Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Родников Александр Владимирович

СИСТЕМЫ С ЛЕЕРНОЙ СВЯЗЬЮ И НЕКОТОРЫЕ СМЕЖНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

Специальность 01.02.01 - теоретическая механика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2015

Работа выполнена на кафедре «Вычислительная математика и математическая физика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э.Баумана» (МГТУ им. Н.Э.Баумана)

Официальные оппоненты: Амелькин Николай Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико--технический институт

Буров Александр Анатольевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Красильников Павел Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Московский Авиационный Институт

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится 5 июня 2015 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при МГУ им. М.В.Ломоносова по адресу: *119991, Москва, Ленинские горы, 1б Главное здание МГУ, ауд. 16-10.*

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ по адресу: *Москва, Ломоносовский проспект, д.27, сектор А - 8 этаж, к.812* и на сайте http://mech.math.msu.su/

Автореферат разослан «   »   2015 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
при МГУ им. М.В.Ломоносова, к.ф.-м.н.   Прошкин В.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена анализу относительного движения механической системы, состоящей из твердого тела и материальной точки, способной передвигаться вдоль троса, концы которого закреплены на твердом теле. Такую связку можно рассматривать как модель космической системы, состоящей из связанных тросом космической станции и малой планеты или малого космического аппарата и протяженной орбитальной станции. Рассматриваются также некоторые смежные вопросы динамики полета в окрестности малой планеты.

Актуальность решения таких задач связана с тем, что для эффективного освоения как околоземного пространства, так и дальнего космоса оказываются необходимыми искусственные космические объекты, элементы которых, находясь достаточно далеко друг от друга, надежно, и в то же время технически просто соединены между собой. При этом в некоторых случаях оказывается полезной возможность изменения конфигурации такой космической системы, то есть перемещения некоторых ее компонентов относительно базовой или центральной части.

В то же время в связи с открытием все большего и большего числа малых тел Солнечной системы возникает ряд проблем, связанных с их освоением или оценкой их потенциальной опасности. Для реализации этих задач может понадобиться космическая станция, достаточно долго не покидающая малой окрестности астероида, причем должна быть построена некоторая транспортная система, позволяющая перемещать грузы между станцией и поверхностью малой планеты, одновременно удерживающая станцию около астероида. При этом желательно сохранить возможность перемещения станции относительно поверхности малой планеты, например, с целью ее обсервации.

Как в случае протяженной рукотворной космической системы, так и в случае полета около поверхности астероида связь между элементами (рукотворными или искусственными) протяженной космической системы может быть реализована с помощью леера, т.е. троса, оба конца которого закреплены на объекте, который моделируется твердым телом, причем объект, моделируемый материальной точкой, может перемещаться вдоль леера. (Слово “леер” происходит от староголландского морского термина “leier”, означающего “веревку, оба конца которой закреплены”). Необходимо отметить, что гравитацией между элементами искусственного протяженного космического объекта можно пренебречь, причем в этом случае движение материальной точки вдоль леера может оказывать существенное влияние на вращение твердого тела, в то время как в случае движения в окрестности естественного небесного тела космическая станция на леере не оказывает влияния на вращение этого тела, но движение самой станции существенно зависит от гравитационного поля малой планеты. Кроме того, при анализе относительного движения рукотворной системы, находящейся на околоземной орбите, необходимо учитывать неоднородность (центральность) гравитационного поля Земли. В случае же движения станции в достаточно малой окрестности астероида гравитационным полем больших тел Солнечной системы в ряде случаев (с учетом инерционных эффектов) можно пренебречь.

История исследования динамики космических объектов, связанных между собой гибкой связью насчитывает почти полвека. Различные аспекты анализа движения космических тросовых систем исследовались в работах В.В.Белецкого, Е.Т.Новиковой, Е.М.Левина, В.А.Иванова, Ю.С.Ситарского, A.Misra, D.Scheeres и мн. др. К этим работам естественным образом примыкают работы, связанные с анализом динамики долговременной тросовой транспортной системы, известной под названием "космический лифт". Однако, автору не известны работы, в которых подобная система предлагалась бы для малых тел Солнечной системы (за исключением работ A.Misra, в которых предусматривается возможность кратковременного тросового соединения космического аппарата с поверхностью астероида). По-видимому, до [1] не существовало работ, в которых рассматривалось бы движение элемента тросовой системы вдоль троса при существенно изменяющейся геометрии последнего. При этом в настоящее время существует ряд работ, связанных с анализом динамики кабины космического лифта или поведения материальной точки, перемещающейся вдоль троса классической космической тросовой системы (А.А.Буров, И.И.Косенко). Однако, в этих работах считается, что во все время движения трос остается прямым. Такая ситуация формально является частным случаем задачи, рассматриваемой в настоящей диссертации, но фактически является отдельной оригинальной задачей.

Очевидно, тросовая транспортная система между поверхностью малой планеты и космической станцией может быть построена, если движение космической станции в окрестности астероида таково, что во все время движения космическая станция находится на одном и том же расстоянии от хотя бы одной из точек поверхности этого астероида. Динамике полета в окрестности малых планет посвящены десятки работ (В.В.Белецкий, J.E.Marsden, D.Scheeres, И.И.Косенко, О.О.Василькова и мн.др.) Однако, сложность формы малых планет и их вращения вокруг центра масс исключают возможность реализации традиционной концепции космического лифта. Тем не менее, если считать, что астероид является близким к динамически симметричному твердым телом (предположение, справедливое для ряда астероидов), то движение материальной точки, моделирующей космическую станцию, в окрестности такого тела можно описать в рамках Обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел (ООКЗЗТ), предложенной В.В.Белецким. В этом случае материальная точка, помещенная, например, в точку либрации, во все время движения оказывается на неизменном расстоянии от точек оси динамической симметрии, т.е. может быть соединена тросами или леером с полюсами (точками пересечения оси динамической симметрии с поверхностью твердого тела). Таким образом, возникает задача исследовании динамики материальной точки на леере, концы которого закреплены в полюсах гравитирующего твердого тела, совершающего регулярную прецессию.

Целями диссертации являются:

1. Описание движения механической системы (леерной связки), состоящей из гантелевидного твердого тела и материальной точки, связанных леером, в однородном силовом поле,
2. Анализ движения леерной связки в центральном ньютоновском силовом поле, в том числе поиск и исследование устойчивости равновесных конфигураций; описание движения материальной точки вдоль леера, в случае, когда твердое тело стабилизировано в орбитальной системе отсчета, включая участки движения с натянутым и ослабленным леером; изучение возможности захвата леерной связью свободно движущейся материальной точки,
3. Анализ влияния движения материальной точки малой массы вдоль леера на относительное движение гантелевидного твердого тела,
4. Поиск и анализ устойчивости положений относительного равновесия (точек либрации) материальной точки в окрестности гравитирующего прецессирующего динамически симметричного твердого тела,
5. Описание движения материальной точки вдоль леера, закрепленного на полюсах прецессирующего гравитирующего твердого тела в интегрируемых случаях уравнений движения,
6. Поиск и анализ устойчивости положений равновесия материальной точки на леере, закрепленном на полюсах гравитирующего прецессирующего твердого тела, вытянутого или сжатого вдоль оси динамической симметрии.

Достоверность полученных результатов опирается на строгое применение математических методов исследования, на сопоставление теоретических выводов с результатами анализа движения методами компьютерного моделирования. Все полученные результаты строго обоснованы.

