_s линейна по переменной x_i, и $a_s(i) = 0$ в противном случае, $s = 1, \ldots, m$. Тогда переменные x_i и x_j эквиваленты тогда и только тогда, когда справедливо равенство $(a_1(i), \ldots, a_m(i)) = (a_1(j), \ldots, a_m(j))$. Поэтому число t классов эквивалентности не превосходит $2^m = k$.

Обозначим через $X_1, \ldots, X_t$ классы эквивалентности на множестве X. Для каждого числа $q,\ 1 \leq q \leq t$, рассмотрим множество $X_q,\ 1 \leq q \leq t$. Если мощность данного множества является четной, то разделим его на два множества X'_q и X''_q нечетной мощности (например, 1 и $|X_q| - 1$ соответственно). Если мощность множества X_q является нечетной, то положим $X'_q = X_q$, а $X''_q = \varnothing$.

Произвольным образом перенумеруем все непустые множества из семейства $\{X'_1, X''_1, \ldots, X'_t, X''_t\}$ и обозначим их через $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r$. Тогда $r \leq 2t$, а значит, $r \leq 2k$.

Для каждого $q,\ 1 \leq q \leq r$, определим функцию:

$$V_q(x_1, \ldots, x_{mn}) = \bigoplus_{x_i \in \Lambda_q} x_i.$$

Так как $x \oplus y \oplus z \in L_{01} \subseteq \mathcal{B}$ и мощность множества Λ_q является нечетной, то $V_q \in \mathcal{B}$ для всех $q = 1, \ldots, r$. В силу определения множества Λ_q, для каждого $s,\ 1 \leq s \leq m$, функция f_s существенно зависит от всех переменных из множества Λ_q, либо существенно не зависит ни от одной переменной из этого множества.

Для каждого числа $i,\ 1 \leq i \leq mn$, обозначим через $q(i)$ номер множества из семейства $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r\}$, которому принадлежит переменная x_i.

Рассмотрим произвольное множество $\Lambda_q,\ 1 \leq q \leq r$. Обозначим индексы переменных, которые содержатся в данном множестве через $i_1, \ldots, i_v$ для некоторого $v \geq 1$. Тогда v является нечетным, и в силу определения чисел $q(i)$ справедливы равенства $q(i_1) = \ldots = q(i_v) = q$. Поэтому имеет место следующая цепочка соотношений:

$$V_q(V_{q(1)}, \ldots, V_{q(mn)}) = \bigoplus_{x_i \in \Lambda_q} V_{q(i)} = V_{q(i_1)} \oplus \ldots \oplus V_{q(i_v)} = V_q. \tag{3.4}$$

Как и при доказательстве леммы 3.3 будем рассматривать функцию G из P_k, для которой справедливо соотношение

$$\widehat{G} = \widehat{F}(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)}).$$

Компоненты функции G существенно зависят только от переменных из множества $\{y_1, \ldots, y_r\}$. Поэтому функция G тоже существенно зависит не более, чем от r переменных.

Покажем, что функция G является искомой. Для этого докажем равенство

$$\widehat{G}\big(V_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, V_r(x_1, \ldots, x_{mn})\big) = \widehat{F}(x_1, \ldots, x_{mn}),$$

которое эквивалентно системе равенств

$$g_j\big(V_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, V_r(x_1, \ldots, x_{mn})\big) = f_j(x_1, \ldots, x_{mn}),\ j = 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим каждое из данных равенств. Если функция f_j равна константе c, где $c \in E_2$, то $g_j(y_1, \ldots, y_r) = f_j(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)}) = c$ и доказываемое равенство очевидно. Если функция f_j не является константой, то в силу условия $f_j \in \mathcal{B} \subseteq L$ верно соотношение $f_j = x_{j_1} \oplus \ldots \oplus x_{j_p} \oplus c$, где $c \in E_2$, $p \geq 1$ и $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq mn$. Так как f_j линейна по переменной x_{j_s} при $1 \leq s \leq p$, то f_j линейна по каждой переменной из множества $\Lambda_{q(j_s)}$. Значит все существенные переменные функции $V_{q(j_s)}$ являются существенными и для функции f_j. Поэтому $f_j = V_{a_1} \oplus \ldots \oplus V_{a_u} \oplus c$, где $u \geq 1$ и $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_u \leq r$. Тогда в силу соотношений (3.4) имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered} f_j(V_{q(1)}, \ldots, V_{q(mn)}) = \\ = V_{a_1}(V_{q(1)}, \ldots, V_{q(mn)}) \oplus \ldots \oplus V_{a_u}(V_{q(1)}, \ldots, V_{q(mn)}) \oplus c = \\ = V_{a_1} \oplus \ldots \oplus V_{a_u} \oplus c = f_j. \end{gathered}$$

В качестве следствия получаем равенство

$$g_j(V_1, \ldots, V_t) = f_j(V_{q(1)}, \ldots, V_{q(mn)}) = f_j,$$

что и требовалось показать.

Значит $\widehat{F}(\widetilde{x}) = \widehat{G}\big(V_1(\widetilde{x}), \ldots, V_r(\widetilde{x})\big)$, а так как каждая из функций $V_1, \ldots, V_r$ содержится в классе $\mathcal{B} = B(R)$, то $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$. Лемма доказана. ■

3.2.4 Классы с булевым замыканием P_2, T_0, T_1, T_{01}, S или S_{01}

Лемма 3.5. *Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов P_2, T_0, T_1, T_{01}, S или S_{01} булевых функций, $F \in P_k$, $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более, чем от 2^k переменных, и такая, что $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$.*

Доказательство. Обозначим через n число переменных функции F, через $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ — ее двоичное представление, а через $\{c_1, \ldots, c_r\}$ — множество значений функции F. Для каждого $c \in D(F)$ специальным образом выберем набор $\widetilde{\alpha}(c) = \big(\alpha_1(c), \ldots, \alpha_{mn}(c)\big)$ из E_2^{mn}, для которого выполняется равенство

$$\widehat{F}\big(\alpha_1(c), \ldots, \alpha_{mn}(c)\big) = \widehat{c}.$$

Для этого рассмотрим возможные варианты класса $\mathcal{B}$.

- Пусть $\mathcal{B} = P_2$. Тогда для каждого $c \in D(F)$ нужный набор можно выбрать произвольным образом.

- Пусть $\mathcal{B} = T_0$. Тогда верно соотношение $\widehat{F}(0, \ldots, 0) = \langle 0, \ldots, 0\rangle$. Поэтому $0 \in D(F)$, и в качестве набора $\widetilde{\alpha}(0)$ выберем набор $(0, \ldots, 0)$. Для остальных $c \in D(F)$ нужный набор можно выбрать произвольным образом.

- Пусть $\mathcal{B} = T_1$. Тогда верно соотношение $\widehat{F}(1, \ldots, 1) = \langle 1, \ldots, 1\rangle$. Поэтому $k - 1 \in D(F)$, и в качестве набора $\widetilde{\alpha}(k-1)$ выберем набор $(1, \ldots, 1)$. Для остальных $c \in D(F)$ нужный набор можно выбрать произвольным образом.

- Случай, когда $\mathcal{B} = T_{01}$, рассматривается аналогично предыдущим случаям.

- Пусть $\mathcal{B} = S$. Тогда если двоичное представление функции F принимает значение $\langle c_1, \ldots, c_m\rangle$ на наборе $\widetilde{\alpha}$, то оно принимает значение $\langle \overline{c_1}, \ldots, \overline{c_m}\rangle$ на наборе, двойственном к $\widetilde{\alpha}$. Для чисел $c \in D(F)$ и $c' \in D(F)$, таких, что их двоичные представления являются двойственными друг другу, выберем наборы $\widetilde{\alpha}(c)$ и $\widetilde{\alpha}(c')$, двойственные друг другу.

- Случай, когда $\mathcal{B} = S_{01}$, рассматривается аналогично предыдущим случаям.

Так как все числа $c_1, \ldots, c_r$ различны, то различны и их двоичные представления $\langle c_{1,1}, \ldots, c_{1,m}\rangle, \ldots, \langle c_{r,1}, \ldots, c_{r,m}\rangle$. Поэтому для каждого числа i, $1 \leq i \leq mn$, найдется функция u_i из P_2, зависящая от переменных $x_1, \ldots, x_m$, что выполняется соотношение $u_i(c_{s,1}, \ldots, c_{s,m}) = \alpha_i(c_s)$ для всех чисел $s = 1, \ldots, r$. Функции из множества $\{u_i(x_1, \ldots, x_m) \,|\, i = 1, \ldots, mn\}$ зависят только от m переменных, и поэтому число различных функций этого множества не превосходит $2^{2^m} = 2^k$. Обозначим всевозможные такие функции через $v_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, v_t(x_1, \ldots, x_m)$, где $t \leq 2^k$. Также для каждого i, $1 \leq i \leq mn$, обозначим через $q(i)$ такое число, что $u_i(x_1, \ldots, x_m) = v_{q(i)}(x_1, \ldots, x_m)$.

Для каждого j, $1 \leq j \leq t$, определим булеву функцию $w_j(x_1, \ldots, x_{mn})$:

$$w_j(x_1, \ldots, x_{mn}) = v_j(f_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_{mn})).$$

Покажем, что все функции $w_1, \ldots, w_t$ содержатся в классе $\mathcal{B}$. Так как каждая из функций w_j — это одна из функций множества $\{u_i(f_1, \ldots, f_m) \,|\, i = 1, \ldots, mn\}$, то достаточно доказать, что для каждого i, $1 \leq i \leq mn$, функция $u_i(f_1, \ldots, f_m)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$.

- Если $\mathcal{B} = P_2$, то доказываемое свойство для функций $u_1, \ldots, u_{mn}$ очевидно.
- Если $\mathcal{B} = T_0$, то верны равенства $u_i\big(f_1(0, \ldots, 0), \ldots, f_m(0, \ldots, 0)\big) = u_i(0, \ldots, 0) = \alpha_i(0) = 0$. Значит $u_i(f_1, \ldots, f_m) \in T_0$.
- Случай, когда $\mathcal{B} = T_1$, рассматривается аналогично предыдущему случаю.
- Случай, когда $\mathcal{B} = T_{01}$, рассматривается аналогично предыдущим случаям.
- Если $\mathcal{B} = S$, то необходимо показать, что для любого набора $\widetilde{\gamma} \in E_2^{mn}$ верно равенство $u_i(f_1(\widetilde{\gamma}), \ldots, f_m(\widetilde{\gamma})) = \overline{u_i(f_1(\widetilde{\gamma}'), \ldots, f_m(\widetilde{\gamma}'))}$, где $\widetilde{\gamma}'$ — набор, двойственный к $\widetilde{\gamma}$. Пусть верно равенство $\widehat{F}(\widetilde{\gamma}) = \widehat{c}$, где $c \in D(F)$. Тогда, в силу двойственности компонент функции F, верно и равенство $\widehat{F}(\widetilde{\gamma}') = \widehat{c}'$, где двоичное представление $\widehat{c}'$ является двойственным к $\widehat{c}$. Поэтому $u_i(f_1(\widetilde{\gamma}), \ldots, f_m(\widetilde{\gamma})) = u_i(c_1, \ldots, c_m) = \alpha_i(c)$, а $u_i(f_1(\widetilde{\gamma}'), \ldots, f_m(\widetilde{\gamma}')) = \alpha_i(c')$. Так как наборы $\widetilde{\alpha}(c)$ и $\widetilde{\alpha}(c')$ являются двойственными, то верно равенство $\alpha_i(c) = \overline{\alpha_i(c')}$. Поэтому $u_i(f_1, \ldots, f_m) \in S$, что и требовалось показать.
- Случай, когда $\mathcal{B} = S_{01}$, рассматривается аналогично предыдущим случаям.

Как и при доказательстве лемм 3.3 и 3.4 будем рассматривать функцию G из P_k, для которой справедливо соотношение

$$\widehat{G} = \widehat{F}(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)}).$$

Компоненты функции G существенно зависят только от переменных из множества $\{y_1, \ldots, y_t\}$. Поэтому функция G тоже существенно зависит не более, чем от $t \leq 2^k$ переменных. Покажем, что функция G является искомой. Для этого докажем равенство

$$\widehat{G}\big(w_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, w_t(x_1, \ldots, x_{mn})\big) = \widehat{F}(x_1, \ldots, x_{mn}),$$

которое эквивалентно системе равенств:

$$g_j\big(w_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, w_t(x_1, \ldots, x_{mn})\big) = f_j(x_1, \ldots, x_{mn}),\ j = 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\alpha}$ из E_2^{mn}. Пусть на этом наборе значение двоичного представления функции F равно $\widehat{c} = \langle c_1, \ldots, c_m\rangle$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered} g_j\big(w_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, w_t(\widetilde{\alpha})\big) = g_j\big(v_1(f_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, f_m(\widetilde{\alpha})), \ldots, v_t(f_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, f_m(\widetilde{\alpha}))\big) = \\ = g_j\big(v_1(c_1, \ldots, c_m), \ldots, v_t(c_1, \ldots, c_m)\big) = \\ = f_j\big(v_{q(1)}(c_1, \ldots, c_m), \ldots, v_{q(mn)}(c_1, \ldots, c_m)\big) = \\ = f_j\big(u_1(c_1, \ldots, c_m), \ldots, u_{mn}(c_1, \ldots, c_m)\big) = \\ = f_j\big(\alpha_1(c), \ldots, \alpha_{mn}(c)\big) = f_j(\widetilde{\alpha}(c)) = c_j, \end{gathered}$$

что и требовалось доказать.

Значит $\widehat{F}(\widetilde{x}) = \widehat{G}\big(w_1(\widetilde{x}), \ldots, w_t(\widetilde{x})\big)$, а так как каждая из функций $w_1, \ldots, w_t$ содержится в классе $\mathcal{B} = B(R)$, то $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$. Лемма доказана. ■

3.2.5 Классы с булевым замыканием O^2

Для исследования классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^2 нам потребуется ряд определений.

Определение 3.2. *Пусть $f, f_1, \ldots, f_p$ — булевы функции, зависящие от одного и того же множества переменных. Функцию f будем называть функционально зависимой от функций $f_1, \ldots, f_p$, если существует p-местная булева функция g, такая, что $f = g(f_1, \ldots, f_p)$. В ином случае функцию f будем называть функционально независимой от функций $f_1, \ldots, f_p$. Функции, реализующие константы 0 и 1, будем считать функционально зависимыми от пустого множества функций.*

Определение 3.3. *Если для всех чисел j, $1 \leq j \leq p$, функции f_j являются функционально независимыми от функций $f_1, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, \ldots, f_p$, то множество функций $\{f_1, \ldots, f_p\}$ будем называть функционально независимым.*

Лемма 3.6. *Пусть $A = \{f_1, \ldots, f_p\}$ — функционально независимое множество булевых функций и $d(A)$ — число значений булевой вектор-функции $(f_1, \ldots, f_p)$. Тогда выполняются соотношения $\lceil \log_2 d(A) \rceil \leq p \leq d(A) - 1$.*

Доказательство. Так как $d(A)$ — число значений булевой вектор-функции $(f_1, \ldots, f_p)$, то очевидно, что верно неравенство $d(A) \leq 2^p$. Поэтому $\log_2 d(A) \leq p$, а так как p является натуральным числом, то $\lceil \log_2 d(A) \rceil \leq p$.

Доказательство соотношения $p \leq d(A) - 1$ будем вести индукцией по p.

Пусть $p = 1$. Тогда функция f_1 не является константой по определению функционально независимого множества. Поэтому $d(A) = 2$, что и требовалось.

Теперь предположим, что для любого функционально независимого множества $A' = \{f_1, \ldots, f_s\}$ булевых функций верно соотношение $s \leq d(A') - 1$, где $1 \leq s < p$ и $d(A')$ — число значений булевой вектор-функции $(f_1, \ldots, f_s)$

Покажем, что выполняется соотношение $p \leq d(A) - 1$ для функционально независимого множества $\{f_1, \ldots, f_p\}$ булевых функций. Для этого рассмотрим его подмножество $A' = \{f_1, \ldots, f_{p-1}\}$. Это функционально независимое множество функций, поэтому по предположению индукции верно соотношение $p - 1 \leq d(A') - 1$. Если для любого вектора $(a_1, \ldots, a_{p-1})$ из E_2^{p-1} на множестве наборов, на которых вектор-функция $(f_1, \ldots, f_{p-1})$ принимает значение $(a_1, \ldots, a_{p-1})$, функция f_p является константой, то функция f_p является функционально зависимой от функций $f_1, \ldots, f_{p-1}$, что неверно. Поэтому найдется вектор $(a_1, \ldots, a_{p-1})$ из E_2^{p-1}, такой, что на множестве наборов, на которых вектор-функция $(f_1, \ldots, f_{p-1})$ принимает значение $(a_1, \ldots, a_{p-1})$, функция f_p не является константой. Значит $d(A) \geq d(A') + 1$, из чего и следует необходимое соотношение. ■

Определение 3.4. *Пусть $F \in P_k$ и $\widehat{F} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Множество компонент $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}\}$ будем называть базой функции F, если данное множество является функционально независимым, а остальные компоненты функции F являются функционально зависимыми от функций $f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}$.*

Лемма 3.7. *Пусть $F \in P_k$, $\widehat{F} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, множество $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}\}$ является базой функции F и $|D(F)| = r$. Тогда выполняются соотношения $\lceil \log_2 r \rceil \leq p \leq r - 1$.*

Доказательство. Так как значение функции F однозначным образом определяется по значениям функций из ее базы, то доказываемые соотношения вытекают из леммы 3.6. ■

Перейдем теперь к доказательству леммы, на основе которой в дальнейшем будет доказана конечность семейства β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^2.

Лемма 3.8. *Пусть $F \in P_k$, $b(F) \subset O^2$, у функции F есть база, состоящая не более, чем из двух функций, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = O^2$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более, чем от 16 переменных, и такая, что $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$.*

Доказательство. Двоичное представление функции F обозначим через $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, а переменные, от которых зависят компоненты функции F — через $x_1, \ldots, x_{mn}$ (здесь n — число переменных функции F). Рассмотрим только случай, когда база функции F состоит из двух функций. Случаи, когда база функции F состоит из одной функции или является пустой, рассматриваются аналогично.

Без ограничения общности будем считать, что функции f_1 и f_2 образуют базу функции F. Поскольку все компоненты функции F принадлежат классу O^2, то на наборе $\widetilde{\alpha}_{11} = (1, \ldots, 1)$ из E_2^{mn}, значения функций f_1 и f_2 равны единице.

В силу утверждения леммы 3.7 верны соотношения $\lceil \log_2 |D(F)| \rceil \leq 2 \leq |D(F)| - 1$. Поэтому $3 \leq |D(F)| \leq 4$. Выберем для функции F специальные наборы $\widetilde{\alpha}_{00}$, $\widetilde{\alpha}_{01}$, $\widetilde{\alpha}_{10}$ из E_2^{mn} сначала в случае, когда выполняется равенство $|D(F)| = 4$, а затем и при $|D(F)| = 3$.

1. Пусть $|D(F)| = 4$. Так как функции f_1 и f_2 образуют базу функции F, то вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ принимает все 4 значения. Поэтому найдутся наборы $\widetilde{\alpha}_{00}$, $\widetilde{\alpha}_{01}$, $\widetilde{\alpha}_{10}$, такие, что:

	x_1	$\ldots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \ldots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \ldots, x_{mn})$
$\widetilde{\alpha}_{00}$	$\alpha_{00,1}$	$\ldots$	$\alpha_{00,mn}$	0	0
$\widetilde{\alpha}_{01}$	$\alpha_{01,1}$	$\ldots$	$\alpha_{01,mn}$	0	1
$\widetilde{\alpha}_{10}$	$\alpha_{10,1}$	$\ldots$	$\alpha_{10,mn}$	1	0
$\widetilde{\alpha}_{11}$	1	$\ldots$	1	1	1

   Если $f_1 \& f_2 \in O^2$, то выберем для дальнейшего доказательства найденные нами наборы $\widetilde{\alpha}_{01}$, $\widetilde{\alpha}_{10}$. Если $f_1 \& f_2 \notin O^2$, то существуют наборы $\widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_2$ из E_2^{mn}, такие, что у них нет общих нулевых компонент, но при этом $f_1(\widetilde{\gamma}_1) \& f_2(\widetilde{\gamma}_1) = f_1(\widetilde{\gamma}_2) \& f_2(\widetilde{\gamma}_2) = 0$.

   Без ограничения общности будем считать, что $f_1(\widetilde{\gamma}_1) = 0$. Если $f_1(\widetilde{\gamma}_2) = 0$, то для функции f_1 найдены два набора, на которых функция равна 0, но которые не содержат общих нулевых компонент, а следовательно, $f_1 \notin O^2$, что неверно по условиям леммы. Поэтому $f_1(\widetilde{\gamma}_2) = 1$ и $f_2(\widetilde{\gamma}_2) = 0$. Для функции f_2 аналогичным образом доказывается равенство $f_2(\widetilde{\gamma}_1) = 1$.

   Так как $f_1(\widetilde{\gamma}_1) = f_2(\widetilde{\gamma}_2) = 0$ и $f_1(\widetilde{\gamma}_2) = f_2(\widetilde{\gamma}_1) = 1$, то в качестве рассмотренных выше наборов $\widetilde{\alpha}_{01}$ и $\widetilde{\alpha}_{10}$ выберем наборы $\widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_2$, у которых нет общих нулевых компонент.

2. Пусть $|D(F)| = 3$. Выберем $\widetilde{\alpha}_{00}$, $\widetilde{\alpha}_{01}$, $\widetilde{\alpha}_{10}$.

Так как функции f_1 и f_2 образуют базу, то значение функции F однозначным образом определяется по значению вектор-функции $\langle f_1, f_2\rangle$. Значит данная вектор-функция принимает ровно 3 значения. Рассмотрим три случая.

(a) Предположим сначала, что ни на каком наборе $\widetilde{\alpha}$ из E_2^{mn} одновременно не выполняются равенства $f_1(\widetilde{\alpha}) = 0$ и $f_2(\widetilde{\alpha}) = 0$. Тогда существуют наборы $\widetilde{\alpha}_{01}$, $\widetilde{\alpha}_{10}$, такие, что:

	x_1	$\ldots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \ldots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \ldots, x_{mn})$
—	—	$\ldots$	—	0	0
$\widetilde{\alpha}_{01}$	$\alpha_{01,1}$	$\ldots$	$\alpha_{01,mn}$	0	1
$\widetilde{\alpha}_{10}$	$\alpha_{10,1}$	$\ldots$	$\alpha_{10,mn}$	1	0
$\widetilde{\alpha}_{11}$	1	$\ldots$	1	1	1

Если $f_1 \& f_2 \in O^2$, то выберем для дальнейшего доказательства найденные нами наборы $\widetilde{\alpha}_{01}$, $\widetilde{\alpha}_{10}$. Если $f_1 \& f_2 \notin O^2$, то в качестве наборов $\widetilde{\alpha}_{01}$, $\widetilde{\alpha}_{10}$ будем использовать наборы $\widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_2$, найденные аналогично случаю, когда выполнялось равенство $|D(F)| = 4$.

В качестве набора $\widetilde{\alpha}_{00}$ из E_2^{mn} будем рассматривать набор $(1, \ldots, 1)$ (он равен набору $\widetilde{\alpha}_{11}$, но, как будет видно из дальнейшего доказательства, это допустимо).

