ФГБОУ ВО “МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА”

На правах рукописи

Лимонченко Иван Юрьевич

КОМБИНАТОРНАЯ КОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА И ТОПОЛОГИЯ МОМЕНТ-УГОЛ КОМПЛЕКСОВ

Специальность 01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2014

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета ФГБОУ ВО “Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова”

Научный руководитель:	**Панов Тарас Евгеньевич**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Лексин Владимир Павлович**, доктор физико-математических наук, профессор (ГАОУ ВПО “Московский государственный областной социально-гуманитарный институт” (Коломенский государственный педагогический институт), факультет математики, физики, химии, информатики, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин)
	Кустарев Андрей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент (НИУ “Высшая школа экономики”, факультет компьютерных наук, доцент департамента больших данных и информационного поиска)
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО “Санкт-Петербургский государственный университет”

Защита диссертации состоится 27 февраля 2015 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВО “Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова” по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО “Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова” (Москва, Ломоносовский проспект, дом 27, сектор А, 8 этаж).

Автореферат разослан 26 января 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВО МГУ им. М.В.Ломоносова доктор физико-математических наук, профессор — А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

На основе классических результатов комбинаторной коммутативной алгебры, алгебраической топологии, выпуклой геометрии, эквивариантной топологии, симплектической геометрии и топологии, активно развивается торическая топология. В то же время, актуальным разделом алгебраической геометрии стала торическая геометрия, изучающая свойства торических многообразий. Каждому выпуклому многограннику в $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами вершин можно сопоставить алгебраическое многообразие с действием алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$, являющееся эквивариантной компактификацией тора $(\mathbb{C}^*)^n$ относительно его стандартного действия на себе. С одной стороны, эта конструкция дает обширный класс примеров алгебраических многообразий, свойства которых можно эффективно описывать в терминах комбинаторных данных. С другой стороны, конструкция торического многообразия позволяет доказывать сильные результаты о комбинаторике многогранников при помощи методов алгебраической геометрии. Одним из таких результатов является g-теорема, дающая полную характеризацию f-векторов простых многогранников.[1]

М. Дэвис и Т. Янушкиевич[2] ввели понятие квазиторического многообразия, являющееся топологическим аналогом торического многообразия. На квазиторическом многообразии M^{2n} определено действие компактного тора T^n, локально изоморфное стандартному действию T^n на $\mathbb{C}^n$, а пространством орбит этого действия является простой многогранник P^n. Квазиторические многообразия представляют обширный класс примеров топологических пространств с богатой геометрией и топологией, причем их свойства можно описывать в комбинаторных терминах. В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов и Н. Рэй[3,4] показали, что в размерностях, больших двух, каждый класс комплексных кобордизмов содержит связное квазиторическое многообразие с естественной стабильно комплексной структурой, согласованной с действием тора.

Для определения квазиторического многообразия над простым много-

[1] L. Billera, C. Lee, *A proof of sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes*, Bull.Amer.Math.Soc. (N.S.), 1980, V.2, №1, pp. 181–185.

[2] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 1991. V. 62, №2, pp. 417–451.

[3] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Torus Actions in Topology and Combinatorics* (in Russian). MCCME, Moscow, 2004, 272 pages.

[4] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*, Moscow Math. J., V.7, No. 2, 2007, pp. 219–242.

гранником P^n с m гипергранями М. Дэвису и Т. Янушкиевичу потребовалась конструкция $(m+n)$-мерного многообразия $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием тора T^m, для которого P является пространством орбит. Каждое квазиторическое многообразие над простым многогранником P, в случае если они существуют, гомеоморфно фактор-пространству многообразия $\mathcal{Z}_P$ по свободному действию некоторого подтора $T^{m-n} \subset T^m$. В своих работах В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов предложили рассматривать многообразия $\mathcal{Z}_P$ как центральный объект исследования в торической топологии и развили различные подходы к изучению этих пространств, названных ими *момент-угол многообразиями*.[5,6,7] В работе В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова[8] показано, что существует более общая алгебро-топологическая конструкция, сопоставляющая каждому симплициальному комплексу K на m вершинах клеточный *момент-угол комплекс* $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ с действием тора T^m. При помощи канонического разбиения простого многогранника на кубы В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов показали, что для простого многогранника P момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ эквивариантно гомеоморфно момент-угол комплексу $\mathcal{Z}_{\partial P^*}(D^2, S^1)$, где ∂P^* — граница двойственного к P симплициального многогранника.

Термин «момент-угол комплекс» отсылает к клеточной структуре пространства $\mathcal{Z}_K$, последнее может быть получено как результат склейки произведений полидисков и торов, которые параметризуются симплексами комплекса K. Момент-угол комплексы были введены и впервые изучены в работах В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова[9,10] как клеточные разбиения торических пространств, возникающих в некоторых конструкциях алгебраической геометрии, симплектической геометрии и комбинаторной топологии, на первый взгляд, не связанных между собой. Среди них

- Пересечения специального вида вещественных и эрмитовых квадрик,

[5] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия тора и комбинаторика многогранников*, Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 225, 1999, стр.96–131.

[6] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Москва, 2004.

[7] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*, Moscow Math. J., V.7, No. 2, 2007, pp. 219–242.

[8] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра*, УМН, 55:5(335), стр.3–106, 2000.

[9] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Algebraic topology of manifolds defined by simple polyhedra.* Uspekhi Mat. Nauk **53** (1998), no.3, 195–196 (Russian); Russian Math. Surveys **53** (1998), no. 3, 623–625 (English translation).

[10] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Torus actions and the combinatorics of polytopes.* Trudy Mat. Inst. Steklova **225** (1999), 96–131 (Russian); Proc. Steklov Inst. Math. **225** (1999), 87–120 (English translation).