Практическая ценность работы. Теоретические результаты диссертации могут быть использованы при проектировании протяженных орбитальных космических систем, при планировании космических миссий по исследованию и освоению малых планет Солнечной системы, при исследовании динамики систем с неудерживающими связями, при чтении специальных курсов по механике и теории устойчивости движения.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова по аналитической механике и теории устойчивости им. В.В.Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В.В.Белецкого, проф. А.В.Карапетяна; по механике космического полета им. В.А.Егорова под руководством чл.-корр. РАН В.В.Белецкого, проф. В.В.Сазонова; по динамике относительного движения под руководством чл.-корр. РАН В.В.Белецкого, проф. Ю.Ф.Голубева и др.; по математическим методам технической механики под руководством проф. С.Я.Степанова, проф. И.И.Косенко, А.А.Бурова; а также на научных семинарах в МГТУ им. Н.Э.Баумана, в ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, в ИКИ РАН.

Результаты, полученные в диссертации, были представлены на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

XXVII-XXXII, XXXIV-XXXVIII академических чтениях по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П.Королёва и других выдающихся отечественных ученых - пионеров освоения космического пространства (Москва, 2003-2008, 2010-2014); Пятом, шестом и седьмом международных симпозиумах по классической и небесной механике (Великие Луки, 2004, 2007, Москва, 2011); Международной конференции "Образование через науку", посвященной 175-летию МГТУ им.Н.Э.Баумана (Москва, 2005); International Scientific Meeting Physical Interpretations of Relativity Theory (PIRT-2005), (Moscow, Russia -Liverpool, Sunderland, UK, 2005); 9th International Conference Stability, Control and Rigid Bodies Dynamics (Donetsk, 2005); Международной научной конференции по механике "Четвертые Поляховские чтения" (Санкт-Петербург, 2006); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Н.Новгород, 2006); V и VI международных аэрокосмических конгрессах (IAC-06, IAC-

09) (Москва, 2006, 2009); IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (Иркутск, 2007); Научной конференции "Ломоносовские чтения", секция механики (Москва, МГУ, 2008); 6th-8th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conferences (ENOC), (Saint Petersburg, Russia, 2008; Rome, Italy, 2011; Vienna, Austria, 2014); Международной астрономической конференции "Динамика тел Солнечной системы" (Томск, 2008); International Symposium Rare attractors and rare phenomena in nonlinear dynamics (RA08) (Riga-Jurmala, Latvia, 2008); 4th and 5th International Scientific Conference on Physics and Control - Physcon (Catania, Italy, 2009; Leon, Spain, 2011); 5th International Meeting on Celestial Mechanics (CELMEC V), (San Martino al Cimino, Italy, 2009); XI и XII Международных конференциях "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления", (Москва, ИПУ РАН, 2010, 2012); Десятой Крымской Международной Математической школе "Метод функций Ляпунова и его приложения" MFL-2010 . (Крым, Алушта, 2010); International Symposium on Orbit Propagation and Determination (Lille, France, 2011); Международной научной конференции по механике "Шестые Поляховские Чтения, посвященные 95-летию со дня рождения С.В.Валландера", (С.-Петербург, 2012); Международной конференции "Моделирование, управление и устойчивость" MCS-2012. (Крым, Севастополь, 2012); Symposium Nonlinear Dynamics. Multidisciplinary and Interdisciplinary Applications (SNDMIA 2012) (Belgrade, Serbia, 2012); International workshop on Key Topics in Orbit Propagation Applied to Space Situational Awareness (KEPASSA), (Logroño, Spain, 2014); Международной конференции "Метод функций Ляпунова и его приложения" (MFL-2014), (Крым, Алушта, 2014); Международной научной конференции "Физико-математические проблемы создания новой техники" (PhysMathTech - 2014) посвященной 50-летнему юбилею Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э.Баумана. (Москва, 2014).

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

1. Впервые поставлена задача о движении механической системы, состоящей из твердого тела и материальной точки, такой что материальная точка может перемещаться вдоль троса, концы которого закреплены на поверхности твердого тела (такой трос может быть назван леером, а сама система - леерной связкой) во внешнем гравитационном поле или в гравитационном поле самого твердого тела.
2. Описано движение леерной связки в однородном силовом поле в случае, когда твердое тело гантелевидно, и все движения происходят в одной плоскости.

3. Найдены равновесные конфигурации леерной связки, когда твердое тело гантелевидно, при движении ее центра масс в центральном ньютоновском силовом поле по круговой орбите, в плоскости этой орбиты. Исследована устойчивость и возможность стабилизации этих конфигураций.
4. Описано движение материальной точки вдоль леера, в случае, когда твердое тело, центр масс которого движется в центральном ньютоновском силовом поле по круговой орбите, стабилизировано в одном из своих положений равновесия в орбитальной системе отсчета, в плоскости этой орбиты, в том числе описаны все возможные безударные движения, включающие в себя участки движения с напряженным и ослабленным тросом.
5. Предложен алгоритм безударного захвата леерной связью материальной точки, свободно двигающейся в центральном ньютоновском силовом поле.
6. Проведено численно-аналитическое исследование влияния движения материальной точки малой массы вдоль леера на вращательное движение гантелевидного тела, двигающегося по круговой орбите, в центральном ньютоновском силовом поле, в частности, выведен критерий для определения направления переворачивания гантели из положения, близкого к касательной к орбите.
7. Определено количество и исследована устойчивость положений относительного равновесия (точек либрации) материальной точки в окрестности гравитирующего прецессирующего динамически симметричного твердого тела, чей гравитационный потенциал представляется композицией гравитационных потенциалов двух точечных действительных масс, в частности показано, что такие равновесия существуют только в плоскости, проходящей через центр масс перпендикулярно оси прецессии (треугольные точки либрации) или в плоскости, образуемой осями прецессии и динамической симметрии (компланарные точки либрации).
8. Определено количество и исследована устойчивость треугольных точек либрации прецессирующего твердого тела в случае, когда его гравитационный потенциал представляется композицией гравитационных потенциалов двух точечных комплексно сопряженных масс, имеющих на оси динамической симметрии комплексно сопряженные координаты.
9. Определено количество и проведена классификация компланарных точек либрации прецессирующего твердого тела, в случае, когда его

гравитационный потенциал представляется композицией двух комплексно сопряженных точечных масс, находящихся на чисто мнимом расстоянии.

10. Выписаны общие уравнения движения материальной точки вдоль леера, закрепленного в полюсах прецессирующего гравитирующего динамически симметричного твердого тела, отмечены два случая интегрируемости этих уравнений, проведено описание движения в этих случаях.
11. Проведено описание возможных положений равновесия материальной точки на леере, закрепленном в полюсах прецессирующего гравитирующего твердого тела, чей гравитационный потенциал представляется композицией гравитационных потенциалов двух точечных действительных масс, выведен критерий возможности стабилизации этих положений равновесия фиксацией материальной точки на леере.

Диссертационная работа была выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ.

Личный вклад. Большая часть работ, составляющих основу диссертации, выполнена без соавторов. Из совместных с В.В.Белецким работ на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором. В некоторых случаях для целостности изложения приводятся также результаты, принадлежащие В.В.Белецкому, что во всех таких случаях специально оговорено.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 24 печатных работах, из них 12 статей - в рецензируемых журналах из списка ВАК: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12], 2 статьи - в изданиях, не входящих в список ВАК:[13, 14], 10 статей - в трудах международных конференций [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух частей, включающих 11 глав, заключения и содержит 275 страниц машинописного текста.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, приведен краткий обзор литературы, связанной с тематикой диссертации, и кратко изложено содержание диссертации.