(b) Пусть ни на каком наборе $\widetilde{\alpha}$ из E_2^{mn} одновременно не выполняются равенства $f_1(\widetilde{\alpha}) = 0$ и $f_2(\widetilde{\alpha}) = 1$. Тогда существуют наборы $\widetilde{\alpha}_{00}$, $\widetilde{\alpha}_{10}$, такие, что:

	x_1	$\ldots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \ldots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \ldots, x_{mn})$
$\widetilde{\alpha}_{00}$	$\alpha_{00,1}$	$\ldots$	$\alpha_{00,mn}$	0	0
—	—	$\ldots$	—	0	1
$\widetilde{\alpha}_{10}$	$\alpha_{10,1}$	$\ldots$	$\alpha_{10,mn}$	1	0
$\widetilde{\alpha}_{11}$	1	$\ldots$	1	1	1

В этом случае выберем найденные наборы $\widetilde{\alpha}_{00}$, $\widetilde{\alpha}_{10}$, а в качестве набора $\widetilde{\alpha}_{01}$ выберем набор $(1, \ldots, 1)$.

(c) Случай, когда ни на каком наборе $\widetilde{\alpha}$ из E_2^{mn} одновременно не выполняются равенства $f_1(\widetilde{\alpha}) = 1$ и $f_2(\widetilde{\alpha}) = 0$, рассматривается аналогично предыдущему.

Далее, для каждого числа $i,\ 1 \le i \le mn$, определим булеву функцию $u_i(x_1, x_2)$:

$$u_i(a, b) = \alpha_{ab,i}.$$

Так как все функции из множества $\{u_i(x_1, x_2) \,|\, i = 1, \ldots, mn\}$ зависят только от двух переменных, то число различных функций этого множества не превосходит 16. Обозначим всевозможные такие функции через $v_1(x_1, x_2), \ldots, v_t(x_1, x_2)$, где $t \leq 16$, а для каждого $i,\ 1 \leq i \leq mn$, через $q(i)$ обозначим число, определяемое из условия $u_i(x_1, x_2) = v_{q(i)}(x_1, x_2)$.

Для каждого $j,\ 1 \leq j \leq t$, положим

$$w_j(x_1, \ldots, x_{mn}) = v_j(f_1(x_1, \ldots, x_{mn}),\ f_2(x_1, \ldots, x_{mn})).$$

Покажем, что все функции $w_1, \ldots, w_t$ содержатся в классе O^2. Поскольку каждая из функций w_j — это одна из функций множества $\{u_i(f_1, f_2) \,|\, i = 1, \ldots, mn\}$, то достаточно доказать, что для каждого $i,\ 1 \leq i \leq mn$, функция $u_i(f_1, f_2)$ принадлежит классу O^2. Отдельно рассмотрим разные случаи.

1. Пусть сначала $|D(F)| = 4$.

   Если $f_1 \& f_2 \in O^2$, то, по построению функции u_i, выполняется неравенство $u_i(x_1, x_2) \geq x_1 \& x_2$. Поэтому $u_i(f_1, f_2) \geq f_1 \& f_2$, а значит, в силу свойств функций из класса O^2, функция $u_i(f_1, f_2)$ тоже принадлежит классу O^2.

   Если $f_1 \& f_2 \notin O^2$, то у наборов $\widetilde{\alpha}_{01}$ и $\widetilde{\alpha}_{10}$ нет общих нулевых компонент по построению. Поэтому для функции u_i выполняется хотя бы одно из соотношений $u_i(0, 1) = 1$ и $u_i(1, 0) = 1$. Но тогда $u_i \geq x_1$ или $u_i \geq x_2$, а значит, $u_i(f_1, f_2)$ мажорирует либо функцию f_1, либо f_2, которые содержатся в классе O^2. Поэтому $u_i(f_1, f_2) \in O^2$.

2. Пусть теперь $|D(F)| = 3$. Снова рассмотрим несколько случаев.

   (a) Вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ не принимает значения $\langle 0, 0 \rangle$. Данный случай рассматривается аналогично случаю $|D(F)| = 4$.

   (b) Вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ не принимает значения $\langle 0, 1 \rangle$. Тогда верно равенство $\widetilde{\alpha}_{01} = \widetilde{\alpha}_{11} = (1, \ldots, 1)$, и имеет место соотношение $u_i(x_1, x_2) \geq x_2$. Поэтому $u_i(f_1, f_2) \geq f_2$ и $u_i(f_1, f_2) \in O^2$.

   (c) Случай, когда вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ не принимает значения $\langle 1, 0 \rangle$, рассматривается аналогично предыдущему.

Как и при доказательстве лемм 3.3, 3.4 и 3.5 рассмотрим функцию G из P_k, имеющую следующее двоичное представление:

$$\widehat{G} = \widehat{F}(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)}).$$

По построению компоненты функции G существенно зависят от переменных из множества $\{y_1, \ldots, y_t\}$, поэтому функция G тоже существенно зависит не более чем от t переменных, где $t \leq 16$. Также отметим, что поскольку у функции F базой является множество $\{f_1, f_2\}$, то у функции G найдется база, которая содержится в множестве $\{g_1, g_2\}$.

Покажем, что функция G является искомой. Для этого докажем равенство

$$\widehat{G}\big(w_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, w_t(x_1, \ldots, x_{mn})\big) = \widehat{F}(x_1, \ldots, x_{mn}).$$

Так как у функции F базой является множество $\{f_1, f_2\}$, а у функции G найдется база в множестве $\{g_1, g_2\}$, то достаточно доказать равенства

$$g_j\big(w_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, w_t(x_1, \ldots, x_{mn})\big) = f_j(x_1, \ldots, x_{mn}),\ j = 1, 2.$$

Для этого рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\alpha}$ из E_2^{mn}. Пусть на этом наборе значение функции f_1 равно a, а значение функции f_2 равно b. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered} g_1\big(w_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, w_t(\widetilde{\alpha})\big) = g_1\big(v_1(f_1(\widetilde{\alpha}), f_2(\widetilde{\alpha})), \ldots, v_t(f_1(\widetilde{\alpha}), f_2(\widetilde{\alpha}))\big) = \\ = g_1\big(v_1(a, b), \ldots, v_t(a, b)\big) = f_1\big(v_{q(1)}(a, b), \ldots, v_{q(mn)}(a, b)\big) = \\ = f_1\big(u_1(a, b), \ldots, u_{mn}(a, b)\big) = f_1(\alpha_{ab,1}, \ldots, \alpha_{ab,mn}) = \\ = f_1(\widetilde{\alpha}_{ab}) = a, \end{gathered}$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается и соотношение для функции f_2.

Значит $\widehat{F}(\widetilde{x}) = \widehat{G}\big(w_1(\widetilde{x}), \ldots, w_s(\widetilde{x})\big)$, а так как каждая из функций $w_1, \ldots, w_t$ содержится в классе O^2, который равен $B(R)$, то $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$. Лемма доказана. ■

3.2.6 Классы с булевым замыканием в M или T_{01}

Лемма 3.9. *Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций, такой, что $\mathcal{B} \subseteq M$ или $\mathcal{B} \subseteq T_{01}$. Пусть также $F \in P_{k|3}$, $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более, чем от одной переменной, и такая, что $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$.*

Доказательство. Обозначим через n число переменных функции F, а через $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ — ее двоичное представление. Если функция F является константой, то в качестве функции G можно взять функцию, реализующую ту же константу, что и функция F, и зависящую от одной переменной.

Пусть теперь функция F принимает два или три значения. Тогда среди ее компонент содержатся не только константы. Так как $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, то класс $\mathcal{B}$ булевых функций содержит селекторные функции (см., например, [78]).

Рассмотрим случай, когда функция F принимает три значения (более простой случай, когда функция F принимает два значения, рассматривается аналогично). По лемме 3.7 у нее найдется база, состоящая ровно из двух функций. Без ограничения общности будем считать, что базой является множество $\{f_1, f_2\}$. Функции f_1 и f_2 не являются функционально зависимыми друг от друга. Поэтому они не равны и не являются константами. Если класс $\mathcal{B}$ содержится в классе монотонных функций, то функции f_1 и f_2 являются монотонными, а значит, верны равенства $f_1(0, \ldots, 0) = f_2(0, \ldots, 0) = 0$ и $f_1(1, \ldots, 1) = f_2(1, \ldots, 1) = 1$. Если класс $\mathcal{B}$ содержится в классе T_{01}, то выполняются аналогичные равенства.

Так как функции f_1 и f_2 не равны друг другу, то найдется набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn})$ из E_2^{mn}, на котором значения данных функций различны. Без ограничения общности будем считать, что $f_1(\widetilde{\alpha}) = 1$, а $f_2(\widetilde{\alpha}) = 0$. Поскольку функция F принимает ровно 3 значения, а значения ее компонент $f_3, \ldots, f_m$ однозначным образом определяются по значениям функций f_1 и f_2, то двоичное представление функции F принимает следующие значения:

$$\big\langle 0, 0, f_3(0, \ldots, 0), \ldots, f_m(0, \ldots, 0)\big\rangle,$$
$$\big\langle 1, 0, f_3(\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn}), \ldots, f_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn})\big\rangle,$$
$$\big\langle 1, 1, f_3(1, \ldots, 1), \ldots, f_m(1, \ldots, 1)\big\rangle.$$

Для каждого числа i, $1 \leq i \leq mn$, определим булеву функцию $h_i(x_1, x_2)$ следующим образом: если $\alpha_i = 1$, то $h_i = x_1$, а если $\alpha_i = 0$, то $h_i = x_2$. Рассмотрим вектор-функцию $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle(h_1, \ldots, h_{mn})$. Она является двоичным представлением некоторой функции G из P_k. Так как $m \geq 2$, а функции $h_1, \ldots, h_{mn}$ зависят от булевых переменных x_1 и x_2, то функция G зависит от одной переменной, а поскольку все функции $h_1, \ldots, h_{mn}$ являются селекторными, то они содержатся в множестве $B(\{F\})$, а значит, функция G принадлежит множеству $[\{F\}]_\beta$. Покажем, что она искомая.

Обозначим через $\langle g_1, \ldots, g_m\rangle$ двоичное представление функции G. Так как функции $f_3, \ldots, f_m$ являются функционально зависимыми от функций f_1 и f_2, то по построению функции G ее компоненты $g_3, \ldots, g_m$ являются функционально зависимыми от функций g_1 и g_2. Причем данные функциональные зависимости могут быть заданы теми же функциями.

Докажем соотношение $\widehat{F} = \langle g_1, \ldots, g_m\rangle(f_1, \ldots, f_m)$. Так как функции $f_3, \ldots, f_m$ являются функционально зависимыми от функций f_1 и f_2, а функции $g_3, \ldots, g_m$ от функций g_1 и g_2, то достаточно доказать справедливость равенств $f_1 = g_1(f_1, \ldots, f_m)$ и $f_2 = g_2(f_1, \ldots, f_m)$. А так как компоненты функции G существенно зависят только от переменных x_1 и x_2, то достаточно показать, что $f_1 = g_1'(f_1, f_2)$ и $f_2 = g_2'(f_1, f_2)$, где функции g_1', g_2' получены удале-

нием несущественных переменных $x_3, \ldots, x_m$ из функций g_1 и g_2 соответственно. Для этого рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\gamma}$ из E_2^{mn}. Имеют место три случая.

- Если $f_1(\widetilde{\gamma}) = f_2(\widetilde{\gamma}) = 0$, то $g'_j(0,0) = f_j\big(h_1(0,0), \ldots, h_{mn}(0,0)\big) = f_j(0, \ldots, 0) = 0$, $j = 1, 2$, что и требовалось.
- Случай, когда $f_1(\widetilde{\gamma}) = f_2(\widetilde{\gamma}) = 1$, рассматривается аналогично предыдущему.
- Если $f_1(\widetilde{\gamma}) = 1$, а $f_2(\widetilde{\gamma}) = 0$, то $g_1(1,0) = f_1\big(h_1(1,0), \ldots, h_{mn}(1,0)\big) = f_1(\widetilde{\alpha}) = 1$, а $g_2(1,0) = f_2(\widetilde{\alpha}) = 0$, что и было необходимо.

Таким образом, верно равенство $\widehat{F} = \langle g_1, \ldots, g_m\rangle(f_1, \ldots, f_m)$, а поскольку каждая из функций $f_1, \ldots, f_m$ содержится в классе $\mathcal{B} = B(R)$, то $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$, что и требовалось доказать. ■

3.2.7 Множества $C(k,k)$ и $C(k,3)$

В данном подразделе будут найдены некоторые классы булевых функций из множеств $C(k,k)$ или $C(k,3)$ при $k = 2^m$, $m \geq 2$. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 3.10. *Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций. Тогда существует такое число $r = r(\mathcal{B})$, что в любом β-замкнутом классе $\mathcal{A}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ найдется множество R функций, каждая из функций которого зависит не более, чем от r переменных, и такое, что справедливо равенство $B(R) = \mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — β-замкнутый класс функций из P_k, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Если все функции из класса $\mathcal{A}$ являются константами, то утверждение леммы очевидно, а в качестве r можно взять число 1.

Пусть теперь среди функций класса $\mathcal{A}$ имеется хотя бы одна функция, принимающая не менее двух значений. Обозначим ее через F. Тогда по лемме 2.3 в классе $[\{F\}]_\beta$ существует функция H, зависящая от одной переменной, и множество компонент которой содержит селекторную функцию. Так как $F \in \mathcal{A}$ и класс $\mathcal{A}$ является β-замкнутым, то $H \in \mathcal{A}$.

Известно, что у класса $\mathcal{B}$ существует конечный базис. Пусть он состоит из функций $g_1, \ldots, g_s$. Обозначим переменные, от которых зависят эти функции, через $x_1^1, \ldots, x_1^r$, где r является максимальным числом переменных у данных функций. Для каждого j, $1 \leq j \leq s$, определим функцию G_j из P_k через ее двоичное представление: $\widehat{G_j} = \widehat{H}(\langle g_j, \ldots, g_j\rangle)$. Тогда функция G_j зависит не более, чем от r переменных, а так как $\{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq \mathcal{B} = B(\mathcal{A})$ и класс $\mathcal{A}$ является β-замкнутым, то $G_j \in \mathcal{A}$.

Поскольку множество компонент функции H содержит селекторную функцию, то $g_j \in b(G_j)$, $j = 1, \ldots, s$. Поэтому верно равенство $B(\{G_1, \ldots, G_s\}) = \mathcal{B}$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 3.2. *Пусть* $k = 2^m$, $m \geq 2$. *Тогда каждый из классов* $P_2, T_0, T_1, T_{01}, S, S_{01}, L, L_0, L_1, SL, L_{01}, D, D_0, D_1, D_{01}, K, K_0, K_1, K_{01}, U, SU, MU, U_0, U_1, U_{01}, C, C_0, C_1$ *булевых функций содержится в множестве* $C(k, k)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов булевых функций из формулировки теоремы. Рассмотрим произвольный β-замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из P_k, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. В силу утверждения леммы 3.10 в классе $\mathcal{A}$ существует конечное множество R функций, такое, что $B(R) = \mathcal{B}$ и каждая из функций данного множества зависит не более, чем от r переменных, где $r = r(\mathcal{B})$.

В силу утверждения леммы 3.2 (если $\mathcal{B}$ — один из классов $U, SU, MU, U_0, U_1, U_{01}, C, C_0, C_1$), леммы 3.3 (если $\mathcal{B}$ — один из классов D, D_0, D_1, D_{01} или двойственных им K, K_1, K_0, K_{01}), леммы 3.4 (если $\mathcal{B}$ — один из классов L, L_0, L_1, SL, L_{01}), леммы 3.5 (если $\mathcal{B}$ — один из классов $P_2, T_0, T_1, T_{01}, S, S_{01}$) для каждой функции F из множества $\mathcal{A}$ существует функция G_F из $\mathcal{A}$, которая зависит не более, чем от $\max(m, k, 2k, 2^k) = 2^k$ переменных, и такая, что $F \in [\{G_F\} \bigcup R]_\beta$. Поэтому $\mathcal{A} \subseteq [R \bigcup \{G_F \mid F \in \mathcal{A}\}]_\beta$. Но каждая из функций множеств R и $\{G_F \mid F \in \mathcal{A}\}$ содержится в $\mathcal{A}$. Поэтому справедливо равенство $\mathcal{A} = [R \bigcup \{G_F \mid F \in \mathcal{A}\}]_\beta$.

Число функций из $\mathcal{A}$, зависящих не более чем от 2^k переменных, конечно. Значит конечно и множество $\{G_F \mid F \in \mathcal{A}\}$. Следовательно у класса $\mathcal{A}$ имеется конечный базис, все функции которого зависят не более, чем от $\max(r, 2^k)$ переменных.

Так как r и k являются константами, то число функций из P_k, зависящих не более, чем от $\max(r, 2^k)$ фиксированных переменных, является конечным. Поэтому конечно и число их подмножеств. Значит для каждого из рассматриваемых классов $\mathcal{B}$ число различных β-замкнутых классов функций из P_k с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным, и согласно определению 3.1, верно включение $\mathcal{B} \in C(k, k)$. ■

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathcal{B}$ *— замкнутый класс булевых функций, который равен классу* O^2, *классу* I^2 *или содержится в классе* M *или в классе* T_{01}. *Тогда* $\mathcal{B} \in C(k, 3)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов булевых функций из формулировки теоремы. Рассмотрим произвольный β-замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|3}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. В силу утверждения леммы 3.10 в классе $\mathcal{A}$ существует конечное множество R функций,

такое, что $B(R) = \mathcal{B}$ и каждая из функций данного множества зависит не более, чем от r переменных, где $r = r(\mathcal{B})$.

Пусть сначала $\mathcal{B} = O^2$. Так как $\mathcal{A} \subseteq P_{k|3}$, то в силу утверждения леммы 3.7 у каждой функции F из $\mathcal{B}$ найдется база, состоящая не более, чем из двух функций. Значит в силу утверждения леммы 3.8 для каждой функции F существует функция G_F из $\mathcal{A}$, которая зависит не более, чем от 16 переменных переменных, и такая, что $F \in [\{G_F\} \bigcup R]_\beta$. Аналогичное утверждение можно получить и для классов $\mathcal{B}$ булевых функций, которые содержатся в классе M или T_{01}, в силу леммы 3.9. Если же $\mathcal{B} = I^2$ то данное утверждение следует из двойственности классов I^2 и O^2.

Как и при доказательстве теоремы 3.2 легко показать, что у класса $\mathcal{A}$ имеется конечный базис, зависящий не более, чем $\max(r, 16)$ переменных, а в качестве следствия получить, что $\mathcal{B} \in C(k, 3)$. ■

В теоремах 3.2 и 3.3 найдены классы булевых функций, которые содержатся в множествах $C(k, k)$ и $C(k, 3)$. Так как $C(k, k) \subseteq C(k, 3)$, то классами булевых функций, для которых еще не исследованы мощности семейств β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с соответствующим булевым замыканием, являются классы I^μ и O^μ при $\mu \geq 3$. Далее будет показано, что все данные классы принадлежат множеству $Q(k, 3)$.

3.3 Семейство классов с булевым замыканием $O^\mu,\ \mu \geq 3$

Для класса O^μ булевых функций, где $\mu \geq 3$, примером базиса является множество функций $\{\overline{x_1} \vee x_2, \bigvee\limits_{1 \leq i < j \leq \mu+1} x_i \& x_j\}$ (см., например, [78]). Для каждого $\mu \geq 3$ определим функции $S(x^1, x^2)$ и $S^\mu(x^1, \ldots, x^{\mu+1})$ из P_k. Для каждого $t,\ 1 \leq t \leq m$, положим:

$$b_t(S) = \overline{x_1^1} \vee x_1^2,$$
$$b_t(S^\mu) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq \mu+1} x_1^i \& x_1^j.$$

Поскольку все компоненты данных функций равны между собой, то выполняется соотношение $D(S) = D(S^\mu) = \{0, k-1\}$. Также верно равенство $B(\{S, S^\mu\}) = O^\mu$.

Для каждой пары чисел n и a, удовлетворяющих неравенствам $n \geq a \geq 1$, определим n-местную булеву функцию ω_n^a следующим образом:

$$\omega_n^a(\widetilde{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{если среди компонент } \widetilde{\alpha} \text{ меньше } a \text{ единиц;} \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для каждого числа n, $n \geq 3$, определим функцию W_n из P_k, зависящую от переменных $x^1, \ldots, x^{2n+2}$, через ее компоненты:

$$b_1(W_n) = \omega^3_{2n+2}(x^1_1, \ldots, x^{2n+1}_1, x^{2n+2}_1),$$
$$b_i(W_n) = x^{2n+2}_1 \vee \omega^{n+1}_{2n+1}(x^1_1, \ldots, x^{2n+1}_1) \vee \overline{b_1(W_n)},\ i = 2, \ldots, m.$$

Будем обозначать $b_1(W_n)$ через u_n, а $b_i(W_n)$, $i = 2, \ldots, m$ — через v_n. Поскольку компоненты функции W_n существенно зависят только от булевых переменных $x^1_1, \ldots, x^{2n+1}_1$ и x^{2n+2}_1, то будем обозначать эти переменные через $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ и y соответственно. Тогда компоненты функции W_n принимают вид

$$u_n = \omega^3_{2n+2}(x_1, \ldots, x_{2n+1}, y),$$
$$v_n = y \vee \omega^{n+1}_{2n+1}(x_1, \ldots, x_{2n+1}) \vee \overline{u_n}.$$

Установим некоторые свойства функций W_n для каждого $n \geq 3$.

1. Справедливо включение $u_n \in MO^n_0$.

   Функция u_n является монотонной и на нулевом наборе принимает значение 0. Поэтому $u_n \in M_0$. Покажем, что $u_n \in O^n$. Для этого рассмотрим произвольные n наборов из $E_2^{m(2n+2)}$, на которых функция u_n равна 0. Каждый из таких наборов содержит не более 2 единиц среди компонент под номерами $1, m+1, \ldots, 2mn+1, m(2n+1)+1$ (данным компонентам соответствуют переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}, y$ соответственно), а значит общее число единиц среди рассматриваемых компонент не превышает $2n$. Поэтому в этих наборах как минимум две из рассматриваемых компонент будут равны 0. Значит $u_n \in MO^n_0$.

   Также несложно показать, что $u_n \notin MO^{n+1}_0$.

2. Справедливо включение $v_n \in O^\infty$.

   Функция v_n мажорирует переменную y, а следовательно, принадлежит классу O^∞.

3. Функция W_n принимает три значения.

   Так как $b_2(W_n) = \ldots = b_m(W_n)$, то двоичное представление функции W_n может принимать только значения из множества

   $$\big\{\langle 0, 0, \ldots, 0\rangle,\ \langle 0, 1, \ldots, 1\rangle,\ \langle 1, 0, \ldots, 0\rangle,\ \langle 1, 1, \ldots, 1\rangle\big\}.$$

   Поскольку верно равенство $u_n \vee v_n = 1$, то $\widehat{W_n}$ не может принимать значения $\langle 0, 0, \ldots, 0\rangle$. Покажем, что $\widehat{W_n}$ принимает остальные три значения.

- Пусть $\widetilde{\alpha}$ — нулевой набор из $E_2^{m(2n+2)}$. Тогда $u_n(\widetilde{\alpha}) = 0$, а $v_n(\widetilde{\alpha}) = 1$.
- Пусть $\widetilde{\alpha}$ — единичный набор из $E_2^{m(2n+2)}$. Тогда $u_n(\widetilde{\alpha}) = 1$, а $v_n(\widetilde{\alpha}) = 1$.
- Пусть $\widetilde{\alpha}$ — набор из $E_2^{m(2n+2)}$, содержащий ровно три единицы среди его компонент $\alpha_1, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{2mn+1}$, а все остальные компоненты которого равны 0. Тогда $u_n(\widetilde{\alpha}) = 1$. Так как компонента $\alpha_{m(2n+1)+1}$, соответствующая переменной y, равна 0, и так как $n \geq 3$, то $v_n(\widetilde{\alpha}) = \omega_{2n+1}^{n+1}(\alpha_1, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{2mn+1}) = 0$.