изучавшиеся в топологии и голоморфной динамике[11,12,13,14]

- Множества уровня отображения моментов, возникающие в конструкции гамильтоновых торических многообразий при помощи симплектической редукции[15,16]

- Ряд конструкций пространств орбит $P \times G/\sim$, где P – многогранник, а G – конечная группа или тор, источником которых является теория групп Кокстера[17,18,19]

- Дополнения конфигураций координатных подпространств в комплексном пространстве, возникающие в конструкции торических многообразий как алгебраических факторов[20], и также изученные в общей теории конфигураций плоскостей[21,22]

Исходя из существования естественной клеточной структуры на пространстве $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$, В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов[23] вычислили кольцо когомологий момент-угол комплексов и момент-угол многообразий простых многогранников над произвольным полем или кольцом целых чисел $\Bbbk$. Они показали, что для произвольного симплициального комплекса K на m вершинах имеет место изоморфизм

$$H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \Bbbk) \cong \mathrm{Tor}_{\Bbbk[v_1,\ldots,v_m]}(\Bbbk[K], \Bbbk),$$

[11] César Camacho, Nicolaas Kuiper and Jacob Palis. *The topology of holomorphic flows with singularity.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **48** (1978), 5–38.

[12] S. Lopez de Medrano, *The topology of the intersection of quadrics in $\mathbb{R}^n$*, Lecture Notes in Mathematics 1370 (1989), 280–292.

[13] Santiago López de Medrano and Alberto Verjovsky. *A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds.* Bol. Soc. Mat. Brasil. **28** (1997), 253–269.

[14] Frédéric Bosio and Laurent Meersseman. *Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes.* Acta Math. **197** (2006), no. 1, 53–127.

[15] Frances Kirwan. *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry.* Mathematical Notes, 31. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1984.

[16] Michèle Audin. *The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds.* Progress in Mathematics, 93. Birkhäuser, Basel, 1991.

[17] Ernest B. Vinberg. *Discrete linear groups generated by reflections.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **35** (1971), 1072–1112 (Russian); Math. USSR Izvestija **5** (1971), no. 5, 1083–1119 (English translation).

[18] Michael W. Davis. *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space.* Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 2, 293–324.

[19] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 1991. V. 62, №2, pp. 417–451.

[20] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. 4 (1995), pp. 17–50; arXiv:alg-geom/9210008v2.

[21] Mark Goresky and Robert MacPherson. *Stratified Morse Theory.* Springer, Berlin–New York, 1988.

[22] Mark de Longueville. *The ring structure on the cohomology of coordinate subspace arrangements.* Math. Zeitschrift **233** (2000), no. 3, 553–577.

[23] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра*, УМН, 55:5(335), стр.3–106, 2000.

где $\Bbbk[K]$ — алгебра Стенли–Райснера симплициального комплекса K. Их подход к исследованию когомологий получил развитие в работах И. В. Баскакова.[24,25]

В диссертации исследована связь между комбинаторной структурой (частично упорядоченным множеством граней) простого многогранника P (или произвольного комплекса K, уже необязательно являющегося многогранной сферой $K = K_P = \partial P^*$), алгебраическими и гомологическими свойствами алгебры Стенли–Райснера $\Bbbk[K]$ и топологической структурой момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$. В общем случае топология $\mathcal{Z}_K$ чрезвычайно сложна, но в ряде примеров классических выпуклых простых многогранников удается описать (по крайней мере аддитивную) структуру кольца когомологий $H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \Bbbk)$, а в некоторых случах и получить описание топологического типа $\mathcal{Z}_K$.

Теория момент-угол комплексов тесно связана с торической геометрией. Торическое алгебраическое многообразие, соответствующее выпуклому рациональному многограннику, можно определить при помощи конструкции Батырева–Кокса.[26]А именно, рациональному многограннику P с m гипергранями ставится в соответствие пространство $\mathbb{C}^m \setminus A_P$ — дополнение до конфигурации координатных подпространств, а торическое многообразие определяется как категорный фактор этого дополнения по действию некоторой алгебраической подгруппы некомпактного тора $(\mathbb{C}^*)^m$. Алгебраическое многообразие $\mathbb{C}^m \setminus A_P$ является алгебраическим аналогом момент-угол пространства $\mathcal{Z}_P$. Между конфигурациями координатных подпространств пространства $\mathbb{C}^m$ и симплициальными комплексами на m вершинах имеется естественная биекция, которая сопоставляет симплициальному комплексу K конфигурацию $\{L_I \mid I \notin K\}$, где $L_I = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_i = 0$ при $i \in I\}$. При такой биекции конфигурации плоскостей A_P из конструкции Батырева–Кокса соответствует нерв-комплекс K_P.

Когомологии и эквивариантные когомологии момент-угол пространства $\mathcal{Z}_P$ выражаются в терминах алгебры Стенли–Райснера нерв-комплекса K_P согласно результатам В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова[27] и М. Дэвиса и Т. Янушкиевича[28] соответственно. Алгебры Стенли–Райснера, введенные в

[24] И. В. Баскаков, *Когомологии K-степеней пространств и комбинаторика симплициальных разбиений*, УМН, 57:5(347) (2002), стр.147–148.

[25] И. В. Баскаков, *Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов*, УМН, 58:5(353) (2003), стр.199–200

[26] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. 4 (1995), pp. 17–50; arXiv:alg-geom/9210008v2.

[27] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра*, УМН, 55:5(335), стр.3–106, 2000.

[28] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 1991.

