Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Родников Александр Владимирович

СИСТЕМЫ С ЛЕЕРНОЙ СВЯЗЬЮ И НЕКОТОРЫЕ СМЕЖНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

01.02.01 - теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2014

Содержание

Введение

Диссертация посвящена анализу относительного движения механической системы, состоящей из твердого тела и материальной точки, способной передвигаться вдоль троса, концы которого закреплены на твердом теле. Такую связку можно рассматривать как модель космической системы, состоящей из связанных тросом космической станции и малой планеты или малого космического аппарата и протяженной орбитальной станции. Рассматриваются также некоторые смежные задачи динамики полета в окрестности малой планеты.

Актуальность решения таких задач связана с тем, что для эффективного освоения как околоземного пространства, так и дальнего космоса оказываются полезными искуственные космические объекты, элементы которых, находясь достаточно далеко друг от друга, надежно, и в то же время технически просто соединены между собой. При этом в некоторых случаях оказывается полезной возможность изменения конфигурации такой космической системы, то есть перемещения некоторых ее компонентов относительно базовой или центральной части.

В то же время в связи с открытием все большего и большего числа малых тел Солнечной системы возникает как минимум три проблемы, требующие оперативных технических решений. Во-первых, необходимо эффективно оценивать потенциальную опасность того или иного малого тела для Земли. Во-вторых, малые планеты могут использоваться как удобные промежуточные базы на пути в дальний космос. В-третьих, не исключено, что некоторые астероиды окажутся продуктивными источниками минерального сырья. Для реализации этих задач может понадобится космическая станция, достаточно долго не покидающая малой окрестности астероида, причем должна быть построена некоторая транспортная система, позволяющая перемещать грузы между станцией и поверхностью малой планеты, одновременно удерживающая станцию около астероида. При этом желательно сохранить возможность перемещения станции относительно поверхности малой планеты, например, с целью ее обсервации.

Как в случае протяженной рукотворной космической системы, так и в случае полета около поверхности астероида математической моделью рассматриваемых объектов является механическая система, состоящая из твердого тела и материальной точки, так или иначе связанных между собой. Такая связь может быть реализована с помощью леера, т.е. троса, оба конца которого закреплены на твердом теле, причем материальная точка может перемещаться вдоль леера. (Слово "леер" происходит от старо-голландского морского термина "leier", означающего "веревку, оба конца которой закреплены" [39], термин "леер" в настоящее время активно используется как в мореходной практике, так и в авиации, строительстве и т.п.). Разница же состоит в том, что в случае искуственного протяженного космического объекта его гравитацией (по крайней мере в первом приближении) можно пренебречь, а движение малого тела вдоль леера может оказывать существенное влияние на вращение твердого тела, моделирующего протяженную космическую станцию, в то время как в случае движения в окрестности естественного небесного тела космическая станция на леере не оказывает влияния на вращение этого тела, но движение самой станции существенно зависит от гравитационного поля малой планеты. Кроме того, при анализе относительного движения рукотворной системы, находящейся на околоземной орбите, необходимо учитывать неоднородность (центральность) гравитационного поля Земли. (Если же такая система находится достаточно далеко от больших тел Солнечной системы, внешнее гравитационное поле можно считать пренебрежимо малым). В случае же движения станции в малой окрестности астероида внешним гравитационным полем (с учетом инерционных эффектов) можно пренебречь.

История исследования динамики космических объектов, связанных между собой гибкой связью (тросом), по-видимому, начинается с пионерских работ [20, 9], в которых рассматривалась простейшая космическая тросовая система, состоящая из двух материальных точек, связанных невесомым гибким тросом. С тех пор были опубликованы сотни работ, в которых исследуются различные аспекты динамики такой системы. Обзор основных результатов этих исследований можно найти в [19, 46, 3] и в библиографии к этим монографиям. Многие технические вопросы реализации космических тросовых систем описаны также в [154]. Среди различных направлений исследований динамики космических систем с гибкой связью необходимо выделить следующие несколько направлений: поиск и исследование устойчивости равновесных конфигураций тросовой связки (см., например, [18, 17, 38, 46, 52, 56, 88, 108]), вопросы развертывания космической тросовой системы (см., например, [91]), влияние на динамику упругих свойств троса (см., например, [18, 46, 57, 124]), равновесные конфигурации весомого троса (см., например, [3, 89]), влияние атмосферы на динамику тросовой связки (см., например, [88]), анализ необходимой прочности троса (см., например, [19, 18])и мн. др. В последнее время появились также работы, связанные с анализом динамики и равновесных конфигураций больших космических систем, включающих в себя элементы, связанные тросами (см., например, [105, 106, 107]) или же систем, в которых зонд связан с космической станцией не одним, а двумя тросами (см., например, [55, 56]). К этим работам естественным образом примыкают исследования поведения тросовой системы, получившей, благодаря идее, сформулированной в [7], название "космический лифт". Изучаются различные аспекты динамики [16, 110], прочности [89, 57], колебаний [90] и конструктивных особенностей [89, 57] такой естественно-искуственной тросовой системы, в которой трос соединяет естественное небесное тело (большую планету) с рукотворным космическим аппаратом. Однако, автору не известны работы (за исключением [126], где рассматриваются некоторые частные вопросы этой проблемы), в которых подобная задача ставилась бы для долговременной космической системы, в которой космическая станция была бы связана тросом с поверхностью малой планеты, что связано со сложностью форм астероидов и необходимостью учета влияний больших тел Солнечной системы. При этом возможность кратковременного соединения с целью коррекции орбиты космического аппарата с поверхностью астероида исследовалась в [123]. Следует заметить, что до работы автора [61] возможность перемещения элемента космической тросовой системы вдоль троса, при котором изменяется конфигурация троса, не рассматривалась (В работах [32, 104] для рассматриваемой механической системы предусмотрена возможность такого перемещения, однако, изучается только одно из возможных положений равновесия). Необходимо, однако, отметить, что в настоящее время опубликован ряд работ, в которых рассматривается классическая тросовая система, состоящая из двух тел, связанных тросом, но вдоль троса может перемещаться материальная точка (см. [34, 35, 36, 37, 108, 109, 102], однако, в этих работах трос во все время движения остается прямым, то есть фактически может быть заменен жестким стержнем. (Такая ситуация формально является частным случаем ситуации, рассматриваемой в настоящей диссертации, но фактически является отдельной оригинальной задачей)

Как известно, источником идеи построения "космического лифта" является тот факт, что существуют такие околоземные (геостационарные) орбиты, находясь на которых космический аппарат оказывается неподвижным по отношению к поверхности Земли. Аналогичным образом, тросовая транспортная система между поверхностью малой планеты и космической станцией может быть построена, если движение космической станции в окрестности астероида таково, что во все время движения космическая станция находится на одном и том же расстоянии от хотя бы одной из точек поверхности этого астероида (причем в этом случае реализация тросовой системы технически гораздо проще, чем в случае традиционного космического лифта, хотя бы потому, что требуется многократно более короткий трос). Таким образом, к задачам построения тросовой системы, связывающей астероид с космической станцией примыкает задача поиска стационарных орбит такой станции в окрестности малой планеты. Такая задача, в свою очередь, с учетом внешних воздействий, является вариантом задачи нескольких взаимно-гравитирующих тел. В простейшем варианте, пренебрегая внешними влияниями, можно говорить о задаче двух тел. (В литературе встречается термин “полная задача двух тел” [148, 149, 151], когда изучается движение системы двух взаимногравитирующих твердых тел, в отличие от классической “задачи двух тел”, когда изучается взаимное движение двух гравитирующих материальных точек). Эта задача получила толчок к развитию в связи с открытием в 1995 году первого из кратных астероидов (малых планет, имеющих спутники или группы двух, трех или четырех расположенных близко друг к другу и неразбегающихся астероидов). Различным аспектам динамики двойных астероидов посвящено большое число работ (см., например, [11, 112, 115, 116, 117, 118, 119, 127, 148, 150, 156] и многие другие), в которых исследуются в том числе различные аспекты полной задачи двух тел. Эти работы неотделимы от исследования орбит космического аппарата в окрестности одиночного или кратного астероида (в данном случае можно говорить об ограниченной задаче нескольких тел, когда одно из тел представляется материальной точкой, двигающейся под влиянием гравитации остальных тел, но не оказывающая влияния на их движение). Примеры численного и численно-аналитического исследования орбит космического астероида в окрестности известных астероидов можно найти, например, в [114, 153, 151, 152] и др. Отметим, что решение подобных задач оказывается актуальным и для устранения потенциальных угроз со стороны астероидов. Например, в [47] изучается возможность перемещения астероида на безопасную орбиту с помощью космического аппарата с постоянно работающим ракетным двигателем, размещенного в непосредствееной близости от поверхности малой планеты.

Известно, что многие астероиды имеют весьма причудливую форму. Однако, можно выделить большое количество малых планет, чья форма близка к осесимметричной. В этом случае движение малой планеты вокруг центра масс можно считать близким к регулярной прецессии. Кроме того, если планета имеет вытянутую форму, ее гравитационный потенциал можно аппроксимировать потенциалом двух точечных масс, находящихся на оси динамической симметрии. Уравнения движения материальной точки в окрестности такой малой планеты оказываются обобщением классической Ограниченной круговой задачи трех тел (ОКЗЗТ), в связи с чем соответствующий вариант задачи двух тел, впервые сформулированный в [13, 12], был назван в этой работе Обобщенной ограниченной круговой задачей трех тел (ООКЗЗТ). В [13, 12, 23, 24] было показано, что уравнения движения ООКЗЗТ допускают стационарные решения, соответствующие положениям равновесия материальной точки, моделирующей космическую станцию, в системе отсчета, связанной с осями прецессии и динамической симметрии твердого тела, моделирующего малую планету. Там же было отмечено, что эти положения относительного равновесия являются аналогами точек либрации ОКЗЗТ. (Точкам либрации задачи трех тел посвящены многочисленные работы, основные результаты которых можно найти в монографиях [54, 159], а также в библиографии к ним). В рассматриваемой ситуации такие положения равновесия можно также назвать точками либрации твердого тела. (По-видимому, впервые точки либрации гравитирующего твердого тела, совершающего перманентное вращение, впервые были рассмотрены в [50, 51, 120], в последствии подобные исследования были продолжены, например, в [155]). Очевидно, что материальная точка, помещенная в точку либрации ООКЗЗТ, во все время движения будет оставаться на неизменном расстоянии от полюсов твердого тела, представляющего астероид. (Полюсами в данном случае являются точки пересечения поверхности астероида с его осью динамической симметрии.Таким образом, космичекая станция может быть размещена на леере, концы которого закреплены на полюсах (или, чтобы избежать запутывания троса, на вершинах башен, построенных на полюсах). Очевидно, что положения равновесия материальной точки, представляющей космическую станцию на леере, не исчерпываются точками либрации, кроме того возникает задача описания движения станции вдоль леера.

Заметим, однако, что непосредственное использование результатов из [13, 12, 23, 24] для описания движения вдоль леера возможно только для динамически симметричных астероидов, имеющих форму тел, вытянутых вдоль оси динамической симметрии. Тем не менее, если астероид, оставаясь динамически симметричным, будет иметь форму тела, сжатого вдоль оси динамической симметрии, то его гравитационный потенциал может быть аппроксимирован гравитационным потенциалом Обобщенной задачи двух неподвижных центров (см. [40, 113, 1]), то есть заменен композицией потенциалов двух точечных комплексно-сопряженных масс, находящихся на чисто мнимом расстоянии, что равносильно тому, что координаты этих масс вдоль оси динамической симметрии должны быть также комплексосопряженными (аналогичный подход также был предложен в [157, 158]). Таким образом, задача изучения движения вдоль леера в рамках ООКЗЗТ может быть распространена и на случай динамически симметричного сжатого вдоль оси динамической симметрии твердого тела.

Целями настоящей диссертации являются:

1. Описание движения механической системы, состоящей из гантелевидного твердого тела и материальной точки, связанных леером (леерной связки) в однородном силовом поле,
2. Анализ движения леерной связки в центральном ньютоновском силовом поле, в том числе поиск и исследование устойчивости равновесных конфигураций; описание движения материальной точки вдоль леера, в случае, когда твердое тело стабилизировано в орбитальной ситеме отсчета, включая участки движения с натянутым и ослабленным леером; изучение возможности захвата леерной связью свободно движущейся материальной точки
3. Анализ влияния движения материальной точки малой массы вдоль леера на относительное движение гантелевидного твердого тела
4. Поиск и анализ устойчивости положений относительного равновесия (точек либрации) материальной точки в окрестности гравитирующего прецессирующего динамически симметричного твердого тела
5. Описание движения материальной точки вдоль леера, закрепленного на полюсах прецессирующего гравитирующего твердого тела в интегрируемых случаях уравнений движения
6. Поиск и анализ устойчивости положений равновесия материальной точки на леере, закрепленном на полюсах гравитирующего прецессирующего твердого тела, вытянутого или сжатого вдоль оси динамической симметрии

Научная новизна диссертации заключается в следующем

1. Впервые поставлена задача о движении механической системы, состоящей из твердого тела и материальной точки, такой что материальная точка может перемещаться вдоль троса, концы которого закреплены на поверхности твердого тела (такой трос может быть назван

леером, а сама система - леерной связкой) во внешнем гравитационном поле или в гравитационном поле самого твердого тела

2. Описано движение леерной связки в однородном силовом поле в случае, когда твердое тело гантелевидно, и все движения происходят в одной плоскости

3. Найдены равновесные конфигурации леерной связки, когда твердое тело гантелевидно, при движении ее центра масс в центральном ньютоновском силовом поле по круговой орбите в плоскости этой орбиты, исследована устойчивость и возможность стабилизации этих конфигураций

4. Описано движение материальной точки вдоль леера, в случае, когда твердое тело, центр масс которого движется в центральном ньютоновском силовом поле по круговой орбите, стабилизировано в одном из своих положений равновесия в орбитальной системе отсчета, в плоскости этой орбиты, в том числе описаны все возможные безударные движения, включающие в себя участки движения с напряженным и ослабленным тросом

5. Предложен безударный алгоритм захвата леерной связью материальной точки, свободно двигающейся в центральном ньютоновском силовом поле

6. Проведено численно-аналитическое исследование влияния движения материальной точки малой массы вдоль леера на вращательное движение гантелевидного тела, двигающегося по круговой орбите в центральном ньютоновском силовом поле, в частности выведен критерий для определения направления переворачивания гантели из положения, близкого к касательной к орбите

7. Определено количество и исследована устойчивость положений относительного равновесия (точек либрации) материальной точки в

окрестности гравитирующего прецессирующего динамически симметричного твердого тела, чей гравитационный потенциал представляется композицией гравитационных потенциалов двух точечных действительных масс, в частности показано, что такие равновесия существуют только в плоскости, проходящей через центр масс перпендикулярно оси прецессии (треугольные точки либрации) или в плоскости, образуемой осями прецессии и динамической симметрии (компланарные точки либрации)

8. Определено количество и исследована устойчивость треугольных точек либрации прецессирующего твердого тела в случае, когда его гравитационный потенциал представляется композицией гравитационных потенциалов двух точечных комплексно сопряженных масс, имеющих на оси динамической симметрии комплексно сопряженные координаты
9. Определено количество и проведена классификация компланарных точек либрации прецессирующего твердого тела, в случае, когда его гравитационный потенциал представляется композицией двух комплексно сопряженных точечных масс, находящихся на чисто мнимом расстоянии
10. Выписаны общие уравнения движения материальной точки вдоль леера, закрепленного в полюсах прецессирующего гравитирующего динамически симметричного твердого тела, отмечены два случая интегрируемости этих уравнений, проведено описание движения в этих случаях
11. Проведено описание возможных положений равновесия материальной точки на леере, закрепленном в полюсах прецессирующего гравитирующего твердого тела, чей гравитационный потенциал представляется композицией гравитационных потенциалов двух точечных

действительных масс, выведен критерий возможности стабилизации этих положений равновесия фиксацией материальной точки на леере.

На защиту выносятся:

1. Описание движения механической системы, состоящей из гантелевидного твердого тела и материальной точки, связанных леером (леерной связки), в однородном силовом поле в случае, когда все движения происходят в одной плоскости, в форме фазовых портретов, дополненных возможными областями схода со связи
2. Полное описание, классификация и анализ устойчивости и возможности стабилизации равновесных конфигураций леерной связки в орбитальной системе отсчета в плоскости круговой орбиты центра масс связки для движения в центральном ньютоновском силовом поле
3. Описание движения материальной точки вдоль напряженного леера с учетом возможности схода со связи в случае, когда концы леера закреплены на концах гантелевидного твердого тела, центр масс которого движется по круговой орбите в центральном ньютоновском силовом поле, а сама гантель стабилизирована в одном из возможных положений относительного равновесия в плоскости орбиты
4. Полное описание и классификация безударных движений материальной точки вдоль леера в условиях предыдущего пункта, включающих участки движения с напряженным и ослабленным леером
5. Алгоритм безударного (без скачков скорости и ускорения) захвата леерной связью неуправляемой материальной точки, движущейся в центральном ньютоновском силовом поле в плоскости круговой орбиты твердого тела, несущего леер
6. Описание влияния движения материальной точки вдоль леера на вращение гантелевидного твердого тела, несущего леер, в плоскости круговой орбиты его центра масс в центральном ньютоновском силовом

поле, в частности, критерий направления переворачивания гантели из положения, близкого к касательной к орбите и численный анализ дальнейшего поведения гантели

7. Анализ устойчивости треугольных точек либрации ООКЗЗТ в зависимости от значений параметров в случае, когда гравитационный потенциал прецессирующего динамически симметричного твердого тела аппроксимируется композицией потенциалов двух действительных точечных масс
8. Анализ количества и устойчивости компланарных точек либрации ООКЗЗТ в зависимости от значений параметров в условиях предыдущего пункта
9. Анализ количества и устойчивости треугольных точек либрации варианта ООКЗЗТ, в котором гравитационный потенциал рецессирующего динамически симметричного твердого тела аппроксимируется композицией потенциалов двух комплексно сопряженных точечных масс с комплексно сопряженными координатами на оси динамической симметрии, анализ и классификация компланарных точек либрации в аналогичной ситуации
10. Общие уравнения движения материальной точки, связанной тросом или тросами (в частности, леером) с полюсами гравитирующего прецессирующего динамически симметричного твердого тела, анализ движения вдоль леера (с учетом возможности ослабевания леера) в двух интегрируемых случаях этих уравнений: для нулевого и прямого углов нутации
11. Классификация положений равновесия материальной точки на леере, закрепленном в полюсах гравитирующего прецессирующего динамически симметричного твердого тела, критерий стабилизируемости таких равновесий фиксацией материальной точки на леере, описа-

ние множеств треугольных и компланарных положений равновесия вслучае, когда гравитационный потенциал твердого тела аппроксимируется композицией потенциалов двух действительных точечных масс

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова по аналитической механике и теории устойчивости им. В.В.Румянцева, по механике космического полета им. В.А.Егорова, по динамике относительного движения, по математическим методам технической механики, а также на научных семинарах в МГТУ им. Н.Э.Баумана, в ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, в ИКИ РАН.

Результаты, полученные в диссертации были представлены на следующих всероссийских и международных научных конференциях

- XXYII академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П.Королёва, 29 января - 4 февраля 2003, Москва [58]
- XXYIII академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П.Королёва, январь 2004, Москва, [59]
- Пятый международный симпозиум по классической и небесной механике. 23-28 августа,2004, Великие Луки, Россия [60]
- XXIX академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П.Королёва , январь 2005, Москва [62]
- Образование через науку. Международная конференция, посвященная 175-летию МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2005, Москва, [63]
- International Scientific Meeting Physical Intarpretations of Relativity Theory (PIRT-2005). 2005, Moscow, Russia -Liverpool, Sunderland, UK [63]

- 9th International Conference Stability, Control and Rigid Bodies Dynamics. september 2005, Donetsk (Ukraine), [129]
- XXX академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П.Королёва 25-27 января 2006, Москва, [64]
- Международная научная конференция по механике Четвертые Поляховские чтения, февраль 2006, Санкт-Петербург [130]
- IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. 2006, Н.Новгород, Россия [66]
- V международный аэрокосмический конгресс (IAC-06). 2006, Москва, Россия [67, 68]
- XXXI академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П.Королёва,30 января - 1 февраля 2007, Москва, [22]
- IX Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». 2007, Иркутск, Россия [23]
- Sixth International Symposium on Classical and Celestial Mechanics. 2007, Velikie Luki, Russia [96]
- XXXII академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П.Королёва, Москва, 29 января - 1 февраля 2008, [70]
- Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Апрель 2008. МГУ, Москва, Россия [25]
- 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008), June 30 - July 4, 2008, Saint Petersburg, RUSSIA [134]
- Динамика тел Солнечной системы. Международная астрономическая конференция. 27 июля-1 августа 2008 г., Томск, Россия [97]
- International Symposium Rare attractors and rare phenomena in nonlinear dynamics (RA08). 8-12 September, 2008, Riga-Jurmala, Latvia [98, 132]

- Шестой Международный Аэрокосмический Конгресс (IAC'09), 23 – 27 Августа, 2009, Москва, Россия [71]
- 4th International Scientific Conference on Physics and Control - Physcon 2009. September 1-4, 2009. Catania, Italy [135]
- The Fifth International Meeting on Celestial Mechanics (CELMEC V), 6-12 september 2009 , San Martino al Cimino (VT), Italy, [137].
- XXXIV академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П.Королева. Москва, январь 2010 [73]
- XI Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления", Москва, ИПУ РАН, 2010 [26]
- Десятая Крымская Международная Математическая школа MFL-2010 Метод функция Ляпунова и его приложения. Крым, Алушта, 13-18 сентября 2010 [27]
- XXXV академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П.Королева. Москва, январь 2011 [74]
- 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC2011). July 24-29, 2011, Rome. Italy. [138]
- 5th International Scientific Conference on Physics and Control - Physcon 2011. September 5-8, 2011, Leon, Spain. [100, 140]
- International Symposium on Orbit Propagation and Determination. 26-28 septembre, Pavillon Saint Sauveur, Lille, France. [141]
- 7-th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics. October, 17-28, 2011, Moscow (Russia)- Siedlce (Poland) [142]
- XXXVI академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П.Королева, Москва, 24-27 января 2012 [76]
- Международная научная конференция по механике "Шестые Поляховские Чтения, посвященные 95-летию со дня рождения

С.В.Валландера", С.-Петербург, Россия, 31 января-3 февраля 2012 г., [77]

- XII Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (конференция Пятницкого) 5-8 июня 2012 г., Москва, Россия [78]
- Международная конференция "Моделирование, управление и устойчивость" (MCS-2012). Крым, Севастополь, 10-14 сентября 2012 г. [80]
- Symposium Nonlinear Dynamics. Multidisciplinary and Interdisciplinary Applications (SNDMIA 2012) Belgrade. October 1-5, 2012. [144]
- XXXVII академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П.Королева, Москва, 29 января – 1 февраля 2013 г. [81]
- XXXVIII академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П.Королева, Москва, 28-31 января 2014 г. [83]
- International workshop on Key Topics in Orbit Propagation Applied to Space Situational Awareness (KEPASSA), Logroño, LaRioja (Spain), April 23-25, 2014 [145]
- 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC2014), July, 6-11, 2014, Vienna, Austria [146]
- Международная конференция "Метод функций Ляпунова и его приложения" (MFL-2014), Крым, Алушта, 15-20 сентября 2014 г. [85]
- Международная научная конференция "Физико-математические проблемы создания новой техники" (PhysMathTech - 2014) посвященная 50-летнему юбилею Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э.Баумана. Москва, 17-19 ноября 2014 г. [86]

Результаты, полученные при выполнении диссертации опубликованы в 12 статьях в научных журналах, входящих в список ВАК [61, 65, 69, 131, 24, 72, 75, 28, 79, 29, 82, 84], в двух статьях в иностранных журналах [99, 133], а также в ряде других работ (труды конференций) [63, 23, 98, 132, 134, 136, 101, 143, 139, 147].

Диссертация состоит из настоящего введения, двух частей, включающих 11 глав и заключения.

В первой части, состоящей из 6 глав, изучается относительное движение механической системы, состоящей из гантелевидного (состоящего из двух материальных точек, соединенных невесомым стержнем) тела и еще одной материальной точки (груза), способной передвигаться вдоль троса (леера), концы которого закреплены в концах гантели в однородном или центральном ньютоновском силовых полях. (Такая связка может служить моделью протяженной космической станции, снабженной леерной связью и находящейся в дальнем космосе или на околоземной орбите). Изучаются задачи интегрирования уравнений движения относительного движения связки в однородном поле, равновесные конфигурации связки, центр масс которой движется по круговой орбите, в плоскости орбиты и их устойчивость, движения материальной точки на леере вокруг гантели, стабилизированной в том или ином положении равновесия на круговой орбите, возможные безударные движения материальной точки вдоль леера, если допускается его ослабление, возможность захвата леерной связью неуправляемой материальной точки, движущейся в той же, что и гантель плоскости по близкой орбите, влияние движения малой массы по лееру на вращение гантели вокруг ее центра масс. Результаты этой части опубликованы в [61, 65, 69, 131, 133, 72]

В первой главе изучается относительное движение гантели (двух материальных точек, соединенных невесомым стержнем), к концам которой прикреплен трос, по которому может двигаться материальная точка (груз), в однородном силовом поле в случае, когда все движения происходят в одной плоскости. Показывается интегрируемость уравнений движения такой связки вокруг ее центра масс, в зависимости от значений параметров строятся фазовые портреты редуцированной по Рауссу системы и области схода со связи, т.е. области, где невозможно движение с ненулевой силой натяжения леера. Результаты, описываемые в этой главе, опубликованы в [61].

Во второй главе рассматривается ситуация, когда центр масс механической системы, описанной в первой главе, движется в гравитационном поле притягивающего центра. Уравнения движения связки выводятся в предположении, что все ее элементы и притягивающий центр во все время движения находятся в одной плоскости. В случае, когда центр масс связки движется по круговой орбите и длина гантели мала по сравнению с радиусом этой орбиты, устанавливается существование в плоскости орбиты двенадцати или шестнадцати равновесных по отношению к орбитальной системе отсчета конфигураций рассматриваемой системы. В частности, в случае, когда гантель образована неравными массами, устанавливается возможность существования четырех равновесных конфигураций, в которых гантель направлена не по радиусу орбиты и не по касательной к орбите. Изучается устойчивость найденных конфигураций, анализируется возможность их стабилизации фиксированием груза на леере. В частности, указывается, что гантель, образованная неравными массами, может быть стабилизирована под любым углом к радиусу орбиты, если соответствующим образом подобрать массу груза и длину леера. Положения гантели и груза на леере в равновесных конфигурациях уточняются для случая, когда отношение длины гантели к радиусу орбиты мало, но им нельзя пренебречь. Результаты этой главы опубликованы в [65].

В третьей главе в рамках предположений второй главы изучается динамика связного движения груза на леере относительно гантели с учетом возможности схода со связи при условии, что груз на леере достаточно мал, чтобы оказывать влияние на движение гантели. Для этого уравнения движения, выведенные во второй главе, дополняются условиями схода со связи (то есть условиями, когда силы натяжение ветвей леера становятся нулевыми). Далее, эти условия вместе с уравнениями движения редуцируются для предельного случая задачи предыдущей главы, когда масса груза является пренебрежимо малой по сравнению с массами, образующими гантель, в результате чего уравнение вращательного движения гантели отделяется от общей системы уравнений движения. Как хорошо известно [8, 10], это уравнение допускает два частных решения, соответствующих стационарным движениям гантели, в которых гантель "вертикальна", то есть во все время движения направлена по радиусу орбиты или "горизонтальна", то есть расположена по касательной к орбите. Для каждого из этих стационарных движений строятся характерные фазовые портреты движения груза на леере относительно гантели, дополненные областями схода со связи. Результаты этой главы опубликованы в [65].

В четвертой главе, как и в третьей, рассматривается движение малого груза на леере в предположении, что концы леера закреплены на гантели, центр масс которой движется по круговой орбите в гравитационном поле притягивающего центра, а сама гантель "вертикальна" или "горизонтальна". Классифицируются траектории движения груза в плоскости орбиты, включающие в себя участки связного (с натянутым тросом) и свободного (с ослабленным тросом) движений, при условии что переход от свободного к связному движениям происходит безударно, т.е. в ситуации, когда не возникает динамический бильярд [48, 17, 14]. В случае "горизонтального" положения гантели устанавливается, что любая такая траектория с несимметричными (относительно гантели) точками схода и входа на связь в любом случае заканчивается ударом о трос, траектории с симметричными точками схода и входа на связь могут соответствовать как периодическим безударным движениям, так и приводящим к удару о леер. Приводятся условия существования таких траекторий. В случае “вертикального” положения гантели доказывается, что безударные периодические движения груза по лееру, допускающие сход со связи, существуют при любых допустимых значениях параметров системы, строится диаграмма существования различных типов траекторий в зависимости от времени свободного движения. Во всех случаях приводятся формулы, определяющие точки схода и безударного входа на связь в зависимости от времени свободного движения. Результаты этой главы опубликованы в [69].

В пятой главе рассматривается ситуация, когда леерная связь закреплена на твердом теле, центр масс которого движется по круговой орбите, причем прямая, соединяющая точки закрепления концов леера, “горизонтальна” или “вертикальна”. Изучается возможность мягкого (без скачков скорости и ускорения) преобразования движения неуправляемой материальной точки, перемещающейся в плоскости круговой орбиты, в одно из периодических безударных движений, описанных в четвертой главе, с помощью захватывающего устройства, двигающегося вдоль леера. Описываются два типа такого захвата: “вращательный”, когда движение преобразуется во вращение вокруг одной из точек закрепления конца леера и “колебательный”, когда возможно изменение направления движения вдоль леера. Показывается, что если не ограничивать длину леера и расстояние между точками закреплеения концов леера, захват не возможен только для отдельных орбит неуправляемой точки. Кроме того, приводится модификация описываемых алгоритмов захвата, позволяющая в некоторых случаях многократно сократить необходимую длину леера. Результаты этой главы опубликованы в [131].