Лемма 3.11. *Для любого $n \geq 3$ верно соотношение*

$$W_n \notin \Big[\{S\} \bigcup \{S^\mu \,|\, \mu \geq 3\} \bigcup \{W_i \,\big|\, i \geq 3,\ i \neq n\}\Big]_\beta.$$

Доказательство. Множество $\{S\} \bigcup \{S^\mu \,|\, \mu \geq 3\} \bigcup \{W_i \,\big|\, i \geq 3,\ i \neq n\}$ обозначим через $\mathcal{A}$. По свойствам функций S и $S^\mu,\ \mu \geq 3$, и W_i, $i \geq 3$, имеет место соотношение $B(\mathcal{A}) = O^3$.

Предположим, что $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$. Тогда найдутся функция H из множества $\mathcal{A}$ и функции $q_1, \ldots, q_{ml}$ из множества $B(\mathcal{A})$ (здесь l — число переменных функции H), такие, что выполняется следующее равенство:

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}\big(\langle q_1, \ldots, q_m\rangle, \ldots, \langle q_{m(l-1)+1}, \ldots, g_{ml}\rangle\big). \tag{3.5}$$

Так как $|D(W_n)| = 3$, то функция H должна принимать как минимум 3 значения. Поэтому $H \neq S$ и $H \neq S^\mu$ для всех $\mu \geq 3$. Значит H равна W_p для некоторого числа p, $p \geq 3,\ p \neq n$, а следовательно $l = 2p + 2$.

Для каждого i, $1 \leq i \leq 2p + 1$, обозначим булеву функцию $q_{m(i-1)+1}$, через g_i, а функцию $q_{m(2p+1)+1}$ — через h. Каждая из данных функций принадлежит классу O^3 и без ограничения общности можно считать, что переменными данных функций являются только существенные переменные для компонент W_n (если есть несущественные, то их можно заменить на произвольную существенную переменную, и при этом нужное равенство сохранится). Поэтому функции $g_1, \ldots, g_{2p+1}, h$ зависят только от переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_{2n+1}, y\}$. В новых обозначениях равенство (3.5) можно записать следующим образом:

$$u_n = \omega_{2p+2}^3(g_1, \ldots, g_{2p+1}, h); \tag{3.6}$$

$$v_n = h \vee \omega_{2p+1}^{p+1}(g_1, \ldots, g_{2p+1}) \vee \overline{\omega_{2p+2}^3(g_1, \ldots, g_{2p+1}, h)}. \tag{3.7}$$

Покажем сначала, что функция h мажорирует функцию $x_i \,\&\, y$ для любого $i = 1, \ldots, 2n+1$. Для этого рассмотрим наборы $\widetilde{\gamma}_{2n+1,1}$, $\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}$ и $\widetilde{\gamma}_{2n+1}$ из E_2^{2n+2}, имеющие вид:

	1	…	n	$n+1$	…	$2n$	$2n+1$	$2n+2$
$\widetilde{\gamma}_{2n+1,1}$	1	…	1	0	…	0	0	0
$\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}$	0	…	0	1	…	1	0	0
$\widetilde{\gamma}_{2n+1}$	0	…	0	0	…	0	1	1

На наборах $\widetilde{\gamma}_{2n+1,1}$, $\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}$ функция v_n равна 0, так как компонента γ_{2n+2}, соответствующая переменной y, равна 0, а среди остальных компонент ровно n единиц. Поскольку $v_n \geq h$, то $h(\widetilde{\gamma}_{2n+1,1}) = h(\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}) = 0$. Если функция h равна 0 на каком-нибудь наборе $\widetilde{\gamma}'$, большем или равном $\widetilde{\gamma}_{2n+1}$, то у наборов $\widetilde{\gamma}_{2n+1,1}$, $\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}$, $\widetilde{\gamma}'$ не будет общих нулевых компонент, а следовательно $h \notin O^3$, что неверно. Поэтому $h \geq x_{2n+1} \,\&\, y$. Аналогичным образом можно установить, что функция h мажорирует функцию $x_i \,\&\, y$ для любого $i = 1, \ldots, 2n$.

Покажем теперь, что для каждого числа i, $1 \leq i \leq 2n+1$, найдется число j_i, $1 \leq j_i \leq 2p+1$, такое, что $g_{j_i} \geq x_i \,\&\, y$. Для этого снова рассмотрим наборы $\widetilde{\gamma}_{2n+1,1}$, $\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}$ и $\widetilde{\gamma}_{2n+1}$. На наборах $\widetilde{\gamma}_{2n+1,1}$ и $\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}$ функция v_n равна 0, а значит среди значений $g_1(\widetilde{\gamma}_{2n+1,c}), \ldots, g_{2p+1}(\widetilde{\gamma}_{2n+1,c})$ должно быть не более p единиц, $c = 1, 2$. Так как число функций $g_1, \ldots, g_{2p+1}$ равно $2p+1$, то среди них найдется функция, равная 0 на наборах $\widetilde{\gamma}_{2n+1,1}$ и $\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}$. Допустим это функция $g_{j_{2n+1}}$, где $1 \leq j_{2n+1} \leq 2p+1$. Поскольку $g_{j_{2n+1}} \in O^3$, то данная функция равна 1 на любом наборе, большем или равном набору $\widetilde{\gamma}_{2n+1}$. Значит $g_{j_{2n+1}} \geq x_{2n+1} \,\&\, y$. Аналогичные утверждения можно получить и для $i = 1, \ldots, 2n$.

Предположим, что среди функций $g_1, \ldots, g_{2p+1}$ найдутся как минимум две функции, равные 1 на наборе $\widetilde{\gamma}_{2n+1}$. На данном наборе функция h равна 1, а значит $\omega^3_{2p+2}\big(g_1(\widetilde{\gamma}_{2n+1}), \ldots, g_{2p+1}(\widetilde{\gamma}_{2n+1}), h(\widetilde{\gamma}_{2n+1})\big) = 1$. Но $u_n(\widetilde{\gamma}_{2n+1}) = 0$, а следовательно $u_n \neq \omega^3_{2p+2}(g_1, \ldots, g_{2p+1}, h)$. Пришли к противоречию. Поэтому среди функций $g_1, \ldots, g_{2p+1}$ не может существовать двух функций, мажорирующих функцию $x_{2n+1} \,\&\, y$. Таким образом для каждого числа i, $1 \leq i \leq 2n+1$, найдется ровно одно число j_i, $1 \leq j_i \leq 2p+1$, такое, что выполняется неравенство $g_{j_i} \geq x_i \,\&\, y$.

Далее предположим, что среди функций $g_1, \ldots, g_{2p+1}$ найдется функция, которая не мажорирует функцию $x_i \,\&\, y$ для всех $i = 1, \ldots, 2n+1$. Обозначим данную функцию через g. Покажем, что в этом случае не выполняется как минимум одно из равенств (3.6) или (3.7).

Обозначим через $M(n)$ семейство всех подмножеств множества $\{1, \ldots, 2n+1\}$ мощности n. Каждому множеству $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ из $M(n)$ сопоставим набор из E_2^{2n+2}, у которого компоненты с номерами $a_1, \ldots, a_n$ равны 1, а остальные компоненты равны 0. Такой набор будем обозначать через $\widetilde{A}$. Отметим, что у данного набора компонента с номером $2n+2$, соответствующая переменной y, равна 0.

Рассмотрим $A,\ B \in M(n)$. Пусть сначала $A \bigcap B = \varnothing$. Через r обозначим число из множества $\{1, \ldots, 2n+1\}$, которое не входит в $A \bigcup B$. Рассмотрим наборы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, а также набор $\widetilde{\gamma}_r$, у которого только компоненты с номерами r и $2n+2$ равны 1:

	a_1	$\ldots$	a_n	b_1	$\ldots$	b_n	r	$2n+2$
$\widetilde{A}$	1	$\ldots$	1	0	$\ldots$	0	0	0
$\widetilde{B}$	0	$\ldots$	0	1	$\ldots$	1	0	0
$\widetilde{\gamma}_r$	0	$\ldots$	0	0	$\ldots$	0	1	1

Если $g(\widetilde{A}) = g(\widetilde{B}) = 0$, то справедливо соотношение $g \geq x_r \,\&\, y$ (доказательство аналогично доказательству соотношения $h \geq x_{2n+1} \,\&\, y$), что неверно в силу выбора функции g.

Предположим, что $g(\widetilde{A}) = g(\widetilde{B}) = 1$. Так как $v_n(\widetilde{A}) = v_n(\widetilde{B}) = 0$, то среди значений $g_1(\widetilde{A}), \ldots, g_{2p+1}(\widetilde{A})$ содержится не более p единиц, как и среди значений $g_1(\widetilde{B}), \ldots, g_{2p+1}(\widetilde{B})$. Так как $g = g_j$ для некоторого $j,\ 1 \leq j \leq 2p+1$, и $g(\widetilde{A}) = 1$, то среди значений $g_1(\widetilde{A}), \ldots, g_{j-1}(\widetilde{A}), g_{j+1}(\widetilde{A}), \ldots, g_{2p+1}(\widetilde{A})$ содержится не более $p-1$ единицы. Аналогично и для набора $\widetilde{B}$. Значит как минимум две функции среди $g_1, \ldots, g_{2p+1}$ равны 0 на наборах $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Но тогда обе эти функции должны мажорировать функцию $x_r \,\&\, y$, что неверно по доказанным выше утверждениям. Таким образом для любых множеств A и B из $M(n)$, удовлетворяющих условию $A \bigcap B = \varnothing$, выполняется соотношение $g(\widetilde{A}) \neq g(\widetilde{B})$.

Ровно на одном из множеств $\{1, \ldots, n\}$, $\{n+1, \ldots, 2n\}$ функция g равна 1. Аналогично для множеств $\{2, \ldots, n{+}1\}$, $\{n{+}2, \ldots, 2n{+}1\}$. Значит существуют два различных множества A и B из $M(n)$, для которых справедливы равенства $g(\widetilde{A}) = g(\widetilde{B}) = 1$. По доказанному выше данные множества пересекаются. Построим на их основе два множества A' и B' из $M(n)$, для которых $g(\widetilde{A'}) = g(\widetilde{B'}) = 1$, и чье пересечение равно одному числу.

Пусть $A \bigcap B = \{c_1, \ldots, c_q\}$ для некоторого $q \geq 1$. Тогда верны равенства $A = \{c_1, \ldots, c_q, a_1, \ldots, a_{n-q}\}$ и $B = \{c_1, \ldots, c_q, b_1, \ldots, b_{n-q}\}$, где множества $\{a_1, \ldots, a_{n-q}\}$ и $\{b_1, \ldots, b_{n-q}\}$ не пересекаются. Через $r_1, \ldots, r_{q+1}$ обозначим все числа от 1 до $2n+1$, не входящие в $A \bigcup B$ (их количество равно $2n+1-n-(n-q)$, то есть $q+1$).

Доказательство будем вести индукцией по значению числа q. Если $q = 1$, то A и B и есть искомые множества. Предположим, что мы построили искомые множества для всех чисел $s,\ 1 \leq s < q$. Построим их и для числа q. Для этого рассмотрим множества $A_1 = \{c_1, \ldots, c_{q-1}, a_1, \ldots, a_{n-q}, r_1\}$ и $B_1 = \{c_q, b_1, \ldots, b_{n-q}, r_2, \ldots, r_q\}$ и соответствующие им наборы.

	c_1	$\dots$	c_{q-1}	a_1	$\dots$	a_{n-q}	r_1	c_q	b_1	$\dots$	b_{n-q}	r_2	$\dots$	r_q	r_{q+1}	$2n+2$
$\widetilde{A}_1$	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1	1	0	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0	0	0
$\widetilde{B}_1$	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0	0	1	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1	0	0

Так как $A_1 \bigcap B_1 = \varnothing$, то ровно на одном из наборов $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{B}_1$ значение функции g равно 1. Если $g(\widetilde{B}_1) = 1$, то $A \bigcap B_1 = \{c_q\}$, и A и B_1 — искомые множества. Если $g(\widetilde{A}_1) = 1$, то $A_1 \bigcap B = \{c_1, \dots, c_{q-1}\}$ и, по предположению индукции, из множеств A_1 и B можно получить множества A' и B', для которых $g(\widetilde{A}') = g(\widetilde{B}') = 1$, и чье пересечение равно одному числу.

Рассмотрим теперь множества A' и B' из $M(n)$, для которых верны равенства $g(\widetilde{A}') = g(\widetilde{B}') = 1$ и $A' \bigcap B' = \{c\}$ для некоторого c из множества $\{1, \dots, 2n+1\}$. Тогда $A' = \{c, a_1, \dots, a_{n-1}\}$, $B' = \{c, b_1, \dots, b_{n-1}\}$ и $\{a_1, \dots, a_{n-1}\} \bigcap \{b_1, \dots, b_{n-1}\} = \varnothing$. Через r_1, r_2 обозначим числа от 1 до $2n+1$, не входящие в $A' \bigcup B'$. Положим $A'' = \{a_1, \dots, a_{n-1}, r_1\}$, $B'' = \{b_1, \dots, b_{n-1}, r_2\}$.

	a_1	$\dots$	a_{n-1}	r_1	b_1	$\dots$	b_{n-1}	r_2	c	$2n+2$
$\widetilde{A}''$	1	$\dots$	1	1	0	$\dots$	0	0	0	0
$\widetilde{B}''$	0	$\dots$	0	0	1	$\dots$	1	1	0	0

Так как $A'' \bigcap B'' = \varnothing$, то ровно на одном из наборов $\widetilde{A}''$ и $\widetilde{B}''$ значение функции g равно 1. Без ограничения общности будем считать, что $g(\widetilde{A}'') = 1$. Для множеств A'' и B' справедливы соотношения $A'' \bigcap B' = \varnothing$ и $g(\widetilde{A}'') = g(\widetilde{B}') = 1$. Но это неверно по свойствам функции g. Значит такой функции g не существует. Поэтому среди функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ нет функций, которые не мажорируют хотя бы одну из функций $x_1 \,\&\, y, \dots, x_{2n+1} \,\&\, y$.

Предположим, что $p > n$. Так как каждая из функций g_j, $1 \le j \le 2p+1$, мажорирует функцию $x_{i_j} \,\&\, y$ для некоторого i_j, $1 \le i_j \le 2n+1$, то найдется такое число i, $1 \le i \le 2n+1$, что функцию $x_i \,\&\, y$ мажорируют несколько функций из множества $g_1, \dots, g_{2p+1}$. Но это неверно по доказанным свойствам для этих функций. Значит $p < n$.

Так как $p < n$, то среди функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ найдется функция, которая мажорирует хотя бы две функции из множества $\{x_i \,\&\, y \mid i = 1, \dots, 2n+1\}$. Обозначим эту функцию через g', а мажорируемые ей функции из заданного множества — через $x_{s_1} \& y, \dots, x_{s_d} \& y$, $2 \le d \le 2n+1$. Поскольку функции $g_1, \dots, g_{2p+1}$ мажорируют различные функции из рассматриваемого множества, то $d \le 2n+1-2p < 2n$.

Пусть $A, B \in M(n)$, $A \bigcap B = \varnothing$ и $s_1 \notin A \bigcup B$. Рассмотрим наборы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, а также набор $\widetilde{\gamma}_{s_1}$.

	a_1	$\ldots$	a_n	b_1	$\ldots$	b_n	s_1	$2n+2$
$\widetilde{A}$	1	$\ldots$	1	0	$\ldots$	0	0	0
$\widetilde{B}$	0	$\ldots$	0	1	$\ldots$	1	0	0
$\widetilde{\gamma}_{s_1}$	0	$\ldots$	0	0	$\ldots$	0	1	1

Предположим, что $g'(\widetilde{A}) = 1$ или $g'(\widetilde{B}) = 1$. Так как $v_n(\widetilde{A}) = v_n(\widetilde{B}) = 0$, то среди значений $g_1(\widetilde{A}), \ldots, g_{2p+1}(\widetilde{A})$ содержится не более p единиц, как и среди значений $g_1(\widetilde{B}), \ldots, g_{2p+1}(\widetilde{B})$. Значит среди функций $g_1, \ldots, g_{2p+1}$ найдется функция, которая равна 0 на наборах $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Тогда эта функция мажорирует функцию $x_{s_1} \& y$. Но функцию $x_{s_1} \& y$ может мажорировать только одна из функций $g_1, \ldots, g_{2p+1}$, которой уже является функция g'. Значит $g'(\widetilde{A}) = g'(\widetilde{B}) = 0$. Обобщая данное утверждение, получим, что для любого множества A из $M(n)$, которое удовлетворяет условию $t \notin A$, где $t \in \{s_1, \ldots, s_d\}$, справедливо равенство $g'(\widetilde{A}) = 0$.

Так как $d < 2n$, то найдется число e, $1 \leq e \leq 2n+1$, такое, что g' не мажорирует функцию $x_e \& y$. Без ограничения общности будем считать, что $e = 2n+1$. Рассмотрим подмножества A и B из $M(n)$, которые не содержат числа $2n+1$ и не пересекаются. Тогда $g'(\widetilde{A}) \neq g'(\widetilde{B})$. Это утверждение доказывается аналогично соответствующему утверждению для рассмотренной выше функции g.

Как и в случае с функцией g найдутся два различных пересекающихся подмножества A и B множества $\{1, \ldots, 2n\}$, для которых $g(\widetilde{A}) = g(\widetilde{B}) = 1$. На основе данных множеств можно построить два множества A' и B', удовлетворяющих условию $g'(\widetilde{A'}) = g'(\widetilde{B'}) = 1$, и чье пересечение равно одному числу. Доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству соответствующему утверждению для функции g, но с одним отличием — при доказательстве шага индукции в качестве числа r_{q+1} необходимо взять число $2n+1$.

Рассмотрим теперь подмножества A' и B' из $M(n)$, которые не содержат число $2n+1$ и удовлетворяют равенствам $g'(\widetilde{A'}) = g'(\widetilde{B'}) = 1$ и $\left|A' \bigcap B'\right| = 1$. Тогда верно хотя бы одно из соотношений: $\{s_1, s_2\} \not\subseteq A'$, $\{s_1, s_2\} \not\subseteq B'$. Без ограничения общности пусть $s_1 \notin A'$. Тогда $A' \in M(n)$ и $s_1 \notin A'$, и в силу свойств функции g' выполняется равенство $g'(\widetilde{A'}) = 0$. Пришли к противоречию, а значит каждая из функций $g_1, \ldots, g_{2p+1}$ мажорирует ровно одну функцию из множества $\{x_i \& y \,|\, i = 1, \ldots, 2n+1\}$ и p должно равняться n. Поэтому не может выполняться соотношение (3.5) и функция W_n не содержится в множества $[\mathcal{A}]_\beta$. ■

Теорема 3.4. *Пусть $k = 2^m$, где $m \geq 2$. Тогда для каждого $\mu \geq 3$ справедливо соотношение $\{O^\mu, I^\mu\} \subseteq Q(k, 3)$.*

Доказательство. Определим β-замкнутый класс функций k-значной логики $\mathcal{W}^\mu(T)$ для каждого подмножества T множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$:

$$\mathcal{W}^\mu(T) = \Big[\{S\} \bigcup \{S^\nu \,|\, \nu \geq \mu\} \bigcup \{W_i \,|\, i \in T\}\Big]_\beta.$$

В силу свойств функций S и S^ν, $\nu \geq 3$, верно соотношение $B(\{S, S^\nu\}) = O^\nu$, а в силу свойств функций $W_i,\ i \geq 3$, — соотношение $B(\{W_i\}) \subseteq O^i$. Поэтому для всех подмножеств T множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$ верно равенство $B(\mathcal{W}^\mu(T)) = O^\mu$. Также очевидно, что $\mathcal{W}^\mu(T) \subset P_{k|3}$.

Рассмотрим различные подмножества R и Q множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$. Тогда найдется число n, такое, что $n \in R \backslash Q$ или $n \in Q \backslash R$. Без ограничения общности пусть $n \in R \backslash Q$. Тогда $W_n \in \mathcal{W}^\mu(R)$. Покажем, что $W_n \notin \mathcal{W}^\mu(Q)$.

По определению множеств $\mathcal{W}^\mu(T)$ справедливо соотношение $\mathcal{W}^\mu(Q) \subseteq \mathcal{W}[n]$, где $\mathcal{W}[n] = \Big[\{S\} \bigcup \{S^\nu \,|\, \nu \geq 3\} \bigcup \{W_i \,|\, i \geq 3,\ i \neq n\}\Big]$. По лемме 3.11 функция W_n не содержится в множестве $\mathcal{W}[n]$, а значит, $W_n \notin \mathcal{W}^\mu(Q)$. Таким образом, для различных подмножеств R и Q множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$ различны и β-замкнутые классы функций $\mathcal{W}^\mu(R)$ и $\mathcal{W}^\mu(Q)$. Так как семейство различных подмножеств множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$ континуально, то семейство различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^μ тоже континуально.

Поскольку класс I^μ является двойственным к классу O^μ, то для него имеет место аналогичное утверждение. ■

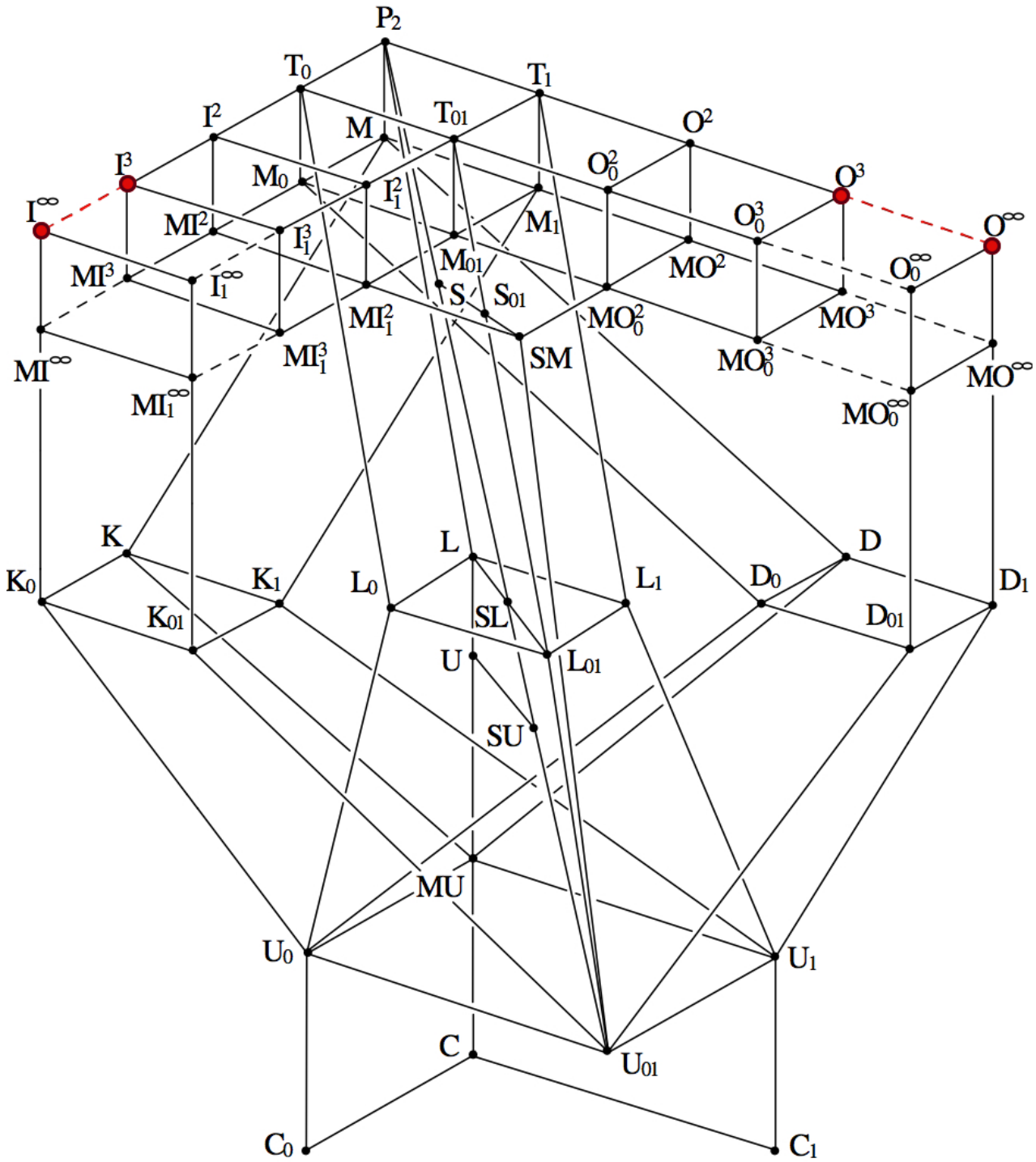
3.4 Полная классификация

Результаты, полученные в теоремах 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4 позволяют для каждого класса $\mathcal{B}$ булевых функций определить, является ли семейство β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ конечным или континуальным (тем самым также показано, что такие множества не могут иметь другую мощность). Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 3.5. *Пусть $k = 2^m,\ m \geq 2$. Тогда справедливы равенства*

$$Q(k,3) = \{O^\infty,\ I^\infty\} \bigcup \{O^\mu,\ I^\mu \,|\, \mu \geq 3\},$$
$$C(k,3) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \,\big|\, [\mathcal{B}] = \mathcal{B},\ \mathcal{B} \notin Q(k,3)\}.$$

Ниже на изображении диаграммы Поста выделены классы булевых функций, которые содержатся в множестве $Q(k,3)$ при $k = 2^m,\ m \geq 2$.



