ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу
Лимонченко Ивана Юрьевича
«Комбинаторная коммутативная алгебра и топология момент-угол комплексов»,
представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Основным направлением диссертации является исследование связи между комбинаторными свойствами выпуклых многогранников и ассоциированных с ними симплициальных комплексов, коммутативной алгеброй колец Стенли-Райснера и топологией момент-угол комплексов.

Момент-угол комплексы являются одним из центральных объектов изучения в торической топологии – области, возникшей около двадцати лет назад на стыке алгебраической топологии и геометрии, комбинаторики и симплектической геометрии и являющейся сейчас одной из наиболее интенсивно развивающихся областей. Момент-угол комплексы являются ковариантным функтором из категории симплициальных комплексов в категорию топологических пространств с действием компактного тора. В случае, когда комплекс является двойственным простому выпуклому многограннику, момент-угол комплекс может быть канонически наделен структурой гладкого многообразия. Момент-угол многообразия играют большую роль в теории квазиторических многообразий и малых накрытий, кроме того, за последние годы был получен ряд интересных результатов о геометрии самих момент-угол многообразий – например, связанных с вещественной алгебраической геометрией или теорией некэлеровых комплексных структур.

В работе В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова в 2000 году было доказано, что алгебра целочисленных когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ совпадает с Tor-алгеброй соответствующего комплексу K кольца Стенли-Райснера, что порождает двойную градуировку на когомологиях момент-угол комплекса. Эта биградуировка, очевидно, является комбинаторно инвариантной, но существуют гомеоморфные момент-угол комплексы, у которых соответствующие биградуированные числа Бетти $\beta^{-i,2j}(\mathcal{Z}_K)$ различны. Алгебра клеточных коцепей момент-угол комплекса естественным образом соответствует тензорному произведению кольца Стенли-Райснера и резольвенты Кошуля. Описание когомологий момент-угол комплекса с помощью Tor-алгебры является связующим звеном между топологией момент-угол комплексов и коммутативной алгеброй кольца Стенли-Райснера.

Топология момент-угол комплексов очень сложна, поэтому большой интерес представляют результаты об их алгебре когомологий и кольцах Стенли-Райснера соответствующих симплициальных комплексов (совпадающих с кольцом эквивариантных когомологий). Автору удалось добиться существенного продвижения в этой области. Опишем полученные автором результаты.

(1) Вычислены биградуированные числа Бетти, соответствующие момент-угол многообразиям всех граф-ассоциаэдров. Это широкий класс многогранников, включающий в себя, в частности, пермутоэдры, стеллаэдры, ассоциаэдры и циклоэдры. Для данного граф-ассоциэдра P_Γ, соответствующего графу Γ, пусть i_{max} – максимальное число связных подграфов в Γ, нетривиально пересекающих данный связный подграф. Здесь два связных подграфа в Γ имеют нетривиальное пересечение,

если их объединение снова связно. В диссертации показано, что биградуированные числа Бетти $\beta^{-i,2(i+1)}(\mathcal{Z}_{P_\Gamma})$ равны нулю при $i > i_{max}$. Кроме того, показано, что число Бетти $\beta^{-i_{max},2(i_{max}+1)}(\mathcal{Z}_{P_\Gamma})$ равно числу выделенных подграфов в Γ, то есть числу связных подграфов, имеющих нетривиальное пересечение в точности с i_{max} другими связными подграфами в Γ. Получен ряд соотношений на биградуированные числа Бетти, показано, что кольцо целочисленных когомологий момент-угол многообразия граф-ассоциаэдра может содержать произвольное кручение либо не иметь кручения вовсе.

(2) Сформулированы и доказаны критерии минимальной неголодовости колец Стенли-Райснера для следующих семейств многогранников: обобщенные многогранники усечения, четномерные смежностные многогранники и простые n-мерные многогранники с $(n+3)$ гипергранями. Показано, что свойство голодовости соответствующего кольца Стенли-Райснера инвариантно относительно операции склейки симплициальных комплексов по общим симплексам.

(3) Для всех обобщенных многогранников усечения вычислено кольцо целочисленных когомологий момент-угол многообразий. Топология момент-угол комплексов в общем случае очень сложна, поэтому семейства многогранников, для которых кольца целочисленных когомологий момент-угол комплексов имеют явное описание, представляют большой интерес.

(4) Найдено решение открытой проблемы о существовании голодовского комплекса с полными подкомплексами, свободными от кручения в когомологиях, и такого, что соответствующий момент-угол комплекс не гомотопически эквивалентен букету сфер. Показано, что минимальная триангуляция комплексной проективной плоскости на девяти вершинах удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Диссертация состоит из пяти глав, приложения и списка литературы.

Глава 1 содержит обзор основных определений и конструкций, используемых в диссертации: абстрактные симплициальные комплексы, момент-угол комплексы и многообразия, кольца и алгебры Стенли-Райснера, резольвента Кошуля, Tor-алгебра и биградуированные числа Бетти. Сформулирована теорема Хохстера, связывающая биградуированные числа Бетти комплекса K и ранги групп приведенных когомологий подкомплексов комплекса K на данном числе вершин.