работе Дж.Райснера,[29] являются классическим объектом изучения в комбинаторике и коммутативной алгебре. Произвольному конечному симплициальному комплексу K ставится в соответствие градуированная алгебра Стенли–Райснера над полем $\mathbb{k}$. Такое сопоставление позволило изучать комбинаторные свойства симплициальных комплексов в терминах алгебраических свойств их алгебр Стенли–Райснера при помощи развитой техники коммутативной и гомологической алгебры. В случае обобщенных многогранников усечения в диссертации дается описание их идеала Стенли–Райснера и вычисляются все их биградуированные (алгебраические) числа Бетти. Биградуированными числами Бетти называются ранги модулей свободной резольвенты,

$$\beta^{-i,2j}(K) = \operatorname{rk} \operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{k}[K], \mathbb{k}).$$

Согласно теореме М.Хохстера,[30] биградуированные числа Бетти определяются топологией полных подкомплексов:

$$\beta^{-i,2j}(K) = \sum_{J\subseteq[m],|J|=j} \operatorname{rk} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_J; \mathbb{k}).$$

В работах В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова было приведено новое доказательство этой формулы, основанное на интерпретации Tor-алгебры симплициального комплекса $\operatorname{Tor}^{*,*}_{\mathbb{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{k}[K], \mathbb{k})$ как алгебры когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$. И. В. Баскаковым[31] было описано умножение в Tor-алгебре в терминах полных подкомплексов. Вычисление биградуированных чисел Бетти момент-угол комплексов дает возможность оценить ранги групп гомологий момент-угол комплексов и многообразий, и, вместе с тем, дать оценку на дефект (разность между левой и правой частями неравенства) в известной гипотезе Гальперина о торическом ранге для конечномерных клеточных пространств с почти свободным действием тора, доказанной для момент-угол пространств Ю.М.Устиновским[32].

В работах А. Постникова[33] и Е. Фейхтнер и Б. Штурмфельса[34] был

V. 62, No. 2, pp. 417–451.

[29] G. Reisner, *Cohen–Macaulay quotients of polynomial rings*, Advances in Math., V.21, No. 1, 1976, pp. 30–49.

[30] M. Hochster, *Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in Ring theory, II (Proc. Second Conf.,Univ. Oklahoma, Norman, Okla., 1975), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., V. 26, pp.171–223, Dekker, New York, 1977.

[31] И. В. Баскаков, *Когомологии K-степеней пространств и комбинаторика симплициальных разбиений*, УМН, 57:5(347) (2002), стр.147–148.

[32] Ю. М. Устиновский, *Гипотеза о торическом ранге для момент-угол комплексов*, Матем. заметки, 90:2 (2011), стр.300–305.

[33] A. Postnikov, *Permutohedra, associahedra, and beyond*, arXiv: math.CO/0507163.

[34] E.-M. Feichtner, B. Sturmfels, *Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans*, Portugaliae Mathematica 62 (2005), 437–468.

введен важный класс простых многогранников, называемых *нестоэдрами*. Как было показано А. Зелевинским,[35] любой нестоэдр является многогранником Дельзанта. Наиболее известными и важными в геометрических и практических приложениях из них являются пермутоэдры, стеллаэдры, ассоциаэдры (или многогранники Сташефа) и циклоэдры (или многогранники Ботта–Таубса). В диссертации дано общее определение нестоэдров как сумм Минковского симплексов, а также вычислены некоторые биградуированные числа Бетти вида $\beta^{-i,2(i+1)}$ и доказано обращение их в нуль для всех $i > i_{max}$, имеющего геометрическое описание. Также в диссертации показано, что серии пермутоэдров и стеллаэдров дают примеры момент-угол многообразий, в кольце целочисленных когомологий которых может быть произвольно сложное кручение, но, в то же время, целочисленные когомологии $\mathcal{Z}_P$ для некоторых граф-ассоциаэдров свободны от кручений. В диссертации также исследован вопрос о нетривиальных произведениях Масси в когомологиях момент-угол многообразий 3-мерных граф-ассоциаэдров.

В диссертации показано, что в классе обобщенных многогранников усечения топологическая эквивалентность момент-угол многообразия связной сумме произведений сфер, с двумя сферами в каждом произведении, равносильна минимальной неголодовости алгебры Стенли–Райснера $\Bbbk[P]$. Понятие кольца Голода возникло первоначально в гомологической алгебре в работе Е.С.Голода[36]для нетеровых локальных колец. Теорема Бухштабера и Панова о кольце когомологий $\mathcal{Z}_P$ показывает, что свойство голодовости алгебры $\Bbbk[K]$ равносильно над любым полем $\Bbbk$ тривиальности умножения Колмогорова-Александера и всех высших произведений Масси в $H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \Bbbk)$. Понятие минимальной неголодовости комплекса K (если основное поле $\Bbbk$ фиксировано) введено в работе А.Берглунда и М.Йолленбека[37], где доказана минимальная неголодовость границ многогранников пирамидальной надстройки (двойственных к многогранникам усечения). В диссертации обобщен этот результат и получен критерий минимальной неголодовости для случая срезки произвольного числа вершин любых произведений симплексов любых размерностей.

Легко видеть, что любой простой n-мерный многогранник с $m = n+2$ гипергранями проективно эквивалентен прямому произведению симплексов. Таким образом, первый нетривиальный случай возникает при $m = n + 3$.

[35] A. Zelevinsky, *Nested complexes and their polyhedral realizations*, Pure and Applied Mathematics Quarterly 2 (2006), 655–671.

[36] Голод Е.С. *О гомологиях некоторых локальных колец*, ДАН СССР **144**:3 (1962), 479–482.

[37] Alexander Berglund and Michael Jollenbeck. *On the Golod property of Stanley–Reisner rings*, J. Algebra **315**:1 (2007), 249–273.