Классы булевых функций из множества $Q(k, 3)$

3.5 Случай с тремя фиксированными значениями

В предыдущих разделах данной главы рассматривались всевозможные функции k-значной логики, принимающие не более трех значений. При этом континуальные семейства β-замкнутых классов функций с булевым замыканием O^μ, $\mu \geq 3$, и O^∞ были построены для функций, которые принимают значения, соответствующие двоичным представлениям

$\langle 0, 1, 1, \ldots, 1\rangle$, $\langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle$ и $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1\rangle$. Для всех попарно различных чисел a, b, c из E_k найдем классификацию семейства β-замкнутых классов функций, которые принимают значения только из множества $\{a, b, c\}$, по его мощности. Для этого введем следующее определение.

Определение 3.5. *Пусть a, b, c — попарно различные числа из E_k. Обозначим их двоичные представления через $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$, $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$, $\langle c_1, \ldots, c_m\rangle$ соответственно. Если найдутся такие числа i и j, $1 \le i \le m$ и $1 \le j \le m$, что верно равенство $\{(a_i, a_j), (b_i, b_j), (c_i, c_j)\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, то множество $\{a, b, c\}$ назовем краевым, а в противном случае — центральным.*

Лемма 3.12. *Пусть $\mathcal{B}$ — один из замкнутых классов O^∞ или O^μ, $\mu \ge 3$, булевых функций. Пусть также $R \subseteq P_k$, $B(R) = \mathcal{B}$, $F \in P_{k|3}$, $b(F) \subset \mathcal{B}$ и $D(F) \subseteq \{a, b, k-1\}$, где $\{a, b, k-1\}$ — краевое множество. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более, чем от 16 переменных, и такая, что $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция F принимает три значения. Случай, когда функция F принимает меньшее число значений легко доказывается с использованием леммы 2.4. Двоичное представление функции F обозначим через $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$, а переменные, от которых зависят компоненты функции F — через $x_1, \ldots, x_{mn}$ (здесь n — число переменных функции F).

Обозначим двоичные представления чисел a и b через $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ и $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ соответственно. Так как множество $\{a, b, k-1\}$ является краевым, то найдутся такие числа i и j, $1 \le i \le m$ и $1 \le j \le m$, что верно равенство $\{(a_i, a_j), (b_i, b_j), (1, 1)\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Числа i и j не могут быть равны, так как в этом случае множество $\{(a_i, a_j), (b_i, b_j), (1, 1)\}$ содержит не более двух элементов. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $i = 1$, $j = 2$.

Получили, что вектор-функция $\langle f_1, f_2\rangle$ принимает три значения: $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 1, 1\rangle$. Поскольку функция F тоже принимает три значения, то множество функций $\{f_1, f_2\}$ является базой функции F.

Выберем наборы $\widetilde{\alpha}_{00}$, $\widetilde{\alpha}_{01}$, $\widetilde{\alpha}_{11}$ из E_2^{mn}, такие, что:

	x_1	$\ldots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \ldots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \ldots, x_{mn})$
$\widetilde{\alpha}_{00}$	$\alpha_{00,1}$	$\ldots$	$\alpha_{00,mn}$	0	0
$\widetilde{\alpha}_{01}$	$\alpha_{01,1}$	$\ldots$	$\alpha_{01,mn}$	0	1
—	—	$\ldots$	—	1	0
$\widetilde{\alpha}_{11}$	1	$\ldots$	1	1	1

Определим также набор $\widetilde{\alpha}_{10} = (1, \ldots, 1)$ из E_2^{mn}.

Далее, для каждого числа $i,\ 1 \leq i \leq mn$, определим булеву функцию $u_i(x_1, x_2)$:

$$u_i(a, b) = \alpha_{ab,i}.$$

В силу определения функции u_i и наборов $\widetilde{\alpha}_{00},\ \widetilde{\alpha}_{01},\ \widetilde{\alpha}_{10}$ и $\widetilde{\alpha}_{11}$ имеет место неравенство $u_i(x_1, x_2) \geq x_1$. Поскольку $\mathcal{B}$ — один из замкнутых классов O^∞ или $O^\mu,\ \mu \geq 3$, то справедливо включение $u_i \in \mathcal{B}$ для всех $i = 1, \ldots, mn$.

Так как все функции из множества $\{u_i(x_1, x_2) \,|\, i = 1, \ldots, mn\}$ зависят только от двух переменных, то число различных функций этого множества не превосходит 16. Обозначим всевозможные такие функции через $v_1(x_1, x_2), \ldots, v_t(x_1, x_2)$, где $t \leq 16$, а для каждого $i,\ 1 \leq i \leq mn$, через $q(i)$ обозначим число, определяемое из условия $u_i(x_1, x_2) = v_{q(i)}(x_1, x_2)$.

Для каждого $j,\ 1 \leq j \leq t$, положим

$$w_j(x_1, \ldots, x_{mn}) = v_j(f_1(x_1, \ldots, x_{mn}),\ f_2(x_1, \ldots, x_{mn})).$$

Так как функции $v_1, \ldots, v_t$ и f_1, f_2 принадлежат классу $\mathcal{B}$, то функции $w_1, \ldots, w_t$ тоже принадлежат данному классу.

Далее рассмотрим функцию G из P_k, имеющую следующее двоичное представление:

$$\widehat{G} = \widehat{F}(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)}).$$

По построению компоненты функции G существенно зависят только от переменных из множества $\{y_1, \ldots, y_t\}$, поэтому функция G тоже существенно зависит не более чем от t переменных, где $t \leq 16$. Аналогично доказательству леммы 3.8 легко показать, что функция G является искомой. ■

Для каждой тройки a, b, c попарно различных чисел из множества E_k положим

$$\mathbb{P}_{a,b,c} = \Big\{\mathcal{A} \subseteq \big\{F \in P_k \,|\, D(F) \subseteq \{a, b, c\}\big\} \,\Big|\, [\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}\Big\},$$
$$\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B}) = \big\{\mathcal{A} \in \mathbb{P}_{a,b,c} \,|\, B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}\big\} \text{ для каждого класса } \mathcal{B} \text{ булевых функций.}$$

На основе введенных определений сформулируем следующие утверждения.

Теорема 3.6. *Пусть a, b, c — различные числа из множества E_k, а $\mathcal{B}$ — один из классов O^∞ или $O^\mu,\ \mu \geq 3$, булевых функций. Тогда множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$*

— *является пустым, если $k - 1 \notin \{a, b, c\}$;*

— *конечно и не пусто, если $k - 1 \in \{a, b, c\}$ и множество $\{a, b, c\}$ является краевым;*

— *континуально, если* $k-1 \in \{a,b,c\}$ *и множество* $\{a,b,c\}$ *является центральным.*

Доказательство. Пусть сначала $k-1 \notin \{a,b,c\}$. Предположим, что существует β-замкнутый класс $\mathcal{A}$ из множества $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$. Так как класс $\mathcal{B}$ содержится в классе T_1 булевых функций, то компоненты каждой функции F из $\mathcal{A}$ на единичном наборе должны быть равны единице. Но тогда $k-1 \in D(F) \subseteq \{a,b,c\}$, что неверно. Значит $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B}) = \varnothing$.

Пусть теперь $k-1 \in \{a,b,c\}$. Без ограничения общности будем считать, что $c = k-1$. Рассмотрим случай, когда множество $\{a,b,k-1\}$ является краевым. Тогда доказательство конечности множества $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ проводится на основе утверждения леммы 3.12 аналогично доказательству теорем 3.2 и 3.3. Приведем пример β-замкнутого класса из $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$. Положим $I = \{(a,k-1),(k-1,k-1)\}$. Тогда справедливы соотношения[2]: $U(\mathcal{B}) = \{1,x\}$, $I^{(2)} \neq \varnothing$, $I^{(1)} = \{(k-1,k-1)\}$ и $q = k-1$ для всех $(p,q) \in I$. Поэтому в силу утверждения теоремы 2.3 существует единственный β-замкнутый класс $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ функций из $P_{k|2}$, такой, что $B(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$ и $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) = I$. Очевидно, что класс $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ принадлежит множеству $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$, и, следовательно, оно не является пустым.

Остается рассмотреть единственный случай, когда множество $\{a,b,k-1\}$ является центральным. Обозначим двоичные представления чисел a и b через $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ и $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ соответственно. Так как $a \neq k-1$, то найдется такое число i, $1 \leq i \leq m$, что $a_i = 0$. Если $b_i = 0$, то вследствие неравенства $a \neq b$ найдется число j, $1 \leq j \leq m$, такое, что $a_j \neq b_j$, а если $b_i = 1$, то вследствие неравенства $b \neq k-1$ найдется число j, $1 \leq j \leq m$, такое, что $b_j \neq 1$. В обоих случаях получаем, что множество $\{(a_i,a_j),(b_i,b_j),(1,1)\}$ содержит три элемента. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$, а $j = 2$.

Так как множество $\{a,b,k-1\}$ является центральным, то $\{(a_1,a_2),(b_1,b_2),(1,1)\} \neq \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$. Значит $\{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\} = \{(0,1),(1,0)\}$ или $\{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\} = \{(0,0),(1,0)\}$. Но второй из данных случаев не может иметь места, поскольку в этом случае $\{(a_2,a_1),(b_2,b_1),(1,1)\} = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, что неверно. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $a_1 = b_2 = 0$, а $a_2 = b_1 = 1$.

Для каждого $i = 3, \ldots, m$ рассмотрим значения a_i и b_i. Если $a_i = b_i = 0$, то верно равенство $\{(a_i,a_1),(b_i,b_1),(1,1)\} = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ и множество $\{a,b,k-1\}$ краевое. Значит либо $a_i = b_i = 1$, либо $a_i \neq b_i$.

Приведем пример континуального семейства β-замкнутых классов из множества $\mathbb{P}_{a,b,k-1}(\mathcal{B})$. Для этого будем использовать функции W_n из раздела 3.1 (при $\mathcal{B} = O^{\infty}$) или из раздела 3.3 (при $\mathcal{B} = O^{\mu}$, $\mu \geq 3$). Рассмотрим первый из случаев. Определим функцию V_n

[2]Необходимые обозначения введены в разделе 2.2

для каждого $n \geq 3$. Для каждого $i,\ 1 \leq i \leq m$, положим

$$b_i(V_n) = \begin{cases} w_{n,1}, \text{ если } a_i = 0,\ b_i = 1; \\ w_{n,2}, \text{ если } a_i = 1,\ b_i = 0; \\ 1, \text{ если } a_i = 1,\ b_i = 1. \end{cases}$$

Тогда $b_1(V_n) = w_{n,1}$, $b_2(V_n) = w_{n,2}$, а $D(V_n) = \{a, b, k-1\}$. Так как функции $w_{n,1}$ и $w_{n,2}$ являются компонентами функции V_n, то, как и в разделе 3.1, показывается, что для каждого $n \geq 3$ имеет место соотношение $V_n \notin [\{V_i \,|\, i \geq 3, i \neq n\}]_\beta$, из чего следует континуальность множества $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$. ■

Используя результаты теоремы 3.6 докажем следующее утверждение.

Теорема 3.7. *Пусть a, b, c — попарно различные числа из множества E_k. Тогда множество $\mathbb{P}_{a,b,c}$*

- *конечно и не пусто, если ни одно из чисел 0 и $k-1$ не содержится в множестве $\{a, b, c\}$;*
- *континуально, если ровно одно из чисел 0 или $k-1$ содержится в множестве $\{a, b, c\}$, а также это множество является центральным;*
- *счетно, в иных случаях.*

Доказательство. Предположим, что ни одно из чисел 0 или $k-1$ не содержится в множестве $\{a, b, c\}$. Тогда для любой функции F из P_k, которая принимает значения из этого множества, среди ее компонент найдутся функция, которая не содержатся в классе T_0, и функция, которая не содержится в классе T_1. Число классов $\mathcal{B}$ булевых функций, которые не содержатся в классе T_0 и в классе T_1, конечно. По теореме 3.5 каждый такой класс $\mathcal{B}$ принадлежит множеству $C(k, 3)$, а следовательно, множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ является конечным. Поэтому конечно и множество $\mathbb{P}_{a,b,c}$. Также, очевидно, что β-замкнутый класс функций $[\{F_a(x)\}]_\beta$, где функция $F_a(x)$ равна константе a, принадлежит множеству $\mathbb{P}_{a,b,c}$.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел 0 или $k-1$ принадлежит множеству $\{a, b, c\}$. Обозначим двоичные представления чисел a, b и c через $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$, $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$, $\langle c_1, \ldots, c_m\rangle$ соответственно. Так как $a \neq b$, то найдется такое число i, $1 \leq i \leq m$, что верно равенство $a_i \neq b_i$. Если $b_i = c_i$, то найдется такое число j, $1 \leq j \leq m$, что $b_j \neq c_j$, а если $a_i = c_i$, то найдется такое число j, $1 \leq j \leq m$, что $a_j \neq c_j$. В каждом из двух случаев множество $R = \{(a_i, a_j), (b_i, b_j), (c_i, c_j)\}$ содержит три элемента.

Предположим, что множество $\{a, b, c\}$ является центральным. Тогда $R = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ или $R = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$. Так как хотя бы одно из чисел 0 или

$k-1$ принадлежит множеству $\{a,b,c\}$, то без ограничения общности будем считать, что $c=k-1$. В этом случае $c_1=\ldots=c_m=1$ и $(1,1)\in R$. Значит $R=\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$ и $0\notin\{a,b,c\}$. В силу утверждения теоремы 3.6 множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(O^\infty)$ является континуальным. Значит, континуально и множество $\mathbb{P}_{a,b,c}$.

Остается рассмотреть единственный случай — когда множество $\{a,b,c\}$ является краевым и хотя бы одно из чисел 0 или $k-1$ принадлежит этому множеству. Без ограничения общности будем считать, что $k-1\in\{a,b,c\}$. Покажем, что для каждого класса $\mathcal{B}$ булевых функций множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ конечно. Рассмотрим три случая.

- Пусть $\mathcal{B}\in C(k,3)$. Так как $\{F\in P_k\,|\,D(F)\subseteq\{a,b,c\}\}\subseteq P_{k|3}$, то доказываемое утверждение очевидно.

- Пусть $\mathcal{B}\in\{O^\infty\}\bigcup\{O^\mu\,|\,\mu\geq 3\}$. Так как число $k-1$ принадлежит множеству $\{a,b,c\}$ и это множество является краевым, то по теореме 3.6 множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ является конечным и непустым.

- Пусть $\mathcal{B}\in\{I^\infty\}\bigcup\{I^\mu\,|\,\mu\geq 3\}$. По принципу двойственности для такого класса $\mathcal{B}$ справедлива теорема 3.6, если в ней вместо числа $k-1$ рассматривать 0. Так как множество $\{a,b,c\}$ не является центральным, то множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ является либо пустым (если $0\notin\{a,b,c\}$), либо конечным и непустым (если $0\in\{a,b,c\}$), что и требовалось показать.

Получили, что для каждого замкнутого класса $\mathcal{B}$ булевых функций множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ является конечным. Так как семейство замкнутых классов булевых функций счетно, то множество $\mathbb{P}_{a,b,c}$ не более чем счетно. Но по теореме 3.6 множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(O^\mu)$ не пусто для каждого $\mu\geq 3$. Значит множество $\mathbb{P}_{a,b,c}$ не менее, чем счетно, а следовательно, оно является счетным. ■

3.6 Подход к описанию классов

Хотя семейство β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ является континуальным, можно привести описание некоторых конечных множеств таких классов. Подход к описанию β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ аналогичен подходу, используемому в разделе 2.2 для описания β-замкнутых классов функций, принимающих не более двух значений: фиксируется класс $\mathcal{B}$ булевых функций и множество I, которое состоит из некоторых подмножеств множества E_k мощности не более трех. Далее рассматривается семейство β-замкнутых классов, которые содержат только функции из множества $\{F\in P_k\,|\,D(F)=D,\ D\in I\}$ и имеют булево замыкание $\mathcal{B}$.

Такие семейства β-замкнутых классов могут быть континуальными только в тех случаях, когда $\mathcal{B} \in Q(k,3)$, а также множеству I принадлежит множество $\{a,b,c\}$, которое является центральным и содержит 0 (для классов I^∞ и $I^\mu,\ \mu \geq 3$) или содержит $k-1$ (для классов O^∞ и $O^\mu,\ \mu \geq 3$). В остальных случаях рассматриваемые семейства β-замкнутых классов либо не существуют, либо являются конечными и могут быть описаны. В настоящей работе не приводится описание таких семейств, поскольку оно проводится аналогично описанию семейств β-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$, но является технически сложным, предполагает рассмотрение большого числа случаев и не дает новых содержательных эффектов.

Глава 4

Классы функций из $P_{k|4}$

4.1 Обобщение результатов из $P_{k|3}$

В предыдущей главе было показано, что для всех $k = 2^m$, $m \geq 2$, множество $Q(k,3)$ равно $\{O^\infty, I^\infty\} \bigcup \{O^\mu, I^\mu \,|\, \mu \geq 3\}$. Поскольку $Q(k,3) \subseteq Q(k,4)$, то множеству $Q(k,4)$ принадлежат все перечисленные классы. Покажем, что ему принадлежат еще и классы $O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu,\ \mu \geq 3$, булевых функций, а также все двойственные им классы.

В книге [78] для каждого класса $\mathcal{B}$ из множества классов $\{O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty\} \bigcup \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu, \,|\, \mu \geq 3\}$ приводится пример порождающей системы, состоящей не более, чем из двух функций. Обозначим функции данной системы через $s_1^{\mathcal{B}}$ и $s_2^{\mathcal{B}}$ (если она состоит из одной функции, то в качестве второй функции возьмем произвольную функцию из $\mathcal{B}$). Введем функции $S_1^{\mathcal{B}}$ и $S_2^{\mathcal{B}}$ из P_k через их двоичные представления:

$$b_i(S_j^{\mathcal{B}}) = s_j^{\mathcal{B}},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, 2.$$

Тогда очевидно, что $\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}}\} \subset P_{k|2}$ и $B(\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}}\}) = \mathcal{B}$.

Сначала рассмотрим классы $O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$ булевых функций. Для этого рассмотрим функции, аналогичные функциям W_n из раздела 3.1. Для каждого $n \geq 2$ определим новую функцию W_n через ее двоичное представление $\langle w_{n,1}, \ldots, w_{n,m} \rangle$:

$$w_{n,1} = x_1^1 \vee x_1^2 \vee \ldots \vee x_1^n \vee y_1^1 \& y_1^2 \& \ldots \& y_1^n,$$
$$w_{n,i} = y_1^1 \vee y_1^2 \vee \ldots \vee y_1^n \vee d_n(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n) \text{ для всех } i,\ 2 \leq i \leq m.$$

Так как каждая из компонент функции W_n зависит только от первых компонент переменных $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, то в дальнейшем будем обозначать булевы переменные x_1^i, y_1^i через x_i и y_i соответственно, $i = 1, \ldots, n$. Тогда:

$$w_{n,1} = x_1 \vee \ldots \vee x_n \vee y_1 \& \ldots \& y_n,$$
$$w_{n,i} = y_1 \vee \ldots \vee y_n \vee d_n(x_1, \ldots, x_n) \text{ для всех } i,\ 2 \leq i \leq m.$$

Для каждого $n \geq 2$ справедливо равенство $B(\{W_n\}) \subseteq MO_0^\infty$. Оно следует из того, что все компоненты функции W_n содержатся в классе O^∞, являются монотонными и на нулевом

наборе равны нулю. Также легко показывается, что для каждого $n \geq 2$ функция W_n принимает четыре значения. Используя эти свойства докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Для каждого $n \geq 2$ справедливо соотношение*

$$W_n \notin \left[\left\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \,\middle|\, \mathcal{B} \in \{O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty\}\right\} \bigcup \left\{W_i \,|\, i \geq 2,\, i \neq n\right\}\right]_\beta.$$

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.1, поэтому опишем только основные этапы доказательства.

Обозначим множество $\left\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \,\middle|\, \mathcal{B} \in \{O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty\}\right\} \bigcup \left\{W_i \,|\, i \geq 2,\, i \neq n\right\}$ через $\mathcal{A}$. По свойствам функций из множества $\mathcal{A}$ выполняется равенство $B(\mathcal{A}) = O^\infty$.

Предположим, что $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$. Тогда справедливо равенство

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}\big(\langle\omega_1, \ldots, \omega_m\rangle, \ldots, \langle\omega_{m(r-1)+1}, \ldots, \omega_{mr}\rangle\big),$$

где функция H принадлежит множеству $\mathcal{A}$, r — число переменных функции H, а булевы функции $\omega_1, \ldots, \omega_{mr}$ принадлежат множеству O^∞. Если $H \in \left\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \,\middle|\, \mathcal{B} \in \{O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty\}\right\}$, то функция W_n принимает не более двух значений, что неверно. Поэтому $H = W_p$ для некоторого числа $p,\ p \geq 2,\ p \neq n$, и $r = 2p$.

