

**Отзыв официального оппонента о диссертации Д.К.Подолько
«О классах функций многозначной логики, замкнутых относительно
усиленной операции суперпозиции»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика**

Описание функциональных свойств различных систем дискретных функций – одна из интересных исследовательских задач в дискретной математике и математической кибернетике. Важным классом дискретных функций являются функции многозначной логики (множество всех функций k -значной логики обозначают P_k). Исторически изучение свойств функций многозначной логики началось с изучения самого простого случая – случая булевых функций. На этом пути рядом исследователей были получены существенные продвижения, а в некоторых задачах и окончательные результаты. Важной задачей является задача выразимости. Для произвольного множества функций $A \subseteq P_k$ и произвольного оператора φ , определенного на множестве P_k , ставится вопрос о том, какие функции можно выразить через функции системы A с помощью оператора φ . Для заданного оператора φ особый интерес представляет описание замкнутых относительно φ систем A , то есть таких систем, что $[A] = A$ (через $[A]$ обозначают замыкание системы A относительно оператора φ). Одним из основных рассматриваемых операторов является оператор суперпозиции. Э.Пост описал множество всех замкнутых классов булевых функций относительно операции суперпозиции. Он показал, что множество всех замкнутых классов булевых функций счетно и построил соответствующую решетку замкнутых классов булевых функций по включению.

Существенной сложностью, с которой сталкиваются при исследовании функциональных свойств в k -значных логиках при $k \geq 3$, является континуальность множества всех замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов функций из P_k и отсутствие на сегодняшний день его более-менее удобного описания. Одними из наиболее изученных подмножеств множества P_k являются множества вида $P_{k|r}$ – множества всех функций из P_k , принимающих не более r значений, $k \geq 3$, $r \geq 2$, $k > r$. Тем не менее, точное описание множества всех замкнутых классов функций из $P_{k|r}$ не получено (но известно, что оно имеет мощность континуума).

Усиление оператора суперпозиции является одним из возможных способов построения новых классификаций замкнутых классов функций из P_k . В своей кандидатской диссертации Д.К. Подолько идет именно по этому пути. Автор определяет некоторое соответствие между функциями из P_k и наборами булевых функций. При $k = 2^m$, $m \geq 2$, каждое из чисел $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ кодируется набором из нулей единиц, являющимся записью этого числа в двоичной системе счисления. Тогда функции $F(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ можно поставить в соответствие набор из m n -местных булевых функций. Это соответствие называется двоичным представлением функции F (определение 1.1). На основе этого соответствия вводится новая операция двоичной S -суперпозиции (определение 1.7), оператор S -замыкания (определение 1.10), операция двоичной суперпозиции (определение 1.14) и оператор β -замыкания (определение

1.15). Оказывается, что операторы S -замыкания и β -замыкания эквивалентны (теорема 1.2), поэтому в дальнейшем автор останавливается на использовании определения этого оператора как оператора β -замыкания.

Далее автор ставит задачу описать классы функций из $P_{k|r}$, замкнутые относительно операций двоичной суперпозиции и введения несущественной переменной (такие классы называются β -замкнутыми). Каждому β -замкнутому классу естественным образом на основе двоичного представления ставится в соответствие замкнутый класс булевых функций. Теперь для каждого фиксированного замкнутого класса булевых функций B возникает вопрос: каково множество β -замкнутых классов функций из $P_{k|r}$ с булевым замыканием B ? Глава 2 посвящена исследованию случая $r = 2$, глава 3 – случая $r = 4$, глава 4 – случая $r = 5$. В главе 5 приводятся отдельные результаты для случая $r > 5$, обобщающие результаты из предыдущих глав.

Основные результаты работы содержатся в главах 2–4. В главе 2 автор устанавливает, что для произвольного замкнутого класса булевых функций B множество β -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ с булевым замыканием B конечно (теорема 2.1). Мгновенно из этого вытекает счетность множества всех β -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ (теорема 2.2).

В главе 3 автор сначала показывает, что, в отличие от случая $r = 2$, при $r = 3$ множество всех β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ имеет мощность континуума (это следует из теоремы 3.1). Далее доказывается, что для любого замкнутого класса булевых функций B множество β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием B либо конечно, либо имеет мощность континуума; приводится классификация всех замкнутых классов булевых функций по мощности множества β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием B (теорема 3.5).

В главе 4 для случая $r = 4$ получены результаты, аналогичные по своему характеру результатам главы 3: установлено, что для любого замкнутого класса булевых функций B множество β -замкнутых классов функций из $P_{k|4}$ с булевым замыканием B либо конечно, либо континуально; приведено соответствующее разбиение всех замкнутых классов булевых функций на два множества (теоремы 4.5, 4.6). Обнаруживается, что это разбиение различается для случая $k = 4$ и для случаев $k = 2^m$, $m \geq 3$: для класса O^2 (и двойственного ему класса I^2) при $k = 4$ существует лишь конечное число β -замкнутых классов функций из $P_{k|4}$ с булевым замыканием O^2 (соответственно I^2), а при $k = 2^m$, $m \geq 3$ мощность этого множества континуальна.

Эти результаты являются новым важным шагом на пути к пониманию структуры замкнутых классов функций многозначной логики.

В работе содержится небольшое количество мелких опечаток. Так, на стр. 42 в последнем предложении следует читать «не приводится в этой работе», а на стр. 92 в третьем предложении с конца пропущена запятая после $\tilde{\beta}$. Однако эти мелкие погрешности несколько не влияют на положительное впечатление от качества текста или, тем более, на справедливость полученных результатов, которые являются новыми и интересными.

Считаю, что кандидатская диссертация Д.К.Подолько «О классах функций многозначной логики, замкнутых относительно усиленной операции суперпозиции» отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Дмитрий Константинович Подолько, заслуживает присуждения ученой степени кан-

дидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

26 января 2015 г.

Зам. проректора
доцент кафедры высшей математики НИУ ВШЭ
к.ф.-м.н.



Д. А. Дагаев

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРСОНАЛА
ЗАМ. НАЧ. ОТДЕЛА ПО
РАБОТЕ С ННР
ТИХОНОВА Е.Р.

26.01.2015



Адрес: 101000, Москва, Мясницкая ул., д. 20,
телефон: +7 (495) 771-32-32,
e-mail: hse@hse.ru