В ПЕРВОЙ ЧАСТИ, состоящей из глав 1-6, изучается относительное движение механической системы (леерной связки), состоящей из гантели, т.е. твердого тела, состоящего из двух соединенных невесомым стержнем материальных точек масс m_1 и m_2 ($m_1 \leq m_2$),) и еще одной материальной точки (груза) массы m_3, способной передвигаться вдоль троса (леера), концы которого закреплены в концах гантели в однородном или центральном ньютоновском силовых полях. (Такая связка является моделью протяженной космической станции, снабженной леерной связью и находящейся в дальнем космосе или на околоземной орбите). Геометрия и динамика такой связки определяется безразмерными параметрами $\mu = (m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)$, $\nu_3 = m_3/(m_1 + m_2)$ и эксцентриситетом e эллипсоида, ограничивающего движения груза вокруг гантели. Изучаются задачи интегрирования уравнений движения относительного движения связки в однородном поле, равновесные конфигурации связки, центр масс которой движется по круговой орбите, в плоскости орбиты и их устойчивость, движения материальной точки на леере вокруг гантели, стабилизированной в том или ином положении равновесия на круговой орбите, возможные безударные движения материальной точки вдоль леера, если допускается его ослабление, возможность захвата леерной связью неуправляемой материальной точки, движущейся в той же, что и гантель плоскости по близкой орбите, влияние движения малой массы по лееру на вращение гантели вокруг ее центра масс. Результаты этой части опубликованы в [1, 2, 3, 4, 14, 6]

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ изучается движение относительно центра масс леерной связки в однородном силовом поле в случае, когда все движения происходят в одной плоскости. Интегрируемость уравнений связного движения (т.е. движения по границе ограничивающего эллипса) в этом случае следует из существования циклического интеграла

$$C_1\dot{\varphi} + B_1\dot{\gamma} = \Omega_0 = const$$

и интеграла Якоби

$$\left(A_1 - B_1^2/C_1\right)\dot{\gamma}^2 + \Omega_0^2/C_1 = h_1$$

(Здесь φ – угол между осью гантели и инерциальной осью, γ – эксцентрическая аномалия груза на эллипсе, ограничивающем его движение, A_1, B_1 и C_1 – функции γ и параметров задачи. Фазовые портреты системы, редуцированной по Раусу, построены в плоскости $(\gamma, \delta = \dot{\gamma}/\Omega_0)$ и качественно совпадают с фазовым портретом математического маятника. Условие связного движения представлено в виде квадратичной формы

$$E\dot{\gamma}^2 + 2\Delta\dot{\gamma}\Omega_0 + B_1\Omega_0^2 \geq 0,$$

где E и Δ также зависят от γ и параметров задачи. Определяемые этим неравенством области представлены также в фазовой плоскости (γ, δ). Показано, что эти области в зависимости от значений параметров системы могут быть ограниченными и неограниченными и иметь достаточно разнообразные формы. Результаты, описываемые в этой главе, опубликованы в [1].

Во ВТОРОЙ ГЛАВЕ изучаются равновесные конфигурации леерной связки, центр масс которой движется по круговой орбите в центральном ньютоновском силовом поле. В предположении, что размерами леерной связки по сравнению с радиусом орбиты можно пренебречь, устанавливается существование в плоскости орбиты 12 равновесных конфигураций, а именно:

4-х "вертикально-вертикальных" конфигураций, для которых во все время движения $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi$, причем $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$ (здесь и далее, в отличие от первой главы, φ – угол между осью гантели и лучом с началом в притягивающем центре, проходящем через центр масс связки),

4-х "горизонтально-горизонтальных" конфигураций, для которых во все время движения $\gamma=0$ или $\gamma=\pi$, причем $\varphi=\pm\pi/2$,

4-х "вертикально-горизонтальных" конфигураций, для которых во все время движения $\gamma=\pm\pi/2$,причем φ=0 или φ=π

"Вертикально-вертикальные" конфигурации оказываются устойчивыми, если меньшая из масс, образующих гантель, находится между большей из масс, образующих гантель, и грузом. В противном случае "вертикально-вертикальная" конфигурация устойчива только если

$$\nu_3(\mu + e^2\mu - 2e) < e(1 - \mu^2), \tag{1}$$

однако, ее можно стабилизировать, запретив движение груза вдоль леера. Остальные конфигурации неустойчивы.

В случае симметричной гантели $(m_1 = m_2)$ устанавливается также существование 4-х неустойчивых"горизонтально-вертикальных" конфигураций, для которых во все время движения $\gamma = \pm\pi/2$, $\varphi = \pm\pi/2$. Эти конфигурации можно стабилизировать фиксацией груза на леере, если $(2\nu_3 + 1)e^2 - \nu_3 < 0$.

Кроме того, устанавливается, что для несимметричной гантели $(m_1 \neq m_2)$ при выполнении условия 1 существуют 4 неустойчивые"наклонно-вертикальные" конфигурации, для которых $\varphi \neq 0, \pm\pi/2, \pi$. Эти конфигурации можно стабилизировать, запретив движение груза вдоль леера, если $(1 - 2e^2 + \mu^2 e^4)\nu_3 - e^2(1 - \mu^2) > 0$. Из последнего неравенства следует, что каковы бы ни были не равные между собой массы, образующие гантель, можно подобрать длину леера и массу груза так, чтобы стабилизировать гантель под любым наперед заданным углом к направлению на притягивающий центр. Результаты этой главы опубликованы в [2].

В ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ в рамках предположений второй главы изучается динамика связного движения груза на леере относительно гантели с учетом возможности схода со связи при условии, что груз на леере достаточно мал, чтобы оказывать влияние на движение гантели. Для этого уравнения движения, выведенные во второй главе, дополняются условиями схода со связи (то есть условиями, когда силы натяжение ветвей леера становятся нулевыми). Далее, эти условия вместе с уравнениями движения редуцируются для предельного случая задачи предыдущей главы, когда масса груза является пренебрежимо малой по сравнению с массами, образующими гантель, в результате чего уравнение вращательного движения гантели отделяется от общей системы уравнений движения. Это уравнение допускает два частных решения, соответствующих стационарным движениям гантели, в которых гантель "вертикальна" ($\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$) или "горизонтальна" ($\varphi = \pm\pi/2$).

В случае "вертикальной" гантели связное движение груза вокруг гантели подчиняется интегралу Якоби

$$\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\gamma'^2 - 3\cos\gamma\left(\cos\gamma - 2\mu e\right) = h_1 = \mathrm{const},$$

где штрихом обозначена производная по безразмерному времени, а условие нахождения на связи имеет вид

$$\sqrt{1-e^2}\gamma'^2 + 2\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\gamma' + 3\sqrt{1-e^2}\cos\gamma\left(\cos\gamma - e\mu\right) \geq 0.$$

Характерный фазовый портрет в плоскости $(\gamma, \dot\gamma)$ изображен на рис. 1 (области схода со связи закрашены). В случае "горизонтальной" гантели связное движение груза вокруг гантели подчиняется интегралу Якоби

$$\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\gamma'^2 + 3\left(1 - e^2\right)\cos^2\gamma = h_2 = \mathrm{const}, \qquad (2)$$

а условие нахождения на связи имеет вид

$$\sqrt{1-e^2}\gamma'^2 + 2\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\gamma' + 3\sqrt{1-e^2}\sin^2\gamma \geq 0..$$

Характерный фазовый портрет в плоскости $(\gamma, \dot\gamma)$ для случая $\sqrt{2/3} < e < \sqrt{3}/2$ изображен на рис.2. При $e \leq \sqrt{2/3}$ существуют только "верхние"