Для всех $i,\ 1 \leq i \leq p$, обозначим функцию $\omega_{m(i-1)+1}$ через g_i, а функцию $\omega_{m(p+i-1)+1}$ — через h_i. Поскольку компоненты функции W_n существенно зависят только от булевых переменных $x_1^1, \ldots, x_1^n$ и $y_1^1, \ldots, y_1^n$, то будем обозначать эти переменные через $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ соответственно. В данных обозначениях приведенное выше равенство можно записать при помощи эквивалентной системы равенств:

$$\begin{cases} w_{n,1} = g_1 \vee \ldots \vee g_p \vee h_1 \& \ldots \& h_p; \\ w_{n,i} = h_1 \vee \ldots \vee h_p \vee d_p(g_1, \ldots, g_p),\ i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Как и в лемме 3.1 показывается, что ни одна из функций $g_1, \ldots, g_p$ не мажорирует ни одну из переменных $y_1, \ldots, y_n$, а ни одна из функций $h_1, \ldots, h_p$ не мажорирует ни одну из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Также устанавливается, что каждую из переменных множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ мажорируется не более одной из функций $g_1, \ldots, g_p$. Значит $p < n$. Но если выполняется данное соотношение, то легко находится такой набор, на котором функция $w_{n,1}$ равна 0, но функция $h_1 \& \ldots \& h_p$ равна 1, что неверно. Поэтому $W_n \notin [\mathcal{A}]_\beta$. ■

Рассмотрим теперь классы $O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu$ булевых функций при $\mu \geq 3$. Для каждого $n \geq 3$ определим функцию W_n, аналогичную соответствующей функции из раздела 3.3, через ее двоичное представление:

$$b_1(W_n) = \omega_{2n+2}^3(x_1^1, \ldots, x_1^{2n+1}, x_1^{2n+2}),$$
$$b_i(W_n) = x_1^{2n+2} \vee \omega_{2n+1}^{n+1}(x_1^1, \ldots, x_1^{2n+1}),\ i = 2, \ldots, m.$$

Будем обозначать $b_1(W_n)$ через u_n, а $b_i(W_n)$, $i = 2, \ldots, m$ — через v_n. Поскольку компоненты функции W_n существенно зависят только от булевых переменных $x_1^1, \ldots, x_1^{2n+1}$ и x_1^{2n+2}, то будем обозначать эти переменные через $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ и y соответственно. Тогда компоненты функции W_n принимают вид:

$$u_n = \omega^3_{2n+2}(x_1, \ldots, x_{2n+1}, y),$$
$$v_n = y \vee \omega^{n+1}_{2n+1}(x_1, \ldots, x_{2n+1}).$$

Как и в разделе 3.3 показывается, что для каждого $n \geq 3$ функция u_n содержится в классе MO_0^n, а функция v_n — в классе MO_0^∞. Поэтому $B(\{W_n\}) \subseteq MO_0^n$. Также очевидно, что функция W_n принимает четыре значения. На основе данных свойств докажем следующую лемму.

Лемма 4.2. *Для любого $n \geq 3$ верно соотношение*

$$W_n \notin \left[\left\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \,\middle|\, \mathcal{B} \in \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu \,|\, \mu \geq 3\}\right\} \bigcup \left\{W_i \,\middle|\, i \geq 3,\ i \neq n\right\}\right]_\beta.$$

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.11, поэтому опишем только основные этапы доказательства.

Обозначим множество $\left\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \,\middle|\, \mathcal{B} \in \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu \,|\, \mu \geq 3\}\right\} \bigcup \left\{W_i \,\middle|\, i \geq 3,\ i \neq n\right\}$ через $\mathcal{A}$. По свойствам функций из множества $\mathcal{A}$ выполняется равенство $B(\mathcal{A}) = O^3$.

Предположим, что $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$. Тогда выполняется равенство

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}\big(\langle q_1, \ldots, q_m\rangle, \ldots, \langle q_{m(r-1)+1}, \ldots, g_{mr}\rangle\big),$$

где функция H содержится в множестве $\mathcal{A}$, r — число ее переменных, а функции $q_1, \ldots, q_{mr}$ принадлежат множеству O^3. Так как $|D(W_n)| = 4$, то функция H должна принимать как минимум 4 значения. Поэтому $H \notin \left\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \,\middle|\, \mathcal{B} \in \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu \,|\, \mu \geq 3\}\right\}$. Значит $H = W_p$ для некоторого числа p, $p \geq 3,\ p \neq n$, а следовательно $r = 2p + 2$.

Для каждого i, $1 \leq i \leq 2p + 1$, обозначим булеву функцию $q_{m(i-1)+1}$, через g_i, а функцию $q_{m(2p+1)+1}$ — через h. В данных обозначениях приведенное выше равенство можно записать при помощи эквивалентной системы равенств:

$$\begin{cases} u_n = \omega^3_{2p+2}(g_1, \ldots, g_{2p+1}, h); \\ v_n = h \vee \omega^{p+1}_{2p+1}(g_1, \ldots, g_{2p+1}). \end{cases}$$

Как и в лемме 3.11 несложно показывается, что для каждого $i = 1, \ldots, 2n + 1$ функция h мажорирует функцию $x_i \,\&\, y$ и найдется ровно одно число j_i, $1 \leq j_i \leq 2p + 1$, такое, что $g_{j_i} \geq x_i \,\&\, y$. Далее, рассматривая подмножества множества $\{1, \ldots, 2n + 1\}$

мощности n, доказывается, что каждая из функций $g_1, \ldots, g_{2p+1}$ мажорирует хотя бы одну из функций $x_1 \,\&\, y, \ldots, x_{2n+1} \,\&\, y$. Поэтому $p < n$. Но в этом случае среди функций $g_1, \ldots, g_{2p+1}$ найдется функция, которая мажорирует как минимум две функции из множества $\{x_1 \,\&\, y, \ldots, x_{2n+1} \,\&\, y\}$. Тогда, как и в лемме 3.11, устанавливается, что не выполняется хотя бы одно из равенств вышеприведенной системы. Поэтому функция W_n не содержится в множества $[\mathcal{A}]_\beta$. ■

Результаты лемм 4.1 и 4.2 позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть $k = 2^m$, где $m \geq 2$. Тогда справедливы соотношения*

$$\{O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\} \subseteq Q(k, 4);$$
$$\{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu, I_1^\mu, MI^\mu, MI_1^\mu \,|\, \mu \geq 3\} \subseteq Q(k, 4).$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.4.

Пусть $\mathcal{B}$ — класс булевых функций из множества $\{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu\}$ для некоторого $\mu \geq 3$. Определим β-замкнутый класс функций k-значной логики $\mathcal{W}(\mathcal{B}, T)$ для каждого подмножества T множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots\}$:

$$\mathcal{W}(\mathcal{B}, T) = \left[\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}}\} \bigcup \{W_i \,|\, i \in T\}\right]_\beta.$$

В силу свойств функций $S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}}$, верно соотношение $B(\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}}\}) = \mathcal{B}$, а в силу свойств функций W_i, $i \geq \mu$, — соотношения $B(\{W_i\}) \subseteq MO_0^i \subseteq \mathcal{B}$. Поэтому для всех подмножеств T множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots\}$ справедливо равенство $B(\mathcal{W}(\mathcal{B}, T)) = \mathcal{B}$. Также очевидно, что $\mathcal{W}(\mathcal{B}, T) \subset P_{k|4}$.

Рассмотрим различные подмножества R и Q множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots\}$. Тогда найдется число n, такое, что $n \in R \backslash Q$ или $n \in Q \backslash R$. Без ограничения общности пусть $n \in R \backslash Q$. Тогда $W_n \in \mathcal{W}(\mathcal{B}, R)$. Покажем, что $W_n \notin \mathcal{W}(\mathcal{B}, Q)$.

По определению множеств $\mathcal{W}(\mathcal{B}, T)$ справедливо соотношение $\mathcal{W}(\mathcal{B}, Q) \subseteq \mathcal{W}[n]$, где $\mathcal{W}[n] = \left[\left\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \,\middle|\, \mathcal{B} \in \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu \,|\, \mu \geq 3\}\right\} \bigcup \{W_i \,|\, i \geq 3, i \neq n\}\right]$. По лемме 4.2 функция W_n не содержится в множестве $\mathcal{W}[n]$, а, значит, $W_n \notin \mathcal{W}(\mathcal{B}, Q)$. Таким образом, для различных подмножеств R и Q множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots\}$ различны и β-замкнутые классы функций $\mathcal{W}(\mathcal{B}, R)$ и $\mathcal{W}(\mathcal{B}, Q)$. Так как семейство различных подмножеств множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots\}$ континуально, то семейство различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|4}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ тоже континуально.

Если $\mathcal{B}$ — один из классов $O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$ булевых функций, то соответствующее утверждение для $\mathcal{B}$ доказывается аналогично, но с использованием леммы 4.1.

Также очевидно, что для классов, которые являются двойственными к классам $O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$ и $O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu$, $\mu \geq 3$, имеет место аналогичное утверждение. ■

4.2 Некоторые конечные семейства классов

Найдем классы $\mathcal{B}$ функций алгебры логики, для которых еще не определена мощность семейства β-замкнутых классов функций из $P_{k|4}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$. Для этого воспользуемся утверждениями теорем 3.2 и 4.1, а также очевидным соотношением $C(k,k) \subseteq C(k,4)$. Используя описание классов функций алгебры логики, получим, что искомыми классами являются классы $M, M_0, M_1, M_{01}, SM, O^2, O_0^2, MO^2, MO_0^2, I^2, I_0^2, MI^2, MI_0^2$. В настоящем разделе будут рассмотрены все такие классы, за исключением классов O^2 и I^2, и будет показано, что они содержатся в множестве $C(k,4)$ для всех $k = 2^m,\ m \geq 2$. Для этого докажем следующее утверждение (оно аналогично утверждениям лемм 3.2, 3.3, 3.4, 3.5).

Лемма 4.3. *Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов $M, M_0, M_1, M_{01}, SM, O_0^2, MO^2, MO_0^2$ булевых функций, $F \in P_{k|4}$, $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более, чем от 64 переменных, и такая, что $F \in [\{G\} \bigcup R]_\beta$.*

Доказательство. Если функция F принимает не более трех значений, то существование искомой функции G следует из утверждения леммы 3.9, поскольку класс $\mathcal{B}$ содержится либо в классе M, либо в классе T_{01}.

Пусть функция F принимает четыре значения. Обозначим через n число ее переменных, а через $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ — ее двоичное представление. В силу утверждения леммы 3.7 у функции F существует база, которая состоит либо из двух, либо из трех функций. Рассмотрим каждый из данных случаев по-отдельности.

Сначала предположим, что у функции F существует база, которая состоит из двух функций. Пусть, без ограничения общности, базой является множество $\{f_1, f_2\}$. Тогда вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ принимает все четыре значения. Если $\mathcal{B} = O_0^2$, то $f_1(0, \ldots, 0) = f_2(0, \ldots, 0) = 0$ и $f_1(1, \ldots, 1) = f_2(1, \ldots, 1) = 1$. Если $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}, MO^2, MO_0^2\}$, то $\mathcal{B} \subseteq M$. Тогда функции f_1 и f_2 являются монотонными, а поскольку они принадлежат базе, то не являются константами. Поэтому эти функции принадлежат классу T_{01}.

Обозначим нулевой и единичный наборы из множества E_2^{mn} через $\widetilde{\alpha}_{00}$ и $\widetilde{\alpha}_{11}$ соответственно и специальным образом выберем для функции f_1 и f_2 наборы $\widetilde{\alpha}_{01}, \widetilde{\alpha}_{10}$ из E_2^{mn}, такие, что

	x_1	$\ldots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \ldots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \ldots, x_{mn})$
$\widetilde{\alpha}_{00}$	0	$\ldots$	0	0	0
$\widetilde{\alpha}_{01}$	$\alpha_{01,1}$	$\ldots$	$\alpha_{01,mn}$	0	1
$\widetilde{\alpha}_{10}$	$\alpha_{10,1}$	$\ldots$	$\alpha_{10,mn}$	1	0
$\widetilde{\alpha}_{11}$	1	$\ldots$	1	1	1

Для этого рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $\mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}$, а также $f_1 \& f_2 \notin \mathcal{B}$.

   (a) Пусть $\mathcal{B} = O_0^2$. Если у любых двух наборов, на которых функция $f_1 \& f_2$ равна 0, имеется общая нулевая компонента, то эта функция принадлежит классу O^2. Но, очевидно, что на нулевом наборе она равна 0, и, следовательно, $f_1 \& f_2 \in O_0^2$. Но это неверно. Значит для функции $f_1 \& f_2$ найдутся такие два набора $\widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_2$ из E_2^{mn}, которые не содержат общих нулевых компонент, но при этом $f_1(\widetilde{\gamma}_1) \& f_2(\widetilde{\gamma}_1) = f_1(\widetilde{\gamma}_2) \& f_2(\widetilde{\gamma}_2) = 0$.

   (b) Пусть $\mathcal{B} \in \{MO^2, MO_0^2\}$. Так как $f_1 \& f_2 \in M_0$, то как и в предыдущем случае показывается, что существует два набора $\widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_2$ из E_2^{mn}, которые не содержат общих нулевых компонент, но при этом $f_1(\widetilde{\gamma}_1) \& f_2(\widetilde{\gamma}_1) = f_1(\widetilde{\gamma}_2) \& f_2(\widetilde{\gamma}_2) = 0$.

   Без ограничения общности будем считать, что $f_1(\widetilde{\gamma}_1) = 0$. Если $f_1(\widetilde{\gamma}_2) = 0$, то для функции f_1 найдены два набора, на которых она равна 0, но которые не содержат общих нулевых компонент. Следовательно, $f_1 \notin \mathcal{B}$, что неверно по условиям леммы. Значит $f_1(\widetilde{\gamma}_2) = 1$. Аналогичным образом показывается, что $f_2(\widetilde{\gamma}_1) = 1$ и $f_2(\widetilde{\gamma}_2) = 0$.

   Поэтому если $\mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}$ и функция $f_1 \& f_2$ не содержится в классе $\mathcal{B}$, то в качестве наборов $\widetilde{\alpha}_{01}$ и $\widetilde{\alpha}_{10}$ выберем рассматриваемые наборы $\widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_2$.

2. Пусть $\mathcal{B} = SM$. Так как каждая функции f_1 и f_2 являются самодвойственными, то на двойственных наборах они принимают двойственные значения. Поэтому в качестве наборов $\widetilde{\alpha}_{01}$ и $\widetilde{\alpha}_{10}$ выберем двойственные друг другу наборы.

3. Во всех остальных случаях наборы $\widetilde{\alpha}_{01}$ и $\widetilde{\alpha}_{10}$ можно выбрать произвольным образом.

Далее, для каждого числа $i,\ 1 \leq i \leq mn$, определим булеву функцию $u_i(x_1, x_2)$:

$$u_i(a, b) = \alpha_{ab,i}.$$

Так как все функции из множества $\{u_i(x_1, x_2) \,|\, i = 1, \ldots, mn\}$ зависят только от двух переменных и принадлежат множеству T_{01}, то число различных функций этого множества не

превосходит 4. Обозначим всевозможные такие функции через $v_1(x_1, x_2), \ldots, v_t(x_1, x_2)$, где $t \leq 4$, а для каждого $i,\ 1 \leq i \leq mn$, через $q(i)$ обозначим число, определяемое из условия $u_i(x_1, x_2) = v_{q(i)}(x_1, x_2)$.

Для каждого $j,\ 1 \leq j \leq t$, положим

$$w_j(x_1, \ldots, x_{mn}) = v_j(f_1(x_1, \ldots, x_{mn}),\ f_2(x_1, \ldots, x_{mn})).$$

Покажем, что все функции $w_1, \ldots, w_t$ содержатся в классе $\mathcal{B}$. Для этого достаточно доказать, что для каждого $i,\ 1 \leq i \leq mn$, функция $u_i(f_1, f_2)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $\mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}$, а также $f_1 \& f_2 \notin \mathcal{B}$. Тогда по построению наборы $\widetilde{\alpha}_{01}$ и $\widetilde{\alpha}_{10}$ не содержат общих нулевых компонент. Также очевидно, что $u_i \in T_{01}$. Поэтому для функции $u_i(f_1, f_2)$ выполняется одно из равенств: $u_i(f_1, f_2) = f_1$, $u_i(f_1, f_2) = f_2$ или $u_i(f_1, f_2) = f_1 \vee f_2$. Поскольку $x \vee y \in \mathcal{B}$, то в каждом из этих вариантов функция $u_i(f_1, f_2)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$.

2. Пусть $\mathcal{B} = SM$. Тогда наборы $\widetilde{\alpha}_{01}$ и $\widetilde{\alpha}_{10}$ являются двойственными друг другу. Поэтому для функции $u_i(f_1, f_2)$ выполняется либо соотношение $u_i(f_1, f_2) = f_1$, либо $u_i(f_1, f_2) = f_2$. В любом из этих вариантов функция $u_i(f_1, f_2)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$.

3. В остальных случаях выполняется одно из равенств: $u_i(f_1, f_2) = f_1$, $u_i(f_1, f_2) = f_2$, $u_i(f_1, f_2) = f_1 \vee f_2$ или $u_i(f_1, f_2) = f_1 \& f_2$. Так как для все рассматриваемые классы $\mathcal{B}$ содержат функцию $x \vee y$, то отдельного внимания требует только вариант, когда $u_i(f_1, f_2) = f_1 \& f_2$. Если $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}\}$, то $x \& y \in \mathcal{B}$, а значит $f_1 \& f_2 \in \mathcal{B}$. Если же $\mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}$, то $f_1 \& f_2 \in \mathcal{B}$, поскольку случай, когда $f_1 \& f_2 \notin \mathcal{B}$ был рассмотрен ранее. Значит $u_i(f_1, f_2) \in \mathcal{B}$.

Как и при доказательстве лемм 3.3, 3.4, 3.5 и 3.8 рассмотрим функцию G из P_k, имеющую следующее двоичное представление:

$$\widehat{G} = \widehat{F}(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)}).$$

Аналогично доказательству леммы 3.8 несложно показывается, что выполняется соотношение $\widehat{G}\big(w_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, w_t(x_1, \ldots, x_{mn})\big) = \widehat{F}(x_1, \ldots, x_{mn})$ и функция G является искомой.

Пусть теперь у функции F все базы состоят из трех функций. Тогда, очевидно, что $m \geq 3$. Без ограничения общности будем считать, что базой является множество функций $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Также, как и в случае с базой, состоящей из двух функций, легко показывается, что функции f_1, f_2, f_3 принадлежат классу T_{01}. Поэтому на нулевом наборе значение вектор-функции $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ равно $\langle 0,0,0\rangle$, а на единичном — $\langle 1,1,1\rangle$. Исследуем остальные два значения $\widehat{A} = \langle A_1, A_2, A_3\rangle$ и $\widehat{B} = \langle B_1, B_2, B_3\rangle$ этой вектор-функции. Рассмотрим два случая.

- Пусть хотя бы одно из значений $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ содержит ровно одну единичную компоненту. Без ограничения общности будем считать, что $A_1 = A_2 = 0$ и $A_3 = 1$. Выясним, какими могут быть числа B_1, B_2, B_3.

$\widehat{0}$	0	0	0
$\widehat{A}$	0	0	1
$\widehat{B}$	B_1	B_2	B_3
$\widehat{7}$	1	1	1

  Если $B_3 = 0$, то справедливо хотя бы одно из равенств $B_1 = 1$ и $B_2 = 1$. Пусть, без ограничения общности, $B_1 = 1$. Тогда вектор-функция $\langle f_1, f_3\rangle$ принимает четыре значения, а, значит, множество $\{f_1, f_3\}$ является базой функции F, что неверно. Поэтому $B_3 = 1$. Так как $\widehat{B} \neq \widehat{A}$ и $\widehat{B} \neq \widehat{7}$, то ровно одна из компонент B_1 и B_2 равна 1.

- Пусть оба значения $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ содержат две единичные компоненты. Без ограничения общности будем считать, что $B_1 = 0$, а $B_2 = B_3 = 1$. Выясним, какими могут быть числа A_1, A_2, A_3.

$\widehat{0}$	0	0	0
$\widehat{A}$	A_1	A_2	A_3
$\widehat{B}$	0	1	1
$\widehat{7}$	1	1	1

  Если $A_2 = 0$, то $A_1 = A_3 = 1$. Поэтому вектор-функция $\langle f_1, f_2\rangle$ принимает четыре значения, а, значит, $\{f_1, f_2\}$ является базой функции F, что неверно. Поэтому $A_2 = 1$. Аналогичным образом доказывается, что $A_3 = 1$. Но тогда $A_1 = 0$ и $\widehat{A} = \widehat{B}$, что тоже является неверным. Значит рассматриваемый случай не имеет места.

Таким образом получили, что для значений $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ вектор-функции $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$, которые отличны от значений $\widehat{0}$ и $\widehat{7}$, должны выполняться следующие условия: одно из этих значений содержит ровно одну единичную компоненту, второе — ровно две единичные компоненты, а также у данных значений имеется общая единичная компонента. Таким образом существует

6 различных неупорядоченных пар $(\widehat{A}, \widehat{B})$, которые могут быть получены друг из друга путем перестановки номеров компонент. Так как все такие пары эквивалентны, то рассмотрим только одну из них:

	$f_1(x_1, \ldots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \ldots, x_{mn})$	$f_3(x_1, \ldots, x_{mn})$
$\widehat{0}$	0	0	0
$\widehat{A}$	0	0	1
$\widehat{B}$	0	1	1
$\widehat{7}$	1	1	1

Предположим, что $\mathcal{B} = SM$. Рассмотрим произвольный набор, на котором вектор-функция $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ принимает значение $\widehat{A}$. Тогда на наборе, двойственном к рассматриваемому, эта вектор-функция принимает значение $\langle 1, 1, 0\rangle$, которое отлично от $\widehat{B}$, что неверно. Поэтому получили, что если $\mathcal{B} = SM$, то у функции F не может существовать базы, состоящей из трех функций.

Пусть далее $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}, O_0^2, MO^2, MO_0^2\}$. Специальным выберем наборы $\widetilde{\alpha}_{000}, \widetilde{\alpha}_{001}, \widetilde{\alpha}_{011}, \widetilde{\alpha}_{111}$ из E_2^{mn}, для которых справедливы соотношения

	x_1	$\ldots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \ldots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \ldots, x_{mn})$	$f_3(x_1, \ldots, x_{mn})$
$\widetilde{\alpha}_{000}$	0	$\ldots$	0	0	0	0
$\widetilde{\alpha}_{001}$	$\alpha_{001,1}$	$\ldots$	$\alpha_{001,mn}$	0	0	1
$\widetilde{\alpha}_{011}$	$\alpha_{011,1}$	$\ldots$	$\alpha_{011,mn}$	0	1	1
$\widetilde{\alpha}_{111}$	1	$\ldots$	1	1	1	1

Для этого рассмотрим различные случаи.

1. Пусть $\mathcal{B} = O_0^2$. Тогда наборы $\widetilde{\alpha}_{001}$ и $\widetilde{\alpha}_{011}$ выберем произвольным образом.

2. Пусть $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}, MO^2, MO_0^2\}$. Тогда $\mathcal{B} \subseteq M$. Если существуют два сравнимых набора $\widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_2$ из E_2^{mn}, для которых справедливы равенства $\Big\langle f_1(\widetilde{\gamma}_1), f_2(\widetilde{\gamma}_1), f_3(\widetilde{\gamma}_1)\Big\rangle = \widehat{A}$, а $\Big\langle f_1(\widetilde{\gamma}_2), f_2(\widetilde{\gamma}_2), f_3(\widetilde{\gamma}_2)\Big\rangle = \widehat{B}$, то выберем их в качестве наборов $\widetilde{\alpha}_{001}$ и $\widetilde{\alpha}_{011}$. Если таких наборов нет, то наборы $\widetilde{\alpha}_{001}$ и $\widetilde{\alpha}_{011}$ выберем произвольным образом.

Теперь для каждого числа $i,\ 1 \le i \le mn$, определим булеву функцию $u_i(x_1, x_2, x_3)$:

$$u_i(a, b, c) = \begin{cases} \alpha_{abc,i}, \text{ если } \langle a, b, c\rangle \in \{\widehat{0}, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{7}\}; \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Так как все функции из множества $\{u_i(x_1, x_2, x_3) \,|\, i = 1, \ldots, mn\}$ зависят только от трех переменных и принадлежат множеству T_{01}, то число различных функций этого множества не превосходит 64. Обозначим всевозможные такие функции через $v_1(x_1, x_2, x_3), \ldots, v_t(x_1, x_2, x_3)$, где $t \leq 64$, а для каждого $i,\ 1 \leq i \leq mn$, через $q(i)$ обозначим число, определяемое из условия $u_i(x_1, x_2, x_3) = v_{q(i)}(x_1, x_2, x_3)$.