В шестой главе, как и во второй, рассматривается движение механической системы, состоящей из гантелевидного твердого тела и материальной точки (груза), перемещающейся вдоль невесомого леера, концы которого закреплены на концах гантели, в центральном ньютоновском силовом поле. Как и выше, считается, что центр масс системы движется по круговой орбите, все движения происходят в плоскости этой орбиты. В предположении, что масса материальной точки мала по сравнению с массой гантели, изучается влияние движения материальной точки на вращение гантели вокруг ее центра масс. Отмечается, что такое влияние будет существенным только в окрестности сепаратрисного движения гантели. Устанавливается существование неустойчивых асимптотических движений гантели, стремящихся к колебаниям вокруг касательной к орбите. Начальные условия для таких движений образуют поверхность в фазовом пространстве системы, уравнение которой записывается в приближенной аналитической форме. В случае относительно длинного леера и если гантель образована равными массами, околосепаратрисное движение гантели описывается приближенными аналитическими формулами, в случае относительно короткого троса возмущенное движение гантели изучается численно в двумерных сечениях четырехмерного пространства начальных условий. Результаты этой главы опубликованы в [133, 72].

Во второй части, состоящей из 5 глав, изучается движение механической системы, состоящей из массивного динамически симметричного прецессирующего твердого тела и материальной точки (станции), двигающейся в гравитационном поле этого тела, в предположении, что масса материальной точки достаточно мала, чтобы не оказывать влияния на движение твердого тела. (Такая механическая система может служить моделью рукотворно-естественной космической системы, состоящей из космической станции и астероида). При этом предполагается, что гравитационное поле твердого тела может быть аппроксимировано композицией гравитационных полей двух массивных точек, расположенных на оси динамической симметрии. (В этом случае выполняются предположения Обобщенной Ограниченной Круговой Задачи Трех Тел (ООКЗЗТ) В.В.Белецкого, сформулированной в [13]). Массы и координаты этих точек могут быть как действительными (в случае вытянутого твердого тела), так и, согласно аппроксимациям В.Г.Демина [1, 40, 113] комплексно сопряженными (в случае твердого тела, сжатого вдоль оси динамической симметрии). В основном рассматривается ситуация, когда материальная точка находится на леере, концы которого закреплены на полюсах (точках пересечения оси динамической симметрии с поверхностью) твердого тела. Равновесия материальной точки на леере в случае нулевой силы натяжения фактически совпадают с точками либрации ООКЗЗТ. Проводится детальный анализ существования и устойчивости этих равновесий. Строятся множества положений равновесия материальной точки на леере и анализируется возможность их стабилизации фиксированием станции на леере в случае ненулевой силы реакции леера. Исследуется движение материальной точки вдоль леера в некоторых интегрируемых случаях уравнений движения. Результаты этой части опубликованы в [24, 99, 75, 28, 79, 29, 82, 84].

В [13] установлено, что в окрестности прецессирующего гравитирующего гантелевидного твердого тела существуют такие движения материальной точки, при которых она остается в равновесии в системе отсчета, вращающейся вокруг оси прецессии вместе с осью гантели. Такие положения относительного равновесия, лежащие в плоскости, проходящей через центр масс гантели перпендикулярно оси прецессии, названы Треугольными Точками Либрации (ТТЛ) ООКЗЗТ. В седьмой главе настоящей диссертации ТТЛ рассматриваются как возможные относительные равновесия материальной точки в окрестности гравитирующего прецессирующего динамически симметричного твердого тела, чей гравитационный потенциал может быть аппроксимирован композицией гравитационных потенциалов двух действительных точечных масс, лежащих на оси динамической симметрии и имеющих на этой оси действительные координаты. В этом случае ТТЛ во все время движения находятся на фиксированных расстояниях от полюсов твердого тела и могут быть соединены с ними леером или двумя тросами, в чем нет необходимости, если они устойчивы. Устойчивость ТТЛ анализируется в линейном приближении с помощью полученного в [13] характеристического уравнения для уравнений движения, линеаризованных в окрестностях ТТЛ. Выводятся условия устойчивости в линейном приближении, строятся области устойчивости как в пространстве коэффициентов характеристического уравнения, так и в пространстве параметров системы, фоормулируются ряд утверждений об устойчивости ТТЛ. Результаты этой главы опубликованы в [24].

В [13] также установлено, что в условиях ООКЗЗТ равновесия материальной точки в системе отсчета, вращающейся вокруг оси прецессии вместе с осью гантели, отличные от ТТЛ, могут существовать только в плоскости, образованной осью прецессии и осью гантели. Из этого следует, что отличные от ТТЛ положения равновесия материальной точки в окрестности гравитирующего прецессирующего динамически симметричного твердого тела во все время движения находящиеся на неизменных расстояниях до полюсов этого тела могут находиться только в плоскости, проходящей через оси прецессии и динамической симметрии. Такие равновесия могут быть названы Компланарными точками либрации (КТЛ). В восьмой главе настоящей работы в рамках предположений предыдущей главы выводятся уравнения для определения координат КТЛ, с помощью которых строятся диаграммы количества КТЛ в виде набора двумерных сечений трехмерного пространства параметров задачи, образуемых фиксированием значения параметра, определяющего долю меньшей притягивающей массы в массе твердого тела. Устойчивость КТЛ анализируется в линейном приближении с помощью характеристического уравнения для уравнений движения, линеаризованных в окрестностях КТЛ, аналогичного полученному в [13], в случаях когда угол нутации прямой или нулевой а также в случае, когда массы притягивающих центров равны. Результаты этой главы опубликованы в [28].

В девятой главе настоящей диссертации предполагается, что прецессирующее гравитирующее динамически симметричное твердое тело, в окрестности которого движется материальная точка, имеет сжатую вдоль оси динамической симметрии форму. В этом случае гравитационный потенциал твердого тела, в соответствии с подходом, примененном в [1, 40, 113], также может быть аппроксимирован композицией потенциалов двух притягивающих центров, “принадлежащих” оси динамической симметрии, если считать, что массы и координаты этих центров могут быть комплексными. Для того, чтобы суммарный потенциал в этом случае оказался действительным, необходимо, чтобы координаты и массы притягивающих центров были комплексно сопряженными. Оказывается, что в этой ситуации, которую также, как и в предыдущих главах, можно рассматривать как вариант ООКЗЗТ, стационарные движения не стесненной тросами материальной точки, при которых сохраняются расстояния до полюсов твердого тела, также существуют лишь в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии (ТТЛ) и в плоскости, проходящей через оси прецессии и динамической симметрии (КТЛ). В этой главе устанавливается, что может быть не более двух ТТЛ, причем они неустойчивы. В случае чисто мнимых координат притягивающих центров проводится классификация КТЛ и устанавливается, что количество КТЛ, отличных от центра масс твердого тела, может меняться от 4 до 8. Результаты этой главы опубликованы в [29, 82, 84].

В десятой главе ставится задача описания движения материальной точки, так или иначе связанной с полюсами прецессирующего гравитирующего динамически симметричного твердого тела. Выводятся уравнения движения такой материальной точки в системе отсчета, связанной с осью динамической симметрии твердого тела и с осью прецессии, позволяющие описывать как связное, так и свободное движение материальной точки. Указывается, что если потенциал твердого тела инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии, то одно из уравнений движения можно записать в форме, не зависящей от потенциала и множителей Лагранжа. Указывается на существование двух интегрируемых случаев выведенных уравнений : случая связного движения при нулевом угле нутации и связного движения в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии в случае прямого угла нутации. В этих интегрируемых случаях проводится описание связного движения (с указанием областей схода со связи) материальной точки вдоль леера с концами, помещенными в полюса твердого тела, если гравитационный потенциал твердого тела аппроксимируется суммой потенциалов двух равных точечных масс, расположенных на оси динамической симметрии, а полюса находятся на одинаковых расстояниях от центра масс твердого тела. Результаты этой главы опубликованы в [75].

В одинадцатой главе изучаются множества равновесий материальной точки, помещенной на леер, концы которого закреплены в полюсах прецессирующего твердого тела. По существу, изучаются стационарные решения уравнений движения, выведенных в предыдущей главе. Устанавливается, что при любом способе соединения материальной точки тросом или тросами с полюсами твердого тела (или при отсутствии каких-либо тросов), если гравитационный потенциал твердого тела инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии, то положения равновесия материальной точки в системе отсчета, связанной с осями прецессии и динамической симметрии возможны только в двух плоскостях: в плоскости, проходящей через центр масс перпендикулярно оси прецессии (“треугольные равновесия”) и в плоскости, проходящей через оси прецессии и динамической симметрии (“компланарные равновесия”). К таким положениям равновесия относятся и изучавшиеся в предыдущих главах точки либрации. Дается полное описание таких положений равновесия в случае нулевой гравитации, исследуется их устойчивость. В случае ненулевой гравитации исследуется возможность стабилизации положений равновесия на леере фиксацией точки на леере, выводится соответствующий критерий. В условиях ООКЗТ описываются множества треугольных равновесий в зависимости от положения полюсов твердого тела. Множества компланарных равновесий описываются в предположении, что гравитационный потенциал твердого тела аппроксимируется потенциалом двух равных точечных масс, а полюса расположены на одинаковых расстояниях от центра масс твердого тела. Результаты этой главы опубликованы в [75, 79].

Автор благодарен В.В.Белецкому, во многом определившему направление этой работы. Автор также благодарен А.А.Бурову, Ю.Ф.Голубеву, А.В.Карапетяну, И.И.Косенко, В.В.Сазонову и С.Я.Степанову за многочисленные обсуждения, комментарии, советы и критику, происходившие по ходу работы над диссертацией.

Часть I.
Движение гантели с леерной связью в однородном и центральном ньютоновском силовых полях

ГЛАВА 1

Относительное движение леерной связки в однородном силовом поле

В этой главе рассматривается движение механической системы, моделирующей космическую станцию, снабженную леерной связью, находящуюся в дальнем космосе. Леерная связь представляет собой трос, концы которого закреплены на станции и вдоль которого может перемещаться какой-либо груз. Очевидно, такая тросовая система существенно отличается от классической, в которой гибкая связь соединяет твердое тело и материальную точку.

1.1 Постановка задачи

Пусть моделью космической станции является гантель, состоящая из материальных точек с массами m_1 и m_2, соединенных невесомым стержнем длины $2c$, а груз массой m_3 может свободно двигаться вдоль троса длиной $2a$, закреплённого в концах гантели. Очевидно, что в своем движении груз не может выходить за пределы области V, ограниченной эллипсоидом вращения, каждое сечение которого плоскостью, проходящей через гантель, является эллипсом с фокусами в точках m_1 и m_2, полуосями a и $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ и эксцентриситетом, равным $e = c/a$.

Будем говорить, что груз находится "на связи", если он находится на границе области V, и "сошел со связи" , если он находится внутри области U. Ясно, что если груз сошёл со связи, нить не натянута, поэтому условием схода со связи является равенство нулю сил натяжения нити.

Заметим, что если пренебречь неоднородностью гравитационного поля (что возможно, если станция находится в дальнем космосе или время движения по лееру мало по сравнению с периодом обращения станции по ее орбите), уравнения станции и груза относительно общего центра масс не зависят от внешних сил, то есть центр масс С системы можно считать не имеющим ускорения или просто неподвижным.

Пусть $\mathbf{r}_{Ci}$ – вектор соединяющий C с i-ой массой, $\mathbf{r}_{ij}$ – вектор, соединяющий i-ую и j-ую массы, O – середина стержня (см. рис. 1.1). Кроме того, пусть $M = m_1 + m_2 + m_3$, $\nu_1 = m_1/(m_1 + m_2)$, $\nu_3 = m_3/(m_1 + m_2)$, $\mu = 1-2\nu_1 = (m_2-m_1)/(m_2+m_1)$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $m_1 \le m_2$, то есть $0 < \nu_1 \le 1/2$, $0 \le \mu < 1$.

Кинетическая энергия вращения вокруг центра масс может быть записана в виде

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1\dot{\mathbf{r}}_{C1}^2 + m_2\dot{\mathbf{r}}_{C2}^2 + m_3\dot{\mathbf{r}}_{C3}^2\right], \tag{1.1}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{C1} &= -\frac{m_2\mathbf{r}_{12} + m_3\mathbf{r}_{13}}{M}, \\ \mathbf{r}_{C2} &= \frac{(m_1 + m_3)\ \mathbf{r}_{12} - m_3\mathbf{r}_{13}}{M}, \\ \mathbf{r}_{C3} &= \frac{(m_1 + m_2)\ \mathbf{r}_{13} - m_2\mathbf{r}_{12}}{M} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ограничившись случаем, когда движения всех трех масс происходят в одной плоскости, введем две системы координат: Cx_1y_1, двигающуюся поступательно вместе с центром масс, и вращающуюся Oxy, где Ox направлена по стержню от меньшей массы к большей, и Ox ориентирована также, как и Cx_1y_1. Пусть φ - угол поворота станции, то есть угол, отсчитываемый от положительного направления оси Cx_1 к положительному направлению оси Ox. Если груз находится на связи, его координаты в Oxy

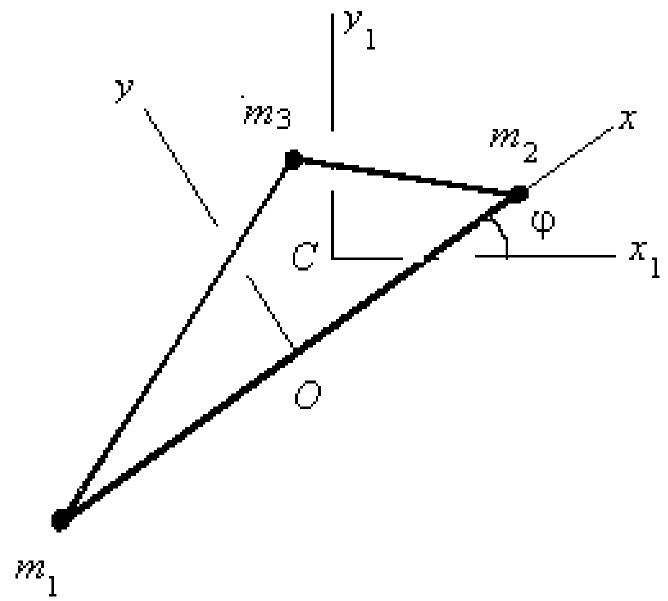


Рисунок 1.1 –

удобно задать параметрически:

$$x_3 = a\cos\gamma, \qquad y_3 = b\sin\gamma \tag{1.3}$$

В этом случае движение рассматриваемой системы полностью определяется обобщёнными координатами φ и γ.

1.2 Уравнения относительного движения леерной связки в однородном силовом поле

Дифференцируя формулы (1.2) по времени и подставляя их в выражение для кинетической энергии (1.1), получим

$$T = \frac{1}{2M}\left[m_2\left(m_1+m_2\right)\dot{\mathbf{r}}_{12}^2 - 2m_2m_3\dot{\mathbf{r}}_{12}\dot{\mathbf{r}}_{13} + m_3\left(m_1+m_2\right)\dot{\mathbf{r}}_{13}^2\right]. \tag{1.4}$$

Нетрудно показать, что координаты $\dot{\mathbf{r}}_{12}$ и $\dot{\mathbf{r}}_{13}$ в системе координат Oxy определяются соотношениями

$$\dot{\mathbf{r}}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2c\dot{\varphi} \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{r}}_{13} = \begin{pmatrix} -a\dot{\gamma}\sin\gamma - b\dot{\varphi}\sin\gamma \\ b\dot{\gamma}\cos\gamma + c\dot{\varphi} + a\dot{\varphi}\cos\gamma \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.4), получим

$$T = \frac{(m_1 + m_2)^2 a^2}{2M} \left[A_1 \dot{\gamma}^2 + 2B_1 \dot{\gamma}\dot{\varphi} + C_1 \dot{\varphi}^2\right] \tag{1.6}$$

где

$$A_1 = \nu_3 \left(1 - e^2 \cos^2 \gamma\right)$$

$$B_1 = \nu_3 \sqrt{1 - e^2} \left(1 - \mu e \cos \gamma\right) \tag{1.7}$$

$$C_1 = \nu_3 \left(1 + e^2 \cos^2 \gamma - 2\mu e \cos \gamma\right) + \left(1 - \mu^2\right) e^2$$

Так как T не зависит от φ, задача имеет циклический интеграл, соответствующий кинетическому моменту системы:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C_1 \dot{\varphi} + B_1 \dot{\gamma} = \Omega_0 = const. \tag{1.8}$$

Используя редукцию по Раусу, получим уравнение Рауса в виде:

$$2\left(A_1 - \frac{B_1^2}{C_1}\right)\ddot{\gamma} + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(A_1 - \frac{B_1^2}{C_1}\right)\dot{\gamma}^2 + \Omega_0^2 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{C_1}\right) = 0, \tag{1.9}$$

имеющее интеграл Якоби

$$\left(A_1 - \frac{B_1^2}{C_1}\right)\dot{\gamma}^2 + \frac{\Omega_0^2}{C_1} = h_1 \tag{1.10}$$

Уравнения (1.8) и (1.10) полностью определяют движение рассматриваемой системы.

1.3 Фазовые портреты относительного движения в зависимости от значений параметров

Если константа циклического интеграла - нулевая ($\Omega_0 = 0$), то , как нетрудно проверить, $\dot{\gamma}$ не будет менять знак, то есть материальная точка на леере либо будет описывать в плоскости движения эллипс, либо сойдет со связи, иными словами, связное движение точки на леере будет вращением вокруг гантели. Если же $\Omega_0 \neq 0$, то стационарные движения системы с интегралом (1.10) определяются точками экстремумов функции Ω_0^2/C_1, совпадающих с точками экстремумов функции C_1. Рассматривая C_1 как функцию переменной $y = e\cos\gamma$, установим, что экстремумы могут достигаться при $y = \pm e$ и $y = \mu$. Возможны следующие ситуации:

1.3.1 Случай $\mu < e$

Пусть сначала $\mu < e$ (то есть леер сравнительно короток). В этой ситуации глобальный максимум функции Ω_0^2/C_1 достигается при $\gamma = \pm\arccos(\mu/e) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. Локальный минимум той же функции достигается при $y = e$, то есть при $\gamma = 2\pi k$. Глобальный минимум достигается при $y = -e$, то есть при $\gamma = \pi + 2\pi k$. Таким образом, на промежутке $0 \leq \gamma < 2\pi$ имеется четыре стационарные точки: две устойчивые ($\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = \pi$) и две неустойчивые ($\gamma_3 = \arccos(\mu/e)$ и $\gamma_4 = 2\pi - \arccos(\mu/e)$).

Положениям относительного равновесия γ_1 и γ_2 отвечают такие движения связки, при которых все три массы во все время движения находятся на одной прямой, причем груз m_3 располагается “за” точками m_1 или m_2 (. Точки γ_3 и γ_4 соответствуют таким положениям груза на эллипсе, ограничивающем движение груза по лееру в плоскости Oxy, в которых внутренняя нормаль к эллипсу направлена к центру масс гантели. В частности, при $\mu = 0$, то есть когда $m_1 = m_2$, все четыре положения относительного равновесия груза на леере расположены в вершинах этого эллипса. Фазовый портрет удобно построить в плоскости (δ, γ), когда фазовые кривые определяются уравнением

$$\left(A_1 - \frac{B_1^2}{C_1}\right)\delta^2 + \frac{1}{C_1} = H_1, \tag{1.11}$$

где $\delta = \dot{\gamma}/\Omega_0$, $H_1 = h_1/\Omega_0$. Фазовый портрет рассматриваемой ситуации приведен на рис. 1.2.

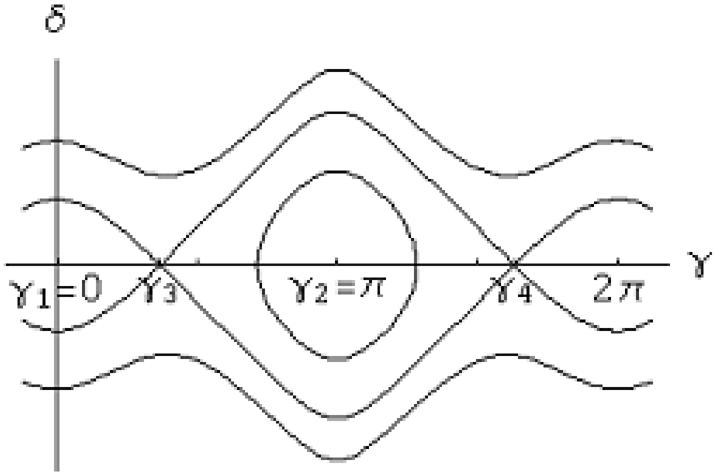


Рисунок 1.2 –

Анализ этого фазового портрета показывает, что связные движения груза по лееру относительно гантели представляют собой либо вращения вокруг гантели, либо колебания вокруг вершин эллипса, соответствующих его большей оси.

1.3.2 Случай $\mu \geq e$

Рассмотрим теперь противоположную ситуацию, когда $\mu \geq e$ (то есть случай сравнительно длинного леера) Тогда точка экстремума $y = \mu$ при $\mu \neq e$ не отвечает действительному движению, следовательно, глобальный максимум функции $\Omega_0^2/C_1(\gamma)$ достигается при $y = e$, то есть при $\gamma = 2\pi k$, а глобальный минимум – при $y = -e$, то есть при $\gamma = \pi + 2\pi k$. Таким образом, на промежутке $0 \leq \gamma < 2\pi$ имеются две стационарные точки: устойчивая $\gamma = \pi$, соответствующая положению груза m_3 за меньшей из масс, образующих гантель, и неустойчивая $\gamma = 0$, соответствующая положению груза m_3 за более массивным концом гантели. Фазовый портрет, определяемый, как и выше, равенством (1.11), представлен на рис. 1.3.

Анализ этого фазового портрета показывает, что связные движения

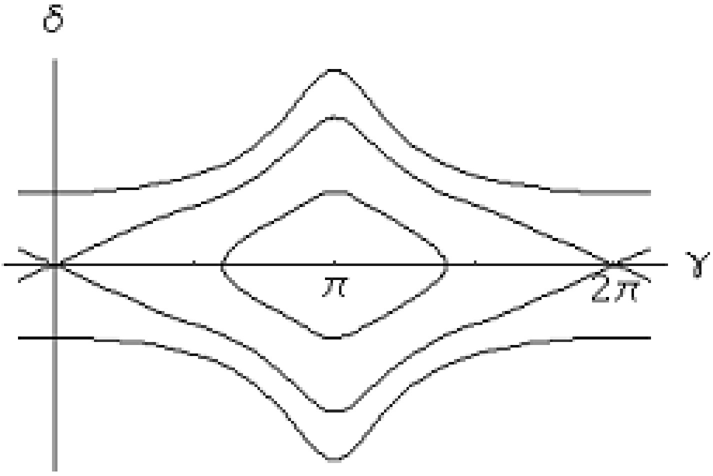


Рисунок 1.3 –

груза по лееру относительно гантели представляют собой либо вращения вокруг гантели, либо колебания вокруг той вершины эллипса, ограничивающего движение груза, которая расположена за меньшей из масс, образующих гантель.

1.4 Условия схода со связи

Груз будет гарантированно двигаться по эллипсоиду, ограничивающему область V, если натяжения ветвей троса T_{31} и T_{32}, направленные к точкам m_1 и m_2, не равны нулю. Уравнение движения груза m_3 можно записать как

$$m_3\ddot{\mathbf{r}}_{C3} = \mathbf{T}_{31} + \mathbf{T}_{32} \tag{1.12}$$

Умножим обе части (1.12) скалярно на вектор внешней нормали к эллипсоиду в рассматриваемой точке. Тогда

$$m_3\left(\ddot{\mathbf{r}}_{C3}, \mathbf{n}\right) = \left(\mathbf{T}_{31}, \mathbf{n}\right) + \left(\mathbf{T}_{32}, \mathbf{n}\right) \tag{1.13}$$

Очевидно, связное движение (то есть движение по границе эллипсоида возможно, только если правая часть (1.13) неположительна. (Иначе силы натяжения троса становятся “сжимающими”, что физически невозможно). С учетом формул ((1.2)), ((1.4)) и уравнения Рауса (1.9), это условие для движений в плоскости Ox_1y_1 можно записать в виде

$$-ab\dot{\gamma}^2+\mu bc\dot{\varphi}^2\cos\gamma-ab\dot{\varphi}^2-\mu ac\ddot{\varphi}\sin\gamma+c^2\ddot{\varphi}\sin\gamma\cos\gamma-2\dot{\gamma}\dot{\varphi}\left(a^2-c^2\cos^2\gamma\right)\leq 0 \tag{1.14}$$

Используя циклический интеграл (1.8), исключим φ из (1.14). В результате получим, что для того, чтобы груз на леере не сходил со связи необходимо выполнение неравенства

$$E\dot{\gamma}^2+2\Delta\dot{\gamma}\Omega_0+B_1\Omega_0^2\geq 0 \tag{1.15}$$

где $E=\nu_3 C_1^2\sqrt{1-e^2}+B_1^3-2A_1B_1C_1$, $\Delta=A_1C_1-B_{1|}^2$.

1.5 Геометрия областей схода со связи

Форма областей схода со связи зависит от значений параметров μ, e, ν_3 и определяется знаками коэффициента и дискриминаната $D=\Delta^2-B_1E$. Можно заметить, что на фазовой плоскости $(\gamma,\dot{\gamma})$ область схода со связи будет ограниченной по $\dot{\gamma}$, если $E>0$. Это неравенство можно переписать как $\nu_3<\nu_3^*$, где ν_3^* зависит от e и μ. Эта зависимость изображена на рис. 1.4. В частности, если $\mu=0$ (то есть $m_1=m_2$), справедливо равенство $\nu_3^*=e$, если $\mu\to 1$, то $\nu_3^*\to 0$, если $e\to 0$, то $\nu_3^*\to 0$. Если $\nu_3\geq\nu_3^*$, область схода со связи становится неограниченной.

Если $\Omega_0=0$, то в силу (1.15) при $\nu_3\leq\nu_3^*$ сход со связи невозможен, в то же время при $\nu_3>\nu_3^*$ движение по любой фазовой траектории приводит к сходу со связи.

Если $\Omega_0\neq 0$, форма области схода со связи зависит от соотношения между μ и e. Перепишем (1.15) в виде $E\delta^2+2\Delta\delta+B_1\geq 0$, где, как и раньше, $\delta=\dot{\gamma}/\Omega_0$. В плоскости (γ,δ) возможны следующие ситуации.

а) $0\leq\mu<e$. Тогда, если $\nu_3<\nu_3^*$ в полосе $-\pi<\gamma<\pi$, область схода со связи состоит из двух частей, целиком расположенных ниже прямой $\delta=0$

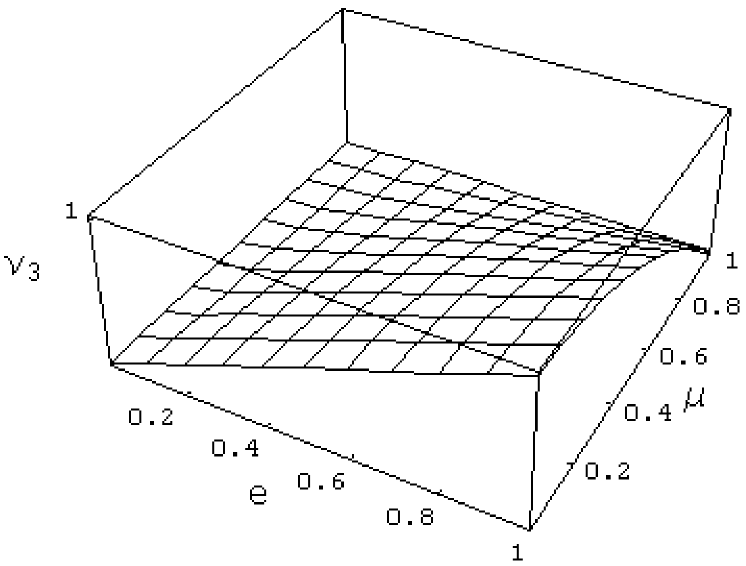


Рисунок 1.4 –

(см. рис. 1.5). Если $\nu_3 = \nu_3^*$ эти части вытягиваются вниз и становятся бесконечными (см. рис. 1.6). Если $\nu_3 > \nu_3^*$ к двум бесконечным областям, лежащим ниже прямой $\delta = 0$, добавляются две бесконечные области, лежащие выше этой прямой (см. рис. 1.7).

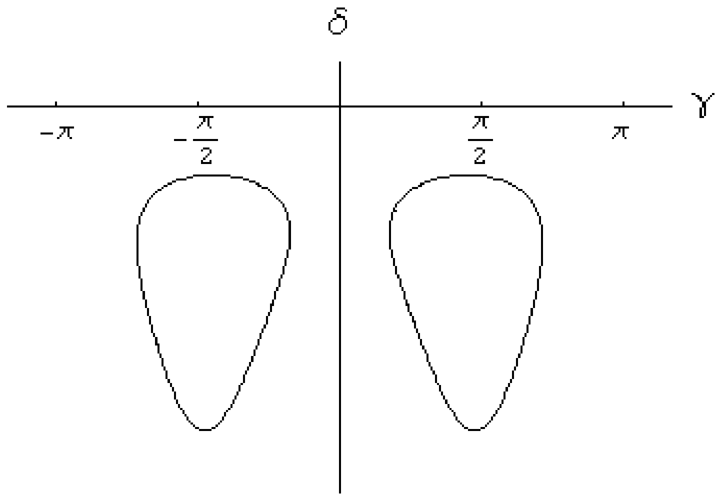


Рисунок 1.5 –

б) $\mu = e$**.** В этом случае области схода со связи, остаются по форме такими же, как изображённые на рис. 1.5,1.6,1.7, только нижние части этих областей будут касаться друг друга на оси δ.