Полная комбинаторная классификация таких многогранников была получена в книге Б. Грюнбаума[38] при помощи так называемых «звездных» диаграмм, а также М. Перлесом на основе диаграмм Гейла, который также получил формулу для числа комбинаторных типов. Результаты В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова[39] позволяют применить теорему Лопез де Медрано[40] о пересечении квадрик к момент-угол многообразиям и получить, что для многогранника P^n с $m = n+3$ многообразие $\mathcal{Z}_P$ является либо прямым произведением трех сфер нечетной размерности, либо связной суммой прямых произведений сфер, причем их количество и размерности определяются диаграммой Гейла многогранника. В диссертации исследованы кольца граней таких многогранников и получен критерий, когда они обладают свойством голодовости или минимальной неголодовости.

Последняя часть диссертации посвящена доказательству замкнутости класса минимально неголодовских комплексов относительно некоторых симплициальных операций, для которых в свою очередь имеется описание перестроек и изменения топологического типа момент-угол многообразий. Прежде всего, имеется гипотеза С.Гитлера и С.Лопез де Медрано о том, что если $\mathcal{Z}_P$ гомеоморфно связной сумме произведений сфер, с двумя сферами в каждом произведении, то это же верно и для произвольной срезки вершин многогранника P.[41] В диссертации приводятся примеры, которые показывают, что для срезок граней положительной размерности это неверно. Основным результатом этой части работы является доказательство того, что операции срезки вершин и, более общая, связной суммы двух простых многогранников, сохраняют свойство минимальной неголодовости колец граней. Кроме того, в диссертации доказано существование голодовского симплициального комплекса, все полные подкомплексы которого свободны от кручений в целочисленных гомологиях, а его момент-угол комплекс не является гомотопическим букетом сфер.

Цель работы.

Целью работы является изучение связи, существующей между комбинаторно-геометрическими свойствами выпуклых многогранников и

[38] B. Grunbaum, *Convex Polytopes*, Vol. 221 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Second ed., 2003.

[39] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра*, УМН, 55:5(335), стр.3–106, 2000.

[40] S. Lopez de Medrano, *The topology of the intersection of quadrics in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics 1370 (1989), 280–292.

[41] Samuel Gitler and Santiago Lopez de Medrano. *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums*, Preprint (2009); arXiv:0901.2580.

симплициальных комплексов, коммутативно-алгебраическими свойствами их колец Стенли–Райснера и топологическими свойствами их момент-угол комплексов.

Научная новизна.

Все основные результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1. Вычислены биградуированные числа Бетти граф-ассоциаэдров, в частности, пермутоэдров, стеллаэдров, ассоциаэдров и циклоэдров, допускающие комбинаторно-геометрическое описание.

2. Доказан критерий минимальной неголодовости колец граней над любым полем для ряда важных классов простых многогранников, таких как срезки вершин симплексов и их произведений, четномерные смежностные многогранники, а также простые многогранники с малым числом гиперграней.

   (a) Кольцо Стенли–Райснера обобщенного многогранника усечения $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^{n_1} \times \ldots \times \Delta^{n_r})$ является минимально неголодовским тогда и только тогда, когда либо $r = 1, k \geq 1$, либо $r = 2$.

   (b) Кольцо Стенли–Райснера четномерного смежностного многогранника P является минимально неголодовским тогда и только тогда, когда P отличен от симплекса.

   (c) В случае n-мерного простого многогранника P с $m = n + 3$ гипергранями кольцо граней $\Bbbk[P]$ минимально неголодовское тогда и только тогда, когда многогранник P комбинаторно не эквивалентен произведению трех симплексов.

3. Вычислено кольцо целочисленных когомологий $\mathcal{Z}_P$ для всех обобщенных многогранников усечения P.

4. Доказано, что свойство голодовости сохраняется при склейках симплициальных комплексов по общим симплексам. Доказано также, что если многогранная сфера – минимально неголодовский комплекс, то она остается такой же после итерации пирамидальной надстройки.

Методы исследования.

В работе используются методы торической топологии, алгебраической топологии, теории многогранников, комбинаторики и алгебры.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов по торической и комбинаторной топологии, теории многогранников и коммутативной алгебре.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах, а также всероссийских и международных научных конференциях:

1. Семинар «Алгебраическая топология и ее приложения» им. М. М. Постникова под руководством чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, проф. А. В. Чернавского, проф. И. А. Дынникова, проф. Т. Е. Панова, доц. Л. А. Алания и доц. Д. В. Миллионщикова; кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ – неоднократно с 2011 по 2014 год;

2. Семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством акад. РАН А.Т.Фоменко; кафедра дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ – неоднократно с 2011 по 2014 год;

3. Семинар «Геометрия в целом» под руководством проф. И. Х. Сабитова; кафедра математического анализа Механико-математического факультета МГУ – в 2012 году;

4. Семинар «Geometry and topology seminar» под руководством проф. М.Масуды; Университет г.Осака, Япония – в 2011 и 2014 годах;

5. Семинар «Algebraic topology seminar» под руководством проф. Е.Грбич и проф. С.Терио; Саутгемптонский университет, Великобритания – в 2014 году;

6. Семинар «Topology seminar» под руководством проф. Н.Рэя; Манчестерский университет, Великобритания – в 2014 году;

7. Всероссийская конференция «Ломоносов 2011», г. Москва, 11-15 апреля 2011 года, МГУ.

8. Международная конференция «Торическая топология в Осаке 2011», г. Осака, Япония, 27-30 ноября 2011 года.