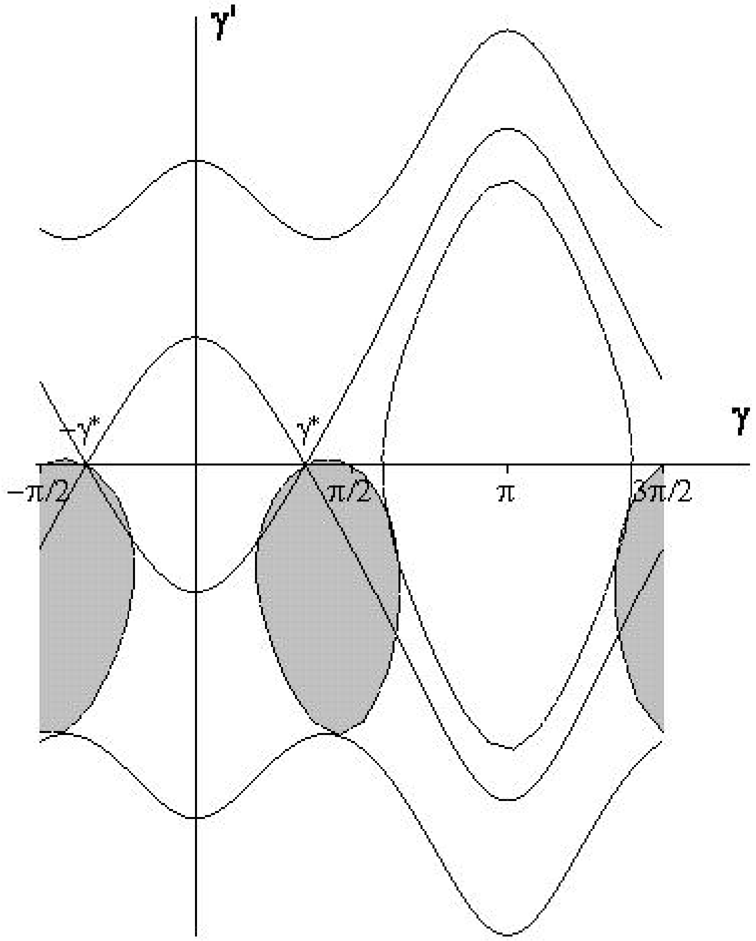

Рисунок 1 –

области схода со связи, при $e = \sqrt{3}/2$ эти области соприкасаются, а при $e > \sqrt{3}/2$ все области схода со связи сливаются в одну. Результаты этой главы опубликованы в [2].

В ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ, как и в третьей, рассматривается движение малого груза вдоль леера в предположении, что концы леера закреплены на гантели, центр масс которой движется по круговой орбите в гравитационном поле притягивающего центра, а сама гантель "вертикальна" или "горизонтальна". Классифицируются траектории движения груза в плоскости орбиты, включающие в себя участки связного (с натянутым тросом) и свободного (с ослабленным тросом) движений, при условии, что переход от свободного к связному движениям происходит безударно. Описание безударных траекторий основывается на том факте, что если неудерживающая связь задана неравенством $f(x, y) \leq 0$ и $x = x(t)$, $y(t)$ – закон свободного движения в плоскости круговой орбиты (в ор-

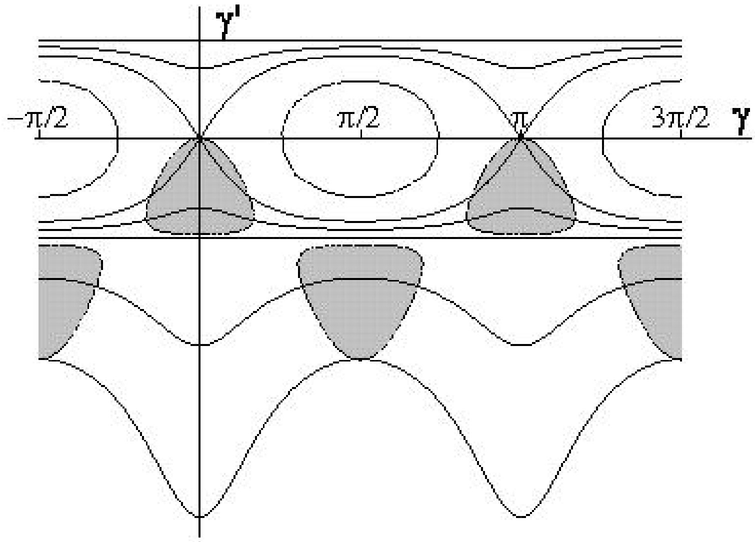

Рисунок 2 –

битальной системе координат), то для функции $F(t) = f(x(t), y(t))$ в точке схода со связи и в точке безударного входа на связь выполняются равенства $F = \dot{F} = \ddot{F} = 0$, в то время как в точке схода со связи $\dddot{F} < 0$, а в точке безударного входа на связь $\dddot{F} > 0$. Устанавливается, что в случае "горизонтальной" гантели безударные траектории с несимметричными (относительно гантели) точками схода и безударного входа на связь существуют для счетного набора значений эксцентриситета e ($e = 0.9293503865; 0.9713337374; 0.9814743955; 0.9862885288$ и т.д.), причем такое движение в любом случае заканчивается ударом о трос, а траектории с симметричными точками схода и входа на связь могут соответствовать как периодическим безударным движениям, так и приводящим к удару о леер. Периодические траектории в целом разделяются на два типа: "овалы", когда движение происходит все время в одном направлении, или "серпы", когда некоторые участки связного движения могут проходится сначала в одном, а затем в противоположном направлениях. Приводятся условия существования таких траекторий.

В случае "вертикального" положения гантели доказывается, что безударные периодические движения груза по лееру, допускающие сход со связи, существуют при любых допустимых значениях параметров системы. Итоговая диаграмма существования таких периодических траекторий в зависимости от безразмерной продолжительности $\tau = 2\pi t/T$ (T – период обращения связки по орбите) участка свободного движения и отношения малой b и большой a полуосей эллипса, ограничивающего движение груза, приведена на рис. 3. На этом рисунке римскими цифрами обозначены области: I – “овалов” с облетом большей из масс, образующих гантель, II – “овалов” с облетом меньшей массы, III - “серпов” с облетом большей массы, IV – “серпов” с облетом меньшей массы, V и VI – некоторых промежуточных траекторий.

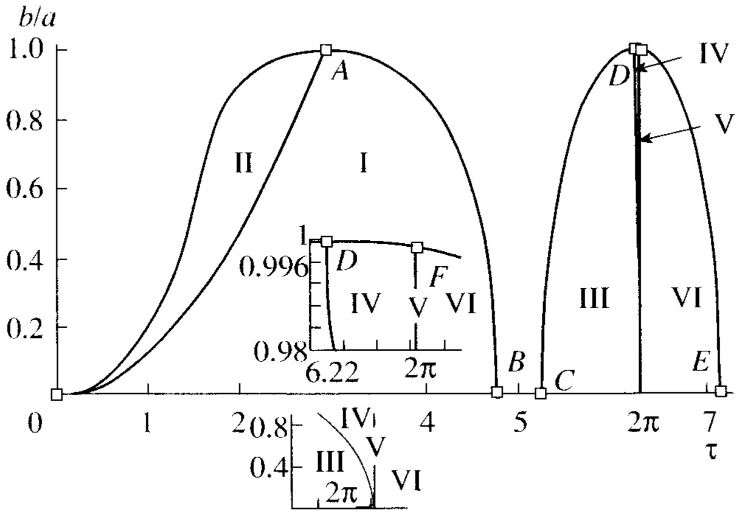

Рисунок 3 –

Во всех случаях приводятся формулы, определяющие точки схода и безударного входа на связь в зависимости от времени свободного движения. Результаты этой главы опубликованы в [3].