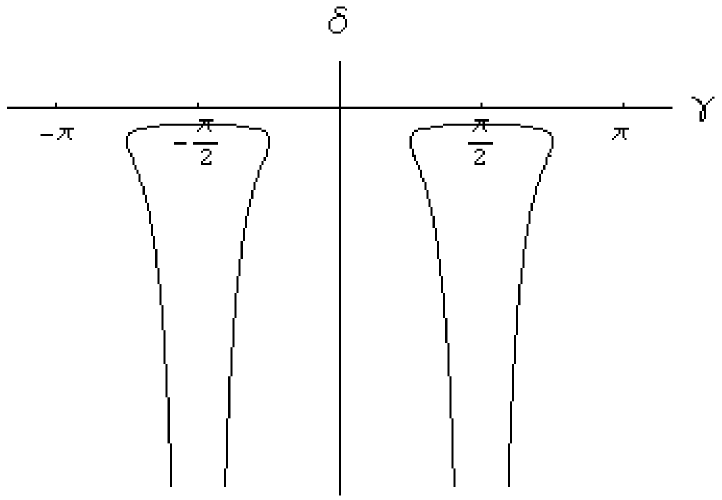


Рисунок 1.6 –

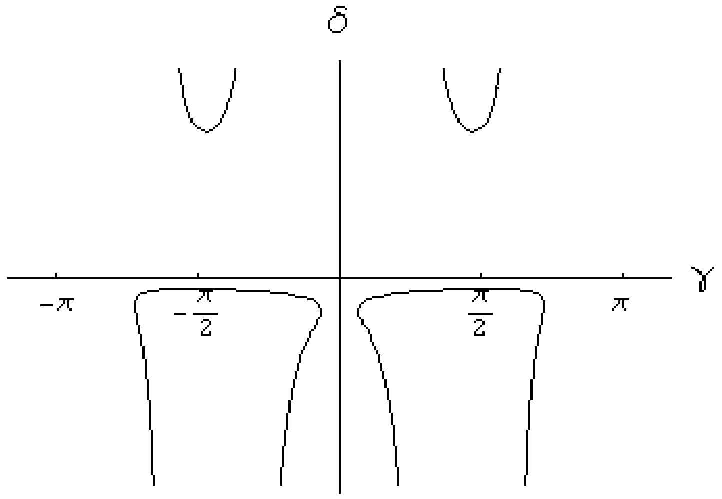


Рисунок 1.7 –

в) $\mu > e$**.** Если $\nu_3 < \nu_3^*$, область схода со связи имеет форму, изображенную на рис. 1.8, если $\nu_3 = \nu_3^*$ - изображенную на рис 1.9. Если же $\nu_3 > \nu_3^*$, возможны две ситуации: если $e < \mu \leq e^*$, где e^* - корень уравнения $\left(e^4 - e^2\right) u^3 + \left(e^3 + 3e\right) u^2 - \left(1 + 5e^2 + 2e^4\right) u + e + 3e^3 = 0$, находящийся между e и 1, область схода со связи имеет форму, изображенную на рис. 1.10, если же $\mu > e^*$ при достаточно больших ν_3 возможно слияние частей, лежащих выше оси γ, и исчезновение области связного движения, примыкающей к отрицательному направлению оси δ (рис. 1.11).

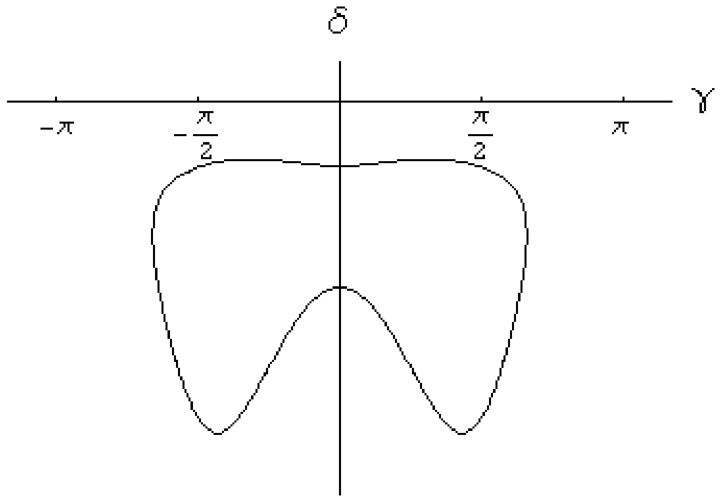


Рисунок 1.8 –

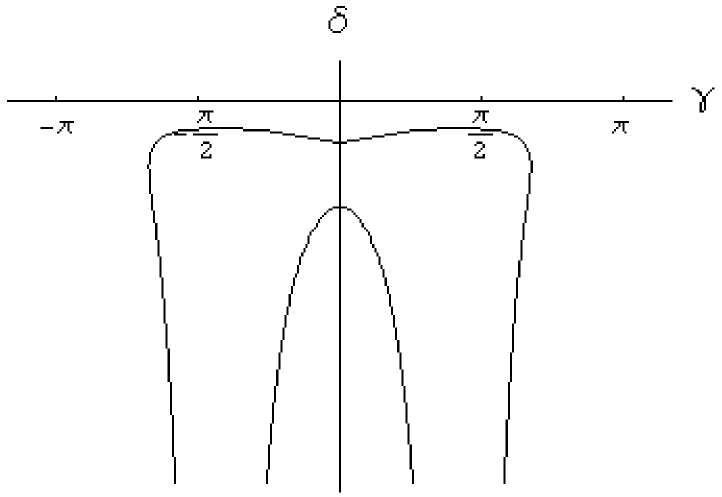


Рисунок 1.9 –

1.6 О возможности связных перелетов между концами станции.

На практике может оказатся важным ответ на вопрос о возможности перемещения (или “перелета”) по лееру того или иного груза с одного конца протяженной космической станции на другой ее конец без ослабевания троса. В рассматриваемой в этой главе ситуации таким перемещениям соответствуют связные движения груза m_3, начинающиеся и заканчивающиеся в вершинах эллипса, ограничивающего движения по лееру, соответствующих

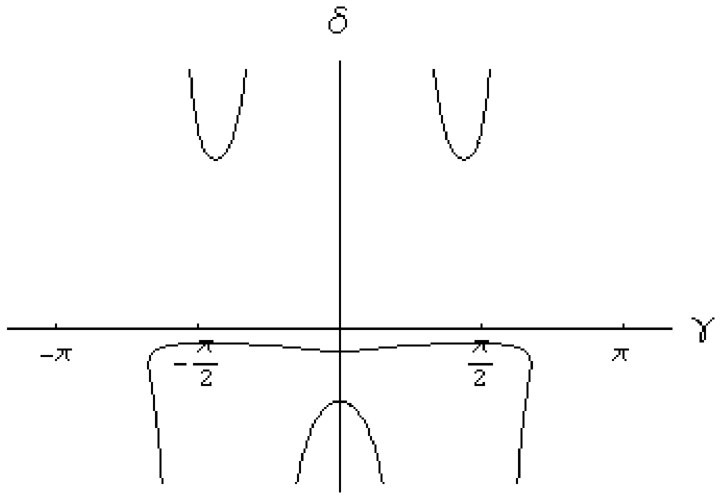


Рисунок 1.10 –

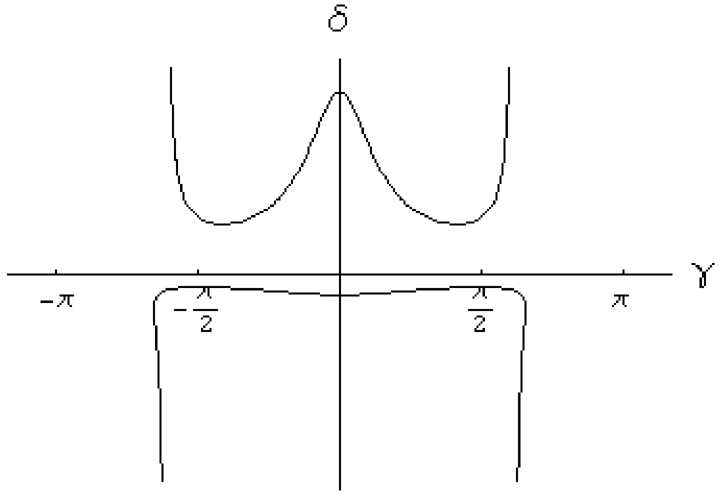


Рисунок 1.11 –

его большей оси. Очевидно, такие перемещения соответствуют вращениям на фазовом портрете. Анализируя формы и положение областей схода со связи на фазовой плоскости (рис.1.5–1.11), можно сделать следующие выводы:

а) если $\nu_3 \leq \nu_3^*$, то при любом перелете в направлении вращения станции сход со связи не возможен;

б) если$\nu_3 < \nu_3^*$,то при перелёте в направлении,противоположном направлению вращения станции, сход со связи невозможен при достаточно большом начальном импульсе;

в) если $\nu_3 \geq \nu_3^*$, то при $e \geq e^*$, где e^* - параметр, с точностью до 0.05 определяемый формулой $e^* \approx 0.75 - 0.5\mu$, связных перелётов в направлении, противоположном вращению станции, не существует, если же $e < e^*$, такие перелёты существуют в некоторой окрестности лимитационного (сепаратрисного) движения;

г) если $\nu_3 > \nu_3^*$, то в некоторой окрестности лимитационного (сепаратрисного) движения существуют связные перелеты в направлении вращения станции.

ГЛАВА 2

Равновесные конфигурации леерной связки в плоскости круговой орбиты

В этой главе изучаются равновесные конфигурации леерной связки, рассмотренной в предыдущей главе, в случае, когда ее центр масс движется по круговой орбите в гравитационном поле притягивающего центра, причем все элементы рассматриваемой механической системы во все время движения остаются в плоскости орбиты и неподвижны в орбитальной системе отсчета.

2.1 Уравнения движения

Как и в предыдущей главе, будем рассматривать механическую систему, состоящую из гантели, образуемой точечными массами m_1 и m_2, соединенными невесомым стержнем длины $2c$, и груза массы m_3, который может свободно двигаться вдоль троса длиной $2a$, закреплённого в точках с массами m_1 и m_2. Пусть O – середина стержня, C – центр масс системы. Будем считать, что связка m_1, m_2 и m_3 движется в центральном ньютоновском поле с притягивающим центром O_1 и во все время движения все элементы связки и O_1 находятся в одной плоскости. Свяжем со стержнем систему координат Oxy (см. рис. 2.1), обозначим через θ угол между инерциальной осью и направлением от притягивающего центра к центру масс связки, а через φ - угол между лучом OC и положительным направлением оси Ox.

Очевидно, в рассматриваемой ситуации груз m_3 не может выходить за пределы области V, ограниченной эллипсом с фокусами в точках m_1 и m_2,

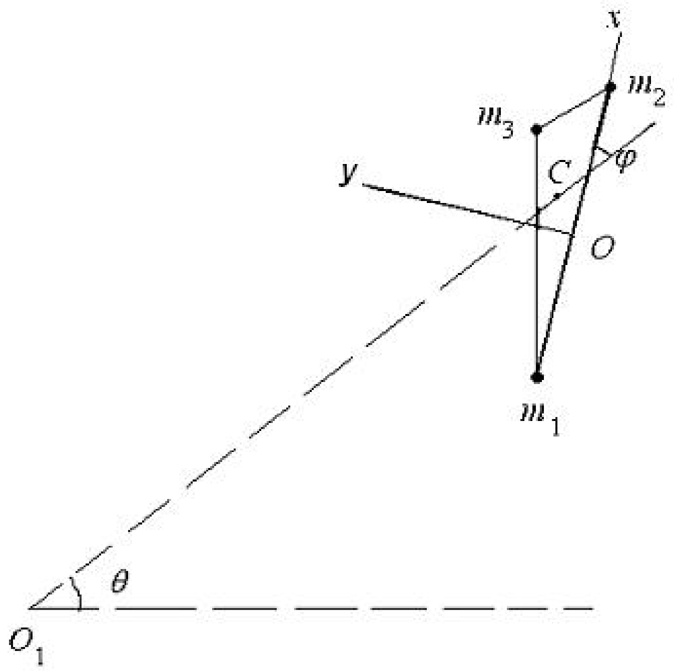


Рисунок 2.1 –

полуосями a и $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ и эксцентриситетом, равным $e = c/a$. Как и раньше, движение по границе области V будем называть "связным", а про груз будем говорить, что он "находится на связи". Движение внутри области V будем называть "свободным", а про груз в этом случае будем гоаорить, что он "сошел со связи".

Выберем в качестве обобщённых координат, описывающих связное движение, длину радиус-вектора $\overrightarrow{O_1C}$ центра масс системы ($O_1C = r$), углы θ и φ, а также угол γ, имеющий тот же смысл, что и в предыдущей главе и представляющий собой эксцентрическую аномалию точки m_3 при её движении по эллипсу, ограничивающему область V. Запишем координаты некоторых точек и векторов в системе координат Oxy:

$$\begin{gathered} m_1\,(-c;0)\,, \quad m_2\,(c;0)\,, \quad m_3\,(a\cos\gamma;b\sin\gamma)\,, \\ C\left(\frac{1}{M}\left(c\left(m_2-m_1\right)+m_3a\cos\gamma\right);\frac{m_3b\sin\gamma}{M}\right), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$,

$$\overrightarrow{O_1C} = \{r\cos\varphi; -r\sin\varphi\},$$

$$\overrightarrow{Cm_1} = -\frac{1}{M}\{c(2m_2+m_3) - m_3 a\cos\gamma; m_3 b\sin\gamma\},$$

$$\overrightarrow{Cm_2} = \frac{1}{M}\{c(2m_1+m_3) - m_3 a\cos\gamma; -m_3 b\sin\gamma\}, \tag{2.2}$$

$$\overrightarrow{Cm_3} = \frac{1}{M}\{-c(m_2-m_1) + a(m_1+m_2)\cos\gamma; (m_1+m_2) b\sin\gamma\}.$$

Силовая функция системы может быть записана в виде $U = f\sum_{i=1}^{3}\frac{m_i}{r_i}$, где r_i - длина вектора, соединяющего O_1 с точкой массы m_i, а f – константа. Очевидно $\mathbf{r}_i^2 = \overrightarrow{O_1C}^2 + 2\left(\overrightarrow{O_1C}, \overrightarrow{Cm_i}\right) + \overrightarrow{Cm_i}^2$. С учетом (2.2) кинетическая энергия связки представляется формулой

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) + \frac{(m_1+m_2)^2 a^2}{2M}\left[A_1\dot\gamma^2 + 2B_1\left(\dot\varphi+\dot\theta\right)\dot\gamma + C_1\left(\dot\varphi+\dot\theta\right)^2\right], \tag{2.3}$$

где

$$A_1 = \nu\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)$$

$$B_1 = \nu\sqrt{1-e^2}\,(1 - \mu e\cos\gamma) \tag{2.4}$$

$$C_1 = \nu\left(1 + e^2\cos^2\gamma - 2\mu e\cos\gamma\right) + \left(1-\mu^2\right)e^2,$$

а безразмерные параметры ν и μ определяются равенствами

$$\nu = \frac{m_3}{m_1+m_2}, \qquad \mu = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}. \tag{2.5}$$

Система с кинетической энергией (2.3) и силовой функцией U допускает циклический интеграл

$$Mr^2\dot\theta + \frac{(m_1+m_2)^2 a^2}{M}\left(B_1\dot\gamma + C_1\left(\dot\varphi+\dot\theta\right)\right) = const \tag{2.6}$$

Остальные уравнения Лагранжа можно записать как

$$M\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{(m_1+m_2)^2 a^2}{M}\left[B_1\ddot{\gamma} + C_1\left(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta}\right) + B_{1\gamma}\dot{\gamma}^2 + C_{1\gamma}\dot{\gamma}\left(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\right)\right] - \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{(m_1+m_2)^2 a^2}{2M}\left[2A_1\ddot{\gamma}+2B_1\left(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta}\right)+A_{1\gamma}\dot{\gamma}^2-C_{1\gamma}\left(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\right)^2\right]-\frac{\partial U}{\partial \gamma}=0, \tag{2.9}$$

где $A_{1\gamma} = \dfrac{\partial A_1}{\partial \gamma}$, $B_{1\gamma} = \dfrac{\partial B_1}{\partial \gamma}$, $C_{1\gamma}=\dfrac{\partial C_1}{\partial \gamma}$.

Перейдём к безразмерным переменным $\rho = r/r_0$, φ, γ (r_0 - начальное значение r) и безразмерному времени $\tau = t\sqrt{f}/r_0^{3/2}$. Используя обозначение $(\quad)' = \dfrac{d}{d\tau}$, перепишем уравнения движения (2.6,2.7,2.8,2.9) в виде

$$\rho^2\theta' + \frac{a^2}{r_0^2}\left(\frac{m_1+m_2}{M}\right)^2\left(B_1\gamma' + C_1\left(\varphi'+\theta'\right)\right) = const \tag{2.10}$$

$$\rho'' - \rho\theta'^2 - \frac{r_0}{Mf}\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0, \tag{2.11}$$

$$B_1\gamma''+C_1\left(\varphi''+\theta''\right)+B_{1\gamma}\gamma'^2+C_{1\gamma}\gamma'\left(\varphi'+\theta'\right)-\frac{Mr_0^3}{fa^2\left(m_1+m_2\right)^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi}=0, \tag{2.12}$$

$$A_1\gamma''+B_1\left(\varphi''+\theta''\right)-\frac{1}{2}C_{1\gamma}\left(\varphi'+\theta'\right)^2+\frac{1}{2}A_{1\gamma}\gamma'^2-\frac{Mr_0^3}{fa^2\left(m_1+m_2\right)^2}\frac{\partial U}{\partial \gamma}=0. \tag{2.13}$$

Силовую функцию U можно записать в виде

$$U = \varepsilon f M\tilde{U}/a \tag{2.14}$$

где

$$\tilde{U} = (1+\nu)\left[\frac{1}{\rho} + \frac{\varepsilon^2}{\rho^3}U_2 + \frac{\varepsilon^3}{\rho^4}U_3\right] + O\left(\varepsilon^4\right), \quad \varepsilon = \frac{a}{r_0\left(1+\nu\right)} << 1. \quad (2.15)$$

причем

$$U_2 = \frac{1}{1+\nu}\sum_{i=1}^{3}\nu_i\left[\frac{3}{2}\left(a,b_i\right)^2 - \frac{1}{2}\left(b_i,b_i\right)\right],$$

$$U_3 = \frac{1}{1+\nu}\sum_{i=1}^{3}\nu_i\left[\frac{3}{2}\left(b_i,b_i\right)\left(a,b_i\right) - \frac{5}{2}\left(a,b_i\right)^3\right],$$

$$a = \left\{\cos\varphi; -\sin\varphi\right\},$$

$$b_1 = \left\{-e\left(1+\mu+\nu\right) + \nu\cos\gamma;\ -\nu\sqrt{1-e^2}\sin\gamma\right\},$$

$$b_2 = \left\{e\left(1-\mu+\nu\right) - \nu\cos\gamma;\ -\nu\sqrt{1-e^2}\sin\gamma\right\},$$

$$b_1 = \left\{-e\mu + \cos\gamma;\ \sqrt{1-e^2}\sin\gamma\right\},$$

$$\nu_1 = \left(1-\mu\right)/2, \quad \nu_2 = \left(1+\mu\right)/2, \quad \nu_3 = \nu.$$

Подставив выражения (2.14,2.15) в уравнения движения (2.10,2.11,2.12,2.13) и пренебрегая в $\tilde{U}$ слагаемыми порядка ε^4, получим

$$\rho^2\theta' + \varepsilon^2\left(B_1\gamma' + C_1\left(\varphi' + \theta'\right)\right) = const, \quad (2.16)$$

$$\rho'' - \rho\theta'^2 + \frac{1}{\rho^2} + \varepsilon^2\frac{3U_2}{\rho^4} + \varepsilon^3\frac{4U_3}{\rho^5} = 0, \quad (2.17)$$

$$B_1\gamma'' + C_1\left(\varphi'' + \theta''\right) + B_{1\gamma}\gamma'^2 + C_{1\gamma}\gamma'\left(\varphi' + \theta'\right) - \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial U_2}{\partial\varphi} - \varepsilon\frac{1}{\rho^4}\frac{\partial U_3}{\partial\varphi} = 0 \quad (2.18)$$

$$A_1\gamma''+B_1(\varphi''+\theta'')-\frac{1}{2}C_{1\gamma}(\varphi'+\theta')^2+\frac{1}{2}A_{1\gamma}\gamma'^2-\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial U_2}{\partial\gamma}-\varepsilon\frac{1}{\rho^4}\frac{\partial U_3}{\partial\gamma}=0 \tag{2.19}$$

Заметим, что если в уравнениях (2.16) и 2.17) пренебречь слагаемыми порядка ε^2, то уравнения движения (2.16,2.17,2.18,2.19) разделятся на две группы. Первые два уравнения

$$\rho^2\theta'=\text{const},\qquad \rho''-\rho\theta'^2+\frac{1}{\rho^2}=0 \tag{2.20}$$

при этом оказываются независимыми от движения системы вокруг центра масс и определяют его движение по орбите, причем если центр масс движется по круговой орбите, то есть если $r=r_0$ во все время движения, то, очевидно, $\rho\equiv 1$, что возможно, только если $\theta^2\equiv 1$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\theta\equiv 1$. В этом случае оставшиеся два уравнения движения записываются как

$$B_1\gamma''+C_1\varphi''+B_{1\gamma}\gamma'^2+C_{1\gamma}\gamma'(\varphi'+1)-\frac{\partial U_2}{\partial\varphi}-\varepsilon\frac{\partial U_3}{\partial\varphi}=0$$

$$A_1\gamma''+B_1\varphi''-\frac{1}{2}C_{1\gamma}(\varphi'+1)^2+\frac{1}{2}A_{1\gamma}\gamma'^2-\frac{\partial U_2}{\partial\gamma}-\varepsilon\frac{\partial U_3}{\partial\gamma}=0,$$

и могут быть представлены в виде

$$B_1\gamma''+C_1\varphi''+B_{1\gamma}\gamma'^2+C_{1\gamma}\gamma'\varphi'+C_{1\gamma}\gamma'-\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}-\varepsilon\frac{\partial N_3}{\partial\varphi}=0, \tag{2.21}$$

$$A_1\gamma''+B_1\varphi''-\frac{1}{2}C_{1\gamma}\varphi'^2-C_{1\gamma}\varphi'+\frac{1}{2}A_{1\gamma}\gamma'^2-\frac{\partial N_2}{\partial\gamma}-\varepsilon\frac{\partial N_3}{\partial\gamma}=0, \tag{2.22}$$

где $N_2=\frac{1}{2}C_1+U_2$; $N_3=U_3$ зависят от γ,φ,e,μ,ν. Уравнения (2.21,2.22) являются уравнениями Лагранжа с лагранжианом

$$L=\frac{1}{2}\left(A_1\gamma'^2+2B_1\gamma'\varphi'+C_1\varphi'^2+2C_1\varphi'\right)+N_2+\varepsilon N_3 \tag{2.23}$$

и допускают интеграл Якоби

$$H = \frac{1}{2}\left(A_1\gamma'^2 + 2B_1\gamma'\varphi' + C_1\varphi'^2\right) - N_2 - \varepsilon N_3 = const. \tag{2.24}$$

2.2 Равновесные конфигурации связки пренебрежимо малых размеров и их устойчивость

Будем называть равновесной конфигурацией такие движения рассматриваемой механической системы, в которых расстояния между образующими ее массами не меняется во все время движения, то есть такие ситуации, когда система движется как твердое тело. Будем рассматривать такие равновесные конфигурации, в которых все элементы леерной связки не покидают плоскость круговой орбиты, по которой движется центр масс изучаемой системы. Ограничимся ситуацией, когда равновесная конфигурация неподвижна (постоянно ориентирована [92]) в орбитальной системе отсчета, что означает, что значения переменных φ и γ постоянны. Из (2.21) и (2.22) следует, что значения φ и γ для рассматриваемых равновесных конфигураций определяются алгебраическими уравнениями

$$\frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + \varepsilon\frac{\partial N_3}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + \varepsilon\frac{\partial N_3}{\partial \varphi} = 0. \tag{2.25}$$

Если считать, что длины гантели и леера пренебрежимо малы по сравнению с радиусом орбиты, а движение рассматривается на временах порядка нескольких витков по орбите, то в (2.25) можно положить $\varepsilon = 0$.

Тогда уравнения (2.25) в явном виде запишутся как

$$\left[\left(2-e^2\right)\cos\gamma - e\mu\right]\sin\gamma\cdot x + \sqrt{1-e^2}\left(\cos 2\gamma - e\mu\cos\gamma\right)\cdot y =$$

$$= e\sin\gamma\cdot\left(\mu - e\cos\gamma\right)$$

$$. \quad (2.26)$$

$$2\nu\sqrt{1-e^2}\left(\cos\gamma - e\mu\right)\sin\gamma\cdot x + \left[\left(2-e^2\right)\nu\cos^2\gamma + \left(2e^2-1\right)\nu +\right.$$

$$\left. + e^2\left(1-\mu^2\right) - 2e\mu\cos\gamma\right]\cdot y = 0$$

где $x = \cos 2\varphi, \quad y = \sin 2\varphi$.

Отметим, что в силу консервативности рассматриваемой механической системы, несмотря на то, что леерная связь является односторонней, в случае, когда реакция леера не равна 0 (или силы реакции ветвей леера не равны 0), в силу теоремы А.П.Иванова [43, 44], об устойчивости равновесных конфигураций можно судить, рассматривая только связные движения системы, то есть рассматривая леер как двустороннюю связь.

2.2.1 Случай симметричной гантели

Рассмотрим сначала случай, когда гантель симметрична, то есть образована равными массами ($m_1 = m_2$). В этом случае $\mu = 0$ и определитель линейной относительно x и y системы уравнений (2.26) равен 0. Следовательно, эта система имеет решения только если $\sin 2\gamma = 0$, но тогда $y = \sin 2\varphi = 0$. Из последних двух равенств следует, что в рассматриваемом случае существует 16 равновесных конфигураций, которые можно разделить на четыре группы: вертикально-вертикальные, горизонтально-горизонтальные, вертикально-горизонтальные и горизонтально-вертикальные.

2.2.1.1 Вертикально-вертикальные конфигурации

Вертикально-вертикальными можно назвать такие равновесные конфигурации, в которых все три массы, образующие связку, расположены на одной прямой, проходящей через притягивающий центр. Очевидно, есть 4 такие конфигурации, а именно

$$\varphi_1 = 0, \gamma_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi, \gamma_2 = 0; \quad \varphi_3 = 0, \gamma_3 = \pi; \quad \varphi_4 = \pi, \gamma_4 = \pi\,. \tag{2.27}$$

Во всех этих конфигурациях сила реакции леера не равна 0, то есть система находится "на связи". Все эти конфигурации устойчивы по Ляпунову, так как им соответствует минимум интеграла Якоби.

2.2.1.2 Горизонтально-горизонтальные конфигурации

Горизонтально-горизонтальными можно назвать такие равновесные конфигурации, в которых все три массы, образующие связку, расположены на касательной к орбите центра масс связки. Очевидно, есть 4 такие конфигурации, а именно

$$\begin{gathered} \varphi_5 = \tfrac{\pi}{2}, \gamma_5 = 0; \quad \varphi_6 = -\tfrac{\pi}{2}, \gamma_6 = 0; \\ \varphi_7 = \tfrac{\pi}{2}, \gamma_7 = \pi; \quad \varphi_8 = -\tfrac{\pi}{2}, \gamma_8 = \pi. \end{gathered} \tag{2.28}$$

По-существу, в этих ситуациях все три массы движутся по одной и той же круговой орбите, не взаимодействуя друг с другом. Сила натяжения леера для таких конфигураций равна 0. Все эти конфигурации неустойчивы по Ляпунову, так как даже если рассматривать только связные движения, матрица линеаризованных в окрестности такой равновесной конфигурации уравнений движения неминуемо имеет хотя бы одно положительное собственное число.

2.2.1.3 Вертикально-горизонтальные конфигурации

Вертикально-горизонтальными можно назвать такие равновесные конфигурации, в которых гантель расположена на прямой, проходящей через притягивающий центр (то есть перпендикулярно касательной к орбите), а масса на леере движется по той же круговой орбите, что и центр масс гантели. Очевидно, есть 4 такие конфигурации, а именно

$$\varphi_9 = 0, \gamma_9 = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_{10} = \pi, \gamma_{10} = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_{11} = 0, \gamma_{11} = -\frac{\pi}{2}; \quad \varphi_{12} = \pi, \gamma_{12} = -\frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, сила натяжения леера в этом случае равна нулю. Все эти конфигурации неустойчивы по Ляпунову, так как даже если ограничиться рассмотрением связных движений, матрица линеаризованных в окрестности такой равновесной конфигурации уравнений движения неминуемо имеет хотя бы одно положительное собственное число. Тем не менее, если заменить ветви леера тонкими невесомыми стержнями, рассматриваемые конфигурации становятся устойчивыми, если

$$(2\nu + 1)\, e^2 - \nu > 0, \tag{2.29}$$

если же $(2\nu + 1)\, e^2 - \nu \leq 0$, то сохраняется неустойчивость. Отметим, что условие (2.29) по-существу совпадает с условиями устойчивости стационарного движения твердого тела на круговой орбите из [8, 10].

2.2.1.4 Горизонтально-вертикальные конфигурации

Горизонтально-вертикальными можно назвать такие равновесные конфигурации, в которых гантель перпендикулярна прямой, проходящей через притягивающий центр и центр масс связки, а масса на леере расположена так, что с точки зрения наблюдателя, находящегося на гантели, эта масса находится над серединой гантели. Очевидно, есть 4 такие конфигурации, а именно

$$\varphi_{13} = \frac{\pi}{2}, \gamma_{13} = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_{14} = -\frac{\pi}{2}, \gamma_{14} = \frac{\pi}{2};$$
$$\varphi_{15} = \frac{\pi}{2}, \gamma_{15} = -\frac{\pi}{2}; \quad \varphi_{16} = -\frac{\pi}{2}, \gamma_{16} = -\frac{\pi}{2}.$$

Для всех этих конфигураций сила натяжения леера не равна 0, то есть система находится “на связи”. Все эти конфигурации неустойчивы по Ляпунову, так как матрица линеаризованных в окрестности такой равновесной конфигурации уравнений движения неминуемо имеет хотя бы одно собственное число с положительной действительной частью. Тем не менее, если запретить передвижение массы m_3 по лееру (или, что то же самое, заменить леер двумя тросами), то равновесная конфигурация при выполнении неравенства, противоположного (2.29) становится устойчивой, что также соответствует условиям устойчивости из [8]. При этом при $(2\nu + 1)\, e^2 - \nu \geq 0$ сохраняется неустойчивость.