9. Международная конференция «Торическая топология в Осаке 2012», г. Осака, Япония, 16-19 ноября 2012 года.
10. Всероссийская конференция «Ломоносов 2013», г. Москва, 8-12 апреля 2013 года, МГУ.
11. Международная конференция «Алгебраическая топология и абелевы функции», постерный доклад, г. Москва, 18-22 июня 2013 года.
12. Международная конференция «Торические действия: топология, геометрия и теория чисел», г. Хабаровск, 2-7 сентября 2013 года.
13. Международная конференция «Торическая топология в Осаке 2014», г. Осака, Япония, 21-24 января 2014 года.
14. Всероссийская конференция «Ломоносов 2014», г. Москва, 7-11 апреля 2014 года, МГУ.
15. Международная конференция «13-й Сербский Конгресс Математиков», г. Врнячка Баня, Сербия, 22-25 мая 2014 года.
16. Международная конференция «18-й Геометрический Семинар», г. Врнячка Баня, Сербия, 25-28 мая 2014 года.
17. Международная конференция «Топология действий тора и приложения к геометрии и комбинаторике», г. Тэджон, Республика Корея, 7-11 августа 2014 года.
18. Международная конференция «Геометрия, топология и интегрируемость», Сколково, 20-27 октября 2014 года.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах [1-8], список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и дополнения. Текст диссертации изложен на 107 страницах и содержит 1 рисунок. Список литературы включает 86 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемой проблемы, формулируются основные результаты, приводится краткое содержание работы и список основных соглашений и обозначений.

Содержание главы 1

Глава 1 содержит основные определения и конструкции, используемые в диссертации. В разделе 1.1 приводятся определения (абстрактного) симплициального комплекса K и выпуклого простого многогранника P, а также вводится понятие нерв-комплекса K_P простого многогранника P. Также даны определения комбинаторной эквивалентности и двойственности для многогранников, прямого произведения, связной суммы и джойна двух многогранников. Раздел 1.2 содержит общую информацию о момент-угол комплексах и многообразиях и обобщениях этих конструкций (полиэдральные произведения или K-степени). Каждому простому выпуклому n-мерному многограннику P с m гипергранями ставится в соответствие гладкое, замкнутое $(m+n)$-мерное многообразие $\mathcal{Z}_P$ с действием компактного тора T^m, по определению вложенное эквивариантно в $\mathbb{C}^m$ с тривиальным нормальным расслоением. Любому симплициальному комплексу K на m вершинах может быть сопоставлен его момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$, являющийся клеточным комплексом с действием тора T^m. Теорема Бухштабера–Панова дает связь между момент-угол многообразиями и комплексами: для любого простого многогранника P имеет место T^m-эквивариантный гомеоморфизм $\mathcal{Z}_P \cong \mathcal{Z}_{\partial P^*}(D^2, S^1)$, где ∂P^* есть граница двойственного симплициального многогранника. В разделе 1.3 дается определение алгебры Стенли–Райснера $\Bbbk[K]$ (или кольца граней) симплициального комплекса K ($\Bbbk$ – поле или кольцо целых чисел), обладающей естественной структурой модуля над кольцом многочленов $\Bbbk[m]$ от m переменных. Описана свободная резольвента Кошуля $\Bbbk$ как $\Bbbk[m]$-модуля, с помощью которой определяется и вычисляется Tor-алгебра $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$ симплициального комплекса K. Введены биградуированные числа Бетти комплекса K:

$$\beta^{-i,2j}(K) = \mathrm{rk}_{\Bbbk}\,\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk).$$

Приводится описание клеточной структуры момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$, которое дало возможность В.М.Бухштаберу и Т.Е.Панову вычислить кольцо когомологий $\mathcal{Z}_K$. По теореме Бухштабера–Панова имеет место изоморфизм

алгебр:
$$H^*(\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)) \cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk).$$
Сформулировано следствие известной теоремы Хохстера, согласно которому биградуированные числа Бетти комплекса K могут быть вычислены, зная ранги над $\Bbbk$ групп приведенных когомологий всех его полных подкомплексов K_J по всем подмножествам $J \subset [m]$:
$$\beta^{-i,2j}(K) = \sum_{J\subseteq[m],|J|=j} \mathrm{rk}_{\Bbbk}\, \widetilde{H}^{j-i-1}(K_J;\Bbbk).$$
Следствием из теоремы Бухштабера–Панова является утверждение о связи между топологическими числами Бетти момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ и биградуированными числами Бетти его нерв-комплекса K_P.

Содержание главы 2

В главе 2 вводится геометрический объект – нестоэдры P_B – класс простых многогранников, допускающих реализацию в качестве многогранника Дельзанта, получивший название обобщенных пермутоэдров в работе А.Постникова[42] и объединивший в себе ряд классических многогранников, таких как пермутоэдр, многогранник Сташефа, многогранник Ботта–Таубса и др. Определение граф-ассоциаэдров P_Γ, как класса флаговых многогранников, являющихся частным случаем нестоэдров, в терминах графического производящего множества $B = B(\Gamma)$, где Γ – граф, и сумм Минковского симплексов дается в разделе 2.1. В разделе 2.2 доказывается точная оценка на число нулей в последовательности биградуированных чисел Бетти $\beta^{-i,2(i+1)}(P)$ для граф-ассоциаэдров P. С одной стороны, эти числа имеют, благодаря теореме Хохстера, естественное комбинаторно-геометрическое описание в терминах числа связных компонент во всевозможных объединениях гиперграней многогранника P. С другой стороны, согласно результату Дж.Ву, Е.Грбич, Т.Е.Панова и С.Терио[43], $\sum\limits_{i=1}^{m-n} \beta^{-i,2(i+1)}(K)$ есть мощность минимального набора мультипликативных образующих в алгебре Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$ для всякого флагового комплекса K. Основная теорема, доказательству которой посвящен этот раздел такова:

[42] A. Postnikov, *Permutohedra, associahedra, and beyond*, arXiv: math.CO/0507163.

[43] Jelena Grbic, Taras Panov, Stephen Theriault and Jie Wu. *Homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes*, Preprint (2012); arXiv:1211.0873.