Для каждого $j,\ 1 \leq j \leq t$, положим:

$$w_j(x_1, \ldots, x_{mn}) = v_j\big(f_1(x_1, \ldots, x_{mn}), f_2(x_1, \ldots, x_{mn}), f_3(x_1, \ldots, x_{mn})\big).$$

Покажем, что все функции $w_1, \ldots, w_t$ содержатся в классе $\mathcal{B}$. Для этого достаточно доказать, что для каждого $i,\ 1 \leq i \leq mn$, функция $u_i(f_1, f_2, f_3)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $\mathcal{B} = O_0^2$. Если $f_1 = 1$, то $u_i(f_1, f_2, f_3) = 1$. Поэтому $u_i \geq f_1$ и, в силу свойств класса $\mathcal{B}$, имеет место включение $u_i(f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{B}$.

2. Пусть $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}, MO^2, MO_0^2\}$ и набор $\widetilde{\alpha}_{001}$ меньше набора $\widetilde{\alpha}_{011}$. Тогда для любых наборов $\widetilde{\delta}_1$ и $\widetilde{\delta}_2$, таких, что $\widetilde{\delta}_1 \leq \widetilde{\delta}_2$, справедливо неравенство $\Big\langle f_1(\widetilde{\delta}_1), f_2(\widetilde{\delta}_1), f_3(\widetilde{\delta}_1)\Big\rangle \leq \Big\langle f_1(\widetilde{\delta}_2), f_2(\widetilde{\delta}_2), f_3(\widetilde{\delta}_2)\Big\rangle$. Поэтому $u_i\big(f_1(\widetilde{\delta}_1), f_2(\widetilde{\delta}_1), f_3(\widetilde{\delta}_1)\big) \leq u_i\big(f_1(\widetilde{\delta}_2), f_2(\widetilde{\delta}_2), f_3(\widetilde{\delta}_2)\big)$. Следовательно $u_i(f_1, f_2, f_3) \in M_{01}$. Если $\mathcal{B} \in \{MO^2, MO_0^2\}$, то как и в предыдущем случае верно неравенство $u_i(f_1, f_2, f_3) \geq f_1$. Значит справедливо включение $u_i(f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{B}$. Если же $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}\}$, то это соотношение является очевидным.

3. Пусть $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}, MO^2, MO_0^2\}$ и не существует сравнимых наборов, на которых значения вектор-функции $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ равны $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ соответственно. Тогда для любых наборов $\widetilde{\delta}_1$ и $\widetilde{\delta}_2$, таких, что $\widetilde{\delta}_1 \leq \widetilde{\delta}_2$, имеет место один из следующих случаев:

   - $\Big\langle f_1(\widetilde{\delta}_1), f_2(\widetilde{\delta}_1), f_3(\widetilde{\delta}_1)\Big\rangle = \widehat{0},\ \Big\langle f_1(\widetilde{\delta}_2), f_2(\widetilde{\delta}_2), f_3(\widetilde{\delta}_2)\Big\rangle \in \{\widehat{0}, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{7}\}$;
   - $\Big\langle f_1(\widetilde{\delta}_1), f_2(\widetilde{\delta}_1), f_3(\widetilde{\delta}_1)\Big\rangle = \widehat{A},\ \Big\langle f_1(\widetilde{\delta}_2), f_2(\widetilde{\delta}_2), f_3(\widetilde{\delta}_2)\Big\rangle \in \{\widehat{A}, \widehat{7}\}$;
   - $\Big\langle f_1(\widetilde{\delta}_1), f_2(\widetilde{\delta}_1), f_3(\widetilde{\delta}_1)\Big\rangle = \widehat{B},\ \Big\langle f_1(\widetilde{\delta}_2), f_2(\widetilde{\delta}_2), f_3(\widetilde{\delta}_2)\Big\rangle \in \{\widehat{B}, \widehat{7}\}$;
   - $\Big\langle f_1(\widetilde{\delta}_2), f_2(\widetilde{\delta}_2), f_3(\widetilde{\delta}_2)\Big\rangle = \Big\langle f_1(\widetilde{\delta}_2), f_2(\widetilde{\delta}_2), f_3(\widetilde{\delta}_2)\Big\rangle = \widehat{7}$.

   Легко видеть, что в каждом из этих случаев имеет место соотношение $u_i\big(f_1(\widetilde{\delta}_1), f_2(\widetilde{\delta}_1), f_3(\widetilde{\delta}_1)\big) \leq u_i\big(f_1(\widetilde{\delta}_2), f_2(\widetilde{\delta}_2), f_3(\widetilde{\delta}_2)\big)$. Поэтому, как и в предыдущем случае, справедливо включение $u_i(f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{B}$.

Рассмотрим функцию G из P_k, имеющую следующее двоичное представление

$$\widehat{G} = \widehat{F}(y_{q(1)}, \ldots, y_{q(mn)}).$$

Как и при рассмотрении случая, когда у функции F существует база из двух функций, несложно показать, что выполняется соотношение $\widehat{G}\big(w_1(x_1, \ldots, x_{mn}), \ldots, w_t(x_1, \ldots, x_{mn})\big) = \widehat{F}(x_1, \ldots, x_{mn})$ и функция G является искомой. ■

Применяя метод, используемый для доказательства теоремы 3.2, и результаты, полученные в лемме 4.3, несложно доказывается следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть* $k = 2^m$, $m \geq 2$. *Тогда каждый из классов* $M, M_0, M_1, M_{01}, SM, O_0^2, MO^2, MO_0^2, I_0^2, MI^2, MI_0^2$ *булевых функций содержится в множестве* $C(k, 4)$.

Таким образом среди всех классов булевых функций только для классов O^2 и I^2 булевых функций не найдена классификация по мощности семейства β-замкнутых классов функций из $P_{k|4}$ с данным булевым замыканием. Следующий раздел настоящей работы посвящен исследованию таких семейств классов.

4.3 Семейство классов с булевым замыканием O^2

4.3.1 Случай $k = 4$

Из результатов теоремы 3.3 известно, что классы O^2 и I^2 принадлежат множеству $C(k, 3)$ для всех $k = 2^m$, $m \geq 2$. Аналогичным образом докажем, что данные классы принадлежат множеству $C(4, 4)$.

Теорема 4.3. *Справедливо включение* $\{O^2, I^2\} \subset C(4, 4)$.

Доказательство. Так как классы O^2 и I^2 являются двойственными друг другу, то для доказательства теоремы достаточно показать, что $O^2 \in C(4, 4)$.

Рассмотрим произвольный β-замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из P_4 с булевым замыканием O^2. В силу утверждения леммы 3.10 в классе $\mathcal{A}$ существует конечное множество R функций, такое, что $B(R) = O^2$ и каждая из функций данного множества зависит не более, чем от r переменных, где r является константой.

Поскольку у каждой функции F из класса $\mathcal{A}$ число компонент не превосходит двух, то у функции F существует база, состоящая не более, чем из двух функций. Значит в силу

утверждения леммы 3.8 для каждой функции F существует функция G_F из $\mathcal{A}$, которая зависит не более, чем от 16 переменных переменных, и такая, что $F \in [\{G_F\} \bigcup R]_\beta$.

Как и в теореме 3.2 легко доказывается равенство $\mathcal{A} = [R \bigcup \{G_F \mid F \in \mathcal{A}\}]_\beta$. Поэтому у класса $\mathcal{A}$ имеется конечный базис, зависящий не более, чем $\max(r, 16)$ переменных. Так как число функций из P_4, зависящих не более, чем от $\max(r, 16)$ фиксированных переменных, является конечным, то конечно и число различных β-замкнутых классов функций из P_k с булевым замыканием O^2. Поэтому $O^2 \in C(4, 4)$. ■

4.3.2 Случай $k = 2^m,\ m \geq 3$

В настоящем разделе покажем, что при $k = 2^m,\ m \geq 3$, верно соотношение $O^2 \in Q(k, 4)$. Для этого для каждой пары чисел n и a, таких, что $1 \leq a \leq n$, определим булеву функцию $\theta_n^a(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\theta_n^a(\widetilde{\alpha}) = \begin{cases} 1, \text{ если в наборе } \widetilde{\alpha} \text{ ровно } a \text{ единиц;} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Далее для каждого $n \geq 4$ определим функцию W_n из P_k, которая зависит от n^2+2 переменных $x, y, z^1, \ldots, z^{n^2}$, через ее двоичное представление $\langle w_{n,1}, \ldots, w_{n,m} \rangle$:

$$\begin{aligned} w_{n,1} &= x_1 \vee \overline{y_1} \vee \overline{\theta_{n^2}^{n^2-n}(z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n^2})}, \\ w_{n,2} &= \overline{x_1} \vee y_1 \vee \overline{\theta_{n^2}^{n^2-n}(z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n^2})}, \\ w_{n,i} &= \omega_{n^2+2}^{n+3}(x_1, y_1, z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n^2}) \text{ при } i = 3, \ldots, m, \end{aligned}$$

где через ω_n^a обозначена булева функция, определенная в разделе 3.3.

Так как каждая из компонент функции W_n зависит только от первых компонент переменных $x, y, z^1, \ldots, z^{n^2}$, то в дальнейшем будем обозначать булевы переменные x_1 и y_1 через x и y, а z_1^i — через z_i для всех $i = 1, \ldots, n^2$. Набор булевых переменных $(z_1, \ldots, z_{n^2})$ будем обозначать через $\widetilde{z}$. Также для удобства более не будем обозначать нижний индекс у функций θ_n^a и ω_n^a. Тогда компоненты функции W_n имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{n,1} &= x \vee \overline{y} \vee \overline{\theta^{n^2-n}(\widetilde{z})}, \\ w_{n,2} &= \overline{x} \vee y \vee \overline{\theta^{n^2-n}(\widetilde{z})}, \\ w_{n,i} &= \omega^{n+3}(x, y, \widetilde{z}) \text{ при } i = 3, \ldots, m. \end{aligned}$$

Докажем некоторые свойства функций W_n, $n \geq 4$.

1. Выполняется соотношение $b(W_n) \subset O^2$.

   Функции $w_{n,1}$ и $w_{n,2}$ мажорируют переменные x и y соответственно. Поэтому они принадлежат классу O^∞, который содержится в классе O^2. Значит $w_{n,1} \in O^2$ и $w_{n,2} \in O^2$.

Функции $w_{n,i}$, $i = 3, \ldots, m$, равны функции $\omega^{n+3}(x, y, \widetilde{z})$. Рассмотрим два произвольных набора из $E_2^{n^2+2}$, на которых данная функция равна 0. По определению функции $\omega^{n+3}(x, y, \widetilde{z})$ среди компонент рассматриваемых наборов содержится не более $n+2$ единиц. Поэтому суммарно в данных наборах не более $2n + 4$ единицы. Но при $n \geq 4$ справедливо неравенство $n^2 + 2 > 2n + 4$, а значит, у рассматриваемых наборов есть общая нулевая компонента. Поэтому $w_{n,i} \in O^2$ для всех $i,\ 3 \leq i \leq m$.

2. Справедливо равенство $|D(W_n)| = 4$.

   Заметим, что функции $w_{n,1}, \ldots, w_{n,m}$ являются симметричными относительно переменных из множества $\{z_1, \ldots, z_{n^2}\}$ (то есть значения данных функций не поменяются при перестановке переменных из этого множества между собой). Таким образом, значения компонент функции W_n определяются значениями переменных x, y и числом δ единиц среди переменных $z_1, \ldots, z_{n^2}$. Запишем это в таблицу.

x	y	Число δ единиц среди $z_1, \ldots, z_{n^2}$	$w_{n,1}$	$w_{n,2}$	$w_{n,i},\ i = 3, \ldots, m$
0	0	$0 \leq \delta \leq n+2$	1	1	0
0	0	$n+3 \leq \delta \leq n^2-n-1$	1	1	1
0	0	$\delta = n^2-n$	1	1	1
0	0	$n^2-n+1 \leq \delta \leq n^2$	1	1	1
0	1	$0 \leq \delta \leq n+1$	1	1	0
0	1	$n+2 \leq \delta \leq n^2-n-1$	1	1	1
0	1	$\delta = n^2-n$	0	1	1
0	1	$n^2-n+1 \leq \delta \leq n^2$	1	1	1
1	0	$0 \leq \delta \leq n+1$	1	1	0
1	0	$n+2 \leq \delta \leq n^2-n-1$	1	1	1
1	0	$\delta = n^2-n$	1	0	1
1	0	$n^2-n+1 \leq \delta \leq n^2$	1	1	1
1	1	$0 \leq \delta \leq n$	1	1	0
1	1	$n+1 \leq \delta \leq n^2-n-1$	1	1	1
1	1	$\delta = n^2-n$	1	1	1
1	1	$n^2-n+1 \leq \delta \leq n^2$	1	1	1

Из данной таблицы видно, что двоичное представление функции W_n принимает только 4 значения. Поэтому столько же значений принимает и функция W_n.

Примером базиса для класса O^2 является множество $\{\overline{x_1} \vee x_2,\ x_1\&x_2 \vee x_1\&x_3 \vee x_2\&x_3\}$ (см, например, [78]). По аналогии с функциями S и S^μ, которые были введены в разделе 3.3, определим функции $S_1(x)$ и $S_2(x)$ из P_k. Для каждого $i, 1 \le i \le m$, положим:

$$\begin{aligned} b_i(S_1(x)) &= \overline{x_1} \vee x_2, \\ b_i(S_2(x)) &= x_1\&x_2 \vee x_1\&x_3 \vee x_2\&x_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что каждая из функций S_1 и S_2 принимает ровно 2 значения, а также, что $B(\{S_1, S_2\}) = O^2$.

Лемма 4.4. *Для каждого $n \ge 4$ справедливо соотношение*

$$W_n \notin \left[\{S_1, S_2\} \bigcup \{W_i \,|\, i \ge 4,\ i \ne n\}\right]_\beta.$$

Доказательство. Обозначим множество $\{S_1, S_2\} \bigcup \{W_i \,|\, i \ge 4,\ i \ne n\}$ через $\mathcal{A}$. Предположим, что утверждение леммы неверно, и $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$. Это значит, что имеет место соотношение

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}\big(\langle q_1, \ldots, q_m\rangle, \ldots, \langle q_{m(r-1)+1}, \ldots, q_{mr}\rangle\big), \tag{4.1}$$

где функция H содержится в множестве $\mathcal{A}$, r — число переменных функции H, а булевы функции $q_1, \ldots, q_{mr}$ принадлежат множеству $B(\mathcal{A})$.

Так как функция W_n принимает 4 значения, а функции S_1 и S_2 принимают 2 значения, то функция H не может быть равна этим функциям. Поэтому $H = W_p$ для некоторого числа $p,\ p \ge 4,\ p \ne n$, и $r = p^2 + 2$.

По определению функций S_1, S_2 и по свойствам функций $W_n,\ n \ge 4$, верно равенство $B(\mathcal{A}) = O^2$. Поэтому все функции $q_1, \ldots, q_{m(p^2+2)}$ принадлежат классу O^2, а так как все компоненты функции W_n существенно зависят только от переменных $x, y, z_1, \ldots, z_{n^2}$, то без ограничения общности можно считать, что булевы функции $q_1, \ldots, q_{m(p^2+2)}$ зависят только от тех же переменных.

Обозначим функцию q_1 через h_1, функцию q_{m+1} через h_2, а для для всех $i,\ 1 \le i \le p^2$, обозначим функцию $q_{m(i+1)+1}$ через g_i. В введенных обозначениях соотношение (4.1) можно записать при помощи эквивалентной системы равенств

$$\begin{cases} w_{n,1} = w_{p,1}(h_1, h_2, g_1, \ldots, g_p) = h_1 \vee \overline{h_2} \vee \overline{\theta^{p^2-p}(g_1, g_2, \ldots, g_{p^2})}; & (4.2) \\ w_{n,2} = w_{p,2}(h_1, h_2, g_1, \ldots, g_p) = \overline{h_1} \vee h_2 \vee \overline{\theta^{p^2-p}(g_1, g_2, \ldots, g_{p^2})}; & (4.3) \\ w_{n,i} = w_{p,i}(h_1, h_2, g_1, \ldots, g_p) = \omega^{p+3}(h_1, h_2, g_1, g_2, \ldots, g_{p^2}) \text{ при } i = 3, \ldots, m. & (4.4) \end{cases}$$

Найдем некоторые свойства функций $h_1, h_2, g_1, \ldots, g_{p^2}$. Для этого рассмотрим семейство $M(n)$ всех подмножеств множества $\{1, \ldots, n^2\}$ мощности n. Каждому множеству

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ из $M(n)$ сопоставим набор из $E_2^{n^2}$, у которого компоненты с номерами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны 1, а все остальные компоненты равны 0. Такой набор будем обозначать через $\widetilde{A}$. Помимо набора $\widetilde{A}$ будем также рассматривать набор $\neg\widetilde{A}$ из $E_2^{n^2}$, двойственный к $\widetilde{A}$.

Пусть $A \in M(n)$. На наборе $(0, 1, \neg\widetilde{A})$ значение функции $w_{n,1}$ равно 0. Значит, согласно равенству (4.2), на данном наборе значение функции $h_1 \vee \overline{h_2} \vee \overline{\theta^{p^2-p}(g_1, \ldots, g_{p^2})}$ тоже должно быть равно 0. Поэтому $h_1(0, 1, \neg\widetilde{A}) = 0$, а среди функций $g_1, \ldots, g_{p^2}$ ровно p функций равны 0 на данном наборе. Индексы данных функций обозначим через $i(A, 1), \ldots, i(A, p)$ соответственно, а множество $\bigcup\limits_{t=1}^{p} i(A, t)$ через $i(A)$.

Рассмотрим набор $(1, 0, \widetilde{A})$. Покажем, что для любого набора $\widetilde{\gamma}$, такого, что $\widetilde{\gamma} \geq (1, 0, \widetilde{A})$, верны равенства $h_1(\widetilde{\gamma}) = 1$ и $g_t(\widetilde{\gamma}) = 1$ для всех $t \in i(A)$. Предположим, что это не так, то есть существует набор $\widetilde{\gamma}$ из $E_2^{n^2+2}$, для которого справедливо соотношение $\widetilde{\gamma} \geq (1, 0, \widetilde{A})$, и на котором равна 0 либо функция h_1, либо некоторая функция g_t при $t \in i(A)$. Но эта функция равна 0 на наборе $(0, 1, \neg\widetilde{A})$, который не имеет общих нулевых компонент с набором $\widetilde{\gamma}$. Поэтому рассматриваемая нами функция не может содержатся в классе O^2, что неверно. Получили противоречие. Поэтому справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} h_1 &\geq x \,\&\, z_{a_1} \,\&\, z_{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_n}, \\ g_t &\geq x \,\&\, z_{a_1} \,\&\, z_{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_n} \text{ для всех } t \in i(A). \end{aligned}$$

Далее рассмотрим набор $(1, 0, \neg\widetilde{A})$. На нем функция $w_{n,2}$ равна 0. Поэтому, аналогично рассмотренному ранее получим, что $h_2(1, 0, \neg\widetilde{A}) = 0$ и среди функций $g_1, \ldots, g_{p^2}$ ровно p функций тоже равны 0 на данном наборе. Индексы данных функций обозначим через $j(A, 1), \ldots, j(A, p)$ соответственно, а множество $\bigcup\limits_{t=1}^{p} j(A, t)$ через $j(A)$. Также, аналогичным образом получим, что для любого набора $\widetilde{\gamma}$, такого, что $\widetilde{\gamma} \geq (0, 1, \widetilde{A})$, верны равенства $h_2(\widetilde{\gamma}) = 1$ и $g_t(\widetilde{\gamma}) = 1$ для всех $t \in j(A)$. Поэтому справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} h_2 &\geq y \,\&\, z_{a_1} \,\&\, z_{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_n}, \\ g_t &\geq y \,\&\, z_{a_1} \,\&\, z_{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_n} \text{ для всех } t \in j(A). \end{aligned}$$

Определим набор $\widetilde{\alpha} = (1, 1, \widetilde{A})$. Он содержит $n + 2$ единицы, и поэтому на нем значение функции $w_{n,3}$ равно 0. Согласно равенству (4.4), значение функции $\omega^{p+3}(h_1, h_2, g_1, g_2, \ldots, g_{p^2})$ на данном наборе тоже должно быть равно нулю. Это означает, что среди значений $h_1(\widetilde{\alpha}), h_2(\widetilde{\alpha}), g_1(\widetilde{\alpha}), g_2(\widetilde{\alpha}), \ldots, g_{p^2}(\widetilde{\alpha})$ должно быть не более $p + 2$ единиц. По доказанному выше на наборе $\widetilde{\alpha}$ равны единице функции h_1, h_2 и функции g_t и g_s для всех $t \in i(A)$ и $s \in j(A)$. Так как $|i(A)| = |j(A)| = p$, то среди значений $h_1(\widetilde{\alpha}), h_2(\widetilde{\alpha}), g_1(\widetilde{\alpha}), g_2(\widetilde{\alpha}), \ldots, g_{p^2}(\widetilde{\alpha})$ как минимум $p + 2$ единицы. Значит их число должно быть равно $p + 2$, но это выполняется только в том случае, когда совпадают множества индексов $i(A)$ и $j(A)$. Без ограничения

общности можно считать, что $i(A,t) = j(A,t)$ для всех $t,\ 1 \le t \le p$. Поэтому справедливы соотношения

$$g_t \ \ge \ (x \vee y) \,\&\, z_{a_1} \,\&\, z_{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_n} \text{ для всех } t \in i(A).$$

Выясним, как связаны множества $i(A)$ и $i(B)$ для множеств $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ из $M(n)$.

Пусть сначала $A \cap B = \varnothing$. Покажем, что $i(A) \cap i(B) = \varnothing$. В наборе $\neg\widetilde{B}$ компоненты с номерами $a_1, \ldots, a_n$ равны 1, а поскольку $g_t \ge (x \vee y) \,\&\, z_{a_1} \,\&\, z_{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_n}$ для всех $t \in i(A)$, то $g_t(0, 1, \neg\widetilde{B}) = 1$. Но так как выполняется соотношение $g_s(0, 1, \neg\widetilde{B}) = 0$ для всех $s \in i(B)$ (в силу определения множества $i(B)$), то $i(A) \cap i(B) = \varnothing$.

Определим множества индексов $C_r = \{nr+1, nr+2, \ldots, nr+n\}$ для всех $r = 0, \ldots, n-1$. Для всех $r,\ 0 \le r \le n-1$, мощность множеств $i(C_r)$ равна p, а так как $C_r \cap C_q = \varnothing$ при $r \ne q$, то $i(C_r) \cap i(C_q) = \varnothing$. Поэтому $\Big|\bigcup\limits_{r=0}^{n-1} i(C_r)\Big| = np$. Поскольку множество $\bigcup\limits_{r=0}^{n-1} i(C_r)$ является подмножеством множества $\{1, \ldots, p^2\}$, то выполняется неравенство $p^2 \ge np$. Но $p \ne n$, а следовательно, справедливо неравенство $p > n$.

