О Т З Ы В

официального оппонента о диссертационной работе

Лимонченко Ивана Юрьевича

"Комбинаторная коммутативная алгебра и топология момент-угол комплексов",

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.04 – геометрия и топология

Во многих разделах математики и ее приложений естественным образом появляются геометрические и топологические объекты, на которых естественно действует вещественный тор $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ или комплексный тор $(\mathbb{C}^*)^n$ какой-либо размеоности n. В число таких объектов входят геометрические и топологические объекты, связанные с задачами интегрируемости классических и квантовых моделей современной математической физики, а также связанные с задачами классической алгебраической геометрии, в которых изучаются решения систем алгебраических уравнений. В начале 70-х годов прошлого века в агебраической геометрии были определены алгебраические торические многобразия как эквивариантные проективные компактификации комплексных торов. При изучении других задач постепенно выкристаллизовалась роль многообразий четной размерности M^{2n}, на которых действуют вещественные торы T^n половинной размерности. М.Девис и Т.Янушкиевич определили в 1991 году вещественные топологические аналоги торических многообразий, названные ими квазиторическими многообразиями и установили их связь с выпуклыми простыми многогранниками. Связь квазиторических многообразий с многогранниками установливалась на основе конструкции момент-угол пространства, отвечающего каждому многограннику. В.М.Бухштабер и Т.Е.Панов реализовали каждое момент-угол пространство, отвечающее простому многограннику, как невырожденное пересечение квадрик в комплексном линейном пространстве, и доказали, что это пересечение является гладким многообразием с тривиальным нормальным расслоением. Эта теория момент-угол многообразий является топологической основой диссертационной работы, которая посвящена вычислению чисел Бетти и их биградуированным модификациям для момент-угол многообразий. Алгебраической основой диссертационной работы является теория алгебр Стенли-Райснера, сопоставляющая любому симплициальному комплексу K с m вершинами $\{1, 2, \ldots, m\}$ коммутативную алгебру $k[K]$ над полем k, которая является фактор-алгеброй алгебры многочленов $k[m]$ от m переменных $v_1, \ldots, v_m$ по идеалу порожденному мономами $v_{i_1} \ldots v_{i_s}$, где каждая переменая встречается не более одного раза и набор индексов $(i_1, \ldots, i_s)$ не образуют симплекс в комплексе K. Каждому симплициальному комплексу, по конструкции Девиса-Янушкиевича, сопоставляется момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ и теорема Девиса-Янушкевича утверждает, что алгебра Стенли-Райснера $k[K]$ комплекса K изоморфна алгебре эквивариантных когомологий $H_{T^m}(\mathcal{Z}_K, k)$.

Конструкция алгебр Стенли-Райснера распространяется на случай, когда вместо поля k рассматривается некоторое кольцо, например, кольцо многочленов $k[m]$.

Биградуированные числа Бетти момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ (их также называют еще биградуированными числами Бетти комплекса K) определяются следующим образом. Рассматривается поле k как модуль над градуированным кольцом $k[m] = k[v_1, \dots, v_m]$ относительно модульной сруктуры, определяемой гомоморфизмом $\varepsilon : k[m] \to k$, который на всех переменных v_i, $i = 1, 2, \dots, m$ равен нулю. Степень $\deg v_i$, $i = 1, m$ полагается равной двум. Далее, $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ – внешняя алгебра над k с образующими $u_1, \dots, u_m$ степени один ($u_i^2 = 0$, $u_i u_j = -u_j u_i$) и $\Lambda^i[u_1, \dots, u_m]$ – подпространство в $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ порожденное мономами длины i. Для свободной резольвенты Кошуля $k[m]$-модуля k

$$0 \to \Lambda^m[u_1, \dots, u_m] \otimes k[m] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^1[u_1, \dots, u_m] \otimes k[m] \xrightarrow{d} k[m] \xrightarrow{\varepsilon} k \to 0$$