В ПЯТОЙ ГЛАВЕ рассматривается ситуация, когда леерная связь закреплена на твердом теле, центр масс которого движется по круговой орбите, причем прямая, соединяющая точки закрепления концов леера, “горизонтальна” или “вертикальна”. Изучается возможность мягкого (без скачков скорости и ускорения) преобразования движения неуправляемой материальной точки, перемещающейся в плоскости круговой орбиты, в одно из периодических безударных движений, описанных в четвертой главе, с помощью захватывающего устройства, двигающегося вдоль леера. Описываются два типа такого захвата: “вращательный”, когда движение преобразуется в безударное периодическое движение типа “овал”, и “колебательный”, когда возможно изменение направления движения вдоль леера. Показывается, что если не ограничивать длину леера и расстояние между точками закреплеения концов леера, захват не возможен только для отдельных орбит неуправляемой точки. Строится диаграмма зависимости типа захвата от параметров системы. Кроме того, приводится модификация описываемых алгоритмов захвата, позволяющая в некоторых случаях многократно сократить необходимую длину леера. Результаты этой главы опубликованы в [4].

В ШЕСТОЙ ГЛАВЕ для системы, рассмотренной во второй главе, и в рамках тех же ограничений, изучается влияние движения груза достаточно малой массы на вращение гантели вокруг центра масс, т.е., в отличие от третьей главы, предполагается, что движение малого груза вдоль леера может существенно изменить движение гантели. Отмечается, что качественные изменения движения гантели будет существенными только в окрестности ее сепаратрисного движения. Устанавливается критерий, при выполнении которого движения гантели в орбитальной системе отсчета будут колебаниями вокруг местной вертикали.

В случае, когда в начальный момент времени $\varphi \approx -\pi/2$, уравнения движения гантели в окрестности ее “горизонтального” положения с точностью до слагаемых порядка, меньше чем $\kappa = m_3(m_1+m_2)/(4e^2 m_1 m_2) \ll 1$, записываются как

$$\psi'' - 3\psi + \sqrt{\kappa} D(\gamma, \gamma', e, \mu), \qquad \varphi = -\pi/2 + \sqrt{\kappa}\psi,$$

а движение груза подчиняется (2). Эти уравнения допускают частные решения, соответствующие неустойчивым асимптотическим движениям гантели, стремящимся к колебаниям около “горизонтального” равновесия. Начальные условия для таких движений образуют некоторую поверхность (рис. 4, $z = \kappa^{-1}(\sqrt{3}\varphi_0 + \sqrt{3}\pi/2 + \varphi_0'))$. Исследуются некоторые свойства и асимптотики этой поверхности.

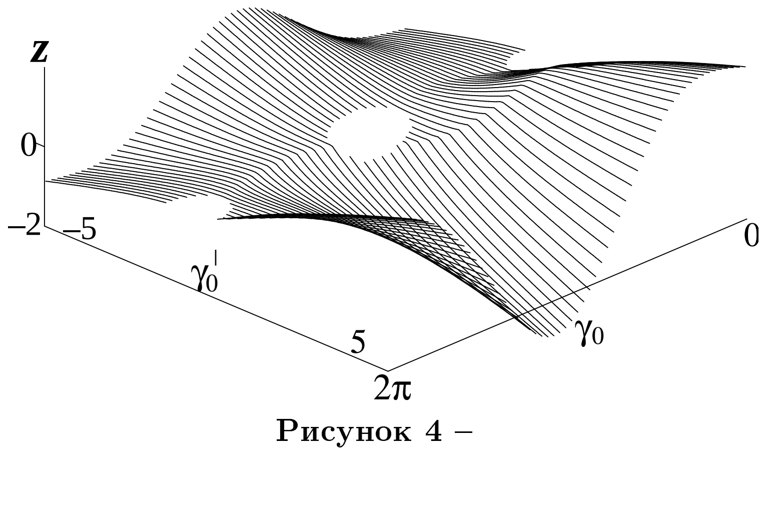

Рисунок 4 –

В случае относительно длинного леера ($e < \sqrt[4]{\kappa}$) и если гантель образована равными массами, описание околосепаратрисного движения гантели сводится к приближенным квадратурам, в случае относительно короткого леера возмущенное движение гантели изучается численно в двумерных сечениях четырехмерного пространства начальных условий. Результаты этой главы опубликованы в [14, 6].

Во ВТОРОЙ ЧАСТИ диссертации, состоящей из глав 7-11, изучается движение механической системы, состоящей из массивного динамически симметричного твердого тела, совершающего регулярную прецессию, и материальной точки, двигающейся в гравитационном поле этого тела, в предположении, что масса материальной точки достаточно мала, чтобы не оказывать влияние на движение твердого тела. (Такая механическая система может служить моделью рукотворно-естественной космической системы, состоящей из космической станции и астероида). При этом предполагается, что гравитационное поле твердого тела может быть аппроксимировано композицией гравитационных полей двух массивных точек (притягивающих центров), расположенных на оси динамической симметрии. (В этом случае выполняются предположения Обобщенной Ограниченной Круговой Задачи Трех Тел (ООКЗЗТ), предложенной В.В.Белецким в 2005г.). Массы и координаты этих точек могут быть как действительными (в случае вытянутого твердого тела), так и, согласно аппроксимациям Е.П.Аксенова, Е.А.Гребенникова и В.Г.Демина, а также J.P.Vinti, предложенным в конце 50-х гг., комплексно сопряженными (в случае твердого тела, сжатого вдоль оси динамической симметрии). В основном рассматривается ситуация, когда материальная точка находится на леере, концы которого закреплены на полюсах (точках пересечения оси динамической симметрии с поверхностью твердого тела). Равновесия материальной точки на леере в случае нулевой силы натяжения фактически совпадают с точками либрации ООКЗЗТ, т.е. положениями относительного равновесия не стесненной связями материальной точки в системе отсчета, вращаюшейся вокруг оси прецессии с угловой скоростью этой прецессии. Проводится детальный анализ существования и устойчивости этих равновесий. Строятся множества положений равновесия материальной точки на леере и анализируется возможность их стабилизации фиксированием станции на леере в случае ненулевой силы реакции леера. Исследуется движение материальной точки вдоль леера в некоторых интегрируемых случаях уравнений движения. Результаты этой части опубликованы в [5, 13, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

В СЕДЬМОЙ ГЛАВЕ изучается устойчивость (в линейном приближении) найденных В.В.Белецким для случая действительных масс и действительных координат притягивающих центров Треугольных точек либрации (ТТЛ) ООКЗЗТ, лежащих в плоскости, проходящей через центр масс гантели перпендикулярно оси прецессии. Анализ устойчивости ТТЛ сводится к анализу корней выведенного В.В.Белецким характеристического уравнения