Теорема 2.2.1. *Пусть $P = P_\Gamma$ – граф-ассоциаэдр на связном графе Γ. Тогда $\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0$ для $i > i_{max}$. Число i_{max} есть максимальное число связных подграфов в графе Γ, которое может нетрививально пересекать (в смысле описания «гнездового комплекса» в работе Зелевинского[44]) данный связный подграф. Таким образом, этот подграф либо нетривиально пересекает данный, либо у них нет общих вершин, но подграф на объединении их вершин связен. Назовем такой подграф выделенным. Число $\beta^{-i_{max},2(i_{max}+1)}(P)$ равно количеству выделенных подграфов в Γ.*

Используя результат А.Фенна[45] о связи биградуированных чисел Бетти указанного типа произвольного нестоэдра и пермутоэдра, для четырех классических серий граф-ассоциаэдров мы имеем:

Следствие 2.2.2.

- *Пусть $P = As^n$ есть n-мерный ассоциаэдр, $n \geqslant 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям*

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \begin{cases} n+3, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{n+3}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$
$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geqslant q+1,$$

  где $q = q(n)$ определено так:

$$q = q(n) = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{4}, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{(n+1)^2}{4}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

- *Пусть $P = Cy^n$ есть n-мерный циклоэдр, $n \geqslant 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям*

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \begin{cases} 2n+2, & \text{если } n \text{ четно;} \\ n+1, & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$
$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geqslant q+1,$$

  где $q = q(n)$ определено так:

$$q = q(n) = \begin{cases} \frac{n(n+2)-2}{2}, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{(n+1)^2-2}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

[44] A. Zelevinsky, *Nested complexes and their polyhedral realizations*, Pure and Applied Mathematics Quarterly 2 (2006), 655–671.

[45] A. Fenn, *Generating Functions of Nestohedra and Applications*, arXiv:0908.0605v1 [math.CO]

- *Пусть $P = Pe^n$ есть n-мерный пермутоэдр, $n \geqslant 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям*

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \binom{n+1}{[\frac{n+1}{2}]}$$
$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \textit{для } i \geqslant q+1,$$

где $q = q(n) = 2^{n+1} - 2^{[\frac{n+1}{2}]} - 2^{[\frac{n-1}{2}]} + 1$

- *Пусть $P = St^n$ есть n-мерный стеллаэдр, $n \geqslant 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям*

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \binom{n}{[\frac{n}{2}]}$$
$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \textit{для } i \geqslant q+1,$$

где $q = q(n) = 2^n - 2^{[\frac{n}{2}]} - 2^{[\frac{n+1}{2}]} + [\frac{n+3}{2}]$.

В разделе 2.3 доказывается, что кольцо целочисленных когомологий момент-угол многообразия в случае граф-ассоциаэдров P_Γ на связном графе Γ может содержать произвольное кручение, равно как и быть свободным от кручений. Основной результат раздела таков:

Предложение 2.3.2 *В целочисленных когомологиях момент-угол многообразия для n-мерного граф-ассоциаэдра имеется кручение во всех размерностях, начиная с $n = 5$, если ограничение $B(\Gamma)$ на некоторое подмножество I вершин из $|I| \geq 6$ элементов содержит все подмножества I.*

В доказательстве использована конструкция из работы Ф.Босио и Л.Мерсманна[46] простого многогранника с данным кручением в целочисленных когомологиях его момент-угол многообразия, модифицированная нами для случая нерв-комплексов K_P граф-ассоциаэдров P. Также показывается, что в кольцах когомологий момент-угол многообразий 3-мерных граф-ассоциаэдров есть нетривиальные тройные произведения Масси.

Содержание главы 3

Глава 3, наряду с главой 4, является центральной главой диссертации. В разделе 3.1 приведено вычисление алгебраических чисел Бетти многогранников усечения $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^n)$. Впервые это вычисление было проделано в ра-

[46] Frédéric Bosio and Laurent Meersseman. *Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes.* Acta Math. **197** (2006), no. 1, 53–127.

боте Н.Тераи и Т.Хиби[47] в контексте теории мономиальных идеалов. Этот результат применяется к нахождению топологического типа момент-угол многообразий, соответствующих многогранникам усечения, впервые полученному в работе Ф.Босио и Л.Меерсманна[48] с помощью теории перестроек. В разделе 3.2 приводится обобщение предыдущего результата, дающее описание колец когомологий момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$ для произвольных обобщенных многогранников усечения $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^{n_1} \times \ldots \times \Delta^{n_r})$ типа $(k; n_1, \ldots, n_r)$, где $k \geq 0$ и $r \geq 1$. Следующее утверждение, обобщающее результаты Н.Тераи и Т.Хиби, получено применением точной когомологической последовательности Майера–Виеториса, индукцией по размерности многогранника и числу срезаемых вершин:

Теорема 3.2.4. *Пусть P есть $(k; n_1, \ldots, n_r)$-многогранник с $r \geqslant 1$. Обозначим через a число единичных элементов в наборе $\{n_1, \ldots, n_r\}$. Тогда биградуированные числа Бетти многогранника P даются следующими формулами:* $(1 \leqslant i \leqslant k + r - 1, 1 < l < d - 1)$.

(a) $\beta^{-i,2(i+l)}(P) = \sum\limits_{\{n_{i_1},\ldots,n_{i_s}\}\subset\{n_1,\ldots,n_r\}:\, l=n_{i_1}+\ldots+n_{i_s}} \binom{k}{i-s}$.

(b) $\beta^{-i,2(i+1)}(P) = \beta^{-(k+r-i),2(d+k+r-i-1)}(P) =$
$= k\binom{k+r-1}{i} - \binom{k}{i+1} + a\binom{k}{i-1}$.