Отметим, что в случае, если груз не закреплен на леере, при отклонении из горизонтально-вертикального положения система стремится перейти в вертикально-вертикальное положение, а если груз закреплен и конфигурация неустойчива, в вертикально-горизонтальное ,если, конечно, не произойдет сход со связи.

2.2.2 Случай несимметричной гантели

Рассмотрим теперь случай, когда гантель несимметрична, то есть образована неравными массами ($m_1 \neq m_2$). В этом случае $\mu > 0$ и определитель линейной относительно x и y системы уравнений (2.26) равен 0 в частности при $\sin\gamma = 0$, что возможно только если $y = \sin 2\varphi = 0$, откуда следует существование восьми равновесных конфигураций, которые можно разделить на две группы: вертикально-вертикальные и горизонтально-горизонтальные

2.2.2.1 Вертикально-вертикальные конфигурации Четыре вертикально-вертикальные конфигурации по-существу такие же, как и для симметричной гантели и определяются равенствами (2.27). Также, как и в случае симметричной гантели, для этих конфигураций сила реакции леера не равна нулю, однако, если третья и четвертая конфигурации, когдаменьшая из масс, составляющих гантель, находятся между грузом и большей массой, устойчивы по Ляпунову при любых физически допустимых значениях параметров e, μ и ν (эти конфигурации соответствуют минимуму интеграла Якоби), то первая и вторая конфигурации, когда большая из масс, составляющих станцию, находится между меньшей массой и грузом, устойчивы только если

$$\nu\left(\mu + e^2\mu - 2e\right) < e\left(1 - \mu^2\right), \tag{2.30}$$

так как в этом случае для этих конфигураций реализуется минимум интеграла Якоби. Если же выполнено неравенство, противоположное (2.30), то матрица линеаризованных в окрестности любой из первых двух конфигураций уравнеий движения имеет не менее одного положительного действительного собственного значения, то есть первая и вторая конфигурации неустойчивы. В случае равенства в (2.30) выполняются только необходимые условия устойчивости. Граница между областями устойчивости и неустойчивости изображена на рис. 2.2

Отметим также, что если запретить движение груза вдоль леере, то все вертикально-вертикальные конфигурации оказываются устойчивыми.

2.2.2.2 Горизонтально-горизонтальные конфигурации Четыре горизонтально-горизонтальные конфигурации по-существу такие же, как и для симметричной гантели и определяются равенствами (2.28). Как и для симметричной гантели, все они неустойчивы и не могут быть стабилизированы фиксацией груза на леере.

2.2.2.3 Вертикально-горизонтальные конфигурации Заметим, что система (2.26) при $\cos\gamma = e\mu$ имеет решение $y = 0$, $x = 1$, что

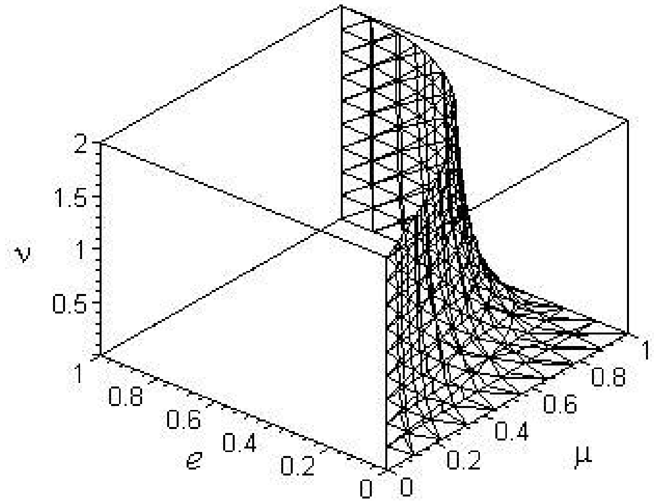


Рисунок 2.2 –

дает еще четыре равновесные конфигурации

$$\varphi_9 = 0,\ \gamma_9 = \arccos e\mu; \qquad \varphi_{10} = \pi,\ \gamma_{10} = \arccos e\mu;$$

$$\varphi_{11} = 0,\ \gamma_{11} = -\arccos e\mu; \ \ \varphi_{12} = \pi,\ \gamma_{12} = -\arccos e\mu.$$

которые могут быть названы вертикально-горизонтальными, так как во всех этих конфигурациях массы, составляющие гантель, лежат на одной прямой с притягивающим центром, груз на леере движется по той же круговой орбите, что и центр масс гантели, а сила реакции леера равна 0. Все эти конфигурации неустойчивы, так как матрица линеаризованных в окрестности каждой из этих конфигураций уравнений движения имеет не менее одного положительного действительного собственного значения. Однако, если заменить ветви леера невесомыми стержнями, при выполнении условия

$$(2\nu + 1)\ e^2 - \nu - \mu^2 e^2 \left(1 + e^2 \nu\right) > 0, \tag{2.31}$$

вертикально-горизонтальные конфигурации становятся устойчивыми, в остальных случаях сохраняется неустойчивость. Условие (2.31), также как и аналогичные условия выше по-существу совпадает с условиями устойчивости из [8] и переходит в условие (2.29), если $\mu \to 0$.

2.2.2.4 Наклонно-вертикальные конфигурации Заметим что если $\mu \neq 0$, то гантель может быть перпендикулярна направлению на притягивающий центр (то есть если $\varphi = \pm\pi/2$) только если $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi$, то есть горизонтально-вертикальные положения равновесия для несимметричной гантели невозможны. Тем не менее, при выполнении неравенства (2.30), существуют еще четыре равновесные конфигурации, в которых гантель во все время движения наклонена к направлению на притягивающий центр на некоторый фиксированный угол (не нулевой и не прямой), причем прямая, соединяющая груз на леере с притягивающим центром, направлена по нормали к эллипсу, ограничивающему область V. Такие равновесные конфигурации можно назвать “наклонно-вертикальными”. Для определения “угловых координат” φ и γ наклонно-вертикальных конфигураций, заметим, что область в пространстве параметров, лежащая ниже и левее поверхности, изображенной на рис. 2.2, расслаивается на однопараметрическое по параметру k семейство поверхностей, определяемое уравнением

$$\nu = \frac{e\left(1-\mu^2\right)\sqrt{(1+k)\left(2-e^2+ke^2\right)}}{2\left[\left(1+ke^2\right)\mu - e\sqrt{(1+k)\left(2-e^2+ke^2\right)}\right]}, \tag{2.32}$$

где $-1 < k < 1$, причем при $k \to 1$ поверхность (2.32) переходит в поверхность, изображенную на рис. 2.2, а при $k \to -1$ вырождается в объединение плоскостей $\nu = 0$, $\mu = 0$ и $e = 1$. При $\nu \to \infty$ (2.32) стремится к цилиндрической сепаратрисе

$$\mu = \frac{e\sqrt{(1+k)\left(2-e^2+e^2k\right)}}{1+ke^2} \tag{2.33}$$

Справедливо следующее утверждение. Для каждого угла φ^* ($0 < \varphi^* < \pi/2$) и параметров e, μ, ν, удовлетворяющих равенству (2.32) при

$k = \cos 2\varphi^*$, существуют четыре наклонно-вертикальные положения равновесия, а именно:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{13} = \varphi^*, \quad \gamma_{13} = -\arccos\frac{\cos\varphi^*}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi^*}};\\
&\varphi_{14} = \varphi^* - \pi, \quad \gamma_{14} = -\arccos\frac{\cos\varphi^*}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi^*}};\\
&\varphi_{15} = -\varphi^*, \quad \gamma_{15} = \arccos\frac{\cos\varphi^*}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi^*}};\\
&\varphi_{16} = \pi - \varphi^*, \quad \gamma_{16} = \arccos\frac{\cos\varphi^*}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi^*}}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Из этого утверждения, в частности, следует, что какова бы ни была пара параметров e и μ, удовлетворяющих неравенству

$$\mu > \frac{2e\cos\varphi^* \cdot \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi^*}}{1 + e^2\cos 2\varphi^*}, \tag{2.35}$$

найдется такое значение ν, при котором существуют четыре стационарных движения системы, при которых станция наклонена на угол φ^* к направлению на притягивающий центр. Отметим также, что в наклонно-вертикальном положении равновесия груз расположен ближе к большей из масс, составляющих станцию.

Примеры наклонно-вертикальных конфигураций приведены на рис. 2.3. На этом рисунке площади кругов, изображающих тела, образующие связку, примерно пропорциональны их массам.

Для всех равновесных конфигураций (2.34) сила реакции леера не равна 0 (черные стрелки на на рис. 2.3), но все они неустойчивы (матрица уравнений движения, линеаризованных в окрестности каждой из наклонно-вертикальных конфигураций имеет положительное действительное собственное число). Если же закрепить груз на тросе, конфигурации (2.34)

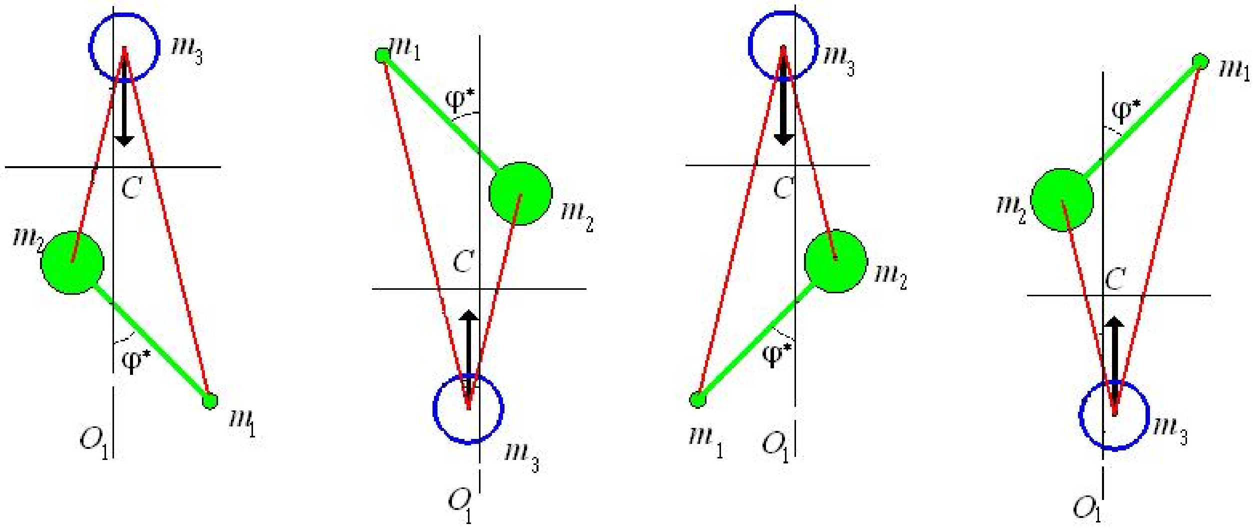


Рисунок 2.3 –

становятся устойчивыми при выполнении условия

$$\left(1 - 2e^2 + \mu^2 e^4\right)\nu - e^2\left(1 - \mu^2\right) > 0, \tag{2.36}$$

если же $\left(1 - 2e^2 + \mu^2 e^4\right)\, \nu - e^2\left(1 - \mu^2\right) \leq 0$, сохраняется неустойчивость (см. рис. 2.4). Эти условия также совпадают с доказанными в [8]. При $\mu \to 0$ неравенство (2.36) переходит в условие, противоположное (2.29), то есть в условие устойчиивости "закрепленной" горизонтально-вертикальной равновесной конфигурации.

Из условия (2.36) следует, что если $0 < \varphi^* \leq \pi/4$, то в случае, когда движение груза по лееру запрещено, наклонно-вертикальные равновесные конфигурации устойчивы, если же $\pi/4 < \varphi^* < \pi/2$, область допустимых значений e и μ, определяемая неравенством (2.35), разделяется кривой

$$\mu = \frac{\cos\varphi^*}{e\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi^*}},$$

соединяющей точки $A\left(\operatorname{ctg}\varphi^*, 1\right)$ и $B\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\varphi^*}, \sin 2\varphi^*\right)$, на область устойчивости и область неустойчивости (см.рис. 2.5). На границе этих областей имеет место неустойчивость.

Заметим, что при любых значениях φ^* область устойчивости включает

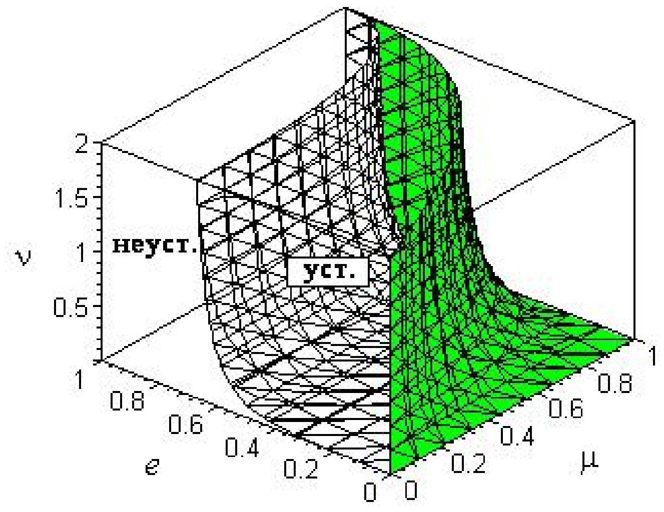


Рисунок 2.4 –

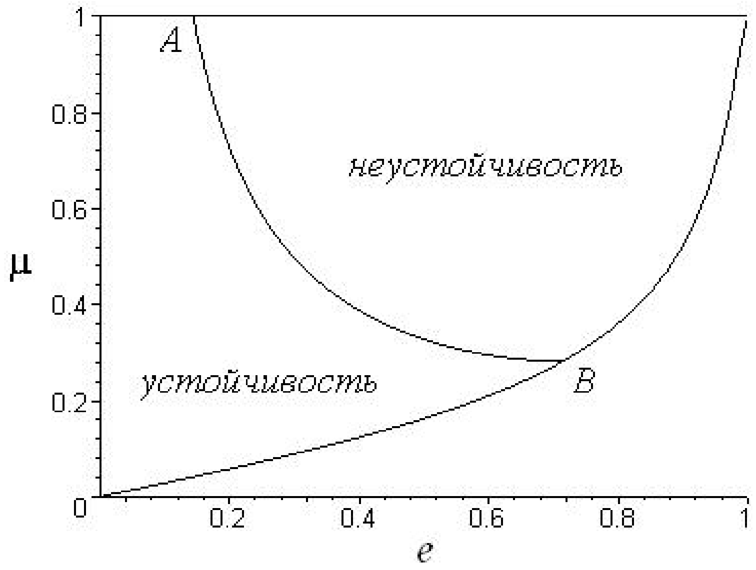


Рисунок 2.5 –

в себя точки, отвечающие всем допустимым значениям μ, то есть каково бы ни было соотношение между массами, составляющими гантель, можно подобрать длину троса и массу груза, обеспечивающие устойчивость соответствующих "наклонных" положений относительного равновесия гантели в орбитальной системе координат, то есть с помощью груза, зафиксированного на леере, гантель можно стабилизировать в любом положении, сохраняющем ориентацию относительно притягивающего центра.

Очевидно, что других решений системы (2.26), кроме описанных, нет. Таким образом, для несимметричной гантели при выполнении (2.30) существует 16 равновесных конфигураций рассматриваемой системы, в противном случае их только 12. При анализе существования и устойчивости рассмотренных конфигураций также может оказаться эффективным более общий подход, предложенный в [5] уже после публикации описанных результатов.

2.3 Поправки в угловые координаты равновесных конфигураций

Если в (2.25) нельзя пренебречь величиной ε, но тем не менее отношение длины леера к радиусу орбиты центра масс связки остается малым, то пренебрегая величинами порядка ε^2 и выше, угловые координаты φ и γ равновесных конфигураций можно записать в виде следующих равенств.

2.3.1 Случай симметричной гантели

В случае симметричной гантели, то есть если $m_1 = m_2$, “исправленные” угловые координаты равновесных конфигураций имеют вид:
вертикально-вертикальные конфигурации

$$\varphi_1 = 0, \gamma_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi, \gamma_2 = 0; \quad \varphi_3 = 0, \gamma_3 = \pi; \quad \varphi_4 = \pi, \gamma_4 = \pi;$$

горизонтально-горизонтальные конфигурации

$$\varphi_5 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon\nu, \quad \gamma_5 = \frac{1}{2}\varepsilon\,(1+\nu)\sqrt{1-e^2};$$

$$\varphi_6 = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon\nu, \quad \gamma_6 = -\frac{1}{2}\varepsilon\,(1+\nu)\sqrt{1-e^2};$$

$$\varphi_7 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon\nu, \quad \gamma_7 = \pi - \frac{1}{2}\varepsilon\,(1+\nu)\sqrt{1-e^2};$$

$$\varphi_8 = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon\nu, \quad \gamma_8 = \pi + \frac{1}{2}\varepsilon\,(1+\nu)\sqrt{1-e^2}$$

вертикально-горизонтальные конфигурации

$$\varphi_9 = -\varepsilon\nu\sqrt{1-e^2}, \quad \gamma_9 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon\,(1+\nu)\left(1+e^2\right);$$

$$\varphi_{10} = \pi + \varepsilon\nu\sqrt{1-e^2}, \quad \gamma_{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon\,(1+\nu)\left(1+e^2\right);$$

$$\varphi_{11} = \varepsilon\nu\sqrt{1-e^2}, \quad \gamma_{11} = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon\,(1+\nu)\left(1+e^2\right);$$

$$\varphi_{12} = \pi - \varepsilon\nu\sqrt{1-e^2}, \quad \gamma_{12} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon\,(1+\nu)\left(1+e^2\right);$$

горизонтально-вертикальные конфигурации

$$\varphi_{13} = \frac{\pi}{2}, \gamma_{13} = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_{14} = -\frac{\pi}{2}, \gamma_{14} = \frac{\pi}{2};$$
$$\varphi_{15} = \frac{\pi}{2}, \gamma_{15} = -\frac{\pi}{2}; \quad \varphi_{16} = -\frac{\pi}{2}, \gamma_{16} = -\frac{\pi}{2}.$$

2.3.2 Случай несимметричной гантели

В случае несимметричной гантели, то есть если $m_1 \neq m_2$, “исправленные” угловые координаты равновесных конфигураций имеют вид:
вертикально-вертикальные конфигурации

$$\varphi_1 = 0, \gamma_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi, \gamma_2 = 0; \quad \varphi_3 = 0, \gamma_3 = \pi; \quad \varphi_4 = \pi, \gamma_4 = \pi;$$

горизонтально-горизонтальные конфигурации

$$\varphi_5 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon\left(e\mu + \nu\right), \quad \gamma_5 = \frac{1}{2}\varepsilon\left(1+\nu\right)\sqrt{1-e^2};$$

$$\varphi_6 = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon\left(e\mu + \nu\right), \quad \gamma_6 = -\frac{1}{2}\varepsilon\left(1+\nu\right)\sqrt{1-e^2};$$

$$\varphi_7 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon\left(e\mu - \nu\right), \quad \gamma_7 = \pi - \frac{1}{2}\varepsilon\left(1+\nu\right)\sqrt{1-e^2};$$

$$\varphi_8 = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon\left(e\mu - \nu\right), \quad \gamma_8 = \pi + \frac{1}{2}\varepsilon\left(1+\nu\right)\sqrt{1-e^2};$$

вертикально-горизонтальные конфигурации

$$\begin{aligned}
&\varphi_9 = -\varepsilon\nu\sqrt{\left(1-e^2\mu^2\right)\left(1-e^2\right)},\\
&\gamma_9 = \arccos e\mu + \frac{1}{2}\varepsilon\left(1+\nu\right)\frac{1+e^2-\mu^2e^2\left(3-e^2\right)}{\sqrt{1-e^2\mu^2}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{10} = \pi + \varepsilon\nu\sqrt{\left(1-e^2\mu^2\right)\left(1-e^2\right)},\\
&\gamma_{10} = \arccos e\mu - \frac{1}{2}\varepsilon\left(1+\nu\right)\frac{1+e^2-\mu^2e^2\left(3-e^2\right)}{\sqrt{1-e^2\mu^2}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{11} = \varepsilon\nu\sqrt{\left(1-e^2\mu^2\right)\left(1-e^2\right)},\\
&\gamma_{11} = -\arccos e\mu - \frac{1}{2}\varepsilon\left(1+\nu\right)\frac{1+e^2-\mu^2e^2\left(3-e^2\right)}{\sqrt{1-e^2\mu^2}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{12} = \pi - \varepsilon\nu\sqrt{\left(1-e^2\mu^2\right)\left(1-e^2\right)},\\
&\gamma_{12} = -\arccos e\mu + \frac{1}{2}\varepsilon\left(1+\nu\right)\frac{1+e^2-\mu^2e^2\left(3-e^2\right)}{\sqrt{1-e^2\mu^2}};
\end{aligned}$$

наклонно-вертикальные конфигурации

$$\varphi_{13} = \varphi^*,$$

$$\gamma_{13} = -\arccos\frac{\cos\varphi^*}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^*}} + \varepsilon\, e\sqrt{1-e^2}\,\frac{\left(e\cos\varphi^* - \mu\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^*}\right)\sin\varphi^*}{\sqrt{2}\left(1-e^2\sin^2\varphi^*\right)^{3/2}};$$

$$\varphi_{14} = \varphi^* - \pi,$$

$$\gamma_{14} = -\arccos\frac{\cos\varphi^*}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^*}} - \varepsilon\, e\sqrt{1-e^2}\,\frac{\left(e\cos\varphi^* - \mu\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^*}\right)\sin\varphi^*}{\sqrt{2}\left(1-e^2\sin^2\varphi^*\right)^{3/2}};$$

$$\varphi_{15} = -\varphi^*,$$

$$\gamma_{15} = \arccos\frac{\cos\varphi^*}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^*}} - \varepsilon\, e\sqrt{1-e^2}\,\frac{\left(e\cos\varphi^* - \mu\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^*}\right)\sin\varphi^*}{\sqrt{2}\left(1-e^2\sin^2\varphi^*\right)^{3/2}};$$

$$\varphi_{16} = \pi - \varphi^*,$$

$$\gamma_{16} = \arccos\frac{\cos\varphi^*}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^*}} + \varepsilon\, e\sqrt{1-e^2}\,\frac{\left(e\cos\varphi^* - \mu\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi^*}\right)\sin\varphi^*}{\sqrt{2}\left(1-e^2\sin^2\varphi^*\right)^{3/2}}.$$

ГЛАВА 3

Динамика малого груза на леере, закрепленном на гантели, совершающей стационарное движение по круговой орбите

В этой главе в рамках предположений предыдущей главы изучается относительное движение груза вдоль леера в случаях, когда прямая, соединяющая массы, образующие гантель либо проходит через притягивающий центр, либо перпендикулярна этому направлению. Такая ситуация возникает, если, например, масса груза на леере пренебрежимо мала по сравнению с массами, образующими гантель, а гантель находится в устойчивом “вертикальном” ($\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$) положении относительного равновесия или в каким-то образом стабилизированном “горизонтальном” ($\varphi = \pm\pi/2$) положении относительного равновесия. Очевидно, уравнения связных движений груза вдоль леера в плоскости орбиты центра масс рассматриваемой системы как при вертикальном, так и при горизонтальном положении гантели, являются уравнениями движения механической системы с одной степенью свободы и легко интегрируются. В настоящей главе строятся фазовые портреты таких движений, качественный характер которых в основном зависит от отношения длины гантели к длине леера, то есть от параметра e. Фазовые портреты дополняются областями схода со связи, т.е. областями, где натяжение ветвей леера становится нулевым.

3.1 Общие условия нахождения на связи

Для полноты описания движения механической системы, рассмотренной в предыдущей главе (см. рис. 2.1), дополним уже выведенные уравнения движения условиями обращения в ноль силы натяжения леера. Оставаясь в рамках предположений и обозначений предыдущей главы, заметим, что груз будет двигаться по эллипсу, ограничивающему область V, если натяжения ветвей троса $\mathbf{T}_{31}$ и $\mathbf{T}_{32}$, направленные к первой и второй массам соответственно, не равны нулю. Уравнение абсолютного движения груза приводится к виду

$$m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{T}_{31} + \mathbf{T}_{32} - f\frac{m_3\mathbf{r}_3}{r_3^3}$$

Умножим обе его части скалярно на вектор внешней нормали к эллипсу в рассматриваемой точке. Тогда

$$m_3\left(\ddot{\mathbf{r}}_3, \mathbf{n}\right) - \frac{fm_3}{r_3^3}\left(\mathbf{r}_3, \mathbf{n}\right) = \left(\mathbf{T}_{31}, \mathbf{n}\right) + \left(\mathbf{T}_{32}, \mathbf{n}\right).$$

Учитывая, что в случае нахождения на связи правая часть этого равенства должна быть неположительной, условие нахождения на связи можно записать в виде

$$\left(\ddot{\mathbf{r}}_3, \mathbf{n}\right) - \frac{f}{r_3^3}\left(\mathbf{r}_3, \mathbf{n}\right) \leq 0$$

Перейдем в последнем неравенстве к безразмерным переменным и разложим выражение ρ_3^{-3} в ряд по ε. Считая, что ε пренебрежимо мало, получим

$$\left(e\cos\gamma - \mu\sin\gamma\right)\ e\varphi''\sin\gamma - 2\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\left(\varphi' + 1\right)\gamma' -$$

$$-\sqrt{1-e^2}\left(2 - e\mu\cos\gamma\right)\left(\varphi' + 1\right)^2 + 2\sqrt{1-e^2}\left(\varphi' + 1\right) -$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}e\mu\cos\gamma + \frac{3}{8}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)^2\cos\left(2\varphi - 2\gamma\right) -$$

$$-\frac{3}{8}\left(1 + \sqrt{1-e^2}\right)^2\cos\left(2\varphi + 2\gamma\right) - \frac{3}{4}e\mu\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)\cos\left(2\varphi - \gamma\right) +$$

$$+\frac{3}{4}e\mu\left(\sqrt{1-e^2} + 1\right)\cos\left(2\varphi + \gamma\right) \leq 0.$$

Используя уравнения относительного движения (2.21,2.22), из этого условия можно исключить φ'' и записать его в виде

$$\sqrt{1-e^2}\left(1-e\mu\cos\gamma\right)\left(\varphi'+1\right)^2+2\left(1-e^2\cos^2\gamma\right)\left(1+\varphi'\right)\gamma'+$$

$$+\sqrt{1-e^2}\gamma'^2-\frac{3}{2}\left(1-e^2\right)\sin 2\gamma\sin 2\varphi+ \tag{3.1}$$

$$+\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(3\cos 2\varphi\cos 2\gamma+1-e\mu\cos\gamma\left(1+3\cos 2\varphi\right)\right)\geq 0.$$

В частности, если гантель состоит из двух равных масс, то есть если $\mu=0$, условие нахождения на связи запишется в виде

$$\sqrt{1-e^2}\left(\varphi'+1\right)^2+2\left(1-e^2\cos^2\gamma\right)\left(1+\varphi'\right)\gamma'+$$

$$+\sqrt{1-e^2}\gamma'^2-\frac{3}{2}\left(1-e^2\right)\sin 2\gamma\sin 2\varphi+ \tag{3.2}$$

$$+\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(3\cos 2\varphi\cos 2\gamma+1\right)\geq 0.$$

Отметим, что левые части (3.1,3.2) не зависят от ν, то есть от массы груза на леере.

3.2 Редукция уравнений движения

Движение гантели не будет зависеть от движения груза вдоль леера, если масса этого груза пренебрежимо мала по сравнению с суммой масс материальных точек, образующих гантель, или же если движение гантели задано (например, если гантель искуственно удерживается под постоянным углом к направлению на притягивающий центр). Уравнения движения связки в этом случае можно получить предельным переходом $\nu\to o$. Если характерные размеры связки пренебрежимо малы по сравнению с радиусом орбиты ее центра масс, то есть если ε может быть принят равным

0, уравнение (2.21) при $\nu = 0$ примет вид

$$\varphi'' + \frac{3}{2}\sin 2\varphi = 0, \tag{3.3}$$

а уравнение (2.22) после сокращения на ν и такого же предельного перехода запишется как

$$\sqrt{1-e^2}\,(1-\mu e\cos\gamma)\,\varphi'' + \left(1-e^2\cos^2\gamma\right)\gamma'' + \frac{e^2}{2}\sin 2\gamma\cdot\gamma'^2 +$$

$$+e\sin\gamma\,(e\cos\gamma-\mu)\,\varphi'^2 + 2e\sin\gamma\,(e\cos\gamma-\mu)\,\varphi' - \frac{3}{2}\mu e\sin\gamma +$$

$$+\frac{3}{4}e^2\sin 2\gamma + \frac{3}{8}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)^2\sin(2\varphi+2\gamma) - \tag{3.4}$$

$$-\frac{3}{8}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)^2\sin(2\varphi-2\gamma) -$$

$$-\frac{3}{4}e\mu\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)\sin(2\varphi+\gamma) - \frac{3}{4}e\mu\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\sin(2\varphi-\gamma) = 0$$

Уравнение (3.3) представляет собой частный случай уравнения вращательного движения твердого тела на орбите [8]. Это уравнение допускает следующие положения равновесия (стационарные или установившиеся движения гантелевидного твердого тела): устойчивые “вертикальные” $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$ и неустойчивые “горизонтальные” $\varphi = \pm\pi/2$.

3.3 Случай “вертикального” положения гантели

Если гантель движется так, что во все время движения прямая, соединяющая материальные точки, ее образующие, проходит через притягивающий центр, то есть если $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, то уравнения (3.4) упрощаются и принимают вид

$$\left(1-e^2\cos^2\gamma\right)\gamma'' + \frac{e^2}{2}\gamma'^2\sin 2\gamma + 3\sin\gamma\,(\cos\gamma-\mu e) = 0 \tag{3.5}$$

Это уравнение имеет первый интеграл (интеграл Якоби)

$$\left(1 - e^2 \cos^2 \gamma\right) \gamma'^2 - 3 \cos \gamma \left(\cos \gamma - 2\mu e\right) = h_1 = \mathrm{const} \tag{3.6}$$

или

$$\gamma'^2 = \frac{h_1 + 3 \cos \gamma \left(\cos \gamma - 2e\mu\right)}{1 - e^2 \cos^2 \gamma}.$$

Из последнего равенства следует, что на промежутке $-\pi/2 \leq \gamma < 3\pi/2$ существуют четыре стационарные точки уравнения (3.5): две устойчивые ($\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = \pi$) и две неустойчивые ($\gamma_3 = \gamma^* = \arccos \mu e$ и $\gamma_3 = -\gamma^* = -\arccos \mu e$). Стационарные точки γ_1 и γ_2 отвечают положениям равновесия груза относительно гантели "за" точками m_2 или m_1, когда все три массы, образующие связку, располагаются на одной прямой, проходящей через притягивающий центр. Стационарные точки γ_3 и γ_4 соответствуют вертикально-горизонтальным равновесным конфигурациям связки, при которых гантель и груз движутся по круговым орбитам независимо друг от друга. Заметим, что в такой ситуации с точки зрения наблюдателя, расположенного на гантели, груз зависает "над" центром масс гантели. Отметим также, что при $\mu = 0$, то есть когда $m_1 = m_2$, все четыре стационарные точки расположены в вершинах эллипса, ограничивающего область V.