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_0 = 0 \qquad (3)$$

уравнений движения, линеаризованных в окрестностях ТТЛ. В (3) коэффициенты A_0 и A_2 выражаются через параметры ϑ (угол нутации), $\alpha = G(m_1+m_2)/(\omega^2 l^3)$, $\mu = m_2/(m_1+m2)$, где G - константа тяготения, m_1 и m_2 – массы притягивающих центров, а l – расстояние между ними. (Не ограничивая общности рассуждений, $\mu \leq 1/2$). Условиями устойчивости ТТЛ оказываются положительность коэффициентов A_0 и A_2 и отрицательность дискриминанта кубического уравнения, соответствующего (3), при выполнении которых (3) имеет три различные пары чисто мнимых корней. Строятся области устойчивости как в пространстве коэффициентов характеристического уравнения, так и в пространстве параметров системы. Выводы об устойчивости ТТЛ могут быть проиллюстрированы рис. 5, на котором $q = \mu(1-\mu)$, $u = \cos^2\vartheta$, область I соответствует устойчивости при любых α (из чего, в частности, следует, что ТТЛ устойчивы при $\mu(1-\mu) < 1/36$), область II соответствует ситуации, когда ТТЛ устойчивы в некоторых окрестностях $\alpha = \alpha_{\min}$ и $\alpha = \infty$ ($\alpha_{\min}$ - наименьшее значение α, при котором существуют ТТЛ), а область III – когда ТТЛ устойчивы только в некоторой окрестности $\alpha = \infty$. Результаты этой главы опубликованы в [5].

В ВОСЬМОЙ ГЛАВЕ, для случая действительных масс и координат притягивающих центров, изучается существование и устойчивость (в линейном приближении) Компланарных точек либрации (КТЛ) ООКЗЗТ, лежащих в плоскости, образованной осью прецессии и осью динамической симметрии твердого тела. (Как было показано В.В.Белецким, в ООКЗЗТ не существует точек либрации, отличных от ТТЛ и КТЛ). Уравнения для определения координат КТЛ представляются в виде системы квадратного относительно одной из координат алгебраического уравнения и равенства, определяющего α через координаты КТЛ, μ и ϑ. Анализ корней квадратного уравнения позволяет построить диаграммы количества КТЛ в плоскости параметров ϑ, α при фиксированном значении μ. В результате оказывается, что при $1/2 - \sqrt{3}/4 > \mu$ может быть от 3 до 7 КТЛ, при остальных допустимых значениях μ возможно существование от 3 до 5 КТЛ. Суще-

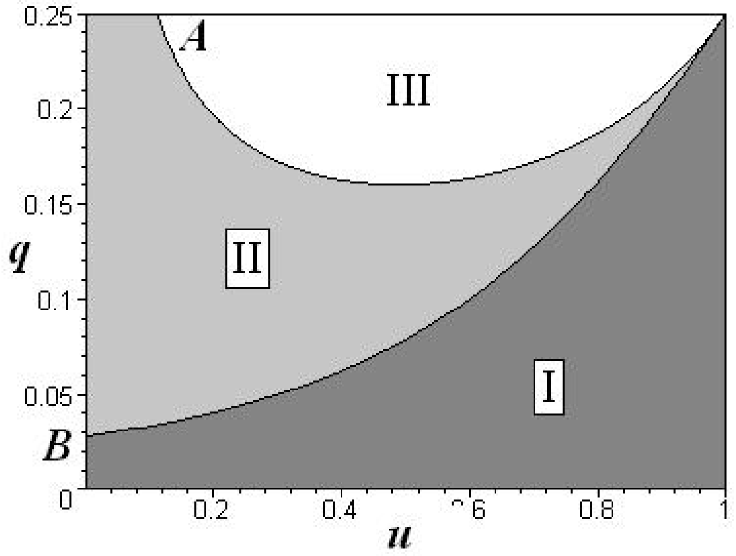

Рисунок 5 –

ствование четного числа КТЛ при этом возможно только на некоторых двумерных поверхностях трехмерного пространства параметров. В частности, при $\mu = 1/2$ возможно только нечетное число КТЛ. Все КТЛ при этом могут быть разделены на “внешние” КТЛ, являющиеся аналогами внешних эйлеровых точек либрации (таких КТЛ всегда 2) и “внутренние” КТЛ, каждую из которых можно рассматривать как аналог внутренней эйлеровой точки либрации. Анализ устойчивости КТЛ проводится в случаях, когда угол нутации прямой или нулевой, а также в случае $\mu = 1/2$ (когда массы притягивающих центров равны) с помощью характеристического уравнения, аналогичного (3). Итоговая диаграмма для $\mu = 1/2$ представлена на рис. 6, на котором каждая из областей помечена так: <количество устойчивых КТЛ>+<количество неустойчивых КТЛ>. Результаты этой главы опубликованы в [8].

В ДЕВЯТОЙ ГЛАВЕ изучается существование ТТЛ и КТЛ ООКЗЗТ в случае, когда массы притягивающих центров являются комплексно сопряженными, причем эти центры “принадлежат” оси динамической симметрии, но их координаты на этой оси также являются комплексно сопряженными числами. Суммарный потенциал твердого тела в этом случае является действительным, а точек либрации, отличных от ТТЛ и КТЛ, как и в предыдущей главе, не существует. Устанавливается, что существуют не более 2-х ТТЛ, координаты которых определяются равенствами

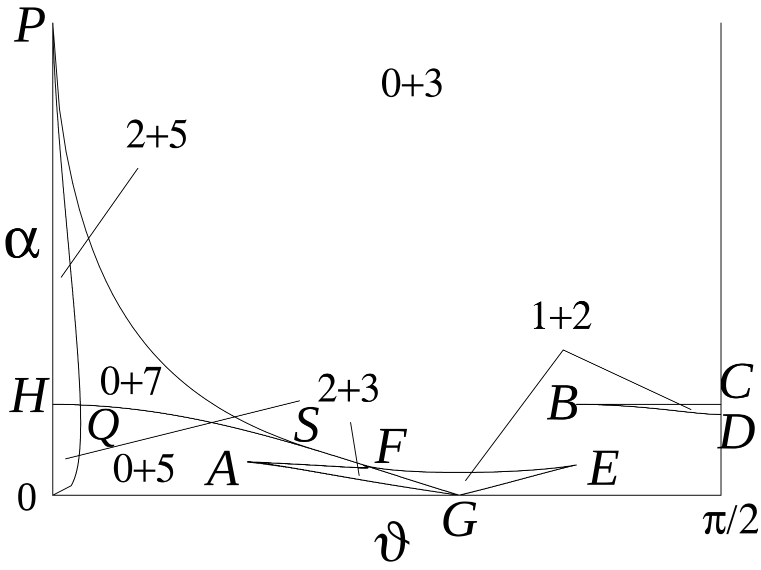

Рисунок 6 –

$$\xi_1 = \frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\alpha^{2/3}\sin(2\delta-2\delta_1)\cos^{2/3}3\delta_1}{\cos^{2/3}3\delta} - \frac{\operatorname{tg}3\delta_1}{2}\right), \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\eta_1^2 = {} & \frac{\alpha^{2/3}\cos(2\delta-2\delta_1)\cos^{2/3}3\delta_1}{\cos^{2/3}3\delta} - \frac{\alpha^{4/3}\sin^2(2\delta-2\delta_1)\cos^{4/3}3\delta_1}{\cos^{4/3}3\delta\sin^2\vartheta} + \\ & + \frac{\alpha^{2/3}\nu_1\sin(2\delta-2\delta_1)\cos^{2/3}3\delta_1}{\cos^{2/3}3\delta}\operatorname{ctg}^2\vartheta - \frac{\nu_1^2}{4}\operatorname{ctg}^2\vartheta + \frac{1}{4},\end{aligned} \tag{5}$$

где ξ_1 – безразмерная координата ТТЛ вдоль оси, являющейся проекцией оси динамической симметрии на плоскость, перпендикулярную оси прецессии; η_1 – безразмерная координата ТТЛ вдоль оси, перпендикулярной осям динамической симметрии и прецессии, $\nu = \operatorname{tg}3\delta$ – отношение мнимой и действительной частей массы притягивающего центра, $\nu_1 = \operatorname{tg}3\delta_1$ – отношение действительной и мнимой частей координаты того же притягивающего центра. Неотрицательность правой части (5) является условием существования ТТЛ. Анализ линеаризованных уравнений движения позволяет установить неустойчивость ТТЛ, отличных от КТЛ.