Теперь покажем, что если $|A \cap B| = n - 1$, то $\big|i(A) \cap i(B)\big| \ge p - 1$. Обозначим множество A через $\{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$, а множество B через $\{a_1, \ldots, a_{n-1}, b\}$, где $a_n \ne b$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
h_1 \ &\ge \ x \,\&\, z_{a_1} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_{n-1}} \,\&\, (z_{a_n} \vee z_b),\\
h_2 \ &\ge \ y \,\&\, z_{a_1} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_{n-1}} \,\&\, (z_{a_n} \vee z_b),\\
g_t \ &\ge \ (x \vee y) \,\&\, z_{a_1} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_{n-1}} \,\&\, z_{a_n} \text{ для всех } t \in i(A),\\
g_s \ &\ge \ (x \vee y) \,\&\, z_{a_1} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_{n-1}} \,\&\, z_b \text{ для всех } s \in i(B).
\end{aligned}$$

Обозначим через $\widetilde{AB}$ набор из $E_2^{n^2}$, у которого компоненты с номерами $a_1, \ldots, a_n$ и b равны 1, а все остальные компоненты равны 0.

Рассмотрим теперь набор $\widetilde{\beta} = (1, 0, \widetilde{AB})$. Он содержит ровно $n + 2$ единицы и на нем значение функции $w_{n,3}$ равно 0. Значит, согласно равенству (4.4), значение функции $\omega^{p+3}(h_1, h_2, g_1, g_2, \ldots, g_{p^2})$ на данном наборе тоже должно быть равно 0. Это означает, что среди значений $h_1(\widetilde{\beta}), h_2(\widetilde{\beta}), g_1(\widetilde{\beta}), g_2(\widetilde{\beta}), \ldots, g_{p^2}(\widetilde{\beta})$ должно быть не более $p + 2$ единиц. На наборе $\widetilde{\beta}$ равны 1 функция h_1 и функции g_t и g_s для всех $t \in i(A)$ и $s \in i(B)$. Если $\big|i(A) \cup i(B)\big| \ge p + 2$, то число функций, которые равны единице на наборе $\widetilde{\beta}$ будет не меньше, чем $p+3$, что неверно. Поэтому если $|A \cap B| = n-1$, то должно выполняться неравенство $\big|i(A) \cup i(B)\big| \le p + 1$. Поскольку $|i(A)| = |i(B)| = p$ то неравенство $\big|i(A) \cup i(B)\big| \le p + 1$ эквивалентно неравенству $\big|i(A) \cap i(B)\big| \ge p - 1$.

Определим множества $D_r = \{r+1, \ldots, r+n\}$ для всех $r = 0, \ldots, n$. Тогда $\left|D_r \cap D_{r+1}\right| = n-1$ при $r = 0, \ldots, n-1$ и $D_0 \cap D_n = \varnothing$. По индукции докажем, что $\left|i(D_0) \cap i(D_r)\right| \geq p - r$ при $r = 1, \ldots, n$.

Если $r = 1$, то нужное утверждение следует из того, что $|D_0 \cap D_1| = n-1$ и доказанного выше неравенства $\left|i(A) \cap i(B)\right| \geq p-1$ при $|A \cap B| = n-1$.

Предположим, что для всех $q = 1, \ldots, r-1$ утверждение доказано. Покажем, что утверждение верно и при $q = r$.

По предположению индукции верно неравенство $\left|i(D_0) \cap i(D_{r-1})\right| \geq p - (r-1)$. Так как $\left|D_{r-1} \cap D_r\right| = n-1$, то $\left|i(D_{r-1}) \cap i(D_r)\right| \geq p-1$. Если $\left|i(D_{r-1}) \cap i(D_r)\right| = p$, то $i(D_{r-1}) = i(D_r)$, и доказываемое неравенство очевидно по предположению индукции. Если $\left|i(D_{r-1}) \cap i(D_r)\right| = p-1$, то без ограничения общности положим, что $i(D_{r-1}, t) = i(D_r, t)$ для всех $t,\ 1 \leq t \leq p-1$, а $i(D_{r-1}, p) \neq i(D_r, p)$. Тогда:

$$\left|i(D_0) \cap i(D_r)\right| = \left|i(D_0) \cap \Big(\bigcup_{t=1}^{p} i(D_r, t)\Big)\right| \geq \left|i(D_0) \cap \Big(\bigcup_{t=1}^{p-1} i(D_r, t)\Big)\right| =$$
$$= \left|i(D_0) \cap \Big(\bigcup_{t=1}^{p-1} i(D_{r-1}, t)\Big)\right| \geq \left|i(D_0) \cap i(D_{r-1})\right| - 1 = p - r,$$

что и требовалось показать.

Таким образом при $r = n$ выполняется соотношение $|i(D_0) \cap i(D_n)| \geq p - n$. Но так как $D_0 \cap D_n = \varnothing$, то верно равенство $i(D_0) \cap i(D_n) = \varnothing$. Значит $p - n \leq 0$, что противоречит ранее доказанному неравенству $p > n$. Следовательно $W_n \notin [\mathcal{A}]_\beta$. ■

Применяя метод доказательства, используемый при доказательстве теорем 3.4 и 4.1, и результаты, полученные в лемме 4.4, несложно доказывается следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Для всех $k = 2^m,\ m \geq 3$, справедливо равенство $\{O^2, I^2\} \subset Q(k, 4)$.*

4.4 Полная классификация

Результаты теорем 3.2, 3.5, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 позволяют сформулировать следующие утверждения.

Теорема 4.5. *Справедливы равенства*

$$Q(4,4) = \{O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\} \bigcup$$
$$\bigcup \{O^\mu, O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu, I^\mu, I_1^\mu, MI^\mu, MI_1^\mu \,|\, \mu \geq 3\},$$

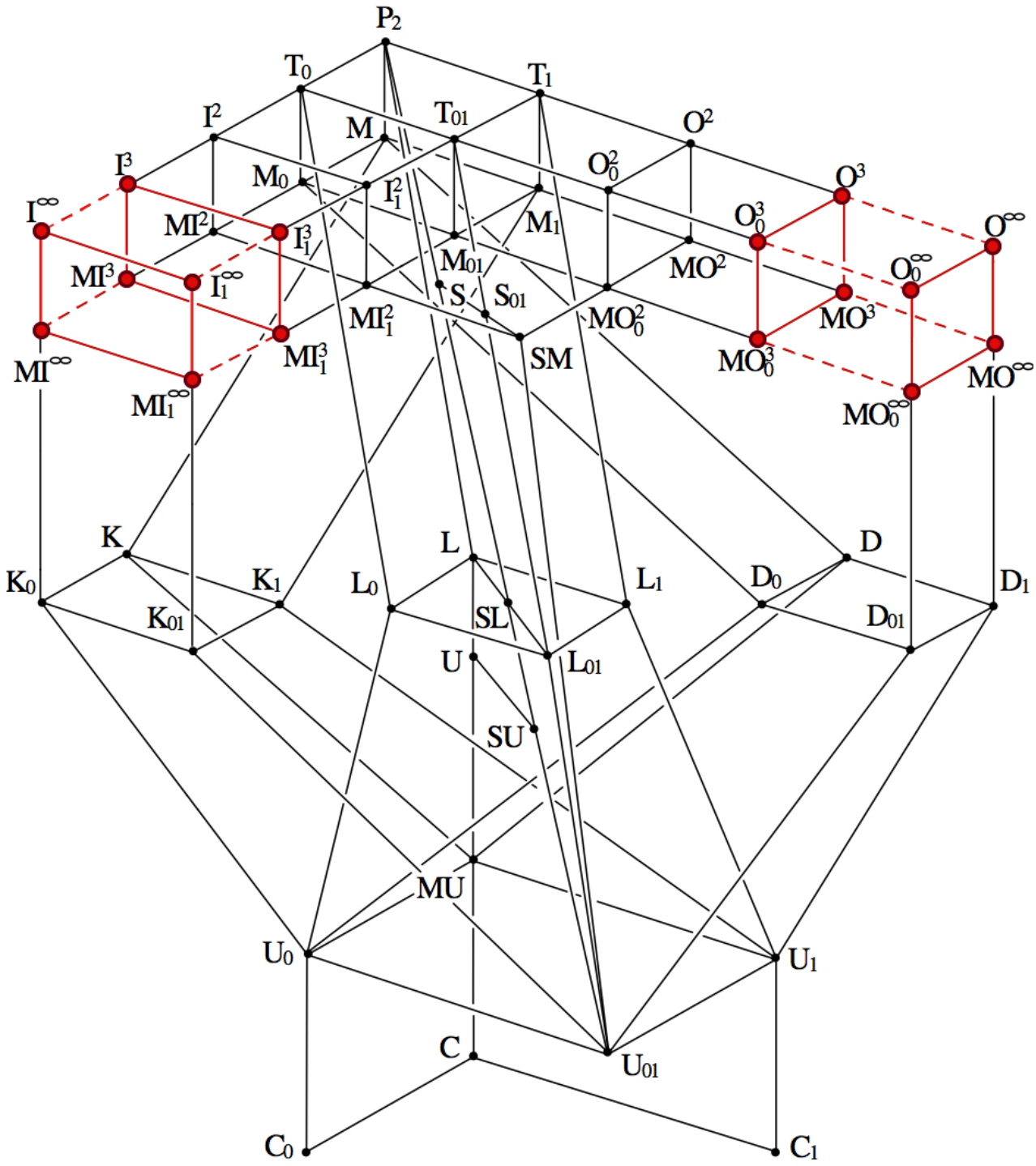
$$C(4,4) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \,\big|\, [\mathcal{B}] = \mathcal{B},\ \mathcal{B} \notin Q(4,4)\}.$$

Теорема 4.6. *Пусть* $k = 2^m,\ m \geq 3$. *Тогда справедливы равенства*

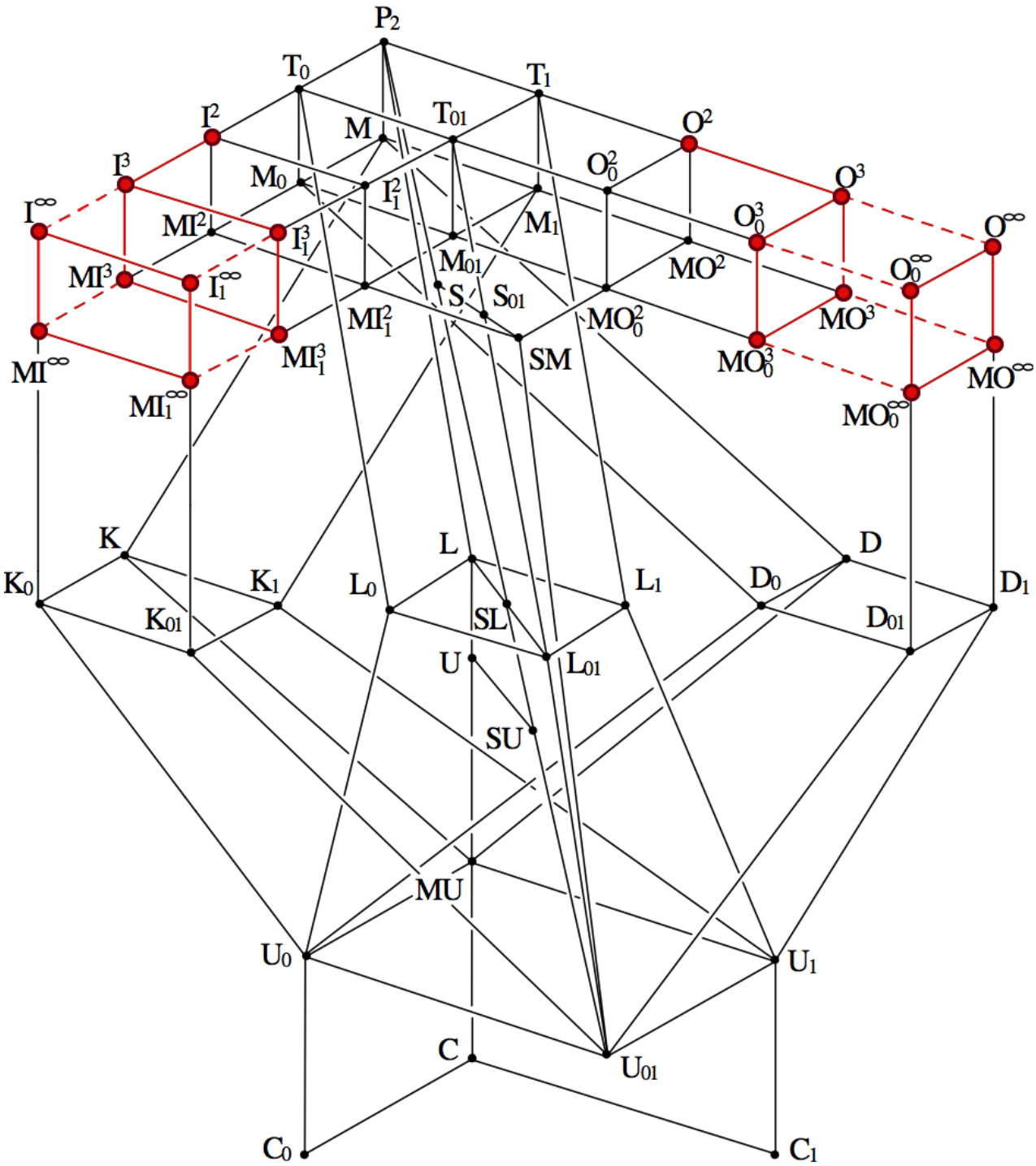
$$Q(k,4) = Q(4,4) \bigcup \{O^2, I^2\},$$

$$C(k,4) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \,\big|\, [\mathcal{B}] = \mathcal{B},\ \mathcal{B} \notin Q(k,4)\}.$$

Ниже на изображениях диаграммы Поста выделены классы булевых функций, которые содержатся в множествах $Q(4,4)$ и $Q(k,4)$ при $k = 2^m,\ m \geq 3$.



Классы булевых функций из множества $Q(4,4)$



Классы булевых функций из множества $Q(k,4)$ при $k=2^m,\ m\geq 3$

Глава 5

Все функции k-значной логики

5.1 Обобщение результатов из $P_{k|4}$

В предыдущей главе для каждого класса $\mathcal{B}$ булевых функций было установлено, содержится ли он во множестве $C(k,4)$ или $Q(k,4)$, где $k = 2^m\, m \geq 2$. В частности, было определено, является ли конечным или континуальным семейство β-замкнутых классов функций из P_4 с булевым замыканием $\mathcal{B}$.

Исследуем теперь множество $Q(k,k)$ при $k = 2^m, m \geq 3$. Очевидно, что множеству $Q(k,k)$ принадлежат все классы из множества $Q(k,4)$. Покажем, что $Q(k,k)$ принадлежат еще и классы O_0^2, MO^2, MO_0^2 булевых функций, а также двойственные им классы.

В книге [78] для каждого класса $\mathcal{B}$ из множества классов O_0^2, MO^2, MO_0^2 приводится пример базиса, состоящего из двух функций. Обозначим функции данного базиса через $s_1^{\mathcal{B}}$ и $s_2^{\mathcal{B}}$. Как и в разделе 4.1 определим функции $S_1^{\mathcal{B}}$ и $S_2^{\mathcal{B}}$ из P_k через их двоичные представления:

$$b_i(S_j^{\mathcal{B}}) = s_j^{\mathcal{B}},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, 2.$$

Тогда очевидно, что $\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}}\} \subset P_{k|2}$ и $B(\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}}\}) = \mathcal{B}$.

Приведем примеры континуальных семейств β-замкнутых классов функций из P_k с булевыми замыканиями O_0^2, MO^2, MO_0^2. Для этого для каждого $n \geq 4$ определим функцию W_n из P_k, которая зависит от $n^2 + 2$ переменных $x, y, z^1, \ldots, z^{n^2}$, через ее двоичное представление $\langle w_{n,1}, \ldots, w_{n,m}\rangle$:

$$\begin{aligned} w_{n,1} &= x_1 \vee \omega_{n^2}^{n^2-n+1}(z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n^2}), \\ w_{n,2} &= y_1 \vee \omega_{n^2}^{n^2-n+1}(z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n^2}), \\ w_{n,i} &= \omega_{n^2+2}^{n+3}(x_1, y_1, z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{n^2}) \text{ при } i = 3, \ldots, m, \end{aligned}$$

где через ω_n^a обозначена булева функция, определенная в разделе 3.3.

Так как каждая из компонент функции W_n зависит только от первых компонент переменных $x, y, z^1, \ldots, z^{n^2}$, то в дальнейшем будем обозначать булевы переменные x_1 и y_1 через x и y, а z_1^i — через z_i для всех $i = 1, \ldots, n^2$. Набор булевых переменных $(z_1, \ldots, z_{n^2})$ будем обозначать через $\widetilde{z}$. Также для удобства более не будем обозначать нижний индекс у функций

ω_n^a. Тогда компоненты функции W_n имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{n,1} &= x \vee \omega^{n^2-n+1}(\widetilde{z}), \\ w_{n,2} &= y \vee \omega^{n^2-n+1}(\widetilde{z}), \\ w_{n,i} &= \omega^{n+3}(x, y, \widetilde{z}) \text{ при } i = 3, \ldots, m. \end{aligned}$$

Покажем, что $b(W_n) \subset MO_0^2$ для каждого $n \geq 4$. Функции $w_{n,1}$ и $w_{n,2}$ мажорируют переменные x и y соответственно. Также они содержатся в множестве M_{01}, и поэтому принадлежат классу MO_0^∞, который содержится в классе MO_0^2. Функции $w_{n,i}$, $i = 3, \ldots, m$, равны функции $\omega^{n+3}(x, y, \widetilde{z})$. Рассмотрим два произвольных набора из $E_2^{n^2+2}$, на которых данная функция равна 0. По определению функции $\omega^{n+3}(x, y, \widetilde{z})$ среди компонент рассматриваемых наборов содержится не более $n + 2$ единиц. Поэтому суммарно в данных наборах не более $2n + 4$ единицы. Но при $n \geq 4$ справедливо неравенство $n^2 + 2 > 2n + 4$, а, значит, у рассматриваемых наборов есть общая нулевая компонента. Поэтому $\omega^{n+3}(x, y, \widetilde{z}) \in MO_0^2$. Значит $b(W_n) \subset MO_0^2$.

Лемма 5.1. *Для каждого $n \geq 2$ справедливо соотношение*

$$W_n \notin \left[\left\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \,\middle|\, \mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}\right\} \bigcup \left\{W_i \,|\, i \geq 4,\ i \neq n\right\}\right]_\beta.$$

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 4.4, поэтому опишем только основные этапы доказательства.

Обозначим множество $\left\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \,\middle|\, \mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}\right\} \bigcup \left\{W_i \,|\, i \geq 4,\ i \neq n\right\}$ через $\mathcal{A}$. По свойствам функций из множества $\mathcal{A}$ выполняется равенство $B(\mathcal{A}) = O^2$.

Предположим, что $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$. Тогда справедливо равенство

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}\big(\langle\omega_1, \ldots, \omega_m\rangle, \ldots, \langle\omega_{m(r-1)+1}, \ldots, \omega_{mr}\rangle\big),$$

где функция H принадлежит множеству $\mathcal{A}$, r — число переменных функции H, а булевы функции $\omega_1, \ldots, \omega_{mr}$ принадлежат множеству O^2. Если $H \in \left\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \,\middle|\, \mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}\right\}$, то функция W_n принимает не более двух значений, что неверно. Поэтому $H = W_p$ для некоторого числа $p,\ p \geq 4,\ p \neq n$, и $r = p^2 + 2$.

Поэтому все функции $q_1, \ldots, q_{m(p^2+2)}$ принадлежат классу O^2, а так как все компоненты функции W_n существенно зависят только от переменных $x, y, z_1, \ldots, z_{n^2}$, то без ограничения общности можно считать, что булевы функции $q_1, \ldots, q_{m(p^2+2)}$ зависят только от тех же переменных.

Обозначим функцию q_1 через h_1, функцию q_{m+1} через h_2, а для для всех $i,\ 1 \leq i \leq p^2$, обозначим функцию $q_{m(i+1)+1}$ через g_i. В введенных обозначениях соотношение (5.1) можно

записать при помощи эквивалентной системы равенств

$$\begin{cases} w_{n,1} &= h_1 \vee \omega^{p^2-p+1}(g_1, g_2, \ldots, g_{p^2}), \\ w_{n,2} &= h_2 \vee \omega^{p^2-p+1}(g_1, g_2, \ldots, g_{p^2}), \\ w_{n,i} &= \omega^{p+3}(h_1, h_2, g_1, g_2, \ldots, g_{p^2}) \text{ при } i = 3, \ldots, m. \end{cases}$$

Как и при доказательстве леммы 4.4 показывается, что для каждого множества A различных чисел $a_1, \ldots, a_n$ из семейства $\{1, \ldots, n^2\}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} h_1 &\geq x \,\&\, z_{a_1} \,\&\, z_{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_n}, \\ h_2 &\geq y \,\&\, z_{a_1} \,\&\, z_{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_n}. \end{aligned}$$

Причем для каждого такого множества A найдется множество $i(A)$ различных чисел $i(A,1), \ldots, i(A,p)$ из семейства $\{1, \ldots, p^2\}$, для которого имеют место соотношения

$$g_t \geq (x \vee y) \,\&\, z_{a_1} \,\&\, z_{a_2} \,\&\, \ldots \,\&\, z_{a_n} \text{ для всех } t \in i(A).$$

Далее устанавливается, что если $A \cap B = \varnothing$, то $i(A) \cap i(B) = \varnothing$. Следовательно $p > n$. Если же $|A \cap B| = n-1$, то $\big|i(A) \cap i(B)\big| \geq p-1$. На основе данного утверждения, при рассмотрении множеств $D_r = \{r+1, \ldots, r+n\}$ для всех $r = 0, \ldots, n$, несложным образом доказывается, что $\big|i(D_0) \cap i(D_n)\big| \geq p-n$. Но так как $D_0 \cap D_n = \varnothing$, то $n \geq p$, что противоречит ранее найденному соотношению для чисел p и n. Значит $W_n \notin [\mathcal{A}]_\beta$, что и требовалось доказать. ■

Применяя метод, использованный при доказательстве теоремы 4.1, и результаты леммы 5.1 легко доказывается следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть* $k = 2^m,\ m \geq 3$. *Тогда справедливы соотношения*

$$\{O_0^2, MO^2, MO_0^2, I_0^2, MI^2, MI_0^2\} \subset Q(k,k).$$

5.2 Классификация семейств β-замкнутых классов

Таким образом в настоящей работе для чисел k и r, таких, что $k = 2^m,\ m \geq 2,\ r = 2, 3, 4, k$, и классов $\mathcal{B}$ булевых функций были исследованы мощности семейств β-замкнутых классов функций из P_k, принимающих не более r значений, с булевым замыканием $\mathcal{B}$. Для следующих

классов $\mathcal{B}$ такие семейства являются континуальными.

k	r	$\mathcal{B}$
2^m, $m \geq 2$	2	$-$
2^m, $m \geq 2$	3	$O^\infty \subseteq \mathcal{B} \subseteq O^3$ $I^\infty \subseteq \mathcal{B} \subseteq I^3$
4	4	$MO_0^\infty \subseteq \mathcal{B} \subseteq O^3$ $MI_1^\infty \subseteq \mathcal{B} \subseteq I^3$
2^m, $m \geq 3$	4	$\mathcal{B} \in Q(4,4)$ $\mathcal{B} \in \{O^2, I^2\}$
2^m, $m \geq 3$	k	$\mathcal{B} \in Q(k,4)$ $\mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2, I_0^2, MI^2, MI_0^2\}$

Конечность соответствующих семейств β-замкнутых классов была установлена для следующих классов $\mathcal{B}$ булевых функций.

k	r	$\mathcal{B}$
2^m, $m \geq 2$	$2 \leq r \leq 4$	$\mathcal{B} \notin Q(k,r)$
2^m, $m \geq 3$	k	$\mathcal{B} \in \{P_2, T_0, T_1, T_{01}, S, S_{01}\}$ $\mathcal{B} \in \{L, L_0, L_1, L_{01}, SL\}$ $\mathcal{B} \in \{D, D_0, D_1, D_{01}, K, K_0, K_1, K_{01}\}$ $\mathcal{B} \in \{U, SU, MU, U_0, U_1, U_{01}, C, C_0, C_1\}$

Литература

1. *Андреева О. В., Голунков Ю. В.* Программно-замкнутые классы функций алгебры логики и предикатов // Кибернетика. 1981. № 5. С. 133.