Стационарной точке γ_2, расположенной за меньшей массой, отвечает значение $h_1 = -3 - 6e\mu$ (глобальный минимум интеграла Якоби), точке γ_1, расположенной за большей массой соответствует значение $h_1 = -3 + 6e\mu$ (локальный минимум интеграла Якоби), а неустойчивым положениям γ_3 иγ_4соответствует значение $h_1 = 3e^2\mu^2$. Уравнение сепаратрисы, разделяющей области колебаний, то есть движений груза около какой-то одной массы, и области вращений, когда груз вращается вокруг всей гантели, имеет вид

$$\gamma'^2 = 3 \frac{\left(\cos \gamma - \mu e\right)^2}{1 - e^2 \cos^2 \gamma}$$

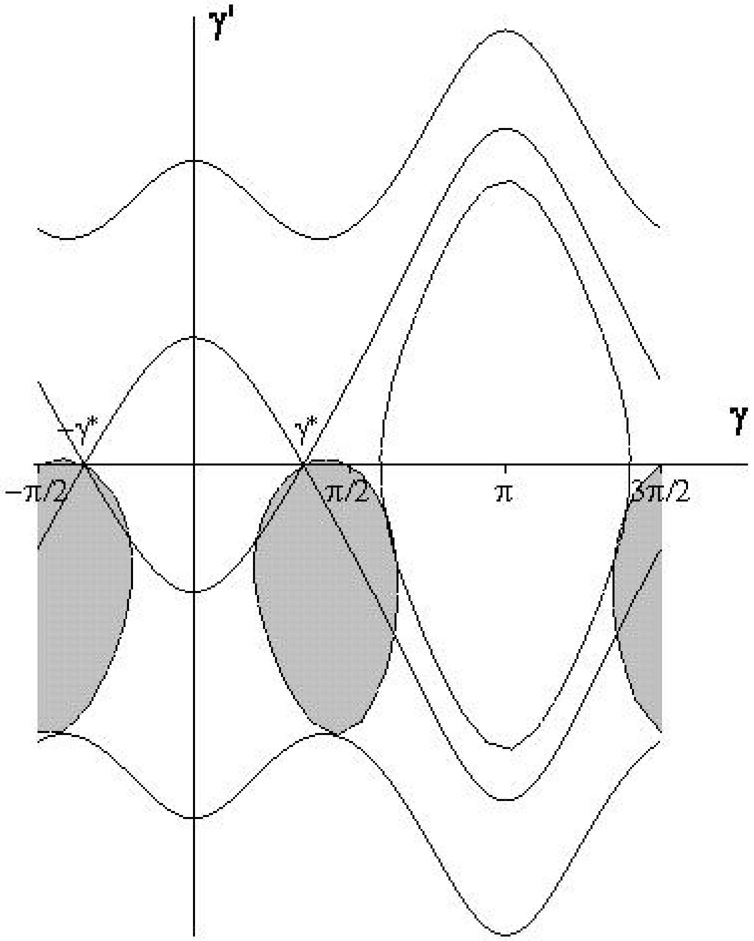


Рисунок 3.1 –

Условия нахождения на связи (3.1) в этом случае упрощаются и могут быть записаны как

$$\sqrt{1-e^2}\gamma'^2 + 2\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\gamma' + 3\sqrt{1-e^2}\cos\gamma\left(\cos\gamma - e\mu\right) \geq 0$$

Фазовый портрет уравнения (3.5) изображён на рис. 3.1. На этом рисунке серым цветом закрашены области схода со связи. Форма этих областей такова, что в рассматриваемом случае

- неустойчивые положения равновесия груза на леере расположены на границе области схода со связи, а в достаточно широкой окрестности устойчивых положений равновесия сход со связи невозможен;

- при вращении груза вокруг станции в положительном направлении, то есть в том же направлении, в котором станция вращается вокруг притягивающего центра, сход со связи невозможен;
- при вращении груза вокруг станции в отрицательном направлении сход со связи возможен при достаточно малой скорости груза относительно станции;
- при колебаниях груза вокруг одной из масс, составляющих станцию, сход со связи возможен при достаточно большом размахе колебаний;
- если станция образована неравными массами, сход со связи возможен даже при движении в положительном направлении, но только в случае колебаний с большим размахом вокруг меньшей массы.

3.4 Случай "горизонтального" положения гантели

Если гантель каким-то образом стабилизирована в таком положении, что во все время движения прямая, соединяющая материальные точки, ее образующие, перпендикулярна прямой, проходящей через притягивающий центр и центр масс гантели, то есть если $\varphi = \pm\pi/2$, то уравнения (3.4) упрощаются и принимают вид

$$\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\gamma'' + \frac{e^2}{2}\sin 2\gamma \cdot \gamma'^2 - \frac{3}{2}\left(1 - e^2\right)\sin 2\gamma = 0 \qquad (3.7)$$

Это уравнение имеет первый интеграл (интеграл Якоби)

$$\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\gamma'^2 + 3\left(1 - e^2\right)\cos^2\gamma = h_2 = \mathrm{const} \qquad (3.8)$$

или

$$\gamma'^2 = \frac{h_2 - 3\left(1 - e^2\right)\cos^2\gamma}{1 - e^2\cos^2\gamma}$$

.

Из последнего равенства следует, что на промежутке $0 \leq \gamma < 2\pi$ существуют четыре стационарные точки уравнения (3.7): две устойчивые ($\gamma_1 = \pi/2$ и $\gamma_2 = 3\pi/2$) и две неустойчивые ($\gamma_3 = 0$ и $\gamma_4 = \pi$). Заметим, что все четыре положения равновесия расположены в вершинах эллипса, ограничивающего область возможных движений V. Стационарные точки γ_3 и γ_4 соответствуют горизонтально-горизонтальным равновесным конфигурациям связки, при которых все три массы, образующие связку, по-существу движутся по одной круговой орбите независимо друг от друга, в то время как стационарные точки γ_1 и γ_2 отвечают ситуации, когда груз на леере, с точки зрения наблюдателя, расположенного на гантели, расположен над геометрическим центром гантели.

Стационарным точкам γ_1 и γ_2, отвечает значение $h_2 = 0$ (глобальные минимумы интеграла Якоби), неустойчивым стационарным точкам γ_3 и γ_4 соответствует значение $h_2 = 3\left(1 - e^2\right)$.

Уравнение сепаратрисы, разделяющей области колебаний, то есть движений груза около одной из устойчивых стационарных точек, и области вращений, когда груз вращается вокруг всей гантели, имеет вид

$$\gamma' = \pm \sin\gamma \cdot \sqrt{\frac{3\left(1-e^2\right)}{1 - e^2\cos^2\gamma}}.$$

Условия нахождения на связи (3.1) в этом случае упрощаются и могут быть записаны как

$$\sqrt{1-e^2}\gamma'^2 + 2\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\gamma' + 3\sqrt{1-e^2}\sin^2\gamma \geq 0.$$

Фазовый портрет уравнения (3.7) изображён на рис. 3.2,3.3,3.4,3.5. На этих рисунках серым цветом закрашены области схода со связи. Форма этих областей зависит от значения параметра e. Так, при $e \leq \sqrt{2/3}$, в области $-\pi/2 \leq \gamma < 3\pi/2$ при отрицательных $\gamma\,'$ существуют две ограниченные области схода со связи (рис. 3.2), в случае $\sqrt{2/3} < e < \sqrt{3}/2$ под'

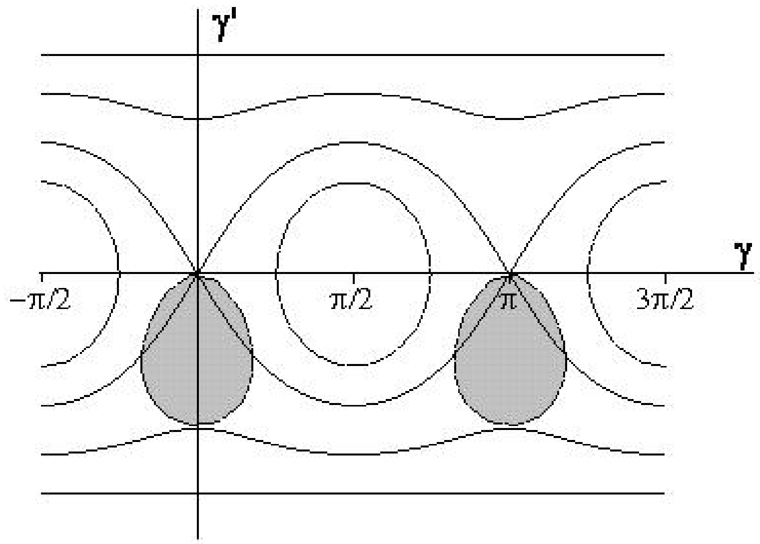


Рисунок 3.2 –

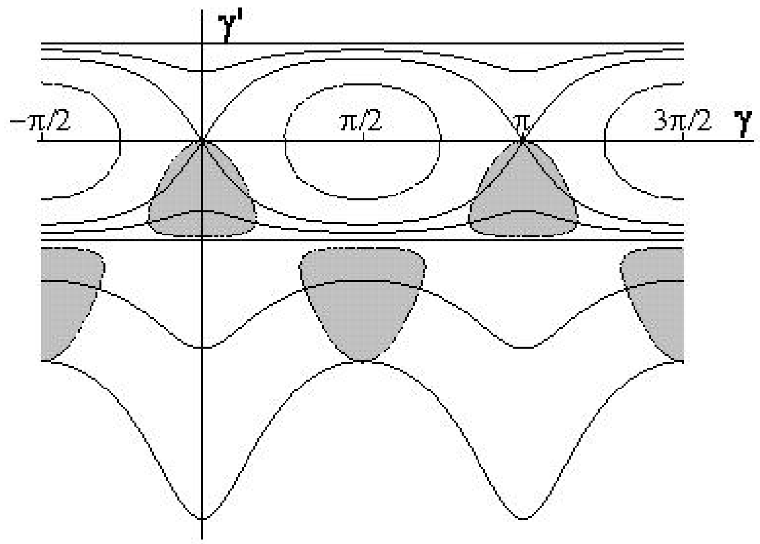


Рисунок 3.3 –

устойчивыми положениями равновесия возникают еще две ограниченные области схода со связи (рис. 3.3), при $e = \sqrt{3}/2$ эти области соприкасаются (рис. 3.4), а при $e > \sqrt{3}/2$ все области схода со связи сливаются в одну (рис. 3.5). Однако, во всех этих случаях

- неустойчивые положения равновесия груза на леере расположены на границе области схода со связи, а в достаточно широкой окрестности устойчивых положений равновесия сход со связи невозможен;

- при движении груза в положительном направлении ($\gamma' > 0$) сход со связи невозможен;
- при вращении груза вокруг станции в отрицательном направлении сход со связи возможен при достаточно малой скорости груза относительно станции;
- при колебаниях груза около устойчивого положения равновесия сход со связи возможен при достаточно большом размахе колебаний.

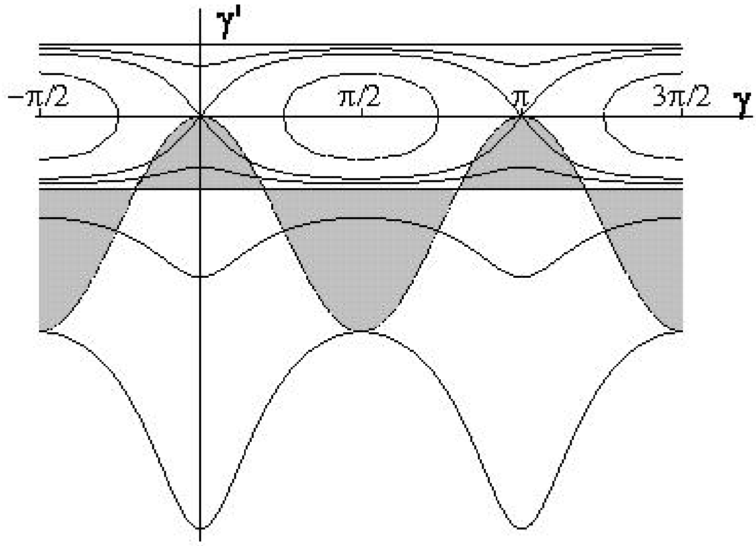


Рисунок 3.4 –

Заметим также, что при $\sqrt{2/3} < e < \sqrt{3}/2$, существуют такие связные вращения груза в отрицательном направлении, что вращения, как с большей, так и с меньшей скоростями могут привести к сходу со связи, а при $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ существует такая траектория движения груза вокруг гантели ($\gamma' = -1$, $h_2 = 1$), что во все время движения силы натяжения ветвей троса равны нулю, но сход со связи не происходит.

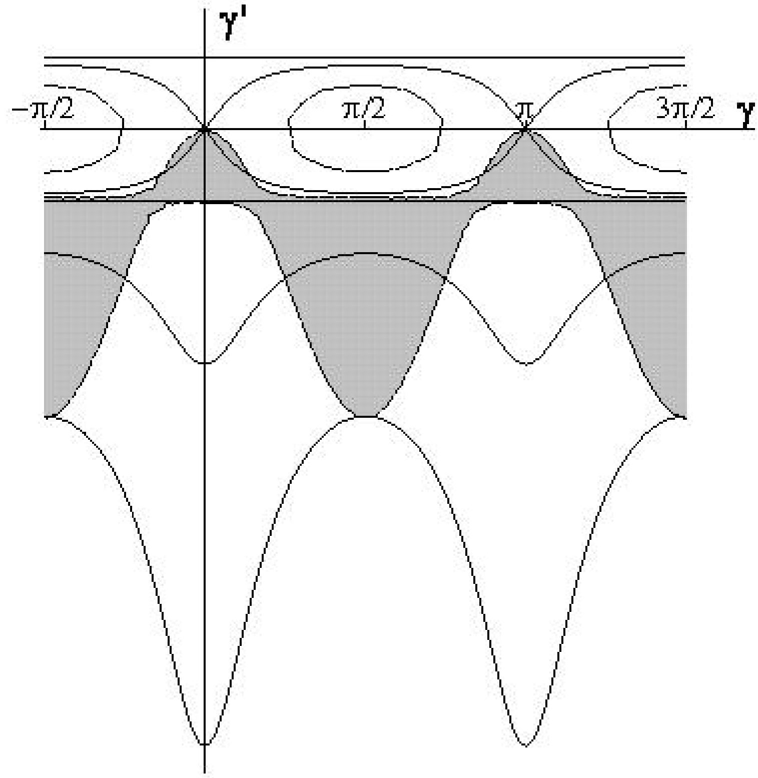


Рисунок 3.5 –

ГЛАВА 4

Безударные движения груза на леере, закрепленном на гантели, совершающей стационарное движение по круговой орбите

Очевидно, движения груза вдоль леера в общем случае не ограничиваются связными движениями, то есть движениями по границе области V. Как видно из фазовых портретов на рис.3.1,3.2,3.3,3.4,3.5, при движении груза по лееру возможен сход со связи, то есть ослабевание троса и начало свободного движения груза, то есть такого движения, когда гантель не влияет его движение. Ясно, что в большинстве случаев свободное движение заканчивается ударным натяжением троса, и, если считать такой удар абсолютно упругим, возникает динамический бильярд [48]. (Об ударных выходах на связь и динамических бильярдах для классической тросовой системы см., например, [94, 14, 17, 21, 95, 52]). В этой главе находятся и классифицируются такие траектории груза, при движении по которым вход на связь происходит безударно, то есть траектории, состоящие из участков связного и свободного движений, переход между которыми осуществляется без скачков силы натяжения леера. При этом, как и в предыдущей главе, предполагается, что груз на леере не оказывает влияния на движение гантели, центр масс гантели описывает круговую орбиту вокруг притягивающего центра, все движения происходят в плоскости этой орбиты, а сама гантель совершает одно из своих стационарных движений, то есть либо массы, образующие гантель, во все время движения лежат на одной прямой с притягивающим цетром, либо гантель каким-то образом стабилизирована в положении, когда она перпендикулярна прямой, соединяющий ее центр масс и притягивающий центр.

4.1 Уравнения движения

Для описания движения груза будем использовать обозначения и параметры, определенные в предыдущих двух главах. Кроме того, для описания движения груза на леере относительно гантели будем использовать координаты x и y (см. рис 2.1). Напомним, что если груз совершает связное движение, $x = a\cos\gamma$ и $y = b\sin\gamma$. Перейдем к безразмерным координата, заменив x на ax и y на ay (или просто положив $a = 1$) и безразмерному времени τ считая, как и в предыдущих двух главах, что период обращения гантели по круговой орбите соответствует $\tau = 2\pi$).

Если гантель каким-то образом стабилизирована в "горизонтальном" положении, то, как отмечено в предыдущей главе, уравнения связного движения груза имеют вид (3.7) и допускают интеграл Якоби (3.8). Свободное движение малого груза в этом случае определяется легко интегрируемыми уравнениями [8]

$$\begin{cases} x'' - 2y' = 0 \\ y'' + 2x' - 3y = 0 \end{cases}, \tag{4.1}$$

допускающими в частности первые интегралы

$$x'^2 + y'^2 - 3y^2 = h_2 = \mathrm{const}, \tag{4.2}$$

по существу совпадающий с (3.8), и

$$x' - 2y = \mathrm{const}. \tag{4.3}$$

(Здесь, как и ранее, штрихом $(\quad)'$ обозначена производная по безразмерному времени τ) Аналогично, если гантель совершает "вертикальное" стационарное движение, как отмечено в предыдущей главе, уравнения связного движения груза имеют вид (3.5) и допускают интеграл Якоби (3.6). Свободное движение малого груза в этом случае определяется уравнениями

$$\begin{cases} x'' - 2y' - 3x + 3e\mu = 0 \\ y'' + 2x' = 0 \end{cases}, \tag{4.4}$$

допускающими первые интегралы

$$x'^2 + y'^2 - 3x^2 + 6e\mu x = h_1 = \text{const}, \tag{4.5}$$

по существу совпадающий с (3.6), и

$$y' + 2x = \text{const} \tag{4.6}$$

4.2 Условия схода со связи и безударного входа на связь

В безразмерных переменных область возможных движений груза определяется неравенством

$$F(x, y) = \left(1 - e^2\right) x^2 + y^2 - 1 + e^2 \leq 0,$$

где равенство соответствует связному движению. Пусть $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$ - закон свободного движения. Определим функцию $f(\tau)$ по формуле

$$f(\tau) = F(x(\tau), y(\tau)).$$

Тогда как в точке схода со связи, так и в точке, в которой выход на связь осуществляется безударно, одновременно должны выполняться следующие условия

$$f(\tau) = f'(\tau) = f''(\tau) = 0. \tag{4.7}$$

При этом в точке схода со связи (квадратик на рис. 4.1а)) $f'''(\tau) < 0$, а в случае безударного выхода на связь (квадратик на рис. 4.1б)) $f'''(\tau) > 0$. (На рис. 4.1 a)-b) тонкой сплошной линией показана траектория свободного движения, толстой сплошной линией – граница связи, прерывистой

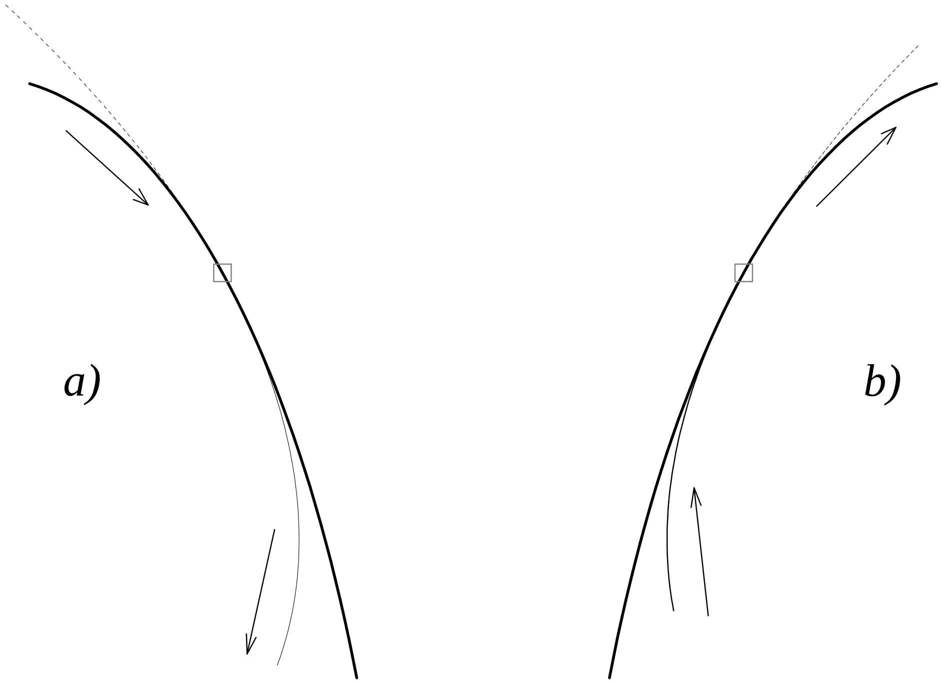


Рисунок 4.1 –

линией – траектория возможного свободного движения при отсутствии связи). Заметим, что рассмотренные две ситуации не исчерпывают все типы безударных выходов на связь и сходов со связи. Возможны также одномоментные выходы на связь, одномоментные ослабевания троса, а также особые траектории, когда во все время движения трос не натянут, но схода со связи не происходит. В рамках рассматриваемой модели такими особыми движениями являются некоторые положения относительного равновесия, а также движение груза в случае "горизонтального" положения гантели, отвечающее значению $e = \sqrt{3}/2$ и $\gamma' \equiv -1$.

Условия нахождения на границе области схода со связи (4.7), выраженные через обобщенную переменную γ, представляются в виде [65]: для горизонтальной гантели

$$\sqrt{1-e^2}\gamma'^2 + 2\left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\gamma' + 3\sqrt{1-e^2}\sin^2\gamma = 0, \qquad (4.8)$$

для вертикальной гантели

$$\sqrt{1-e^2}\gamma'^2 + 2\left(1-e^2\cos^2\gamma\right)\gamma' + 3\sqrt{1-e^2}\cos\gamma\left(\cos\gamma - e\mu\right) = 0 \qquad (4.9)$$

4.3 Безударные траектории груза в случае “горизонтального” положения гантели

Опишем такие траектории движения малой массы по лееру (в системе отсчета Oxy), которые включают в себя участки свободного движения, начинающиеся сходом со связи и заканчивающиеся безударным выходом на связь в случае, когда гантель ориентирована перпендикулярно направлению на притягивающий центр, причем это положение каким-то образом стабилизировано.

Пусть точка схода со связи отвечает значению обобщенной переменной γ_0 и обобщенной скорости γ'_0, и эта точка имеет безразмерные координаты x_0, y_0 и скорости x'_0, y'_0. Кроме того, пусть точка безударного входа на связь соответственно определяется величинами γ_1,γ'_1,x_1, y_1,x'_1, y'_1. Эти переменные связаны между собой соотношениями

$$x_i = \cos\gamma_i; \quad y_i = \sqrt{1-e^2}\sin\gamma_i; \quad x'_i = -\gamma'_i\sin\gamma_i;$$
$$y'_i = \gamma'_i\sqrt{1-e^2}\cos\gamma_i; \quad i = 0, 1. \qquad (4.10)$$

Используя (4.8), (4.2), (4.3), получим следующие четыре алгебраические уравнения, связывающие параметры точек схода и входа на связь:

$$
\begin{gathered}
\sqrt{1-e^2}\gamma_i'^2+2\left(1-e^2\cos^2\gamma_i\right)\gamma_i'+3\sqrt{1-e^2}\sin^2\gamma_i=0,\quad i=0,1\\
\left(\gamma_0'+2\sqrt{1-e^2}\right)\sin\gamma_0=\left(\gamma_1'+2\sqrt{1-e^2}\right)\sin\gamma_1\\
\left(1-e^2\cos^2\gamma_0\right)\gamma_0'^2+3\left(1-e^2\right)\cos^2\gamma_0=\\
=\left(1-e^2\cos^2\gamma_1\right)\gamma_1'^2+3\left(1-e^2\right)\cos^2\gamma_1.
\end{gathered}
\tag{4.11}
$$

Исключая из этих уравнений переменные γ_0 и γ_1, и считая, что движение не является особым, установим, что необходимыми условиями выполнения (4.11) является либо равенство ${\gamma'}_0={\gamma'}_1$ (точки входа и схода со связи симметричны относительно одной из координатных осей), либо система уравнений

$$
\begin{gathered}
3e^2\sqrt{1-e^2}u^3+2e^4u^2v-6\sqrt{1-e^2}\left(e^2v+3\left(1-e^2\right)\right)u-\\
-2e^4v^2+12e^2\left(1-e^2\right)y-18\left(1-e^2\right)^2=0,\\
3\sqrt{1-e^2}u^3+2\left(e^2v+9\left(1-e^2\right)\right)u^2-\\
-6\sqrt{1-e^2}\left(\left(1-2e^2\right)v+6\left(e^2-1\right)\right)u-\\
2e^2v^2-6\left(e^2-1\right)\left(\left(4e^2-1\right)v-4\left(e^2-1\right)\right)=0,
\end{gathered}
$$

где $u=\gamma_0'+{\gamma'}_1$, $v=\gamma_0'\gamma_1'$. Последняя система имеет только одно решение, соответствующее неравным значениям ${\gamma'}_0$ и γ_1':

$$
\gamma_{0,1}'=-\sqrt{1-e^2}\left(1\pm\sqrt{3}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\right).\tag{4.12}
$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда обобщенные скорости в точках схода входа на связь различны. Используя (4.12), из (4.11) получим равенства

$$\sin^2 \gamma_{0,1} = \frac{\left(1-e^2\right)\left(4e^2-3\right)}{e^2\left(e \pm \sqrt{3}\sqrt{1-e^2}\right)^2}. \tag{4.13}$$

Далее, используя условия на $f'''(\tau)$, можно установить, что для каждого допустимого значения существует не более четырех различных наборов γ_0, γ_0', γ_1, ${\gamma'}_1$.

Интегрируя уравнения свободного движения (4.1) с учетом (4.12),(4.13) получим, что допустимые значения эксцентриситета удовлетворяют некоторому алгебраическому уравнению вида $\varphi(e) = 0$, имеющему счетное число решений, для каждого из которых существуют четыре (попарно симметричные относительно геометрического центра гантели) свободных движения малой массы, начинающиеся со схода со связи и заканчивающиеся безударным выходом на связь, причем точки схода и выхода на связь несимметричны. Первые десять (в порядке возрастания) значений эксцентриситета следующие: 0.9293503865; 0.9713337374; 0.9814743955; 0.9862885288; 0.9891112471; 0.9909684868; 0.9922838226; 0.9932644346; 0.9940237542; 0.9946291331.