Анализ количества и классификация КТЛ проводятся для случая чисто мнимых координат притягивающих центров. Используя некоторые замены переменных, уравнения для определения координат КТЛ удается свести к системе кубического и квадратного уравнений от некоторых специальных переменных и выражению α через эти переменные и другие параметры задачи. Эту систему можно преобразовать в шесть зависимостей α от одной из координат КТЛ. Анализ этих зависимостей позволяет разделить КТЛ на три группы. В первую группу входят 2 “внешние” КТЛ, которые могут, в зависимости от величины угловой скорости прецессии, находится как угодно далеко от твердого тела. Во вторую группу входят от 2 до 6 “внутренних” КТЛ, лежащих внутри острых углов, образуемых осями прецессии и динамической симметрии, координаты которых ограничены. К третьей группе относятся от 0 до 3 “центральных“ КТЛ, существование которых связано с расположением особых точек рассматриваемого гравитационного потенциала. Особенности условий существования различных групп КТЛ позволяют сделать вывод, что общее число КТЛ не может быть меньше 4 и не может быть больше 8. Результаты этой главы опубликованы в [10, 11, 12].

В ДЕСЯТОЙ ГЛАВЕ ставится задача описания движения материальной точки, так или иначе связанной тросами с полюсами гравитирующего динамически симметричного твердого тела, совершающего регулярную прецессию. В случае, когда гравитационный потенциал твердого тела инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии, уравнения движения такой точки записываются в виде

$$\begin{gathered}\rho\varphi'' + 2\rho'\left(\varphi' + \cos\vartheta\right) - 2\zeta'\sin\varphi\sin\vartheta + \\ \cos\varphi\sin\vartheta\left(\rho\sin\varphi\sin\vartheta + \zeta\cos\vartheta\right) = 0\end{gathered} \tag{6}$$

$$\zeta'' - 2\frac{d(\rho\cos\varphi)}{d\tau}\sin\vartheta - (\zeta\sin\vartheta - \rho\cos\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\zeta} = \Lambda_\zeta \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\rho'' - \rho\varphi'(\varphi' + 2\cos\varphi) + 2\zeta'\sin\vartheta\cos\varphi + \zeta\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - \\ -\rho(1 - \sin^2\varphi\sin^2\vartheta) + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\rho} = \Lambda_\rho,\end{gathered} \tag{8}$$

где ζ – безразмерная координата материальной точки вдоль оси динамической симметрии, ρ – безразмерное расстояние до оси динамической симметрии, φ – угол поворота вокруг оси динамической симметрии, $\tilde{\Pi}$ – безразмерная форма гравитационного потенциала, а Λ_ζ и Λ_ρ, зависящие от множителей Лагранжа, определяются характером соединения материальной точки с полюсами твердого тела. Эти уравнения оказываются интегрируемыми для связного движения материальной точки, удерживаемой двумя тросами, для случая связного движения вдоль леера при нулевом угле нутации и случая связного движения вдоль леера в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии в случае прямого угла нутации. Последние два случая подробно описываются для ситуации, когда гравитационный потенциал твердого тела есть сумма потенциалов двух равных действительных точечных масс, лежащих на оси динамической симметрии, причем полюса расположены на равных расстояниях от центра масс твердого тела. В случае движения с нулевым углом нутации строятся все шесть качественно различных (с учетом геометрии областей схода со связи) фазовых портретов редуцированной по Раусу системы уравнений движения, возможных в данной ситуации. В случае движения с прямым углом нутации указывается, что относительные равновесия материальной точки, соответствующие вершинам эллипса, по которому происходит связное движение, находятся вне областей схода со связи. Результаты этой главы опубликованы в [7].

В ОДИНАДЦАТОЙ ГЛАВЕ изучаются множества равновесий материальной точки, помещенной на леер, концы которого закреплены в полюсах прецессирующего твердого тела. По существу, изучаются стационарные решения уравнений движения, выведенных в предыдущей главе. Используя (6), нетрудно показать, что при любом способе соединения материальной точки тросом или тросами с полюсами твердого тела (или при отсутствии каких либо тросов) в случае, когда гравитационный потенциал твердого тела инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии, положения равновесия материальной точки в системе отсчета, связанной с осями прецессии и динамической симметрии возможны только в двух плоскостях: в плоскости, проходящей через центр масс перпендикулярно оси прецессии (“треугольные равновесия”) и в плоскости, проходящей через оси прецессии и динамической симметрии (“компланарные равновесия”). К таким положениям равновесия относятся и изучавшиеся в предыдущих главах точки либрации. В этой главе дается полное описание таких положений равновесия в случае нулевой гравитации, исследуется их устойчивость.

В случае ненулевой гравитации исследуется возможность стабилизации положений равновесия на леере фиксацией точки на леере (или, что то же самое, заменой леера на два троса). Доказывается, что любое треугольное равновесие стабилизируемо. Для компланарных равновесий устаналивается следующий критерий. Пусть ось Cy_2, является пересечением плоскости, проходящей через оси прецессии и динамической симметрии, и плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии. Тогда компланарные равновесия, лежащие внутри острых углов, образуемых осью Cy_2 и осью динамической симметрии, стабилизируемы, в то время как компланарные равновесия, оказавшиеся внутри тупых углов между этими осями остаются неустойчивыми даже если запретить движение вдоль леера.

Множества равновесий на леере описываются в предположении, что гравитационный потенциал есть сумма потенциалов двух точечных действительных масс, лежащих на оси динамической симметрии и имеющих на этой оси действительные координаты. Показано, что множества треугольных равновесий при фиксированных значениях параметров, определяющих динамику твердого тела представляют собой либо замкнутые кривые, либо кривые, начинающиеся и заканчивающиеся в ТТЛ, либо неограниченные кривые. В случае, когда притягивающие центры имеют равные массы, а полюсы расположены на равных расстояниях от центра масс твердого тела, аналогичные множества компланарных равновесий оказываются либо кривыми, начинающимися и заканчивающимися в КТЛ, либо кривыми начинающимися в КТЛ, полюсах или некоторых точках на оси динамической симметрии и уходящими в бесконечность, либо кривыми, начинающимися в полюсах и заканчивающимися на оси динамической симметрии. Всего выделяется 12 качественно различных типов множеств компланарных равновесий. Результаты этой главы опубликованы в [7, 9].

В **заключении** приведены основные результаты работы.