2. *Байрамов Р. А.* Об одной серии предполных классов в k-значной логике // Кибернетика. 1967. № 1. С. 7 – 9.

3. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.

4. *Блохина Г. Н.* О предикатном описании класссов Поста // Дискретный анализ. 1970. Вып. 16. С. 16 – 29.

5. *Буевич В. А.* Вариант доказательства критерия полноты для функций k-значной логики // Дискретная математика. 1996. Т. 8, вып. 4. С. 11 – 36.

6. *Бурле Г. А.* Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. 1967. Вып. 10. С. 3 – 7.

7. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. 416 с.

8. *Гниденко В. М.* Нахождение порядков предполных классов в трёхзначной логике // Проблемы кибернетики. Вып. 8. — М.: Физматгиз, 1962. — С. 341–346.

9. *Голунков Ю. В.* Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k-значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. 1980. Вып. 17. С. 23 – 24.

10. *Дагаев Д. А.* О сложности псевдолинейных функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2010. № 2. С. 53 – 56.

11. *Дагаев Д. А.* О сложности функций многозначной логики, принимающих два значения // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2013. Вып. 18. С. 35 – 122.

12. *Данильченко А. Ф.* О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397 – 416.

13. *Дудакова О. С.* Об одном семействе предполных классов функций k-значной логики, не имеющих конечного базиса // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2006. № 2. С. 29 – 33.

14. *Дудакова О. С.* О классах k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. № 1. С. 31 – 37.

15. *Дудакова О. С.* О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2008. Вып. 17. С. 13 – 104.

16. *Захарова Е. Ю.* Об одном достаточном условии полноты в P_k // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1966. Вып. 16. С. 239 – 244.

17. *Захарова Е. Ю.* Критерий полноты системы функций из P_k // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1967. Вып. 18. С. 5 – 10.

18. *Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В.* О предполных классах в k-значных логиках // ДАН СССР. 1969. Т. 186, № 3. С. 509 – 512.

19. *Касим-Заде О. М.* О неявной выразимости булевых функций // О неявной выразимости булевых функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1995. № 2. С. 44 – 49.

20. *Касим-Заде О. М.* О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады РАН. 1996. Т. 348, № 3. С. 299 – 301.

21. *Кон П.* Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

22. *Кочергин А. В.* О глубине функций k-значной логики в бесконечных базисах // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 1. С. 56 – 59.

23. *Кудрявцев В. Б.* О покрытиях предполных классов k-значной логики // Дискретный анализ. 1970. Вып. 17. С. 32 – 44.

24. *Кудрявцев В. Б.* Относительно S-систем функций k-значной логики // ДАН СССР. 1971. Т. 199, № 1. С. 20 – 22.

25. *Кудрявцев В. Б.* О свойствах S-систем функций k-значной логики // Дискретный анализ. 1971. Вып. 19. С. 15 – 47.

26. *Кудрявцев В. Б.* О свойствах S-систем функций k-значной логики // Akademie-Verlag Berlin. EIK. 1973. 9, № 1/2. С. 81 – 105.

27. *Кудрявцев В. Б.* Функциональные системы. М.: Изд-во МГУ, 1982. 158 с.

28. *Кудрявцев В. Б.* Функциональные системы автоматов // Интеллектуальные системы. М.: Издательство РГГУ, 2006. Т. 10, вып. 1-4. С. 565-602.

29. *Кузнецов А. В.* О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 145 – 146.

30. *Кузнецов А. В.* Алгебра логики и её обобщения // Математика в СССР за 40 лет (1917–1957). Т. 1. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 102–115.

31. *Кузнецов А. В.* Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты // Усп. мат. наук. 1961. Т. 16 (98). С. 201 – 202.

32. *Кузнецов А. В.* О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5 – 33.

33. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 3. С. 5 – 24.

34. *Мальцев А. И.* Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 3. С. 61 – 74.

35. *Мальцев И. А.* Некоторые свойства клеточных подалгебр Поста и их основных клеток // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 571 – 587.

36. *Мальцев И. А.* Некоторые свойства клеток алгебр Поста // Дискретный анализ. 1973. Вып. 23. С. 24 – 31.

37. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976. 100 с.

38. *Мартынюк В. В.* Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1960. Вып. 3. С. 49 – 60.

39. *Марченков С. С.* О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып 36. С. 5 – 22.

40. *Марченков С. С., Деметрович Я., Ханнак Л.* О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 // Методы дискретного анализа и решение комбинаторных задач. 1980. Вып. 34. С. 38 – 73.

41. *Марченков С. С.* О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики II // Проблемы кибернетики. 1983. Вып 40. С. 261 – 266.

42. *Марченков С. С., Угольников А. Б.* Замкнутые классы булевых функций. М., Инст. Прикл. Матем. им. М. В. Келдыша, 1990. 148 с.

43. *Марченков С. С.* Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискретная математика. 1996. Т. 8, вып. 1. С. 99 – 128.

44. *Марченков С. С.* Предполнота замкнутых классов в P_k: предикатный подход // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука. Физматлит, 1996. Вып. 6. Под ред. С. В. Яблонского. 368 с.

45. *Марченков С. С.* S-классификация идемпотентных алгебр с конечными носителями // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 5. С. 587 – 589.

46. *Марченков С. С.* G-предполные классы многозначной логики // Дискретный анализ и исследование операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 47 – 70.

47. *Марченков С. С.* S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. 1997. Т. 9, вып. 3. С. 125 – 152.

48. *Марченков С. С.* A-классификация конечных инъективных функций // Дискретный анализ и исследование операций. 1997. Т.4, № 2. С. 15 – 42.

49. *Марченков С. С.* A-замкнуты классы идемпотентных функций многозначной логики, определяемые двуместными отношениями // Дискретный анализ и исследование операций. 1998. Т.5, № 1. С. 32 – 59.

50. *Марченков С. С.* A-классификация функций многозначной логики // Докл. РАН. 1999. Т. 366, № 4. С. 455 – 457.

51. *Марченков С. С.* Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000. 126 с.

52. *Марченков С. С.* S-классификация функций трехзначной логики. М.: Физматлит, 2001. 80 с.

53. *Марченков С. С.* Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 80 – 88.

54. *Марченков С. С.* Оператор E-замыкания на множестве частичных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2013. Вып. 18. С. 227 – 238.

55. *Михайлович А. В.* О замкнутых классах трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. № 4. С. 54 – 57.

56. *Михайлович А. В.* О классах функций трехзначной логики, порожденных монотонными симметрическими функциями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 1. С. 33 – 37.

57. *Михайлович А. В.* О замкнутых классах функций многозначной логики, порожденных симметрическими функциями // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2013. Вып. 18. С. 123 – 212.

58. *Михеева Е. А.* Классификация нижних окрестностей замкнутых классов из решётки $\mathfrak{L}_k$ // Дискретная математика. 1991. Т. 3, вып. 4. С. 3 – 15.

59. *Михеева Е. А.* Построение в P_k максимальных классов, не имеющих конечных базисов // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 2. С. 137 – 159.

60. *Нгуен Ван Хоа.* Об L-эквивалентности систем функций в многозначной логике // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 1. С. 37 – 47.

61. *Нгуен Ван Хоа.* О структурных свойствах семейства G-полных замкнутых классов k-значной логики // Докл. АН Беларуси. 1989. Т. 33, № 11. С. 969 – 971.

62. *Нгуен Ван Хоа.* О G-полных замкнутых классах k-значной логики // J. Inform. Process. Cybern. EIK. 1990. Т. 26, 5/6. С. 301 – 313.

63. *Нгуен Ван Хоа.* К описанию семейства G-полных замкнутых классов k-значной логики // Кибернетика. 1990. № 5. С. 9 – 12.

64. *Нгуен Ван Хоа.* О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики в P_3 // Дискретная математика. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 82 – 95.

65. *Нгуен Ван Хоа.* О семействах самодвойственных замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 87 – 108.

66. *Нгуен Ван Хоа.* Описание замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 16 – 19.

67. *Нгуен Ван Хоа.* Структура симметрических замкнутых классов k-значной логики. Докт. диссертация. Минск, 1995.

68. *Орехова Е. А.* Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2003. Вып. 12. С. 27 – 75.

69. *Поспелов Д. А.* Логические методы анализа и синтеза схем. Издание третье, переработанное и дополненное. М.: Энергия, 1974. 363 с.

70. *Соловьев В. Д.* Замкнутые классы в k-значной логике с операцией разветвления по предикатам // Дискретная математика. 1990. Т. 2, вып. 4. С. 18 – 25.

71. *Тайманов В. А.* О функциональных системах k-значной логики операциями программного типа // ДАН СССР. 1983. Т. 268, № 6. С. 1307 – 1310.

72. *Тайманов В. А.* Функциональные системы с операциями замыкания программного типа. Диссертация. 1983.

73. *Тарасова О. С.* Классы k-значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2001. № 6. С. 54 – 57.

74. *Тарасова О. С.* Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операции суперпозиции и перестановки // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2004. № 1. С. 25 – 29.

75. *Тарасова О. С.* Классы функций k-значной логики, замкнутые относительно операции суперпозиции и перестановки // Математические вопросы кибернетики. 2004. Вып. 13. С. 59 – 112.

76. *Трахтенброт Б. А.* Асимптотическая оценка сложности логических сетей с памятью. // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 281 – 284.

77. *Угольников А. Б.* О замкнутых классах Поста // Изв. вузов. Сер. Матем. 1988. № 7. С. 79 – 88.

78. *Угольников А. Б.* Классы Поста. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008. 64 с.

79. *Угольников А. Б.* О некоторых задачах в области многозначных логик. Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля, 2010 г.) / Под редакцией О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. С. 18 – 34.

80. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.

81. *Шоломов Л. А.* Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. СПб.: Лань, 2011. 432 с.

82. *Яблонский С. В.* О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР. 1954. Т. 95, № 6. С. 1152 – 1156.

83. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та АН СССР им. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5 – 142.

84. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966. 120 с.

85. *Яблонский С. В.* Обзор некоторых результатов в области дискретной математики // «Информационные материалы». 1970. № 5 (42). С. 5 – 15

86. *Яблонский С. В.* Строение верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k // ДАН СССР. 1974. Т. 218, № 2. С. 304 – 307.

87. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А.* Предполные классы в многозначных логиках. М.: Изд-во МЭИ, 1997. 142 с.

88. *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007. 188 с.

89. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2008. 384 с.

90. *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44 – 46.

91. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. М.: Наука, 1974. 312 с.

92. Конспект лекций *О. Б. Лупанова* по курсу ”Введение в математическую логику“ / Отв. ред. А. Б. Угольников. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. 192 с.

93. *Bagyinszki J., Demetrovics J.* Lineáris osztályok szerkezete primszám értékü logikában // MTA SZTAKI. 1976. **16**. 25 – 52.

94. *Bagyinszki J., Demetrovics J.* The lattice of linear classes in prime-valued logics // Banach Center Publications (Warszawa). 1982. 7. 105 – 123.

95. *Barris S., Willard R.* Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. 1987. **101**, 3. 427 – 430.

96. *Bulatov A. A., Lau D., Strauch B.* The cardinalities of sublattices of depth 2 in the lattices of clones on a 3-elementary set. Preprint Univ. Rostock. 1996.

97. *Bulatov A. A., Krokhin A., Safin K., Sukhanov E.* On the structure of clone lattices // General Algebra and Discrete Mathematics. Heldermann-Verlag, Berlin. 1995. 27 – 34.

98. *Bulatov A. A.* Polynomial reducts of modules I. Rough classification // Mult.-Valued Log. 1998. **3**, 2. 135 – 154.

99. *Bulatov A. A.* Polynomial reducts of modules II. Algebras of primitive and nilpotent functions // Mult.-Valued Log. 1998. **3**, 3. 173 – 193.

100. *Bulatov A. A., Krokhin A., Safin K., Semigrodskikh A., Sukhanov E.* On the structure of clone lattices II // Mult.-Valued Log. 2001. **7**, 5/6. 379 – 389.

101. *Bulatov A. A.* Conditions satisfied by clone lattices // Algebra Universalis. 2001. **45**, 1/2. 237 – 241.

102. *Burosch G.* Über die Ordnung der prëvollständigen Klassen in Algebren von Prädikaten. Preprint, WPU Rostock. 1973.

103. *Burosch G.* Über Algebren von Prädikaten. Preprint Univ. Rostock. 1974.

104. *Burosch G., Dassow J., Harnaw W., Lau, D.* Über Algebren von Prädikaten. Preprint, WPU Rostock. 1979.

105. *Burosch G., Dassow J., Harnaw W., Lau, D.* On subalgebras of an algebra of predicates // J. Inform. Process. Cybern. EIK. 1985. **21**, 1/2. 9 – 22.

106. *Demetrovics J., Hannák L.* The cardinality of closed sets in precomplete classes in k-valued logics // Acta Cybernetica. 1979. **4**, 3. 273 – 277.

107. *Demetrovics J., Hannák L.* On the cardinality of self-dual closed classes in k-valued logics // MTA SZTAKI Közlemenyek. 1979. **23**. 7 – 16.

108. *Demetrovics J., Hannák L., Marchenkov, S. S.* Some remarks on the structure of P_3 // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1980. **2**. 215 – 219.

109. *Demetrovics J., Hannák L.* The number of reduct of a preprimal algebra // Algebra Universalis. 1983. **16**, 1. 178 – 185.

110. *Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L.* Near unanimity functions and partial orderings // Proc. 14 ISMVL, Manitoba. 1984. 52 – 56.

111. *Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L.* On algebraic properties of monotone clones // Order. 1986. **3**. 219 – 225.

112. *Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L.* On monotone clones // MTA SZTAKI Tanulmanyok. 1987. **202**. 39 – 62.

113. *Demetrovics J., Hannák L.* Construction of large sets of clones // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math. 1987. **33**. 127 — 133.

114. *Grünwald N.* Bestimmung sämtlicher abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist // Rostock, Math. Kolloq. 1983. **23**. 5 – 26.

115. *Grünwald N.* Beschreibung aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist, mit Hilfe von Relationen // Rostock, Math. Kolloq. 1983. **23**. 27 – 34.

116. *Grünwald N.* Strukturaussagen über den Verband der abgeschlossenen Mengen von $P_{k,2}$, insbesondere von $P_{3,2}$. Dissertation A, Universität Rostock. 1984.

117. *Lau D.* Prävollständige Klassen von $P_{k,l}$. // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. EIK. 1975. **11**, 10 – 12. 624 – 626.

118. *Lau D.* Eigenschaften gewisser abgeschlossener Klassen in Postschen Algebren. Dissertation A, Universität Rostock. 1977.

119. *Lau D.* Kungruenzen auf gewissen Teilklassen von $P_{k,l}$ // Rostock, Math. Kolloq. 1977. **3**. 37 – 43.

120. *Lau D.* Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math. 1978. **24**. 79 – 96.

121. *Lau D.* Über die Anzahl von abgeschlossenen Mengen linearer Funktionen der n-wertigen Logik // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. EIK. 1978. **14**, 11. 561 – 563.

122. *Lau D.* Submaximale Klassen von P_3 // J. Inform. Process. Cybern. EIK. 1982. **18**, 4/5. 227 – 243.

123. *Lau D.* Die maximalen Klassen von $Pol_k(0)$ // Rostock, Math. Kolloq. 1982. **19**. 29 – 47.

124. *Lau D.* Funktionenalgebren über endlichen Mengen. Dissertation B, Unversität Rostock. 1984.

125. *Lau D.* Die maximalen Klassen von $Pol_k\{x, x+1 \, mod \, k) | x \in E_k\}$ // Rostock, Math. Kolloq. 1984. **25**. 23 – 30.

126. *Lau D.* Ein Kriterium für den Nachweis der Abzählbarkeit gewisser Teilverbände des Verbandes der abgeschlossenen Mengen von Funktionen der k-wertigen Logik // Rostock, Math. Kolloq. 1986. **30**. 11 – 18.

127. *Lau D.* Über abgeschlossene Mengen linearer Funktionene in mehrwertigen Logiken // J. Inform. Process. Cybern. EIK. 1988. **24**, 7/8. 367 – 381.

128. *Lau D.* Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{k,2}$. // J. Inform. Process. Cybern. EIK. 1988. **24**, 10. 395 – 513.

129. *Lau D.* Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{3,2}$ // J. Inform. Process. Cybern. EIK. 1988. **24**, 11/12. 561 – 572.

130. *Lau D., Schröder B.* On the number of closed subsets of linear functions in the 6-valued logic // Beiträge zur Algebra und Geometrie. 1990. **31**. 19 – 32.

131. *Lau D.* On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's theorem) // J. Inform. Process. Cybern. EIK. 1991. **23**, 3. 167 – 178.

132. *Lau D.* Die maximalen Klassen von $\cap_{a \in Q} Pol_k\{a\}$ für $Q \subseteq E_k$ (Ein Kriterium für endliche semi-primale Algebren mit nur trivialen Unteralgebren) // Rostock, Math. Kolloq. 1995. **48**. 27 – 46.

133. *Lau D.* Die maximalen Klassen von $\cap_{\varrho \in Q} Pol_3 \varrho$ für $Q \subseteq \mathfrak{B}(\{0,1,2\})$, Teil I // Rostock, Math. Kolloq. 1997. **51**. 111 – 126.

134. *Lau D.* Die maximalen Klassen von $\cap_{\varrho \in Q} Pol_3 \varrho$ für $Q \subseteq \mathfrak{B}(\{0,1,2\})$, Teil II // Rostock, Math. Kolloq. 1999. **52**. 85 – 105.

135. *Lau D.* Die maximalen Klassen von $\cap_{\varrho\in Q} Pol_3\varrho$ für $Q \subseteq \mathfrak{B}(\{0,1,2\})$, Teil III // Rostock, Math. Kolloq. 1999. **53**. 3 – 22.

136. *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. 668 p.

137. *Lévai L., Pálfy P. P.* On binary minimal clones // Acta Cybernetica. 1996. **12**, 3. 279 – 294.

138. *Lo Czu Kai.* Precompleteness of a set and rings of linear functions // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1963. 2.

139. *Lo Czu Kai.* On the precompleteness of the classes of functions preserving a partition // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1963. 2.

140. *Lo Czu Kai, Lju Sjui Hua.* Precomplete classes defined by binary relations in many-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1963. 4.

141. *Lo Czu Kai.* Precomplete classes defined by normal k-ary relations in k-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1964. 3. 39 – 50.

142. *Machida H* On closed sets of three-valued monotone logical functions // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 28, Finite Algebra and multiplevalued logic; Szeged (Hungary). 1979. 441 – 467.

143. *Pan Jun-Cze.* A solving method for finding all precomplete classes in many-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. 1962. V. 2 (Chinese).

144. *Pippinger N.* Theories of Computability. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1997. 252 p.

145. *Pöschel R., Kaluznin L. A.* Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin. 1979. 260 p.

146. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. **43**, 3. 163 – 185.

147. *Post E. L.* The two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press. 1941. **5** 122 p.

148. Solvability, provability, definability: the collected works of Emil L. Post / Martin Davis, editor. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser. 1994. 554 p.

149. *Quackenbush R. W.* A new proof of Rosenberg's primal algebra chacterization theorem // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 28, Finite Algebra and multiplevalued logic; Szeged (Hungary). 1981. 603 – 604.

150. *Quackenbush R. W.* A survey of minimal clones // Aequationes Math. 1995. **50**, 1-2. 3 – 16.

151. *Rosenberg I. G.* La structure des functions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris, Group 5. 1965. **260**. 3817 – 3819.

152. *Rosenberg I. G.* Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd., Praha. 1970. **80**. 3 – 93.

153. *Rosenberg I. G.* Completeness, closed classes and relations in multiplevaued logics // Proc. Internat. Sympos. on multiple-valued logics, Morgantown, 1974. 1 – 26.

154. *Rosenberg I. G., Szendrei Á.* Submaximal clones with a prime order automorphism // Acta Sci. Math. (Szeged). 1985. **49**. 29 – 48.

155. *Rosenberg I. G.* Minimal clones I: The five types. Lectures in Universal Algebra (L. Szabo, Á. Szendrei eds.) // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 43, North Holland. 1986. 405 – 427.

156. *Rosenberg I. G., Machida H.* Gigantic pairs of minimal clones — characterization and existence // Mult.-Values Log. 2001. **7**, 1/2. 129 – 148.

157. *Salomaa A.* Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain I // Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI. 1962. 53. 9 p.

158. *Salomaa A.* Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain II // Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI. 1963. 63. 19 p.

159. *Salomaa A.* On infinitely generated sets of operations in finite algebras // Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI. 1964. 74. 12 p.

160. *Salomaa A.* On the heights of closed sets of operations in finite algebras // Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. AI. 1965. 363. 12 p.

161. *Salomaa A.* On some algebraic notions in the theory of truth-functions // Acta Philos. Fennicae. 1965. **18**. 193 – 201.

162. *Slupecki J.* Kriterium pe-lnosci wielowartosciowych systemow logiki zdań // C. R. Séanc. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III. 1939. **32**. 102 – 109.

163. *Szabó L.* On minimal and maximal clones // Acta Cybernetica. 1992. **10**, 4. 323 – 327.

164. *Szendrei, Á.* Idempotent reducts of abelian groups // Acta Sci. Math. (Szeged). 1976. **38**. 171 – 182.

165. *Szendrei, Á.* On closed classes of linear operations over a finite set of squarefree cardinality // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. EIK. 1978. **14**, 11. 547 – 559.

166. *Szendrei, Á.* On closed classes of quasilinear functions // Czechoslovak Math. J. 1980. **80**. 498 – 509.

167. *Szendrei, Á.* On the idempotent reducts of modules I // Universal algebra, Proc. Colloq., Esztergom/Hung. 1977, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 29. 1982. 753 – 767.

168. *Szendrei, Á.* On the idempotent reducts of modules II // Universal algebra, Proc. Colloq., Esztergom/Hung. 1977, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 29. 1982. 769 – 780.

169. *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. 1986. **3**. 211 – 218.

170. *Waldhauser T.* Minimal clones generated by majority operations // Algebra Universalis. 2000. **44**, 1/2. 15 – 26.

Публикации автора по теме диссертации

171. *Подолько Д. К.* О классах функций, замкнутых относительно специальной операции суперпозиции // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 6. С. 54 – 57.

172. *Подолько Д. К.* Об одном континуальном семействе бета-замкнутых классов функций многозначной логики // Прикладная дискретная математика. 2014. № 2(24). С. 12 – 20.

173. *Подолько Д. К.* О классах функций k-значной логики, принимающих не более трех значений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2014. Т. 156, кн. 3. С. 98–109.

174. *Подолько Д. К.* О некоторых свойствах операции суперпозиции специального вида // Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18 – 23 июня 2012 г.). / Под редакцией О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 213 – 215.

175. *Подолько Д. К.* Об особенностях специальной операции суперпозиции в многозначной логике // Материалы IX молодежной научной школе по дискретной математике и ее

приложениям (Москва, 16 – 21 сентября 2013 г.). Под редакцией А. В. Чашкина. М.: Изд-во ИПМ РАН, 2013. С. 92 – 97.

176. *Подолько Д. К.* О мощности некоторых семейств бета-замкнутых классов функций многозначной логики // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVII международной конференции (Казань, 16 – 20 июня 2014 г.). Под редакцией Ю. И. Журавлева. Казань: Отечество, 2014. С. 232 – 234.