(c) $\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(m-d),2m}(P) = 1$.

Остальные биградуированные числа Бетти равны ***нулю*** *(мы полагаем $\binom{b}{c} = 0$ при $b < c$ или, если одно из чисел отрицательно).*

Кольцевая структура в когомологиях $\mathcal{Z}_P$ вычисляется из этого результата с помощью теоремы Бухштабера–Панова о кольце когомологий момент-угол комплекса и описания умножения в Tor-алгебре кольца граней $\Bbbk[P]$ в терминах полных подкомплексов, данного И. В. Баскаковым[49].

Следствие 3.2.9. *В классе обобщенных многогранников усечения P всевозможных типов $(k; n_1, \ldots, n_r)$ множество всех биградуированных чисел Бетти $\{\beta^{-i,2j}(P)\}$ однозначно определяет топологический тип $\mathcal{Z}_P$. Для двух произвольных обобщенных многогранников усечения P и Q биградуированные кольца когомологий $H^{*,*}(\mathcal{Z}_P)$ и $H^{*,*}(\mathcal{Z}_Q)$ изоморфны тогда*

[47] Naoki Terai and Takayuki Hibi. *Computation of Betti numbers of monomial ideals associated with stacked polytopes.* Manuscripta Math., 92(4): 447–453, 1997.

[48] Frédéric Bosio and Laurent Meersseman. *Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes.* Acta Math. **197** (2006), no. 1, 53–127.

[49] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Алгебры клеточных коцепей и действия торов*, УМН, 59:3(357) (2004), стр.159–160.

и только тогда, когда множества биградуированных чисел Бетти для P и Q совпадают.

Результаты о биградуированных числах Бетти, позволяющие вычислять их для произвольных произведений обобщенных многогранников усечения, тем самым ставить вопрос о структуре их колец когомологий и топологических типах соответствующих момент-угол многообразий, приводятся в разделе 3.3. Частичный ответ на эти вопросы дается в последующих главах.

Содержание главы 4

Глава 4 посвящена изучению свойства голодовости и минимальной неголодовости колец граней $\Bbbk[K_P]$ обобщенных многогранников усечения, четномерных смежностных многогранников, а также простых многогранников с малым числом гиперграней P. Здесь мы считаем $\Bbbk$ полем. В разделе 4.1 вводится основное понятия кольца Голода и минимально неголодовского кольца, в применении к градуированным мономиальным кольцам. Раздел 4.2 посвящен доказательству критерия минимальной неголодовости колец Стенли–Райснера обобщенных многогранников усечения. Основной инструмент доказательства – следующее утверждение.

Предложение 4.2.1. *Пусть $K = K_1 \cup_\sigma K_2$ есть симплициальный комплекс, полученный из двух голодовских комплексов K_1 и K_2 приклеиванием по двум их изоморфным симплексам. Тогда K также является голодовским.*

Доказательство получается применением теоремы Хохстера и результата В. М. Бухштабера, Т. Е. Панова и И. В. Баскакова об описании алгебры коцепей момент-угол комплекса. Основной результат раздела такой:

Теорема 4.2.2. *Для произвольного обобщенного многогранника усечения $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^{n_1} \times \ldots \times \Delta^{n_r})$ с $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_r \geqslant 1, r \geqslant 1, k \geqslant 0$, его нерв-комплекс K_P является минимально неголодовским тогда и только тогда, когда $r = 1, 2$ и P не является симплексом.*

Минимальная неголодовость в случае многогранников усечения, отличных от симплекса, была впервые доказана в работе А.Берглунда и М.Йолленбека.[50]

Раздел 4.3 посвящен доказательству критерия минимальной неголодовости колец граней четномерных смежностных многогранников и сопоставлению этого результата с известными случаями, когда момент-угол многооб-

[50] Alexander Berglund and Michael Jollenbeck. *On the Golod property of Stanley–Reisner rings*, J. Algebra **315**:1 (2007), 249–273.

разие $\mathcal{Z}_P$ гомеоморфно связной сумме произведений сфер, исследованными в работе С.Гитлера и С.Лопез де Медрано о пересечениях вещественных квадрик[51].

Теорема 4.3.7. *Если P является n-мерным простым многогранником, двойственным к смежностному многограннику, а n четно, то K_P является минимально неголодовским комплексом тогда и только тогда, когда P отличен от симплекса.*

Для простых n-мерных многогранников P с малым числом гиперграней $m \leq n+3$ в разделе 4.4 получен критерий минимальной неголодовости колец граней двумя способами. С одной стороны, имеется явное описание колец когомологий момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$ в этом случае, полученное Н.Ю.Ероховцом.[52] С другой стороны, в силу результата Н.Ю.Ероховца,[53] всякий простой многогранник с $m = n+3$, отличный от произведения 3-х симплексов, может быть получен из четномерного циклического многогранника операцией подстановки P_ω. В Дополнении А доказано, что эта операция сохраняет свойство минимальной неголодовости. Утверждение теперь следует из того, что всякий циклический многогранник является смежностным.

Содержание главы 5

Глава 5 посвящена различным вопросам, связывающим комбинаторные свойства симплициального комплекса K с топологическими свойствами его момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ для различных типов комплексов, а также исследованию поведения свойства минимальной неголодовости при симплициальных операциях. В разделе 5.1. приводятся некоторые результаты о голодовости и минимальной неголодовости колец Стенли–Райснера, а также о гомотопических типах соответствующих им момент-угол комплексов в «предельных» ситуациях: для простых многогранников с $m = n+3$ и для 1-мерных комплексов. Исследованию поведения свойства минимальной неголодовости нерв-комплексов при срезке вершин простого многогранника, а также в результате применения операции связной суммы двух комплексов (или многогранников) посвящен раздел 5.2.