В диссертации впервые поставлена задача об относительном движении механической системы, состоящей из твердого тела и материальной точки, связанных между собой леером, то есть тросом, концы которого закреплены на твердом теле, причем материальная точка может перемещаться вдоль леера. Рассмотрены два варианта этой задачи: когда система движется во внешнем силовом поле и когда материальная точка движется в гравитационном поле прецессирующего твердого тела. Первый вариант задачи можно рассматривать как модель протяженной орбитальной станции, снабженной зондом, способным перемещаться вдоль леера, второй вариант – как модель естественно-искусственной космической системы, состоящей из астероида и соединенной с ним тросом космической станции. Задача в целом представлена как набор отдельных задач, определяемых характером гравитационного поля, конкретным способом соединения материальной точки с твердым телом и целями исследования. В этот набор включены также ряд смежных задач, которые также можно рассматривать как частные случаи общей проблемы, описываемой общими уравнениями движения, в том числе задача поиска относительных равновесий материальной точки в окрестности гравитирующего твердого тела, являющихся фактически равновесиями на леере при нулевой силе натяжения ветвей леера, а также задача о движении материальной точки, соединенной с твердым телом одним или двумя тросами.

Решен ряд задач из этого набора, а именно: для гантелевидного твердого тела во внешнем гравитационном поле: дано описание относительного движения леерной связки, находящейся все время в одной плоскости, в однородном силовом поле; исследовано существование и устойчивость относительных равновесий леерной связки, двигающейся по круговой орбите в центральном ньютоновском силовом поле; в тех же условиях: дано описание движения материальной точки в плоскости орбиты вдоль леера относительно твердого тела, стабилизированного в одном из положений равновесия в орбитальной системе отсчета, в том числе, движений, при которых ослабление и натяжение троса происходят безударно; исследована возможность захвата неуправляемой материальной точки леерной связью; дано аналитическое и численное исследование влияния движения материальной точки малой массы вдоль леера на относительное движение гантели, в том числе аналитическое исследование разрушения неустойчивого относительного положения равновесия гантели. Для динамически симметричного прецессирующего гравитирующего твердого тела: в случае тела, вытянутого вдоль оси динамической симметрии исследована устойчивость положений относительного равновесия (треугольных точек либрации) материальной точки, не стесненной тросами, в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии; исследованы существование и устойчивость положений относительного равновесия (компланарных точек либрации) материальной точки, не стесненной тросами, в плоскости, проходящей через оси прецессии и динамической симметрии; дано описание движения материальной точки вдоль леера в двух частных случаях интегрируемости уравнений движения; описаны множества положений равновесия материальной точки на леере и выведен критерий возможности их стабилизации; в случае твердого тела, сжатого вдоль оси динамической симметрии исследованы существование и устойчивость треугольных точек либрации и существование компланарных точек либрации с помощью аппроксимации гравитационного поля твердого тела полем двух точечных комплексно-сопряженных масс.

Литература

1. Родников А.В. О движении груза по тросу, закрепленному на гантелевидном космическом аппарате. *Космические исследования.* 2004, т.42, №4, сс.444-448

2. Родников А.В. О положениях равновесия груза на тросе, закрепленном на гантелевидной космической станции, движущейся по круговой геоцентрической орбите. *Космические исследования.* 2006, т.44, №1, сс.62-72

3. Родников А.В. О существовании безударных движений по леерной связи, закрепленной на протяженном космическом аппарате. *Космические исследования.* 2006, т.44, №6, сс.553-560

4. Rodnikov, A. V. The Algoritms for Capture of the Space Garbage Using 'Leier Constraint'. *Regular and Chaotic Dynamics*,v. 11,No 4, 2006, pp. 483-489.

5. Белецкий В.В., Родников А.В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел. *Космические исследования*, 2008, т.46,№1, pp. 42-50

6. Родников А.В. О влиянии леерной связи на движение гантелевидного тела в центральном ньютоновском силовом поле. *Нелинейная динамика*, 2009, т.5, №4, сс. 519-533

7. Родников А.В. О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле. *Нелинейная динамика.* 2011. Т. 7. № 2. С. 295–311.

8. Белецкий В.В., Родников А.В. Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел. *Нелинейная динамика.* 2011. Т. 7. № 3. С. 569–576

9. Родников А.В. О компланарных равновесиях космической станции на тросе, закрепленном на прецессирующем астероиде. *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 2. С. 309-322

10. Белецкий В.В., Родников А.В. Точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае мнимого расстояния между притягивающими центрами. *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 5. с.931-940

11. Родников А.В. Компланарные точки либрации обобщенной круговой задачи трех тел в случае комплексно сопряженных масс притягивающих центров. *Нелинейная динамика.* 2013, т. 9, № 4, с. 697-710

12. Родников А.В. Треугольные точки либрации обобщенной круговой задачи трех тел в случае комплексно сопряженных масс притягивающих центров. *Нелинейная динамика.* 2014, т. 10, № 2, с. 213-222

13. Beletsky V.V., Rodnikov A.V. On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics.*Journal of Vibroengineering*, 2008, v.10,i.4, pp. 550-556

14. Rodnikov A.V. Rotations of a dumbbell equipped with 'the leier constraint'. *Journal of Vibroengineering.* v.10, i.4, pp.557-561.

15. Родников А.В.Non-impactive Transformation of the Motion by Leier Constraint in the Newtonian Force Field. *Physical Interpretations of Relativity Theory. Proceedings of International Scientific Meeting PIRT-2005.*Moscow, BMSTU, 2005, с. 216-220

16. Белецкий В.В., Родников А.В. Устойчивость стационарных движений в модельной задаче динамики системы двойного астероида. *Труды IX Четаевской конференции Аналитическая механика, устойчивость и управление движением.* Т. 5. (Механика космического полета, колебания и волны, гибридные системы). М., 2007, с. 7-19

17. Rodnikov A.V. On Systems with 'Leier Constraint' in the Central Newtonian Force Field *Proceedings of 6th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*, http://lib.physcon.ru/doc?id=8ccf6cf7ac50

18. Beletsky V.V., Rodnikov A.V. Libration Points Similar to Eulerian in the Model Problem of the Binary-Asteroids Dynamics. *Rare attractors and rare phenomena in nonlinear dynamics. Material of the International Symposium RA08.* Riga-Jurmala, Latvia, 8-12 September, 2008, pp. 6-8

19. Rodnikov A.V. On Rotation of a Dumbbell Equipped with the Leier Constraint. *Rare attractors and rare phenomena in nonlinear dynamics. Material of the International Symposium RA08.* held in Riga-Jurmala, Latvia, 8-12 September, 2008, pp. 78-81.

20. Rodnikov A.V. On Dynamics of a Dumbbell Satellite with a Small Load on the Leier. *4th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2009) . Proceedings*, Catania, Italy, sept.,1-4, 2009, http://lib.physcon.ru/doc?id=ba04a7c9633b

21. Beletsky V.V., Rodnikov A.V. On Stability of Coplanar Libraton Points in the Generalized Restricted Circular Three-Bodies Problem. *Proceedings of 5th International Scientific Conference on Physics and Control - Physcon 2011.* Leon, Spain. September 5-8, 2011. http://lib.physcon.ru/doc?id=b1c494f0dd45.

22. Rodnikov A.V. On Equilibria of a Space Station Tethered to an Asteroid.*Proceedings of 7th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC2011.* July 24-29 Rome. Italy. 2 pp.

23. Rodnikov Alexander V. The Leier Elevator for an Asteroid. Proceedings of 5th International Scientific Conference on Physics and Control - Physcon 2011. Leon, Spain. September 5-8, 2011. http://lib.physcon.ru/doc?id=5bd0a6919e9e

24. Rodnikov A.V. On relative equilibria of a particle near an oblate asteroid *ENOC 2014 - Proceedings of 8th European Nonlinear Dynamics Conference.* Institute of Mechanics and Mechatronics, Vienna University of Technology, 2014 Vienna, Austria, ISBN: 978-3-200-03433-4, 6 pp.