Представляется интересным тот факт, что для рассматриваемых движений после безударного выхода на связь в дальнейшем неминуемо произойдет новое ослабевание леера, вслед за чем последует удар груза о трос. Дело в том, что при выполнении условия $e > \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}-1}/\sqrt[4]{3} = 0.9194...$ на траектории связного движения, соответствующей той же константе интеграла Якоби, что и рассматриваемые движения, на промежутке $0 \leq \gamma < 2\pi$ будет не восемь, как можно было бы ожидать, а двенадцать точек, в которых выполняется равенство (4.8), две из которых, определяемые соотношениями

$$\sin^2 \gamma = \frac{\left(1-e^2\right)\left(3e-\sqrt{3+e^2}\right)}{e^2\left(\sqrt{3+e^2}-e\right)},$$

$$\gamma' = -\frac{\left(\sqrt{3+e^2}-e\right)\sqrt{1-e^2}}{e},$$

таковы, что после их прохождения происходит сход со связи, но последующее свободное движение приводит к ударному выходу на связь, а оставшиеся две являются “дополнительными” точками входа на связь. Следовательно, периодических безударных траекторий с несимметричными точками схода и выхода на связь при горизонтальном положении гантели не существует. Наиболее продолжительное безударное движение выглядит так (рис. 4.2): D_2C_1- связное движение (D_1 – “дополнительная” точка выхода на связь), C_1C_2 - свободное движение с безударным выходом на связь, $C_2A_1A_2B_1$ - связное движение (эксцентрическая аномалия g для точек A_1, A_2 определяется формулами

$$\gamma_{A1} = \arcsin\frac{\sqrt{-9+21e^2-12e^4}}{3e},$$

$$\gamma_{A2} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{-9+21e^2-12e^4}}{3e}$$

соответственно), B_1B_2 - свободное движение с безударным выходом на связь, B_2D_1 - связное движение, D_1E - свободное движение, E - удар о связь.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma_0' = \gamma'_1$. Для простоты будем использовать обозначение $\gamma_f' = \gamma_i'$, $i = 0, 1$. Используя условия на $f'''(\tau)$, можно показать, что в этом случае, если траектория не является особой, справедливо соотношение $\gamma_1 = \pi - \gamma_0 + 2\pi k$, k-целое. Тогда

$$x_1 = -x_0, \quad y_1 = y_0, \quad x_1' = x_0', \quad y'_1 = -y_0'.$$

Решая уравнения (4.1) при соответствующих начальных и конечных условиях, подставляя в полученные соотношения выражения (4.10), получим систему двух независимых алгебраических уравнений (τ_f - безразмерная

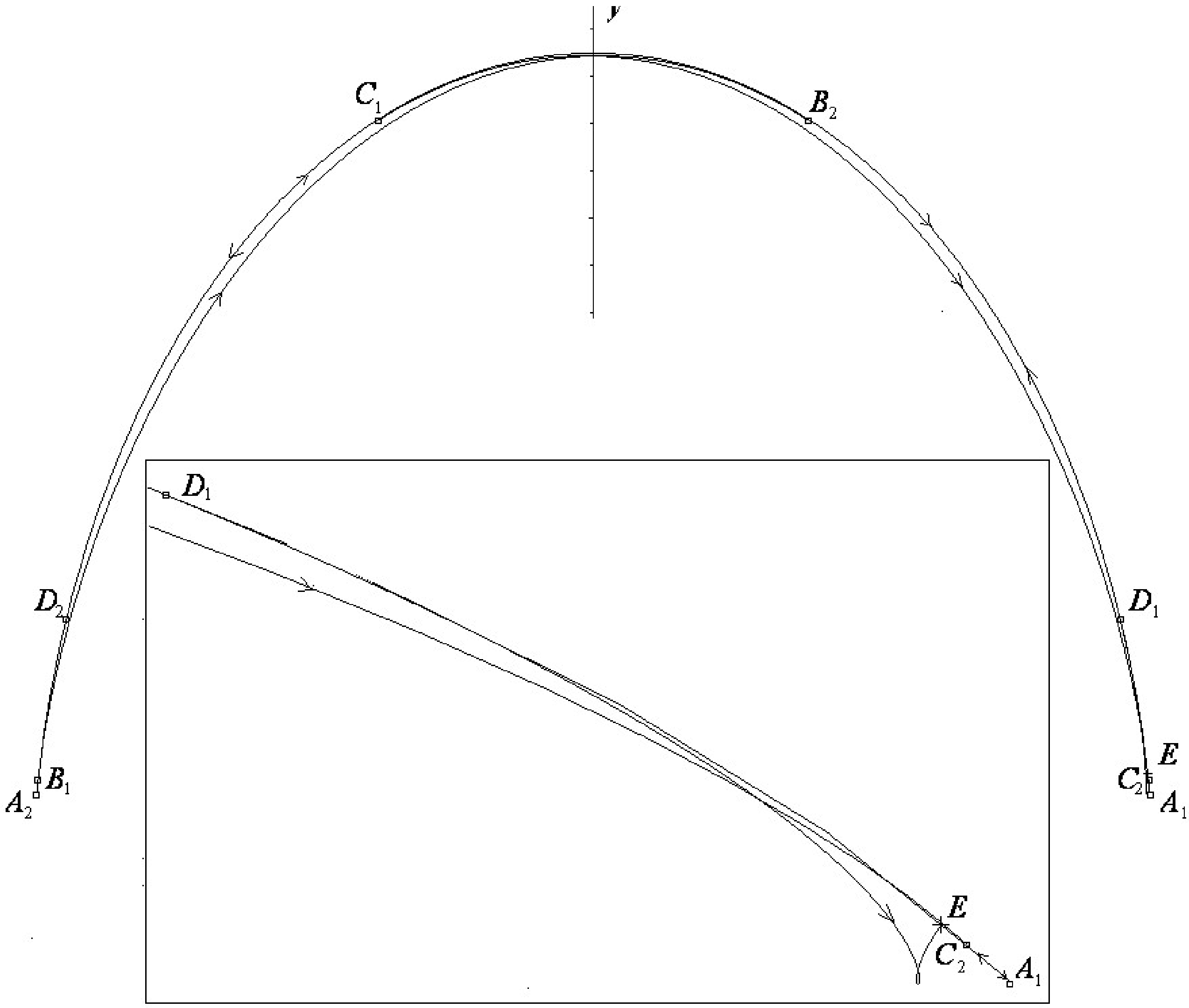


Рисунок 4.2 –

продолжительность участка свободного движения):

$$\left\{\begin{array}{l} 2+3\tau_f \operatorname{tg}\gamma_0\cdot\left(\gamma_f'+2\sqrt{1-e^2}\right)+4\gamma_f'\sqrt{1-e^2}=0 \\ \\ \gamma_f' \operatorname{ctg}\tau_f/2\cdot\sqrt{1-e^2}+\operatorname{tg}\gamma_0\cdot\left(2\gamma_f'+3\sqrt{1-e^2}\right)=0 \end{array}\right. , \qquad (4.14)$$

При выводе (4.14) учитывается, что для не особых траекторий $\sin\tau_f/2 \neq 0$. Вместе с условиями схода или безударного выхода на связь (4.8), (4.14) образуют систему уравнений относительно неизвестных e, $\gamma'{}_f$, $\operatorname{tg}\gamma_0$ с параметром τ_f. Решение этой системы имеет вид

$$e_2 = \frac{\pm(w^2 - 2w - \tau_f) + \sqrt{(w^4 + 14w^2 + 1)\tau_f^2 - 4w(15 + w^2)\tau_f + 4w^2 + 64}}{2\sqrt{6}(2 - \tau_f w)^{3/2}}, \tag{4.15}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_0 = \mp\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2 - \tau_f w}}, \quad \gamma_f' = -\frac{3\operatorname{tg}\gamma_0 \cdot \sqrt{1 - e^2}}{w\sqrt{1 - e^2} + 2\operatorname{tg}\gamma_0}, \tag{4.16}$$

где $w = \operatorname{ctg}\tau_f/2$, $e_2 = b/a = \sqrt{1 - e^2}$.

Следует учесть, что решения (4.15-4.16) существуют не при всех значениях τ_f. Кроме того, следует учесть, что $0 < e_2 < 1$. Далее, в силу условия на третью производную функции $f(\tau)$, не каждое из значений γ_0, определяемое (4.16), отвечает точке схода со связи. Заметим также, что в ряде случаев указанные решения определяют траектории свободного движения, пересекающие границу связи, то есть удар о связь происходит до безударного выхода на связь. Все это позволяет сделать следующие выводы.

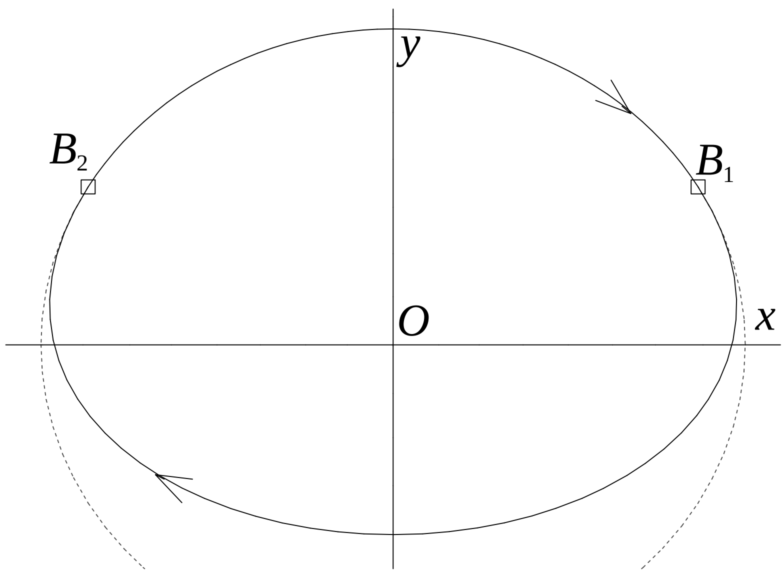


Рисунок 4.3 –

Если в (4.15) выбрать знак минус, а в (4.16) знак плюс, то безударные траектории существуют только при $\tau_f \in (2.9028, 3.9464)$ (левая граница этого интервала получена еще в [9]). При этом возникает периодическое движение в направлении, противоположном движению по орбите, включающее в себя участок свободного движения B_1B_2 и связного движения B_2B_1 (рис. 4.3, прерывистая кривая на этом рисунке - граница связи, не участвующая в рассматриваемом движении). Назовем такое движение движением типа “овал”.

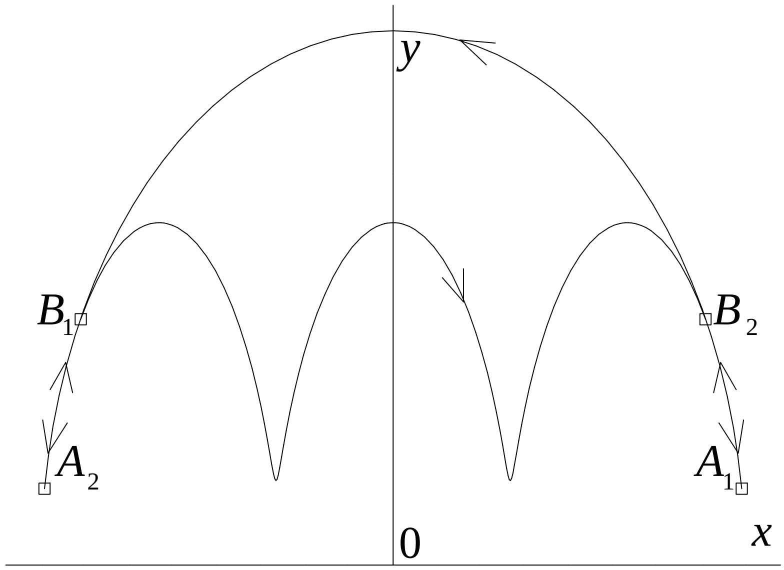


Рисунок 4.4 –

Если в (4.15) выбрать знак плюс, а в (4.16) знак минус, то существует счетное количество промежутков значений τ_f, определяющих безударные движения. Такие движения могут быть как периодическими, так и заканчивающимися ударом о связь. Так, если $\tau_f \in (5.714481, 6.2299) \cup (8.9868, 9.7431) \cup (11.6503, 12.5398) \cup (15.4505, 16.3550) \cup (17.8176, 18.8319) \cup (21.8082, 22.7977) \cup (24.0328, 25.1195) \cup \ldots$ возникает периодическое движение, которое может быть названо движением типа “серп с рожками”. Образец такого движения приведен на рис 4.3. Здесь B_1B_2 - свободное движение, B_2A_1, A_1A_2, A_2B_1-связное движение. “Рожками” в данном случае являются участки границы связи A_1B_2 и A_2B_2, проходимые сначала в одном, потом в противоположном направлениях.

Если же $\tau_f \in (9.7431, 10.1534) \cup (16.3550, 16.6931) \cup (22.7977, 23.0933) \cup$

. . . , ситуация напоминает возникающую в случае несимметричных точек схода и выхода на связь. После выхода на связь в точке B_2 происходит“дополнительный“ сход со связи в точке D, а затем удар о связь в точке E (рис. 4.5).

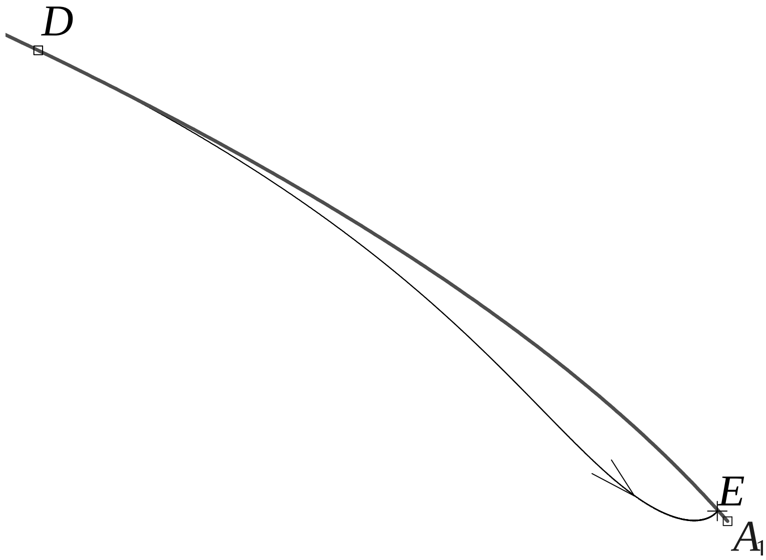


Рисунок 4.5 –

Заметим, что каждому из указанных значений τ_f соответствуют две симметричные относительно геометрического центра гантели безударные траектории с участками свободного движения. На рис. 4.3,4.4 изображено по одной такой траектории.

4.4 Безударные траектории груза в случае “вертикального” положения гантели

Опишем теперь траектории движения малой массы по лееру, включающие в себя участки свободного движения, начинающиеся сходом со связи и заканчивающиеся безударным выходом на связь в случае, когда гантель совершает устойчивое стационарное движение, то есть перпендикулярна касательной к орбите.

Сохраняя прежние обозначения, учитывая (4.10) и используя (4.9), (4.5), (4.6), получим алгебраические уравнения, связывающие параметры точек схода и входа на связь:

$$\sqrt{1-e^2}{\gamma_i'}^2 + 2\left(1-e^2\cos^2\gamma_i\right){\gamma'}_i + 3\sqrt{1-e^2}\cos\gamma_i\left(\cos\gamma_i - e\mu\right) = 0,$$

$$\left({\gamma'}_0\sqrt{1-e^2}+2\right)\cos\gamma_0 = \left(\gamma_1'\sqrt{1-e^2}+2\right)\cos\gamma_1,$$

$$\left(1-e^2\cos^2\gamma_0\right){\gamma_0'}^2 - 3\cos\gamma_0\left(\cos\gamma_0 - 2e\mu\right) =$$

$$= \left(1-e^2\cos^2\gamma_1\right){\gamma_1'}^2 - 3\cos\gamma_1\left(\cos\gamma_1 - 2e\mu\right), \tag{4.17}$$

где $i = 0, 1$. Решая эту систему относительно ${\gamma'}_0$ и γ_1', можно убедиться, что либо ${\gamma'}_0 = {\gamma'}_1$, $\cos\gamma_0 = \cos\gamma_1$, либо

$$\frac{b}{a} = 2\frac{\sqrt{\left(\cos\gamma_0+\cos\gamma_1\right)^2+1}}{\left|\cos\gamma_0+\cos\gamma_1\right|} > 1,$$

что невозможно. Кроме того, из условий на $f'''(\tau)$ в рассматриваемом случае следует, что $\sin\gamma_0 = -\sin\gamma_1$. Таким образом, при "вертикальном" стационарном движении гантели безударных траекторий с несимметричными точками схода и выхода на связь не существует, а для симметричных траекторий $\gamma_1' = {\gamma'}_0 = \gamma_f'$, $\gamma_1 = -\gamma_0 + 2\pi k$, k - целое.

Проинтегрируем уравнения (4.4) при соответствующих начальных и конечных условиях с учетом (4.10). С учетом условий (4.9) получим систему трех независимых алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных , τ_f (как и выше являющейся разностью моментов безразмерного времени безударного выхода на связь и схода со связи), μ, γ_0, ${\gamma'}_f$.

Рассмотрим сначала случай, когда τ_f кратно периоду обращения по орбите, т.е. $\tau_f = 2\pi l$, l - целое. Тогда ${\gamma'}_f = 0$, $\gamma_0 = -\pi/1$ - сход со связи и выход на связь происходят с нулевой фазовой скоростью в вершинах эллипса, ограничивающего область возможных движений. При этом значение μ

не может быть произвольным и определяется равенством

$$\mu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{6e\pi l}.$$

Получающееся движение является частью периодической траектории, которую можно назвать “серпом”, однако, в отличие от описанных ранее, не имеющим “рожек”. (см. рис. 4.6: B_1B_2 - свободное движение, B_2B_1 - связное движение).

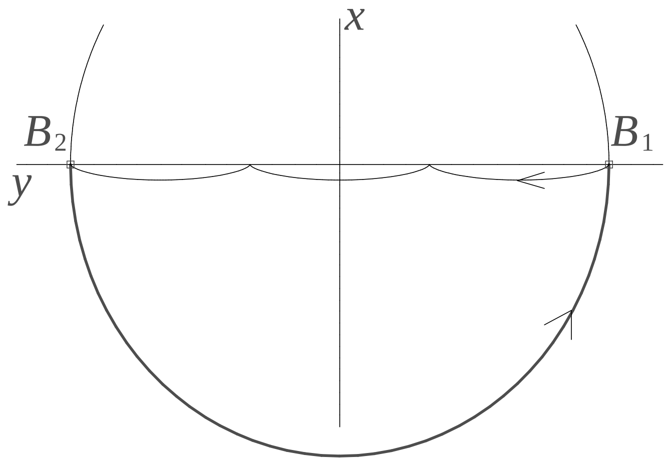


Рисунок 4.6 –

Если $\tau_f \neq 2\pi$, l - целое, то параметры точки схода со связи определяются уравнениями

$$\gamma_f'\,\tau_f \cot\gamma_0\,\sqrt{1-e^2} + 4\gamma_f' + 2\,\sqrt{1-e^2} - 2\,\gamma_f'\tau_f \operatorname{ctg}\frac{\tau_f}{2} = 0$$

$$\frac{\gamma_f'\,\sqrt{1-e^2}}{\sin^2\gamma_0} + 2 + \operatorname{ctg}\gamma_0 \operatorname{ctg}\frac{\tau_f}{2}\cdot\sqrt{1-e^2} = 0 \qquad (4.18)$$

$$\mu = \frac{1}{3e}\left(3\cos\gamma_0 + 2\,\gamma_f'\cos\gamma_0\cdot\sqrt{1-e^2} - \gamma_f'\sin\gamma_0 \operatorname{ctg}\frac{\tau_f}{2}\right)$$

Решая первые два из этих уравнений относительно γ' и γ_0, получим

$$\gamma'_f = \frac{\sqrt{1-e^2}\left(8-8\cos\tau_f-6\tau_f\sin\tau_f+2\tau_f^2\mp\tau_f\sqrt{A}\right)}{\left(16-3\tau_f^2-e^2\tau_f^2\right)\cos\tau_f+16\tau_f\sin\tau_f-\left(16+3\tau_f^2-e^2\tau_f^2\right)},$$

$$\operatorname{ctg}\gamma_0 = 2\frac{8\tau_f-e^2\tau_f(5+cos\tau_f)-2\tau_f^2\operatorname{ctg}\frac{\tau_f}{2}-4\sin\tau_f\pm\left(\tau_f\operatorname{ctg}\frac{\tau_f}{2}-2\right)\sqrt{A}}{\sqrt{1-e^2}\left(\mp\tau_f\sqrt{A}-6\tau_f\sin\tau_f+4-4\cos\tau_f+2\tau_f^2\sin\frac{\tau_f}{2}\right)}, \tag{4.19}$$

где

$$A = \left(e^2+3\right)\tau_f\sin 2\tau_f + 2\left(e^2+2\right)\cos 2\tau_f - 2\left(e^2+7\right)\tau_f\sin\tau_f -$$

$$-8\left(e^2+3\right)\cos\tau_f + 2\left(2\tau_f^2+10+3e^2\right).$$

Третье уравнение служит для определения параметра μ.

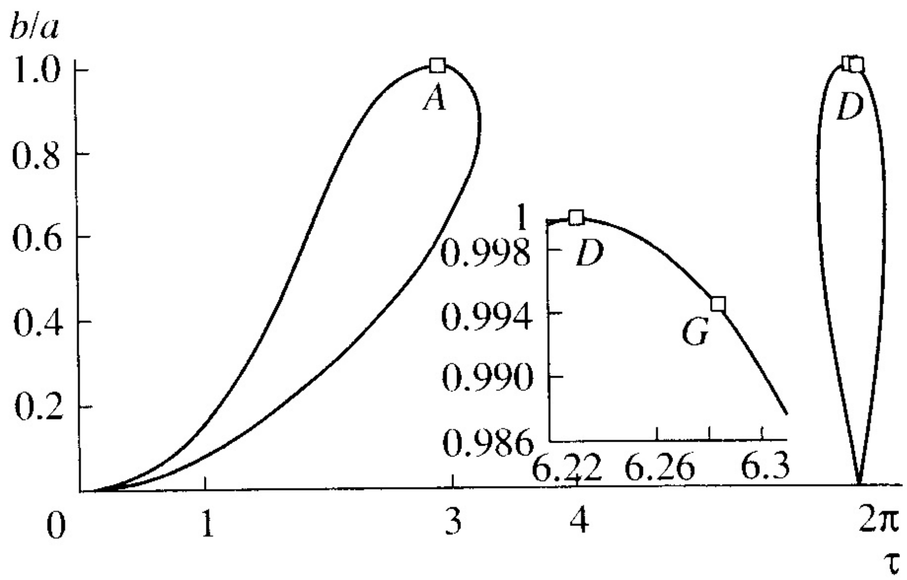


Рисунок 4.7 –

Покажем, что периодические траектории, включающие в себя участки свободного движения с начальными условиями, определяемыми равенствами (4.19), существуют при любых допустимых значениях параметров

e и μ. Прежде всего, заметим, что при "вертикальном" положении гантели последовательность сход со связи – безударный выход на связь – сход со связи – удар о связь невозможна, т.е. свободные движения с начальными условиями, определяемыми равенствами (4.19) и условием на третью производную функции $f(\tau)$ представляют собой участки периодических движений. Далее, на плоскости параметров τ_f и $e_2 = b/a$ построим кривую $\mu = \text{const}$, определяемую уравнениями (4.18). Эта кривая состоит из счетного числа "петелек", соединяющих некоторые точки на прямой $e_2 = 1$ ($b = a$) с точками с координатами $(\pi k, 0)$. Для определенности рассмотрим первые две такие "петельки" (рис. 4.7). На этом графике: $A(2.90276\ldots, 1)$, $D(6.22992\ldots, 1)$. Кроме того, справедливы формулы: в окрестности точки (0,0)

$$\frac{b}{a} = \frac{\tau_f^2}{8}\sqrt{1 \pm \mu} + o\left(\tau_f^2\right),$$

в окрестности точки A

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{0.08949... \cdot (\tau_f - 2.90276...)^2}{\mu^2} + o\,(\tau_f - 2.90276...)^2\,,$$

в окрестности точки $(2\pi, 0)$

$$\frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{1-\mu^2}\,(\tau_f - 2\pi)}{\mu} + o\,(\tau_f - 2\pi)\,,$$

в окрестности точки D

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{0.49081... \cdot (\tau_f - 6.22992...)^2}{\mu^2} + o\,(\tau_f - 6.22992...)^2\,.$$

График может быть разделен на несколько участков, каждому из которых соответствует свой тип периодического движения.

Так, левой из ветвей графика, соединяющей начало координат и точку A, соответствуют движения типа "овал" вокруг меньшей из масс, составляющих гантель (нижняя траектория на рис. 4.8: B_1B_2 – свободное движение, B_2B1 – связное движение), а правой – движения того же типа, но вокруг большей массы (верхняя траектория на рис. 4.8: A_1A_2 – свободное движение, A_2A_1 – связное движение). Оба движения существуют при любых допустимых значениях параметров системы, причем для определения координат точек схода и выхода на связь в (4.19) следует выбрать верхние знаки.

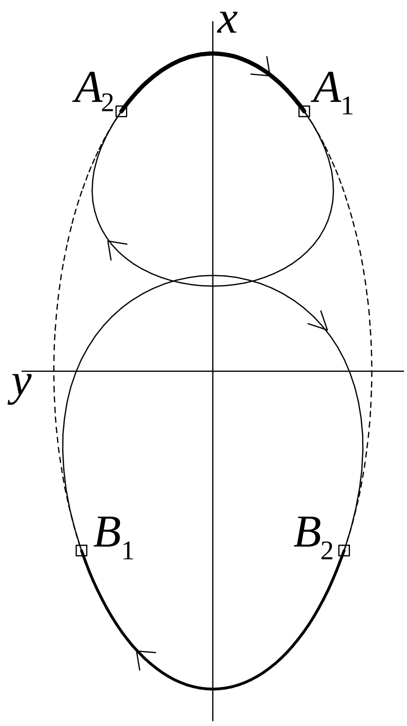


Рисунок 4.8 –

Левой из ветвей графика, соединяющей точку $(2\pi, 0)$ с точкой $D(6.22992, 1)$, соответствуют движения типа "серп с рожками" около большей массы (верхняя траектория на рис. 4.9: A_1A_2 – свободное движение, A_2B_1, B_1B_2, B_2A_1 – связное движение). Такая траектория существует при любых допустимых значениях параметров системы. Участок между точками D и $G\left(2\pi,\ \dfrac{6\pi\mu}{\sqrt{1+36\pi^2\mu^2}}\right)$ соответствует таким же "серпам с рожками", но движение происходит около меньшей массы. Точке G соответствует "серп", того же типа что и изображенный на рис. 4.6. Участку от G до $(2\pi, 0)$ также соответствуют движения около меньшей массы, но поскольку

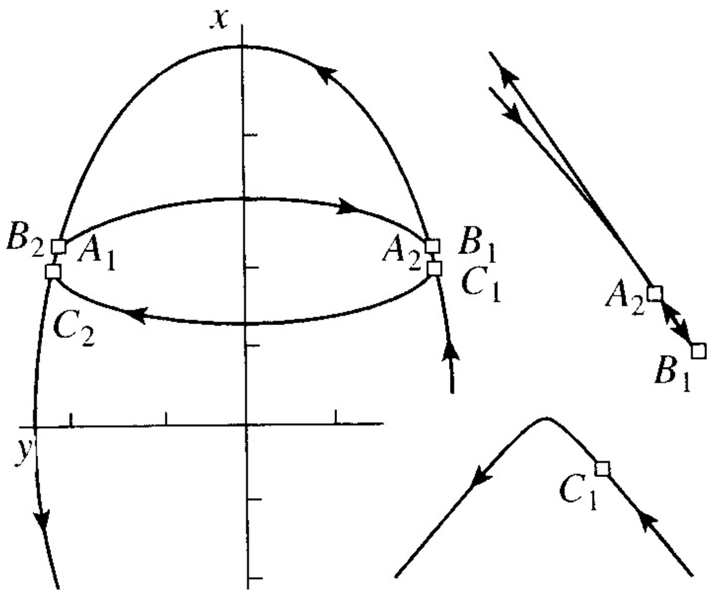
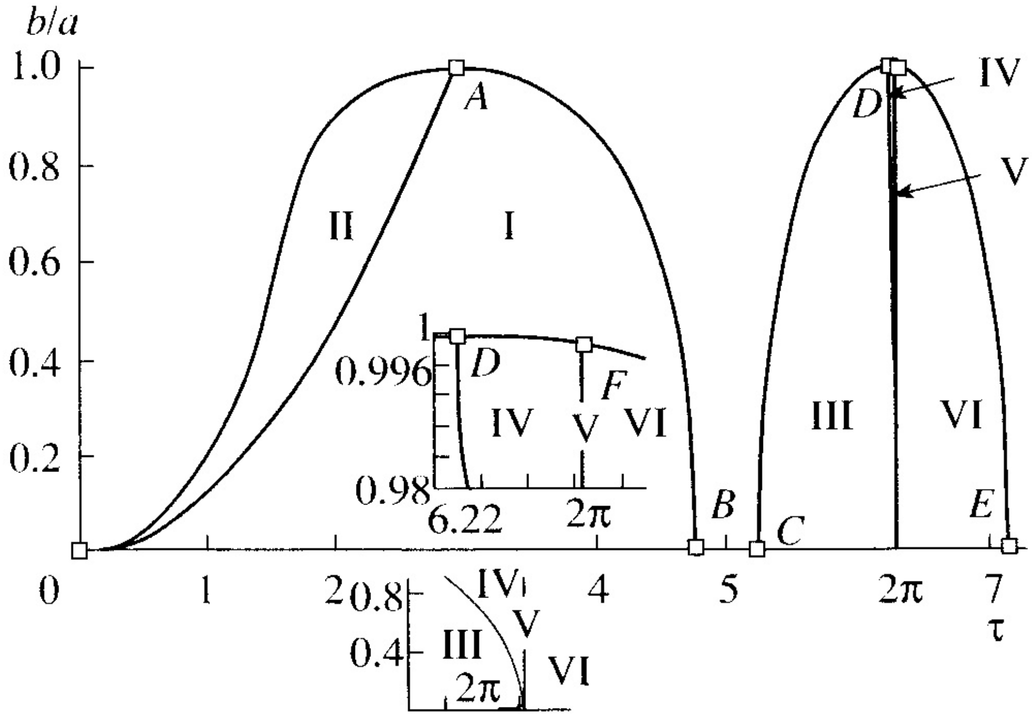


Рисунок 4.9 –

в этом случае сход со связи происходит в направлении движения по орбите, то получающаяся периодическая траектория хотя и выглядит как серп, не только не имеет рожек, но и является гладкой (нижняя траектория на рис. 4.9: C_1C_2 - свободное движение, C_2C_1 – связное движение). Для определения координат точек схода и выхода на связь во всех этих случаях в (4.19) следует выбрать нижние знаки.

В заключение приведем диаграмму существования различных видов безударных периодических траекторий с участками свободного движения в зависимости от параметров τ_f $(0 < \tau_f < 2\pi)$, a и b (рис. 4.10). На этих рисунках $B(4.74619\ldots, 0)$, $C(5.24144\ldots, 0)$, $E(7.13009\ldots, 0)$, $F\left(2\pi;\ \dfrac{6\pi}{\sqrt{1+36\pi^2}}\right)$. Римскими цифрами обозначены области периодических движений: I – "овалов" вокруг большей массы, II – "овалов" вокруг меньшей массы, III –"серпов с рожками" около большей массы, IV – "серпов с рожками" около меньшей массы, V – "серпов" (интервал между F и $(2\pi, 0)$), VI – гладких траекторий, напоминающих серпы.



b/a
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
4
5
2π
7
τ
A
II
I
D
IV
V
III
VI
B
C
E
1
0.996
0.98
6.22
F
0.8
0.4

Рисунок 4.10 –

ГЛАВА 5

Захват малого неуправляемого объекта леерной связью

Очевидно, что участок свободного движения каждой из безударных траекторий, рассмотренных в предыдущей главе, одновременно является участком некоторой орбиты, по которой двигался бы груз, если бы леерная связь отсутствовала. Пусть по этой орбите движется неуправляемая материальная точка небольшой массы. Тогда всегда можно выбрать такой момент начала движения груза по лееру, что на протяжениии некоторого интервала времени груз и неуправляемая точка будут находится в непосредственной близости друг от друга. Если в течении этого интервала времени соединить неуправляемую точку с грузом, то дальнейшее движение этой точки будет ограниченным и периодическим в орбитальной системе отсчета, причем в процессе такого захвата не будет скачков как скорости, так и ускорения.