[51] Samuel Gitler and Santiago Lopez de Medrano. *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums*, Preprint (2009); arXiv:0901.2580.

[52] Н. Ю. Ероховец, *Момент-угол многообразия простых n-мерных многогранников с n+3 гипергранями*, УМН, 66:5(401) (2011), 187–188.

[53] Н. Ю. Ероховец, *Максимальные действия торов на момент-угол многообразиях.* Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. МГУ им. М.В.Ломоносова, мех.-мат. факультет, 2011.

Теорема 5.2.1. *Если нерв-комплекс K_P минимально неголодовский, тогда то же верно и для K_Q, $Q = \mathrm{vc}(P)$.*

Теорема 5.2.4. *Пусть P и Q – минимально неголодовские многогранники. Тогда их связная сумма $P\#Q$ также минимально неголодовская.*

Последний раздел 5.3 посвящен построению примера голодовского комплекса K, с полными подкомплексами, свободными от кручений в гомологиях, такому, что его момент-угол комплекс не гомотопически эквивалентен букету сфер. До сих пор подобных примеров известно не было. Основной результат этого раздела такой:

Теорема 5.3.1. *Минимальная триангуляция $\mathbb{C}P^2$ на 9 вершинах является голодовским комплексом, с полными подкомплексами, свободными от кручений в целочисленных гомологиях, момент-угол комплекс которого не гомотопически эквивалентен букету сфер.*

Для доказательства этого утверждения используется теорема о стабильном разложении для момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_K$, полученная А.Бари, М.Бендерски, Ф.Коэном и С.Гитлером[54], а также тот факт, что никакая надстройка над комплексной проективной плоскостью $\mathbb{C}P^2$ не гомотопически эквивалентна букету сфер. Тривиальность умножения в кольце $H^*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$ следует из 3-смежностности этой триангуляции.[55,56]

Содержание дополнения А

В дополнении А приведено определение полиэдральных операций, введенное А.А.Айзенбергом,[57] и независимо А.Бари, М.Бендерски, Ф.Коэном и С.Гитлером[58], обобщающих операции джойна и толстого джойна на симплициальных комплексах. Эта конструкция используется в главе 4 §3 при работе с простыми многогранниками с числом гиперграней $m = n + 3$ в частном случае подстановок границ симплексов в нерв-комплекс простого многогранника.

[54] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, *The polyhedral product functor: A method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, Advances in Mathematics, 225:3 (2010), pp.1634–1668.

[55] W. Kuhnel, T. F. Banchoff. *The 9-Vertex Complex Projective Plane.* Math. Int., **5** (1983), no. 3, pp. 11–22.

[56] W. Kuhnel, G. Lassmann. *The Unique 3-Neighbourly 4-Manifold with Few Vertices.* J. of Comb. Theory, Series A **35** (1983), pp. 173–184.

[57] А. А. Айзенберг, *Связь инвариантов Бухштабера и обобщенных хроматических чисел*, Дальневост. матем. журн., 11:2 (2011), 113–139.

[58] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, *The polyhedral product functor: A method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, Advances in Mathematics, 225:3 (2010), pp.1634–1668.

Предложение А.8 *Пусть многогранник P минимально неголодовский. Тогда любая подстановка границ симплексов P_ω остается минимально неголодовским многогранником.*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за постановку задач и неоценимую помощь во время работы над диссертацией. Автор благодарен чл.-корр. РАН, профессору Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постоянный интерес, советы и многочисленные обсуждения. К.ф.-м.н. А. А. Айзенберга и к.ф.-м.н. Н. Ю. Ероховца автор благодарит за полезные обсуждения. В заключение, автор глубоко признателен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ за творческую атмосферу, постоянную поддержку и внимание.

Список публикаций по теме диссертации

[1] И.Ю. Лимонченко, *Кольца Стенли-Райснера обобщенных многогранников усечения и их момент-угол многообразия,* Труды МИРАН им. В.А.Стеклова., том 286 (2014), 207–218.

[2] И.Ю. Лимонченко, *Биградуированные числа Бетти некоторых простых многогранников,* Математические заметки. 94:3 (2013), 373–388.

[3] И.Ю. Лимонченко, "Биградуированные числа Бетти некоторых простых многогранников", XVIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", Москва, 11–15 апреля 2011 г.,
`http://higeom.math.msu.su/dubrovinlab/Limonchenko4.pdf`.

[4] И.Ю. Лимонченко, "Нетривиальное кручение в кольце когомологий момент-угол комплексов и их топологические инварианты", XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", Москва, 8–12 апреля 2013 г.,
`http://www.mathnet.ru:8080/PresentFiles/6578/32080_8dfa.pdf`

[5] I.Yu. Limonchenko, "Combinatorial commutative algebra of some moment-angle manifolds and their topological types", International Conference

Algebraic Topology and Abelian Functions, in honour of Victor Buchstaber in the occasion of his 70th birthday, Moscow, Russia, June 18–22, 2013, pp. 85–86.

[6] I.Yu. Limonchenko, “Cohomology rings of some moment-angle manifolds and their topological invariants”, International Open Chinese–Russian Conference Torus Actions: Topology, Geometry and Number Theory, Khabarovsk, Russia, September 2–7, 2013, pp. 46–47.

[7] I.Yu. Limonchenko, “Minimally non-Golod simplicial complexes and moment-angle manifolds”, International Japanese–Russian Conference Toric Topology 2014 in Osaka, Osaka, Japan, January 21–24, 2014, http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/~masuda/toric2014_osaka/Limonchenko.pdf

[8] I.Yu. Limonchenko, “Minimally non-Golod simplicial complexes in toric topology”, 13th Serbian Mathematical Congress, Vrnjacka Banja, Serbia, May 22–25, 2014, p. 89.