расматривается цепной комплекс

$$0 \to \Lambda^m[u_1, \dots, u_m] \otimes k[m] \otimes_{k[m]} \otimes k[K] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^1[u_1, \dots, u_m] \otimes k[m] \otimes_{k[m]} k[K] \xrightarrow{d} k[m] \otimes_{k[m]} \otimes k[K] \to 0.$$

На каждом члене $\Lambda^i[u_1, \dots, u_m] \otimes k[m] \otimes_{k[m]} kK$ этого цепного комплекса определена биградуировка $(-i, 2j)$, где i – это номер члена в цепном комплексе, а второй индекс $2j$ определяется градуировкой порожденной степенями мономов от переменных четной степени v_i, $i = 1, 2, \dots, m$. Дифференциалы в комплексе согласованы с биградуировкой и гомологии полученного комплекса в гомологической алгебре называют значением Tor-функтора для модулей k и $k[K]$ и их обозначают $Tor_{k[m]}^{-i, 2j}(k, k[K])$. Ранги над полем k модулей $Tor_{k[m]}^{-i, 2j}(k, k[K])$ называются биградуироваными числами Бетти $\beta^{-i,2j}(K)$ комплекса K. Общие теоремы гомологической алгебры устанавливают изоморфизм значений Tor-функтора $Tor_{k[m]}^{-i, 2j}(k, k[K]) \simeq Tor_{k[m]}^{-i, 2j}(k[K], k)$, в частности, имеем равенства $\beta^{-i,2j}(K) = \mathrm{rk}_k\, Tor_{k[m]}^{-i, 2j}(k, k[K]) = \mathrm{rk}_k\, Tor_{k[m]}^{-i, 2j}(k[K], k)$. Согласно теореме Бухштабера-Панова момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ имеет такое клеточное разбиение, которое позволяет ввести на двойственном, к цепному комплексу клеточного разбиения, коцепном комплексе биградуированную структуру, согрaсованную с кограницами, при этом имеет место изоморфизм $Tor_{k[m]}^{-i, 2j}(k[K], k) \simeq H^{-i, 2j}(\mathcal{Z}_K, k)$. Когда симплициальный комплекс K является нерв-комплексом K_P гиперграней простого многогранника P, то биградуированные числа Бетти $\beta^{-i,2j}(K_P)$ называют биградуированными числами Бетти многогранника P и обозначают $\beta^{-i,2j}(P)$.

Во второй главе вычисляются градуированные числа Бетти широкого класса простых многогранников, которые определяются комбинаторной структурой "гнездовых множеств" на системе подмножеств какого-либо конечного множества S. Соответствующие простые многогранники названы в работе нестроэдрами. В случае, когда конечное множество S является множеством вершин некоторого графа Γ, а выделение системы подмножеств гнездовой структуры на S производится условием: подмножество входит в гнездовую структуры, если его элементы являются вершинами связного подграфи графа Γ, то соответствующий нестоэдр называется граф-ассоциаэдром. В число граф-ассоциаэдров входят многие ранее известные многогранники. Показано, с использованием комбинаторной техники и алгебраического определения биградуированных чисел Бетти, что достаточное большое количество биградуированных чисел Бетти равны нулю, а для ненулевых чисел найдены явные выражения, использующие размерность многогранника и число его граней. На основе этих вычислений найдены числа Бетти $b^i(\mathcal{Z}_{Ass^n})$, $i = 3, 4$ для момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_{Ass^n}$, отвечающих ассоциаэдрам.

В третьей главе найдено новое доказательство формул для вычисления всех биградуированнных чисел Бетти многогранников усечения симплекса произвольной размерности. Затем вычисляются все биградуированные числа Бетти обобщенных многогранников усечения, когда усекаемый многогранник является произведением не менее двух симплексов. Параметры, входящие в формулы, являются размерности симплексов в произведении и число срезанных вершин. Показано, что топологический тип момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ обобщенного многогранника усечения P однозначно определяется его набором биградуированных чисел Бетти. В конце главы рассатриваются β-многочлены Айзенберга симплициальных комплексов и, в частности, нерв-комплексов многогранников. Доказано, что эти многочлены обладают свойством мультипликативности относительно джойн-произведения симплициальных комплексов.