В настоящей главе описываются алгоритмы и анализируется возможность такого мягкого захвата в случае, если прямая, соединяющая точки закрепления концов леера, "горизонтальна" или "вертикальна", то есть соответственно перпендикулярна или параллельна прямой, соединяющей центр масс твердого тела, несущего леер, с притягивающим центром, упомянутый центр масс движется по круговой орбите и все движения происходят в плоскости этой орбиты.

5.1 Постановка задачи

Пусть центр масс O некоторого массивного твердого тела, постоянно ооориентированного по отношению к направлению на притягивающий центр, движется по круговой орбите. Свяжем с твердым телом систему координат Oxy, так, чтобы ось Oy была направлена на притягивающий центр, а ось Ox по направлению абсолютной скорости точки O.

Предположим, что твердое тело оборудовано достаточно длинной штангой AB, по которой могут передвигаться ползуны C и D с закрепленными на них барабанами E и F, на которые наматывается невесомый нерастяжимый гладкий трос, причем вдоль троса может передвигаться захватывающее устройство G. (Такая схема захватывающего устройства является условной, так как в дальнейшем нам будет важно только то, чтобы в процессе движения не изменялись длина размотанной части троса и положения точек C и D в орбитальной системе отсчета). Допустим, что масса устройства G настолько мала, что не оказывает существенного влияния на движение тела с центром масс O. Ограничимся движениями, при которых точка G не покидает плоскость орбиты. Тогда если ползуны неподвижны, а барабаны не вращаются, то устройство G не может выйти за пределы эллипса V с фокусами в точках C и D и большой полуосью, равной половине длины развернутой части троса.

Будем рассматривать только те ситуации, когда одна из осей эллипса V направлена на притягивающий центр. Это возможно только если штанга AB или “горизонтальна” (рис. 5.1), или “вертикальна” (рис. 5.2).

Свяжем с центром O_1 эллипса V систему координат $O_1x_1y_1$ с осями, параллельными соответствующим осям системы координат OXY.Напомним, что, как доказано в предыдущей главе, любая траектория движения точки G, состоящая из участков связного (по границе эллипса V) и свободного (внутри эллипса V) движений в случае отсутствия ударов о связь немину-

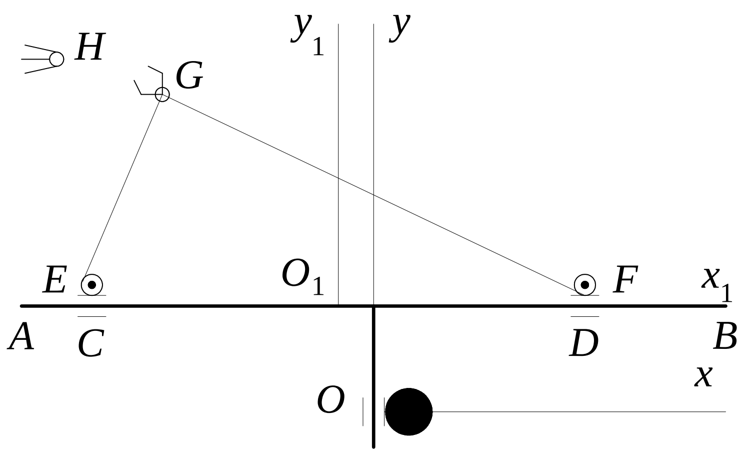


Рисунок 5.1 –

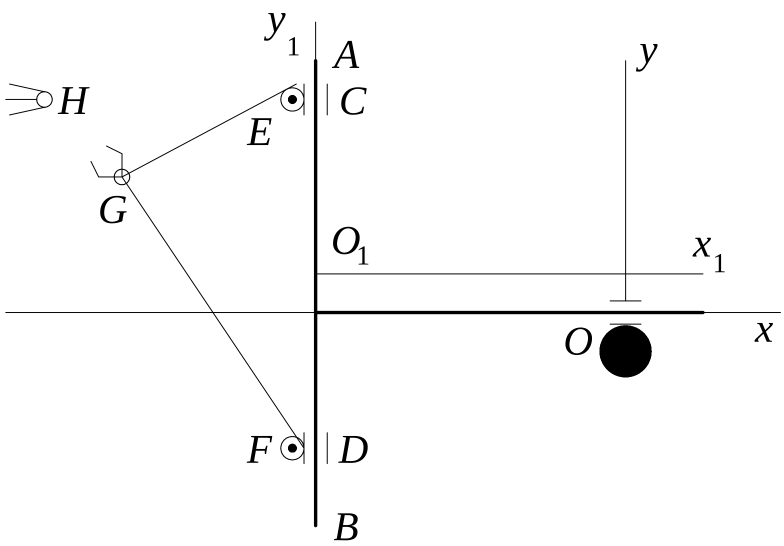


Рисунок 5.2 –

емо симметрична относительно оси Oy_1.

Пусть H - некоторая материальная точка, двигающаяся по инерции в плоскости орбиты центра масс O. Попытаемся захватить точку H устройством G.

5.2 Алгоритм захвата

Попытаемся подобрать такие положения точек C и D и такую длину развернутой части троса, чтобы часть траектории объекта H, расположенная внутри эллипса, ограничивающего область V движения захватывающего устройства G, совпадала с участком свободного движения одной из безударных периодических траекторий, описанных в предыдущей главе. В соответствии с классификацией безударных периодических траекторий, возможны два типа преобразования движения объекта H – "колебательный" (рис. 5.3), соответствующий траекториям типа "серп с рожками" (см. рис. 4.4 для случая "горизонтальной" штанги, и верхнюю траекторию на рис. 4.9 для случая "вертикальной" штанги) и "вращательный" (рис. 5.4), соответствующий траекториям типа "овал" (см. рис. 4.3 для случая "горизонтальной" штанги, и 4.8 для случая "вертикальной" штанги).

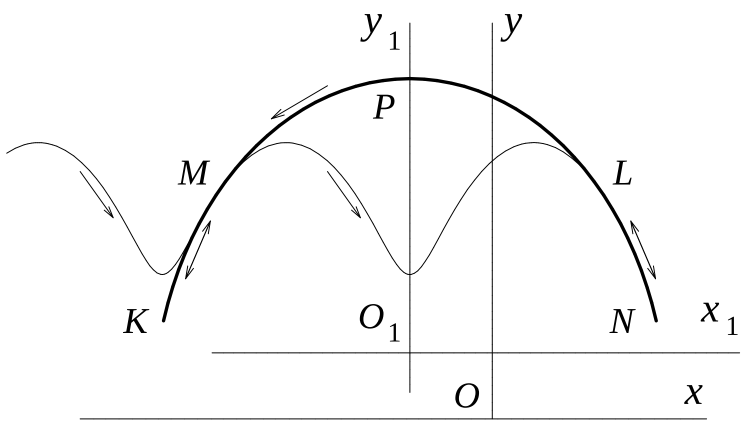


Рисунок 5.3 –

К преобразованию неограниченного движения точки H в периодическое приводит следующая последовательность действий:

1) вычисление по элементам орбиты точки H начального положения

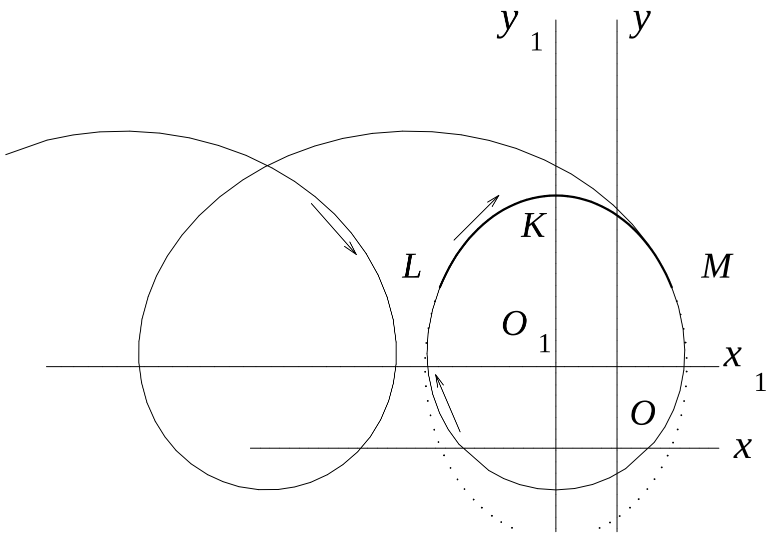


Рисунок 5.4 –

захватывающего устройства G (точка K) и удерживание его в этом положении до некоторого момента времени,

2) движение схвата вдоль троса по инерции при фиксированных фокусах C и D вдоль натянутого троса до точки M, в которой точка G встречается с точкой и “сходит со связи”, т.е. трос ослабевает. Для начала “колебательного” движения захватывающего устройства его достаточно просто отпустить, для “вращательного” движения необходим некоторый начальный импульс,

3) совместное свободное движение точек H и G, во время которого соединить их между собой, до точки L, в которой происходит безударный “выход на связь” образовавшейся “сцепки” $G - H$,

4) связное движение “сцепки” при фиксированных барабанах и натянутом тросе до точки L (траектория $L - N - L - P - M - K - M$ на рис. 5.3 или $L - K - M$ на рис. 5.4), после чего снова начинается свободное движение от M к L, и т.д.

Такой алгоритм обладает следующими важными качествами:

- во все время движения скорость и ускорение объекта H меняется непрерывно,
- движение схвата происходит по инерции (может понадобится первоначальный импульс),
- процесс соединения точек G и H не должен быть одномоментным .

5.3 Закон свободного движения и условия схода со связи и безударного входа на связь

Перейдем к безразмерным переменным и безразмерному времени τ, принимая период обращения точки O вокруг притягивающего центра равным 2π, а максимально возможную длину троса равной двум. Считая, что расстояние между O и H мало по сравнению с радиусом орбиты точки O, используем для описания движения точки H относительно O уравнения из [20, 9, 15]. Пусть в момент времени $\tau = 0$ точка H пересекает ось O_1y_1. Тогда, изменяя масштаб безразмерных переменных, но сохраняя для них прежние обозначения, и фиксируя положение оси Oy_1 по отношению к траектории точки H, запишем закон движения H и свободного движения G в виде

$$\begin{cases} x_1 = 3/2 \cdot f\tau + \sin\tau \\ y_1 = 1/2 \cdot \cos\tau + f - \nu \end{cases}$$

где ν характеризует координату y точки O_1, а параметр f связан с элементами орбиты неуправляемой точки H формулой

$$|f| = \frac{|1 - r_0/a_0|}{2\varepsilon},$$

где r_0 - радиус орбиты точки O, a_0 - большая полуось орбиты точки H, ε - эксцентриситет орбиты точки H. Перемещение захватывающего устройства G по лееру можно рассматривать как движение по односторонней связи, определяемой неравенством

$$F(x_1, y_1) = x_1^2 + dy_1^2 - a^2 \leq 0, \qquad d = a^2/b^2,$$

где a и b – соответственно “горизонтальная” и “вертикальная” полуоси эллипса V. ($d > 1$ в случае “горизонтальной” штанги и $d < 1$ в случае “вертикальной” штанги). Как следует из (3.6) и (3.8), связное ($F(x_1, y_1) = 0$) движение захватывающего устройства G подчиняется интегралу Якоби

$$\frac{1}{2}\gamma'^2\left((d-1)\sin^2\gamma + 1\right) - \frac{3}{2}\left(\sin\gamma + \frac{\nu\sqrt{d}}{a}\right)^2 = h_1 = \frac{(1-3f^2)d}{8a^2}, \tag{5.1}$$

где $\gamma(\tau)$ определяется равенствами $x_1(\tau) = a\cos\gamma(\tau)$ и $y_1(\tau) = b\sin\gamma(\tau)$, а штрихом $(\ )'$, как и предыдущих главах, обозначена производная по безразмерному времени τ. (h_1 вычисляется исходя из того, что константы интегралов Якоби связного и свободного движений, как и в предыдущей главе, должны совпадать)

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau) = F\left(x_1(\tau), y_1(\tau)\right)$. Тогда, аналогично (4.7), в точках схода со связи M (то есть в момент времени $\tau = \tau_M$) и безударного входа на связь L (то есть в момент времени $\tau = \tau_L$) справедливы уравнения

$$\varphi(\tau_{L,M}) = 0, \quad \varphi'(\tau_{L,M}) = 0, \quad \varphi''(\tau_{L,M}) = 0, \tag{5.2}$$

и неравенства

$$\varphi'''(\tau_M) < 0, \quad \varphi'''(\tau_L) > 0, \tag{5.3}$$

В силу симметрии безударных периодических траекторий точки G справедливо равенство $\tau_M = -\tau_L$. Кроме того, третье уравнение в (5.2), как следует из (4.8) и (4.9), может быть записано как

$$\sqrt{d}\gamma'^2 + 2\gamma'\left((d-1)\sin^2\gamma + 1\right) + 3\sqrt{d}\sin\gamma\left(\frac{\nu\sqrt{d}}{a} + \sin\gamma\right) = 0, \tag{5.4}$$

где $\gamma = \gamma_L = \gamma(t_L)$ or $\gamma = \gamma_M = \gamma(t_M)$

5.4 Детализация алгоритма

Для реализации алгоритма захвата нужно определить необходимую длину троса и положения фокусов C и D. Кроме того, небходимо заранее вычислить координату γ_K точки K из которой начинается движение захватывающего устройства, момент τ_k начала этого движения, и начальную скорость захватывающего устройства. (В предлагаемом варианте алгоритма при вращательном типе захвата $\gamma_K = \pm\pi/2$, $\tau_K = 0$, а при колебательном типе захвата начальная скорость захватывающего устройства равна 0).

Из второго и третьего равенств (5.2) можно выразить d и ν как функции параметра f и момента времени схода захватывающего учтройства со связи τ_M:

$$d = P/Q, \qquad \nu = R/P,$$

$$Q = 3\sin\tau_M - \sin 3\tau_M,$$

$$P = 36(\tau_M\cos\tau_M - \sin\tau_M)f^2 + 12(2\tau_M - \sin 2\tau_M)f + 4Q,$$

$$R = 36(\cos\tau_M - \sin\tau_M)f^3 + 3(6\tau_M\cos 2\tau_M + 8\tau_M - 7\sin 2\tau_M)f^2 +$$

$$+(9\tau_M\cos\tau_M + 3\tau_M\cos 3\tau_M - 4\sin 3\tau_M)f.$$

С учетом этого первое из равенств (5.2) позволяет выразить a также как функцию f и τ_M, а следовательно, и b.

Величины γ_K и τ_K также можно выразить через f и τ_M, используя интеграл Якоби (5.1). Так, для захвата колебательного типа при $f > 2/3$, с учетом того, что начальная скорость захватывающего устройства равна 0,

$$\gamma_K = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{f^2 - 1/3} - 2\nu}{2b}\right); \quad \gamma_K = \gamma(\tau_K);$$

$$\tau_K = \tau_M - 2b\int_{\gamma_M}^{\gamma_K}\sqrt{\frac{(d-1)\sin^3\gamma + 1}{1 - 3f^2 + 12(b\sin\gamma + \nu)^2}}d\gamma.$$

Таким образом, все величины, определяющие движение G, обеспечивающее захват, представляются функциями параметров f и τ_M.

Заметим, однако, что должны удовлетворяться три ограничения: во-первых, τ_M должно быть отрицательным, во-вторых, d должно быть положительным, и в третьих, как следует из (5.3),

$$3(3\sin 2t_M - 2t_M\cos 2t_M - 4t_M)f^2 + (\sin 3t_M + 9\sin t_M - 4t_M\cos t_M)\, f < 0. \tag{5.5}$$

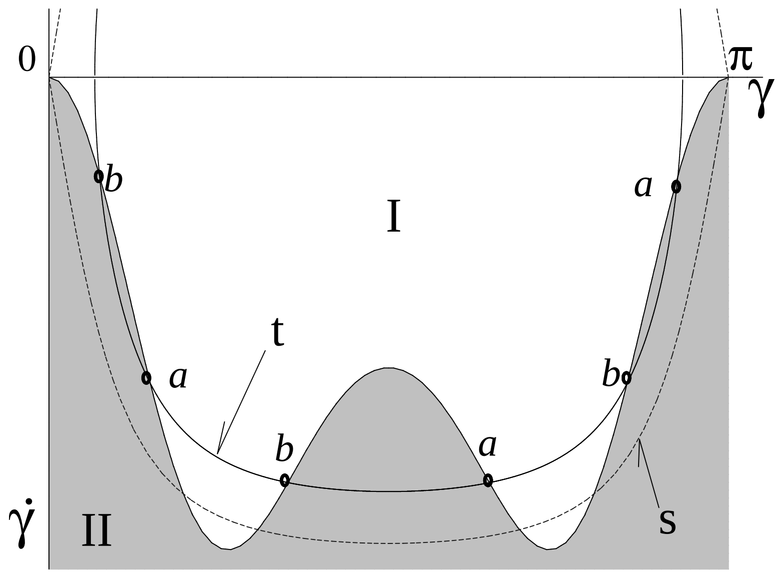


Рисунок 5.5 –

Как следует из результатов, сформулированных в главе 4, при некоторых значениях параметров f и τ_M через некоторое время после прохождения соединенными точками $G-H$ точки L трос может снова ослабеть, причем следующий за этим выход на связь будет ударным. Это обстоятельство связано с тем, что при достаточно больших значениях d появляются дополнительные точки пересечения сепаратрисы, разделяющей колебательные и вращательные связные движения по лееру и границей области схода со связи. Пример изображен на рис. 5.5. (На этом рисунке I - область связных движений, II - область схода со связи, s - сепаратриса (то есть траектория, соответствующая $h_1 = 0 \Leftrightarrow f = \pm\sqrt{3}/3$, t - актуальная траектория, a - точки выхода на связь, b - точки схода со связи). Для определения значений f и τ_M, при которых возможны "дополнительные" сходы со связи, достаточно исключить из системы уравнений (5.1,5.4). Если получающийся при этом полином восьмой степени относительно $\sin\gamma$ имеет более одного действительного корня, соответствующего допустимым значениям γ и γ', то существуют "дополнительные" точки схода со связи. Границы областей в плоскости параметров τ_M и f, для которых имеет место такая ситуация, находились численно.

Для определения типа преобразования движения неуправляемого объекта заметим, что в случае выполнения неравенства $|f| < 2/3$ константа интеграла Якоби связного движения настолько велика, что совместное движение точек H и G неминуемо будет вращательным. Если же $|f| > 2/3$, возможно как колебательное , так и вращательное движение. Если же $|f| = 2/3$, захват оказывается невозможным.

Диаграмма различных типов захвата на плоскости параметров f и τ_M изображена на рис. 5.6. На этом рисунке: I – область преобразования во вращательный тип движения с "горизонтальным" положением штанги AB, II – то же но с "вертикальным" положением AB, III – область преобразования в колебательный тип с движения с "горизонтальным" положением AB, IV – то же, но с "вертикальным" положением AB, $a = \sqrt{3}/3$, $b = (2 + \sqrt{13})/3$, $c = (2 - \sqrt{13})/3$. Области II и IV в большинстве случаев представляются весьма узкими полосами. Слабой штриховкой отмечена та часть области III, в которой после захвата происходит удар о трос, черным цветом – аналогичная часть области I. Границы областей в целом определены по конечным формулам $d = 0$, $d = 1$, $d = \infty$ и (5.5), исключение составляют границы заштрихованных и закрашенных областей, где возможен дополнительный сход со связи с последующим ударом о связь, определенные

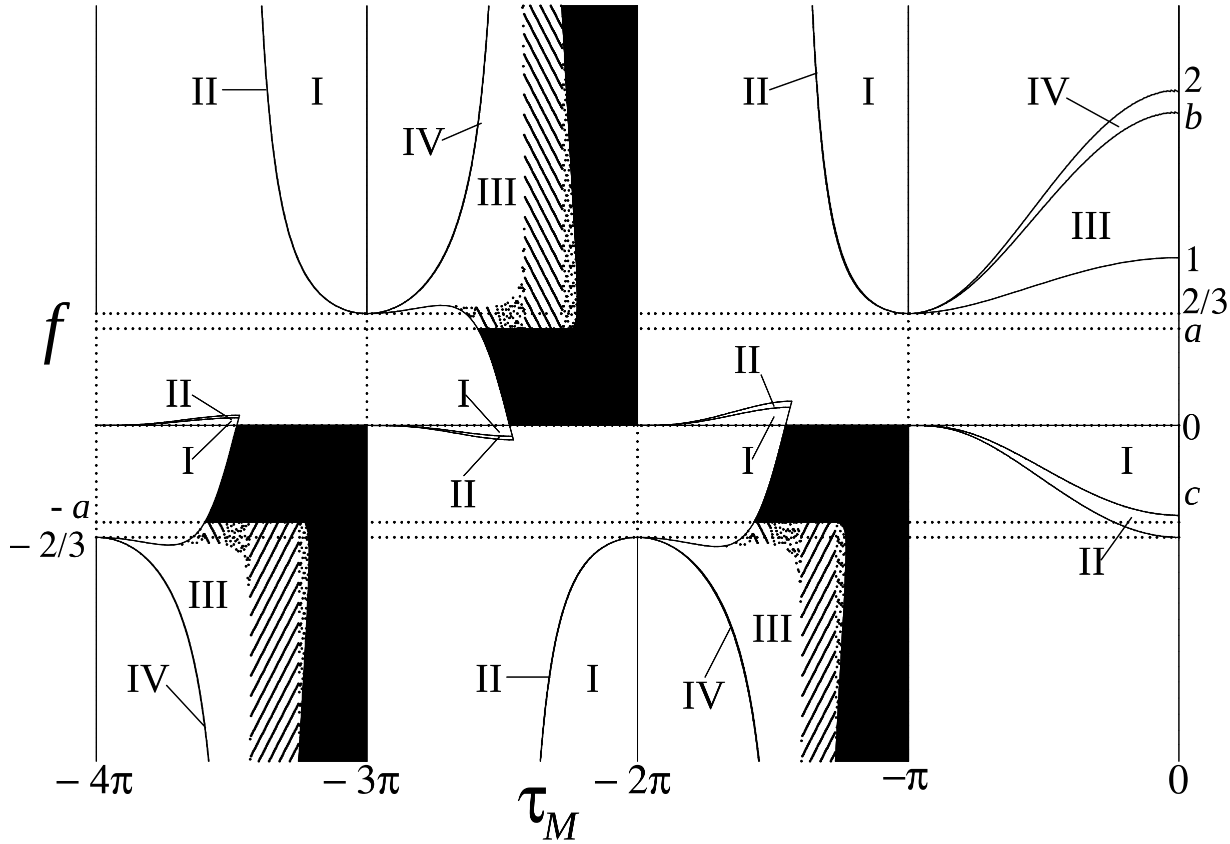


Рисунок 5.6 –

численно.

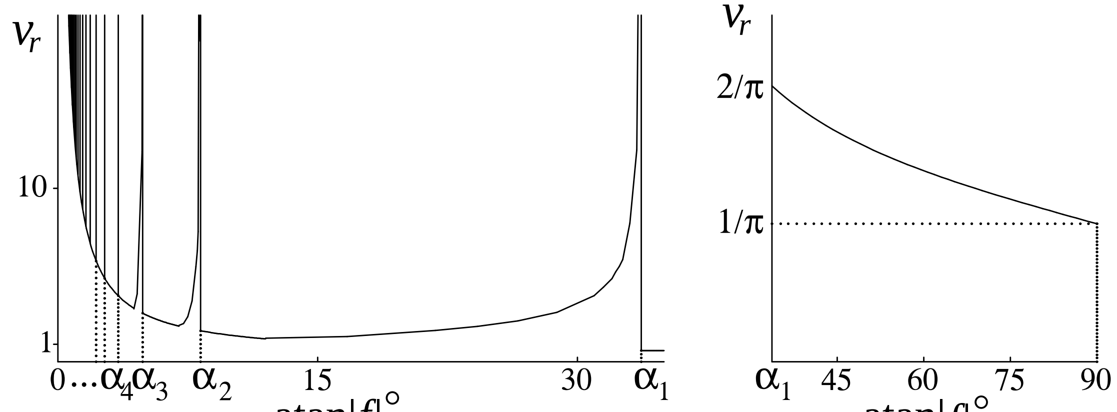


Рисунок 5.7 –

Так как длина троса не может быть бесконечной, относительная скорость неуправляемого объекта в момент сближения ограничена. Зависимость максимальной относительной скорости (в безразмерных переменных) в момент захвата от параметра f изображена на рис. 5.7. (Для наглядности по горизонтальной оси откладывается абсолютная величина $\operatorname{arctg} f$. На этом рисунке величины α_i, образующие счетный спектр, определяются уравнениями

$$\alpha_i = \arctan f_i, \quad f_i = \frac{2}{3\sqrt{1+\tau_i^2}}, \quad \tau_i = \tan \tau_i, \quad i = 1, 2, ...$$

Заметим, что при приближении слева к каждому из α_i допустимая относительная скорость может быть как угодно большой. В этом случае захват приводит к движению по траекториям (см. пример на рис. 5.8, где более толстой кривой обозначен участок связного движения захваченной точки, более тонкой - участок ее свободного движения, а пунктиром - граница эллипса V), основным недостатком которых является то, что участок свободного движения выходит за пределы эллипса, ограничивающего движение по леерной связи. Такой захват может быть или временным, или же требуется дополнительный алгоритм свертывания троса после стыковки, обеспечивающей непрерывное изменение скорости и ускорения захваченного тела, или же леерная связь может быть использована в качестве своеобразной "космической пращи" (предложено проф. И.И.Косенко). При остальных значениях f допустимая относительная скорость довольно мала, что в реальной ситуации может привести к тому, что потребуется леерная связь весьма больших размеров.

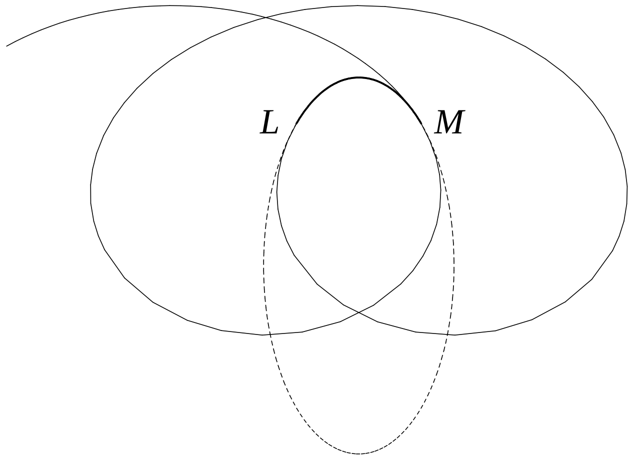


Рисунок 5.8 –

5.5 Уменьшение необходимых размеров леерной связи

Наиболее сложная ситуация возникает (как видно из рис. 5.7) при колебательном типе преобразования движения ($|f| > 2/3$). Однако, следует заметить, что в этом случае во-первых, участок совместного связного движения точек $G - H$ относительно мал и во-вторых, для обеспечения движения по этому участку нет необходимости закреплять концы троса непосредственно в фокусах эллипса, по которому это движение происходит – достаточно обеспечить такое движение ползунов, чтобы ветви троса во все время такого движения были направлены на эти фокусы. Определение законов движения ползунов не составляет труда в силу интегрируемости рассматриваемой задачи. На рис. 5.9 показан вариант такого алгоритма, при котором необходимая длина троса сокращена на порядок. Модифицированный алгоритм представляет собой следующую последовательность действий:

- "прыжок" захватывающего устройства на тросе со штанги (из точки K_1) в такой момент времени, чтобы попасть в точку M_1 в тот же момент, что и объект H (скорости объекта H и захватывающего устройства G в этой точке должны совпадать),

- совместное свободное движение объекта и захватывающего устройства до точки L входа на связь (трос не напряжен и только отслеживает движение точки G), во время которого должен быть осуществлен захват,
- совместное связное движение по дуге эллипса до точки N, в которой относительная скорость сцепки $G - H$ становится равной 0, при котором барабаны вращаются и ползуны двигаются так, чтобы ветви троса были направлены на фокусы эллипса,
- колебательное движение по дуге эллипса между точками N и N_1 при фиксированых ползунах и невращающихся барабанах.

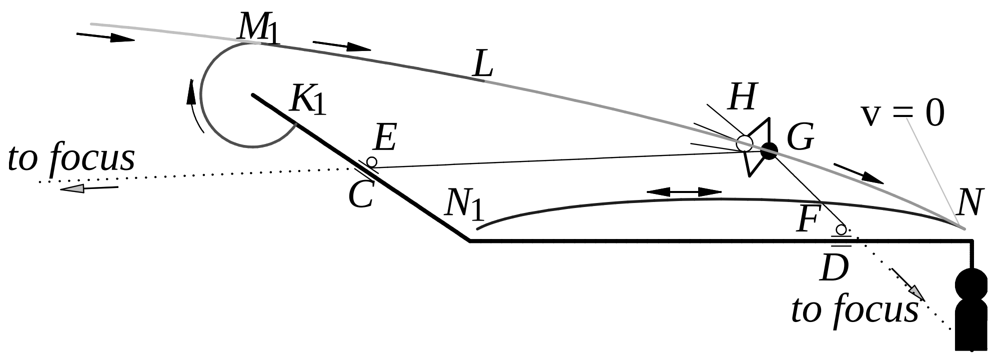


Рисунок 5.9 –

В этом варианте алгоритма захвата нарушается только непрерывность ускорения захватывающего устройства G в точке M_1, то есть в момент начала его свободного движения. Заметим, что скорость и ускорение захватываемой точки H во все время движения меняется по-прежнему непрерывно, так как в точке N относительная скорость объекта $G - H$ равна нулю, а касательные к дугам эллипсов LN и NN_1 совпадают. Преимуществом модифицированного алгоритма является тот факт, что после захвата при периодическом движении объекта H не происходит сходов со связи.