В главе 2 вводятся определения всех необходимых семейств многогранников. Нестоэдры – класс простых многогранников, объединивший в себе ряд классических многогранников, таких, как пермутоэдр, многогранник Сташеффа, многогранник Ботта-Таубса и другие. Определение граф-ассоциаэдров как класса флаговых многогранников, являющихся частным случаем нестоэдров, в терминах графического производящего множества дается в разделе 2.1. Соответствующие им биградуированные числа Бетти имеют явное комбинаторное описание благодаря теореме Хохстера; с другой стороны, согласно результату Дж. Ву, Е. Грбич, Т. Е. Панова и С. Терио, сумма $\sum\limits_{i=1}^{m-n}\beta^{-i,2(i+1)}(\mathcal{Z}_K)$ есть мощность минимального набора мальтипликативных образующих в алгебре Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_K)$ для всякого флагового комплекса K. Доказывается теорема, описывающая связь биградуированных чисел Бетти момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_{P_\Gamma}$ с комбинаторикой связных подграфов графа Γ, ее точная формулировка приведена выше. Доказываются следствия из основной теоремы о соотношениях на биградуированные числа Бетти момент-угол комплекса. В разделе 2.3 показывается, что кольцо целочисленных когомологий момент-угол многообразия в случае граф-ассоциаэдров может содержать произвольное кручение, равно как и быть свободным от кручений. Также показано, что кольца когомологий трехмерных граф-ассоциаэдров обладают нетривиальными произведениями Масси.

В главе 3 вычисляются биградуированные числа Бетти многогранников усечения, что обобщает результаты Н. Тераи и Т. Хиби, основанные на теории мономиальных идеалов. Показано, что биградуированные числа Бетти многогранников усечения зависят только от их размерности и числа гиперграней, но не зависят от комбинаторной структуры самого многогранника, а числа $\beta^{-i,2(i+1)}$ зависят только от числа гиперграней. Из результата о числах Бетти вычисляется структура кольца целочисленных когомологий, использующая теорему Бухштабера-Панова и описание умножения в Tor-алгебре кольца граней, приведенное И. Баскаковым. Вычисление чисел Бетти многогранников усечения позволяет найти топологический тип соответствующих момент-угол многообразий – результат, полученный впервые в работах Ф. Босио и Л. Меерсмана с помощью теории перестроек.

Глава 4 посвящена изучению свойств голодовости и минимальной неголодовости колец Стенли-Райснера обобщенных многогранников усечения, четномерных смежностных многогранников и простых многогранников с малым числом гиперграней. Доказано, что свойство голодовости соответствующего кольца Стенли-Райснера инвариантно относительно операции склейки симплициальных комплексов по общим симплексам. Исходя из этого, формулируются и доказываются критерии минимальной неголодовости для указанных семейств многогранников. Отдельный интерес представляет случай четномерных смежностных многогранников, поскольку для многих многогранников из этого класса момент-угол многообразие гомеоморфно связной сумме произведений сфер – эта ситуация подробно исследуется в работах С. Гитлера и С. Лопез де Медрано.

В главе 5 исследуется поведение свойства минимальной неголодовости при различных симплициальных операциях, а также обсуждаются различные вопросы о связи комбинаторных свойств симплициального комплекса K и топологии соответствующего момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$. Доказано, что связная сумма минимально неголодовских многогранников также является минимально неголодовской. Исследован важный случай минимальной триангуляции комплексной проективной плоскости с 9 вершинами: показано, что она дает решение открытой проблемы о существовании голодовского комплекса с полными подкомплексами, свободными от кручения в когомологиях, но такого, что соответствующий момент-угол комплекс не гомотопически эквивалентен букету сфер.

В дополнительной главе А определены операции на симплициальных комплексах, обобщающие ряд известных конструкций: операции джойна и толстого джойна на сиплициальных комплексах.

Все результаты диссертационной работы И. Ю. Лимонченко являются новыми и докладывались им на международных конференциях и на научно-исследовательских семинарах ведущих вузов и научных институтов России. Основное содержание работы опубликовано в виде статей в ведущих научных журналах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Полученные автором результаты могут быть использованы специалистами по торической топологии, коммутативной алгебре, геометрии и комбинаторике многогранников, работающими в Московском Государственном Университете, Санкт-Петербургском Государственном Университете, Московском Физико-Техническом Институте, Математическом Институте им. В. А. Стеклова РАН, Новосибирском Государственном Университете, Независимом Московском Университете, Институте Математики им. С. Л. Соболева СО РАН, а также других ведущих университетах и научных центрах в России и за рубежом.

Заключение.

Диссертация представляет собой научно-квалификационную работу, в которой содержится решение ряда задач, имеющих существенное значение для торической топологии, коммутативной алгебры и комбинаторики многогранников. Сформулированные в диссертации положения обоснованы и достоверны, сопровождаются подробными и исчерпывающими доказательствами. Работа удовлетворяет требованиям п. 9 *«Положения о порядке присуждения ученых степеней»*, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Лимонченко Иван Юрьевич, без сомнения, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология (физико-математические науки).

5 февраля 2015 г.

Кандидат физико-математических наук, доцент А. А. Кустарев.

адрес: 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, НИУ ВШЭ
e-mail: kustarev@gmail.com

Подпись Кустарева А. А. заверяю

Декан ФКН НИУ ВШЭ,
доктор физико-математических наук И. В. Аржанцев.