

## ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

на диссертационную работу  
*Лимонченко Ивана Юрьевича*  
«Комбинаторная коммутативная алгебра и топология  
момент-угол-комплексов»,  
представленную на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.04 — геометрия и топология.

Диссертация посвящена исследованию топологических инвариантов важного класса пространств с действием тора — момент-угол-комплексов  $\mathcal{Z}_K$  — во взаимосвязях с комбинаторной геометрией и комбинаторной коммутативной алгеброй многогранников и симплицеальных комплексов  $K$ . Момент-угол-комплекс  $\mathcal{Z}_K$  представляет собой клеточный комплекс, составленный из произведений  $(D^2, S^1)^I$  дисков и окружностей, параметризованных симплексами  $I$  конечного симплицеального комплекса  $K$ . В случае, когда  $K$  является триангуляцией сферы, двойственной простому выпуклому многограннику  $P$ , соответствующий момент-угол комплекс  $\mathcal{Z}_K$  (также обозначаемый  $\mathcal{Z}_P$ ) является гладким многообразием с богатой геометрической структурой. Известно, что кольцо целочисленных когомологий момент-угол-комплекса  $\mathcal{Z}_K$  изоморфно Тог-алгебре кольца граней  $\mathbb{Z}[K]$  комплекса  $K$  (кольца Стенли–Райснера). Эта Тог-алгебра и размерности её биградуированных компонент — биградуированные числа Бетти кольца граней  $\mathbb{Z}[K]$  — являются важнейшими и весьма тонкими алгебраическими инвариантами комбинаторной структуры симплицеального комплекса  $K$  или многогранника  $P$ ; в частности, через биградуированные числа Бетти выражаются числа граней данной размерности многогранника  $P$ . Таким образом, результаты о топологическом строении момент-угол-комплексов  $\mathcal{Z}_K$  получают комбинаторно-алгебраическую интерпретацию, и, наоборот, тонкие результаты комбинаторной коммутативной алгебры можно доказывать топологическими методами. Это отражает несомненную актуальность исследований в диссертации Лимонченко.

Первая глава диссертации содержит вводный материал. Вторая и третья главы диссертации посвящены изучению биградуированных чисел Бетти двух важных семейств простых многогранников — граф-ассоциаэдров и многогранников усечения. Граф-ассоциаэдры представляют собой далеко идущее обобщение классической серии ассоциаэдров (многогранников Шашеффа) и включают в себя также другую классическую серию — пермутаэдры, а также стеллаэдры и циклоэдры. Наряду с явным вычислением биградуированных чисел Бетти, показано, что когомологии момент-угол многообразий  $\mathcal{Z}_P$ , соответствующих пермутаэдрам или стеллаэдрам, (или, эквивалентно, Тог-алгебры соответствующих колец граней  $\mathbb{Z}[P]$ ) могут содержать кручение произвольного порядка.

(Обобщённым) многогранником усечения называется простой многогранник, получаемый последовательным применением операции срезания вершины к произведению нескольких симплексов. В третьей главе диссертации полностью вычислены биградуированные числа Бетти многогранников усечения, что обобщает известные

результаты Тераи–Хиби в случае усечения одного симплекса. Также описаны кольца когомологий соответствующих момент-угол-многообразий  $\mathcal{Z}_P$  и доказано, что в классе многогранников усечения  $P$  топологический тип многообразия  $\mathcal{Z}_P$  полностью определяется его таблицей биградуированных чисел Бетти.

Четвёртая и пятая главы диссертации посвящены изучению свойства голодовости, которое было введено в 1960-е годы в работах Е. С. Голода по гомологической теории локальных колец и затем активно изучалось в комбинаторной коммутативной алгебре. Кольцо граней  $\mathbb{Z}[K]$  (а также сам симплицальный комплекс  $K$ ) называется голодовым, если умножение и все высшие операции Масси в когомологиях его комплекса Кошуля тривиальны. Так как когомологии комплекса Кошуля представляют собой Тог-алгебру кольца  $\mathbb{Z}[K]$ , которая в силу упомянутого выше результата изоморфна кольцу когомологий  $H^*(\mathcal{Z}_K)$ , свойство голодовости можно рассматривать как «алгебраическую аппроксимацию» топологического свойства момент-угол-комплекса  $\mathcal{Z}_K$  быть гомотопически эквивалентным букету сфер. Наряду со свойством голодовости рассматривается свойство минимальной неголодовости, которое аппроксимирует свойство момент-угол-многообразия  $\mathcal{Z}_P$  быть гомеоморфным связной сумме произведений сфер. В диссертации свойство минимальной неголодовости установлено для ряда важных классов простых многогранников: многогранников усечения, двойственно-смежных многогранников, а также простых многогранников с малым числом гиперграней. Также доказано, что свойства голодовости и минимальной неголодовости сохраняются при некоторых основных операциях над симплицальными комплексами и многогранниками: склейках вдоль общего симплекса, связных суммах, срезаниях вершин, а также так называемых «подстановках» многогранников.

Результаты, полученные в диссертации И. Ю. Лимонченко представляют несомненный интерес для топологии, комбинаторной геометрии и коммутативной алгебры, они уже получили высокую оценку специалистов. При работе над диссертацией автор продемонстрировал свободное владение современными методами алгебраической топологии, теории многогранников и коммутативной алгебры.

Все результаты диссертационной работы И. Ю. Лимонченко являются новыми и докладывались им на международных конференциях и научно-исследовательских семинарах ведущих университетов и научных центров в России и за рубежом. Основное содержание работы опубликовано в виде статей в ведущих научных журналах. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация Лимонченко Ивана Юрьевича удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК РФ, а ее автор заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры высшей геометрии и топологии  
механико-математического факультета МГУ

Панов Тарас Евгеньевич