В четверой главе найдены достаточные условия минимальной неголодовости кольца Стенли-Райснера обобщенного многогранника усечения (наличие нетривиальных произведений или высших произведений Масси) Доказано, что обобщенный многогранник усечения является минимально неголодовским, если он получен усечением произведения не более, чем двух симплексов и сам многогранник усечения отличен от симплекса. Показано, что для четномерных смежностных многогранников отличие его от симплекса является достаточным условием его минимальной неголодовости.

В пятой главе показано, что для многогранников P размерности n с $n+3$ гранями соответствующие момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ гомеоморфны произведению трех сфер или связной сумме некоторого количества экземпляров произведений двух сфер. Обсуждается гипотеза: если момент-угол многообразие комплекса K есть связная сумма произведений из двух сфер, то комплекс K обязательно минимально неголодовский. Доказано, что для минимальной триангуляции K комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^2$ все высшие произведения Масси в целочисленных когомологиях $\mathcal{Z}_K$ являются тривиальными.

По изложению отметим, что структура диссертационной работы хорошо продумана, а текст тщательно выверен (кроме небольшого числа неизбежных опечаток, и то только в орфографии, и не обнаружено опечаток в формулах и выкладках). Отметим, что в тексте диссертационной работы четко сформулированы решаемые задачи и определены используемые понятия. Дан обзор основных работ, где впервые доказывались ключевые теоремы необходимые в диссертационной работе. Большинство доказательств проводится индукцией по комбинаторным параметрам многогранников или многообразий с исчерпывающим описанием шагов индукции. Чтение так построенного текста позволяет легко войти в тематику и смысл диссертационного исследования. Выбранная степень детализации изложения дает возможность проникнуть в суть рассуждений и вычислений, которые позволяют убедиться в правильности доказательств сформулированных результатов. Доказательства всех новых результатов изложены с исчерпывающей полнотой и тщательностью.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Все результаты работы должным образом опубликованы в ведущих российских математических журналах и апробированы в докладах на математических семинарах по геометрии и топологии в России и зарубежом, а также докладывалиь на крупных международных математических конференциях.

Оценивая диссертацию в целом необходимо отметить, что это актуальное научно квалифицированное исследование в области теории топологии многообразий, в котором решен ряд тесно связанных задач, имеющих важное значение для теории квазиторических многообразий, ассоциированных с новыми классами многогранников. В работе над диссертационной темой И.Ю.Лимонченко продемонстрировал владение многими методами современной топологии, тесно связанных с геометрией и комбинаторикой многогранников в комплексных и вещественных линейных пространствах. Лимонченко получил новые существенные результаты о биградуированных числах Бетти момент-угол многообразий, ассоциированных с простыми многогранникокоми и их усечениями. Описаны минимальные условия на симплициальные комплексы, отвечающие момент-угол многобразиям или момент-угол комплексам, кольца Стенли-Рейснера которых имеют нетривиальные произведения или нетривиальные высшие произведения Масси (неголодовские кольца Стенли-Райснера). Дано гомотопическое и топологическое описание соответствующих момент-угол многообразий.

Работа И.Ю.Лимонченко удовлетворяет всем требованиям п.9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней", предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, ее тематика полностью соответствует специальности 01.01.04 – геометрия и топология, а ее автор Лимонченко Иван Юрьевич, заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук.

5 февраля 2015 г.

Доктор физико-математических наук,
профессор (В.П.Лексин)

адрес: 140411, Московская область, г. Коломна, ул. Зеленая, 30, МГОСГИ

e-mail: *lexin_vp@mail.ru*

Подпись Лексина В.П. заверяю

Проректор по научной работе МГОСГИ,
доктор физико-математических наук (С.П.Хэкало)