Отзыв
научного руководителя
на диссертацию Л.А. Прохоренковой
"Свойства случайных веб-графов, основанных на предпочтительном присоединении", представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация Л.А. Прохоренковой посвящена исключительно актуальным задачам теории случайных графов — задачам построения и анализа вероятностных моделей для описания динамики роста сети Интернет.

В работе сеть Интернет интерпретируется как *веб-граф*, вершины которого — сайты, а ребра — гиперссылки между вершинами. Задача построения адекватных вероятностных моделей веб-графа и изучения их различных статистик крайне важна для физики сложных систем, для информационного поиска и др. Именно поэтому уже в середине 90-х годов XX века начали активно проводиться соответствующие исследования — физиками, специалистами по компьютерным наукам и, наконец, математиками. С точки зрения математики, модель веб-графа — это чисто вероятностный объект: это последовательность случайных элементов G_n, $n \in \mathbb{N}$, принимающих значения в некотором множестве графов и имеющих такие распределения, чтобы с вероятностью, стремящейся к единице при $n \to \infty$, значения этих случайных элементов обладали свойствами, которые выявлены как статистически значимые для реального веба. Среди таких свойств — асимптотически степенной закон распределения степеней вершин, постоянный кластерный коэффициент, малый диаметр и др. Таким образом, случайные веб-графы — это случайные графы специального типа. Разумеется, модель Эрдеша–Реньи с биномиальным (асимптотически пуассоновским) распределением для них не годится. Одна из первых естественных идей построения "правильной" модели была предложена в конце 90-х годов XX века физиками Л.-А. Барабаши и Р. Альберт. Идея состоит в том, что при появлении каждого очередного случайного графа в последовательности возникает новая вершина и некоторое количество ребер, выходящих из нее в предшествующие вершины и с бо́льшими вероятностями присоединяющихся к тем из них, которые уже имеют бо́льшие степени. Модели, основанные на этой идее, получили название "*модели предпочтительного присоединения*". Однако видно, что математической формализации в данном описании моделей нет. За прошедшие два десятилетия появилось огромное количество формализаций, в той или иной мере соответствующих реальности. В результате теория случайных веб-графов — это один из самых важных и активно изучаемых разделов теории случайных графов.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения.

Первая глава диссертации посвящена одной из самых ранних и потому, можно сказать, "классических" моделей веб-графа, основанных на идее предпочтительного присоединения, — модели Боллобаша–Риордана. В *параграфе 1.2* доказаны очень нетривиальные новые результаты о распределении так называемых *вторых степеней* вершин в модели. Вторая степень вершины — это, по существу, количество вершин графа, отстоящих от данной вершины на расстояние 2 (с некоторыми оговорками в случае петель и кратных ребер, которые в веб-графах встречаются). Найдена асимптотика математического ожидания числа вершин второй степени k, и доказан закон больших чисел, свидетельствующий о том, что распределение вторых степеней вершин, подобно распределению обычных — первых — степеней, асимптотически подчиняется степенному закону. В *параграфе 1.3* получен ряд асимптотик для математических ожиданий чисел вершин произвольной степени d. Наконец в *параграфе 1.4* введено новое понятие *r-диаметра* и доказано (с помощью весьма серьезной вероятностной техники), что, как и обычный диаметр, r-диаметр в модели Боллобаша–Риордана ведет себя примерно как $\frac{\ln n}{\ln \ln n}$.

Во **второй главе** диссертации рассматривается нетривиальное уточнение модели Боллобаша–Риордана — модель Бакли–Остгуса, в которой добавляется дополнительный вещественный параметр $a > 0$, интерпретируемый как начальная притягательность каждой вершины. Величина a позволяет управлять параметром степенного закона распределения степеней вершин. Здесь Прохоренковой также удается доказать асимптотический степенной закон для вторых степеней вершин (*параграфы 2.3 и 2.4*). Это технически очень трудная работа. Однако к серьезной технике работы с реккурентными соотношениями добавляется в этой главе и исключительно тонкая комбинаторно-вероятностная идея. Дело в том, что обычно законы больших чисел (концентрация около математического ожидания) доказываются в науке о веб-графах с помощью мартингального неравенства Азумы (это сделано, кстати, и в первой главе). Но в *параграфе 2.3* делается совершенно неожиданный ход: концентрация доказывается с помощью неравенства Талаграна концентрации меры. Это тем более замечательно, что а) в неравенстве Талаграна случайные величины независимы, тогда как в моделях Боллобаша–Риордана и Бакли–Остгуса каждый последующий случайный элемент зависит от предыдущего; б) оценка получается сильнее, чем при применении неравенства Азумы. Для реализации этого хода модель переопределена в терминах независимых случайных величин, и это очень изящно.

Модели Боллобаша–Риордана и Бакли–Остгуса устроены так, что самые старые их вершины с наивысшей вероятностью имеют самые большие степени. В реальности это, конечно, не так. И, если в первых главах диссертации получены яркие результаты для упомянутых классических моделей, то **третья глава** посвящена определению и анализу совершенно новой модели — модели, учитывающей устаревание вершин. Доказаны результаты о реалистичном асимптотическом распределении степеней вершин и, собственно, о свойстве устаревания. Снова использованы нетривиальные модификации вероятностной техники.

Диссертация представляет собой цельное исследование, вызвавшее большой резонанс среди специалистов (результаты докладывались на крупных конференциях в России и за рубежом). Очевидны дальнейшие перспективы развития такой тематики. Многие из результатов диссертации уместно включить в спецкурсы по случайным графам и веб-графам. В этом ключе, а также в ключе различных приложений использованной Прохоренковой техники диссертация может быть полезна специалистам МГУ им. М.В. Ломоносова, МФТИ, ИППИ РАН, МИРАН им. В.А. Стеклова, ВЦ РАН, ИПМ ДВО РАН, КарНЦ РАН и т.д.

Таким образом, диссертационная работа Л.А. Прохоренковой полностью соответствует требованиям п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней" Минобрнауки РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а Людмила Александровна Прохоренкова заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика.

15.12.2014

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
профессор

А.М. Райгородский

Подпись А.М. Райгородского заверяю

и.о. декана механико-математического факультета МГУ,
профессор

В.Н. Чубариков

Почтовый адрес: 119991, г. Москва, Ленинские горы, механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Телефон: 74959391648.
Адрес электронной почты: mraigor@yandex.ru.