ГЛАВА 6

Влияние малого груза на леере на относительное движение гантели в центральном ньютоновском силовом поле

Во третьей, четвертой и пятых главах предполагалось, что движение твердого тела, несущего леерную связь, не зависит от движения груза по лееру. В настоящей главе рассматривается движение механической системы, описанной в главах 1-3 и состоящей из гантели и материальной точки (или груза), способного двигаться по лееру, концы которого закреплены на концах гантели. Как и раньше, предполагается, что центр масс системы движется по круговой орбите в центральном ньютоновском силовом поле. Как и в главах 3-5, предполагается, что масса груза на леере мала, однако, в отличие от предыдущих глав, движение этой массы может влиять на вращение гантели вокруг ее центра масс. Известно, что движение орбитальной гантели относительно ее центра масс качественно совпадает с движением математического маятника и бывает трех типов: колебания вокруг направления на притягивающий центр, вращения вокруг центра масс и "сепаратрисное движение" стремящееся к "горизонтальному" равновесию. В этой главе устанавливается, что малый груз на леере может качественно изменить относительное движение гантели только в некоторой окрестности сепаратрисного движения. Например, если гантель первоначально почти горизонтальна, возможны три варианта начала ее движения: переворачивание против часовой стрелки, переворачивание по часовой стрелке и асимптотическое движение, стремящееся к колебаниям вокруг "горизонтального"равновесия. В настоящей главе определяются начальные условия соответствующие таким асимптотическим движениям. Многообразие таких начальных условий представляется в виде двумерной поверхности в некоторой трехмерной проекции фазового пространства системы. Фактически, эта поверхность разделяет фазовое пространство на области левых и правых переворачиваний гантели. Приближенное аналитическое уравнение этой поверхности представляется в виде зависимости начального угла поворота и начальной угловой скорости гантели от начального положения и начальной относительной скорости груза. Тем самым выводится критерий, позволяющий определить направление переворачивания гантели в зависимости от начальных условий, если первоначально гантель близка к "горизонтальному" положению. Исследуется асимптотика и некоторые характерные свойства поверхности асимптотических движений.

Близкое к сепаратрисному движение гантели, вызываемое движением кабины по лееру в целом представляет собой последовательность полуоборотов гантели по- и против часовой стрелки, начинающихся и заканчивающихся в окрестности "горизонтального" равновесия. В настоящей главе в случае, когда гантель симметрична, т.е образована равными массами, и длина троса достаточно велика по сравнению с длиной гантели, приближенно выписываются законы движения системы при правом и левом полуоборотах. Эти законы движения позволяют описывать движение в целом, так как для этого достаточно знать направление каждого полуоборота, для чего достаточно по выведенным конечным формулам вычислить значения фазовых переменных в конце предыдущего полуоборота и далее воспользоватьс описанным выше критерием.

Кроме того, в настоящей главе приводятся примеры численного анализа движения гантели на протяжении двух первых переворачиваний в случае, когда трос сравнительно короток. Для этого рассматриваются двумерные сечения четырехмерного пространства начальных условий,в которых строятся области, соответствующие четырем возможным типам движения гантели, а именно:

a) поворот на угол, близкий к 2π по часовой стрелке;

b) полуоборот по часовой стрелке, затем возвращение в положение,близкое к первоначальному;

c) поворот на угол, близкий к 2π против часовой стрелки;

d) полуоборот против часовой стрелки, затем возвращение в положение, близкое к первоначальному;

Выделяются также области, где движение с натянутым тросом невозможно. Границы между этими областями, как это характерно для возмущенных систем, образуют многообразие весьма сложной формы. Часть точек этого многообразия сответствуют следу упомянутого выше многообразия асимптотических движений гантели, стемящихся к колебаниям вокруг положения, близкого к 'горизонтальному', а другие соответствуют аналогичным движениям, возникающим после первого переворачивания гантели.

6.1 Условия нахождения на связи, лагранжиан, интеграл Якоби

Для описания движения механической системы, описанной в главах 1 и 2 и изображенной на рис. 2.1, в плоскости орбиты ее центра масс C будем использовать те же переменные и обозначения, что и в главе 2, то есть пусть m_1 и m_2 - массы, составляющие гантель (всегда можно считать $m_2 \geq m_1$, m_3 - масса груза на леере, длина леера равна $2a$, a и b - соответственно большая и малая полуоси эллипса V, ограничивающего движение груза вокруг гантели, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ - половина длины гантели, φ - угол между O_1C и Ox, γ - "угловая координата" груза m_3, определяемая формулами (1.3), $\mu = (m_2 - m_1)/(m_2 + m_1)$. Кроме того, пусть

$$\kappa = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{4e^2 m_1 m_2}$$

Тогда безразмерные параметры e, μ, κ и безразмерные обобщенные координаты φ, γ полностью определяют конфигурацию рассматриваемой механической системы, причем движение этой системы будет связным, если выполняется неравенство (3.1).

Если груз m_3 находится на связи, то движение гантели и груза вокруг общего центра масс описывается уравнениями с лагранжианом

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \tag{6.1}$$

где

$$L_2 = \frac{1}{2}\left\{\varphi'^2 + \kappa\left[\left(1 - 2e\mu\cos\gamma + e^2\cos^2\gamma\right)\varphi'^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2\sqrt{1-e^2}\left(1 - e\mu\cos\gamma\right)\varphi'\gamma' + \left(1 - e^2\cos^2\gamma\right)\gamma'^2\right]\right\},$$

$$L_1 = \kappa e\cos\gamma\left(e\cos\gamma - 2\mu\right)\varphi',$$

$$L_0 = \frac{3}{2}\cos^2\varphi + \kappa\left\{\frac{9}{4}e^2\cos^2\varphi - \frac{3}{2}e\mu\cos\gamma + \frac{3}{4}e^2\cos^2\gamma - \right.$$

$$-\frac{3}{4}e\mu\left[\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\cos(2\varphi-\gamma) + \left(1+\sqrt{1-e^2}\right)\cos(2\varphi+\gamma)\right] -$$

$$\left. -\frac{3}{8}\left[\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)^2\sin^2(\varphi-\gamma) + \left(1+\sqrt{1-e^2}\right)^2\sin^2(\varphi+\gamma)\right]\right\}$$

Здесь штрихом $(\ )'$, как и раньше, обозначена производная по безразмерному времени τ, $\tau = G^{1/2}M^{1/2}\left|O_1C\right|^{-3/2}t$, G - гравитационная постоянная, M - масса притягивающего центра.

Очевидно, что система с лагранжианом (6.1) допускает интеграл Якоби

$$L_2 - L_0 = h. \tag{6.2}$$

6.2 Достаточные условия колебательного движения гантели

В случае, когда $\kappa = 0$, т.е. когда можно пренебречь влиянием тела на леере на относительное движение гантели, система с лагранжианом (6.1) описывает плоские движения твердого тела вокруг центра масс, двигающегося по круговой орбите (см [8, 10]). Так как уравнения движения в этом случае совпадают с уравнениями движения математического маятника, существуют три типа движений гантели: вращение вокруг центра масс ($h > 0$), колебания вокруг направления на притягивающий центр ($h < 0$) и асимптотическое (сепаратрисное) движение, стремящееся к неустойчивому "горизонтальному"(касательному к орбите) положению ($h = 0$).

Пусть $\kappa \ll 1$, т.е. масса тела на леере мала, но ее влиянием нельзя пренебречь. Очевидно, в этой ситуации качественные изменения в поведении гантели могут произойти только при достаточно малых $|h|$. Фактически, если значение константы интеграла Якоби близко к нулю, относительное движение гантели представляет собой последовательность полуоборотов по и против часовой стрелки. По-видимому, здесь можно говорить о хаотической смене направлений вращения гантели в те моменты, когда она близка к “горизонтальному” положению. Тем не менее, можно указать простой критерий, выполнение которого гарантирует колебательный характер возмущенного движения гантели (возможно, с амплитудой, близкой к $\pi/2$). Заметим, что график функции $U = -L_0$ представляет собой “горную страну” с чередующимися “хребтами” $\phi = \pi/2 + \pi k$ и “долинами” $\phi = \pi k$ (см рис. 6.1). На каждом хребте есть “пики” $\gamma = \Pi k$ и “перевалы” $\gamma = \pi/2 + \pi k$.

(Здесь k-произвольное целое число). Очевидно, что если константа интеграла Якоби меньше значения функции $-L_0$ на перевале, то движение гантели ограничено двумя соседними хребтами, т.е. если $h < 0$, то воз-

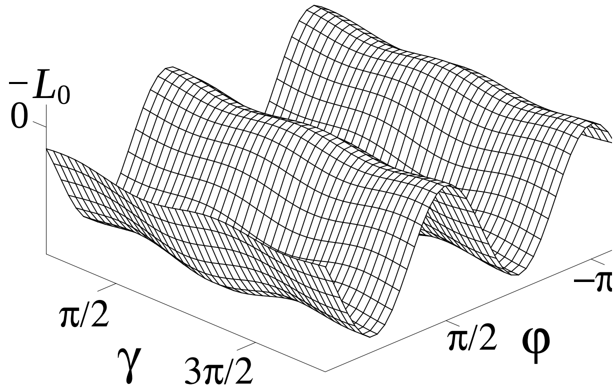


Рисунок 6.1 –

можно только колебательное движение гантели. Такая ситуация возникает, например, если в начальный момент времени гантель не горизонтальна, груз находится вне некоторых окрестностей точек $\gamma = \pi k$ и все начальные скорости равны нулю. Как показывает численный анализ движения системы, при достаточно больших начальных относительных скоростях груза возникают вращательные движения гантели.

6.3 Редукция уравнений движения в окрестности "горизонтального"равновесия гантели

Если $h \approx 0$, то в какой-то момент времени гантель окажется в некоторой окрестности "горизонтального"равновесия. Выведем критерий, позволяющий определять направление дальнейшего вращения гантели. Не теряя общности, будем считать, что в начальный момент времени $\varphi \approx -\pi/2$ Используя замену $\varphi = -\pi/2 + \sqrt{\kappa}\psi$ и сохраняя в уравнених движения только слагаемые порядка меньше, чем κ, получим

$$\psi'' - 3\psi + \sqrt{\kappa} D(\gamma, \gamma') = 0, \tag{6.3}$$

где

$$D(\gamma,\gamma') = e\sin\gamma(\mu - e\cos\gamma)\left(\frac{\sqrt{1-e^2}\left(\gamma'^2 + 3\sin^2\gamma\right)}{1-e^2\cos^2\gamma} + 2\gamma'\right)$$

Уравнение движения груза при этом окажется таким, как если бы гантель была *зафиксирована* в “горизонтальном” положении. Следовательно, γ как функция времени может быть определена из (3.8). Как показано в главе 3, движение груза вокруг горизонтальной гантели может быть колебательным, вращательным или сепаратрисным (лимитационным). Как видно из рис. 3.2,3.3,3.4,3.5, сепаратрисное движение груза и движения в некоторой его окрестности обязательно приводят к сходу со связи. Если движение груза является колебательным, то γ является периодической функцией τ с периодом

$$T = \oint \frac{d\gamma}{\gamma'(\gamma, h_2)}.$$

Если же движение груза является вращательным,, то $\gamma = \pi\tau/T + \sigma(\tau)$, где σ - T-периодическая функция τ и

$$T = \int_0^\pi \frac{d\gamma}{\gamma'(\gamma, h_2)}.$$

Таким образом, если не происходит сход со связи, функция $D_1(\tau) = D\left(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)\right)$ является T-периодической. Решение (6.3) может быть представлено в виде

$$\psi(\tau) = p(\tau) + q(\tau), \tag{6.4}$$

где, как легко проверить,

$$q(\tau) = \frac{\sqrt{\kappa}}{2\sqrt{3}}\left(\exp(\sqrt{3}\tau)\int_\tau^{+\infty}\exp(-\sqrt{3}\xi)D_1(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \exp(-\sqrt{3}\tau)\int_{-\infty}^{\tau}\exp(\sqrt{3}\xi)D_1(\xi)d\xi\right)$$

является T-периодической функцией τ, а

$$p(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(C_+ \exp(\tau\sqrt{3}) + C_- \exp(-\tau\sqrt{3}) \right),$$

где

$$C_\pm = \sqrt{\kappa}\left(z_\pm - A_\pm(\gamma_0, \gamma_0')\right),$$

$$z_\pm = \kappa^{-1/2}(\sqrt{3}\psi_0 \pm \psi_0') = \kappa^{-1}(\sqrt{3}\varphi_0 + \sqrt{3}\pi/2 \pm \varphi_0'), \tag{6.5}$$

$$A_\pm(\gamma_0, \gamma_0') = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\tau\sqrt{3}) D(\gamma(\pm\tau, \gamma_0, \gamma_0'), \gamma'(\pm\tau, \gamma_0\gamma_0'))d\tau, \tag{6.6}$$

$\gamma_0, \gamma_0', \varphi_0, \varphi_0', \psi_0, \psi_0'$ - начальные значения $\gamma, \gamma', \varphi, \varphi', \psi, \psi'$.

Заметим, что если $C_+ = 0$, то имеет место асимптотическое решение (6.3), стремящееся к колебаниям около $\psi = 0$. Следовательно, поверхность

$$z_+ = A_+ \tag{6.7}$$

апроксимирует множество таких начальных значений фазовых переменных рассматриваемой задачи, для которых гантель во все время движения остается в окрестности “горизонтального” положения равновесия. При этом, если начальные условия таковы, что $z_+ > A_+$, то гантель перевернется против часовой стрелки, если же $z_+ < A_+$, то гантель перевернется по часовой стрелке. (Конечно, равенство $z_+ = A_+$ определяет границу между областями правых и левых переворачиваний гантели с некоторой погрешностью, т.к. для его вывода были использованы "укороченные"уравнения (6.3). Некоторое представление о величине этой погрешности дает рис. 6.2, на котором представлена кривая, являющаяся сечением поверхности $z_+ = A_+$ плоскостью $\gamma = 12\pi/7, \varphi = -\pi/2$. На этом рисунке крестиками обозначены найденные численно точки границы областей правых и левых переворачиваний. Вычисления проводились при $e = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\kappa = 0.01$).

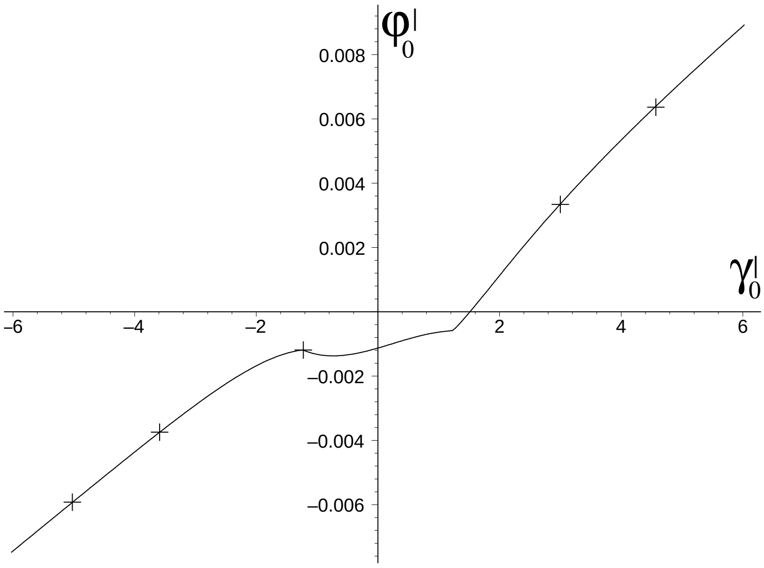


Рисунок 6.2 –

6.4 Вычисление и свойства интеграла A_+.

Заметим, что так как при $h_2 \neq 0$ функция

$$f(\tau) = D(\gamma(\tau, \gamma_0, \gamma_0'), \gamma'(\tau, \gamma_0, \gamma_0'))$$

является периодической функцией безразмерного времени τ с периодом T, то из равенства

$$\int\limits_{nT}^{(n+1)T} \exp(-\sqrt{3}\tau) f(\tau) d\tau = exp(-nT\sqrt{3}) \int\limits_0^T \exp(-\sqrt{3}\tau) f(\tau) d\tau$$

следует, что

$$A_+ = \frac{1}{1 - \exp(T\sqrt{3})} \int\limits_0^T \exp(-\sqrt{3}\tau) f(\tau) d\tau \tag{6.8}$$

Если $h_2 > 0$, с помощью замены

$$d\tau = \pm V(y) dy, \quad V(y) = \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 y}{h_2 + 3(1 - e^2) \sin^2 y}} \tag{6.9}$$

(6.8) преобразуется к виду

$$A_+ = \pm \frac{1}{1-\exp(\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} V(y)dy)} \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma_0 \pm 2\pi} \exp(\pm\sqrt{3}\int\limits_y^{\gamma_0} V(\xi)d\xi)\cdot f_\pm(y)dy, \quad (6.10)$$

где

$$f_\pm(y) = e(\mu - e\cos y)\sin y \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\cos^2 y} \left(\frac{1}{V(y)} + 3V(y)\sin^2 y \right) \pm 2 \right).$$

Если же $h_2 < 0$, та же замена приводит к равенству

$$A_+ = \tfrac{\exp(-\sqrt{3}(T/2 \pm t_1)}{1-\exp(-\sqrt{3}T)} \int\limits_{\gamma_2}^{\gamma_1} \left(f_-(y)\exp\left(\sqrt{3}\int\limits_{\gamma_2}^{y} V(\xi)d\xi\right) \pm \right.$$

$$\left. \pm f_+(y)\exp\left(-\sqrt{3}\int\limits_{\gamma_2}^{y} V(\xi)d\xi\right)\right) dy \pm \quad (6.11)$$

$$\pm \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma_1} \exp\left(\pm\sqrt{3}\int\limits_y^{\gamma_0} V(\xi)d\xi\right) f_\pm(y)dy,$$

где

$$T = 2\int\limits_{\gamma_2}^{\gamma_1} V(y)dy, \quad t_1 = 2\int\limits_{\gamma_0}^{\gamma_1} V(y)dy,$$

$$\gamma_2 = \arccos H + \pi k, \quad \gamma_1 = \pi(k+1) - \arccos H, \quad H = \sqrt{1 + \frac{h_2}{3(1-e^2)}},$$

причем $k = 0$, если $0 < \gamma_0 < \pi$ и $k = 1$, если $\pi < \gamma_0 < 2\pi$. В (6.10,6.11) знак "+"следует выбирать, если $\gamma_0' > 0$, а знак "$-$ если $\gamma_0' < 0$.

Отметим, однако, что при $h_2 < 0$ замена (6.9) имеет особенность при $y = \gamma_{1,2}$. Поэтому для численного анализа интеграла A_+ удобнее использовать не имеющую особенности замену

$$d\tau = \pm\frac{W(x)dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-e^2}}, \quad W(x) = \sqrt{\frac{1-e^2H^2\cos^2 x}{1-H^2\cos^2 x}},$$

(в этом случае $\cos y = \pm H\cos x$, γ_2 превращается в 0, γ_1 превращается в π).

Если $h_2 = 0$ для вычисления (6.6) следует сделать замену

$$d\tau = \frac{\sqrt{1-e^2\cos^2 y}}{\sqrt{3(1-e^2)}\sin y}dy$$

Получающийся при этом интеграл будет собственным.

Будем рассматривать интеграл A_+ как функцию переменных γ_0, γ_0' и параметров e, μ. Можно доказать, что эта функция обладает следующими свойствами.

1. A_+ является линейной функцией μ, т.е. $A_+ = A_0 + \mu A_\mu$, причем A_0 есть π-периодическая функция γ_0, A_μ есть 2π-периодическая функция $\gamma 0$.

2. Если $\gamma_0 = 0$ или $\gamma_0 = \pi$ и $\gamma_0' = 0$, то $A_+ = 0$. Если же $\gamma_0 = \pi/2$ и $\gamma_0' = 0$, то $A_+ = \mu e\sqrt{3(1-e^2)}$.

3. Если $\gamma_0' = \pm\sqrt{3(1-e^2)}/e$, то

$$A_+ = \frac{(2e\pm\sqrt{3})\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{4-3e^2}}\left(2\mu\sqrt{4-3e^2}\cos(\gamma_0 \mp \arcsin e) -\right.$$

$$\left. -e\cos\left(2\gamma_0 \mp \arcsin\frac{e}{\sqrt{4-3e^2}}\right)\right)$$

4. Если $\gamma_0' \to \infty$, то A_+ стремится к линейной по γ_0' функции, т.е. $A_+ = A_{1+}\gamma_0' + A_{0+} + o(1/\gamma_0')$, где

$$A_{1+} = \sqrt{1-e^2}\left(\mu e\cos\gamma_0 - 1 + \frac{\pi\sqrt{1-e^2\cos^2\gamma_0}}{2E(e)}\right)$$

$$A_{0+} = (1-e^2)\frac{K(e)}{E(e)} + \sqrt{3(1-e^2)}\left(\frac{\pi\int_0^{\gamma_0}\sqrt{1-e^2\cos^2 x}dx}{2E(e)} - \gamma_0 + \mu e\sin\gamma_0\right) +$$

$$+2\mu e\cos\gamma_0 + e^2\sin^2\gamma_0 - \frac{e^2+1}{3},$$

где $K(e)$ и $E(e)$ - полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем e соответственно.

Примеры поверхностей $z = A_+$, где A_+ вычисляется по формулам этого раздела, приведены на рис. 6.3 ($e = 1/2, \mu = 2/3$) и рис. 6.4($e = 3/4, \mu = 1/5$). На этих рисунках из $z = A_+$ вырезаны диски, где движение с натянутым тросом невозможно (в изображаемой области фазового пространства области схода со связи близки к цилиндрам, параллельным оси z).

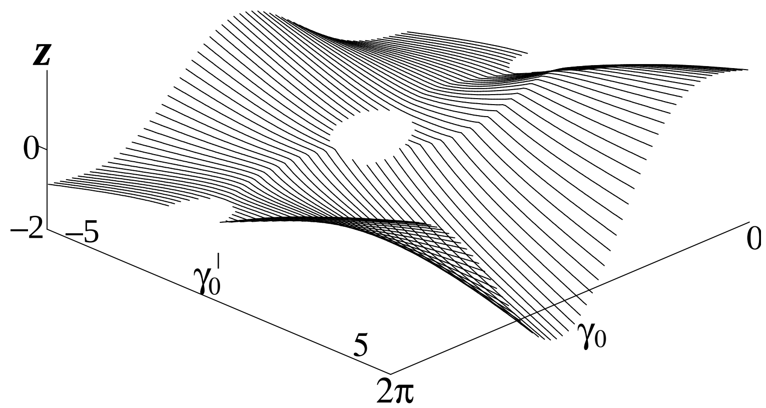


Рисунок 6.3 –

6.5 Около-сепаратрисное движение гантели в случае относительно длинного троса

Решение (6.4) позволяет описать движение гантели только в окрестности горизонтального равновесия. При изучении околосепаратрисного движения вне таких окрестностей (или, точнее, между такими окрестностями)

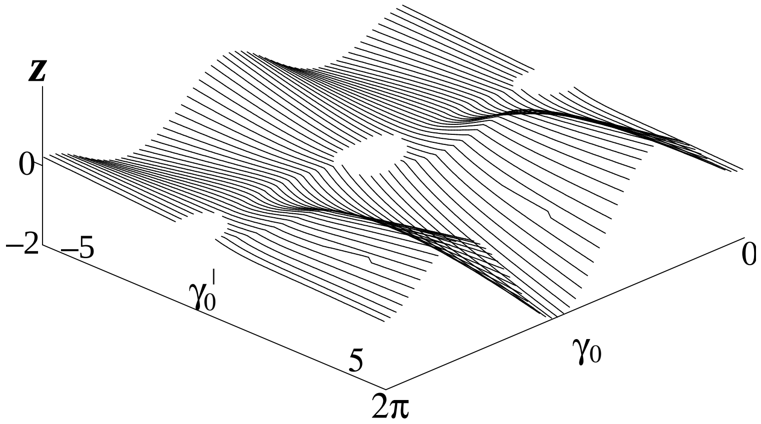


Рисунок 6.4 –

ограничимся случаем, когда гантель симметрична, т.е. составлена из равных масс ($\mu = 0$). Кроме того, пусть $e < \sqrt[4]{\kappa}$, т.е. длина троса достаточно велика по сравнению с длиной гантели. (Например, если $\kappa = 0.01$ то достаточно взять $e \leq 0.316$). Для определенности будем считать, что в момент времени $\tau = 0$ гантель вертикальна. Запишем закон околосепаратрисного движения в виде

$$\varphi(\tau) = \varphi_S(\tau) + \sqrt{\kappa}\psi(\tau), \tag{6.12}$$

где $\varphi_S(\tau) = \pi/2 - 2\arctan\exp\left(\mp\tau\sqrt{3}\right)$ - закон сепаратрисного движения свободной гантели (знак "$-$" выбирается для вращения против часовой стрелки, знак "$+$" - для вращения по часовой стрелке). Подставим (6.12) в уравнения движения для φ и сохраним в них только слагаемые порядка меньше, чем κ и e^4. После преобразований получим

$$(p+1)^2\psi'' - 3\left(p^2 - 6p + 1\right)\psi - 12\sqrt{\kappa}\psi^2\sqrt{p}(p-1) = 0, \tag{6.13}$$

где $p = \exp\left(2\tau\sqrt{3}\right)$. Заметим, что левая часть (6.13) не зависит от γ и e. Будем искать решение (6.13) в виде ряда по целым степеням $\sqrt{\kappa}$. Подставляя это решение в (6.12) и, сохраняя только слагаемые порядка менее чем $\kappa^{3/2}$, получим

$$\varphi(\tau) = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{1}{\sqrt{p}}\right) + \frac{\sqrt{\kappa}\psi_1(p^2+4\tau p\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{3p}(1+p)} \pm$$
$$\pm\left(\frac{\kappa\psi_1^2\left(24p\tau^2(1-p)+4\tau\sqrt{3}(p+1)(p^2+p+1)+3(p+1)^2(1-p)\right)}{96\sqrt{p}(1+p)^2}\right), \tag{6.14}$$

где $\psi_1 = \psi'(0)$, “$+$” соответствует вращению против часовой стрелки, а “$-$” - вращению по часовой стрелке.

Заметим, что правая часть (6.14) - нечетная функция τ. Следовательно, если в некоторый момент времени $-\tau_*$ гантель занимала положение, соответствующее $\varphi = -\varphi_0$ и $\varphi' = \varphi_0'$, то в момент времени τ_* гантель займет симметричное относительно направления на притягивающий центр положение, соответствующее $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi' = \varphi_0'$. Таким образом, в рамках сделанных предположений можно утверждать, что точки выхода гантели из окрестности (радиуса $\approx \sqrt{\kappa}$) равновесия $\varphi = \pm\pi/2$ и входа гантели в окрестностность равновесия $\varphi = \mp\pi/2$ симметричны относительно местной вертикали, причем вход и выход происходят с одинаковыми угловыми скоростями.

Для определения движения тела на леере во время околосепаратрисного движения гантели вне окрестностей горизонтальных равновесий подставим (6.12) в уравнение движения для γ. Учитывая (6.14) и пренебрегая слагаемыми порядка κ, e^4 и выше, получим

$$v'' + \frac{3}{2}sin(2v) + e^2q(v, v', \tau) = 0, \tag{6.15}$$

где $v = \varphi + \gamma$, а $q(v, v', \tau)$ - некоторая функция. Решение уравнения (6.15) может быть представлено приближенной квадратурой

$$\tau = \pm\tau_0(v, v_0) \pm e^2\tau_1(v, v_0), \tag{6.16}$$

где

$$\tau_0(v,v_0)=\int_{v_0}^{v}\frac{d\nu}{\sqrt{h_3+\dfrac{3}{2}\cos 2\nu}},\qquad \tau_1(v,v_0)=\int_{v_0}^{v}\frac{Q(\nu,v_0)d\nu}{\left(h_3+\dfrac{3}{2}\cos 2\nu\right)^{3/2}},$$

$$Q(v,v_0)=\int_{v_0}^{v}q\left(\nu,\pm\sqrt{h_3+\frac{3}{2}\cos 2\nu},\pm\tau_0(\nu,v_0)\right)d\nu,\qquad h_3=v_{01}^2-\frac{3}{2}\cos 2v_0,$$

v_0 и v_{01} - значения v и v' в тот момент времени, когда гантель вертикальна.

"Сшивая" решения типа (6.4,3.8) для движения в окрестности горизонтальных равновесий и типа (6.14,6.16) для движения вне таких окрестностей, мы можем проследить движение гантели на протяжении нескольких полуоборотов. (При этом, в частности, может возникнуть ситуация, когда гантель не выйдет за пределы очередной окрестности горизонтального равновесия, т.е. после одного или нескольких полуоборотов гантель будет стремится к колебаниям вокруг касательной к орбите, то есть будет иметь место асимптотическое движение, начинающееся с одного или нескольких полуоборотов). Следует, однако, помнить, что получаемые "сшиванием" приближенные законы движения будут достаточно хорошо аппроксимировать движение системы только на небольших (порядка нескольких витков системы по орбите) промежутках безразмерного времени τ.

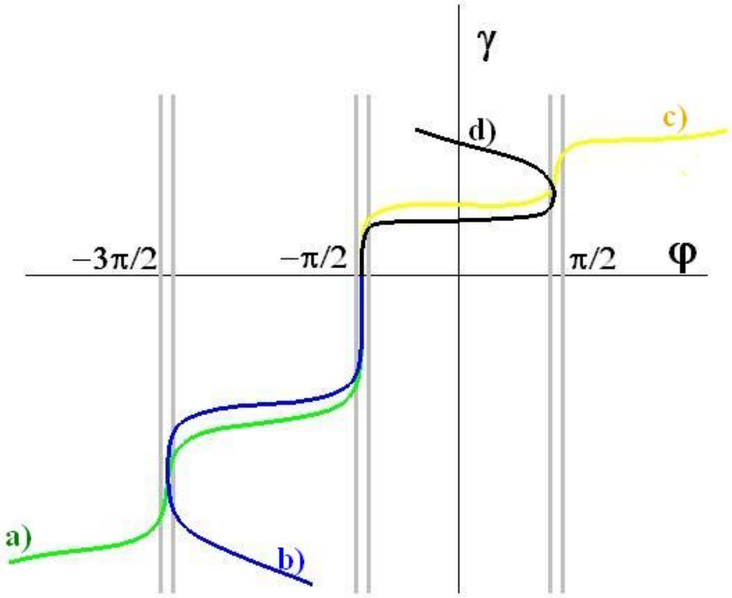


Рисунок 6.5 –

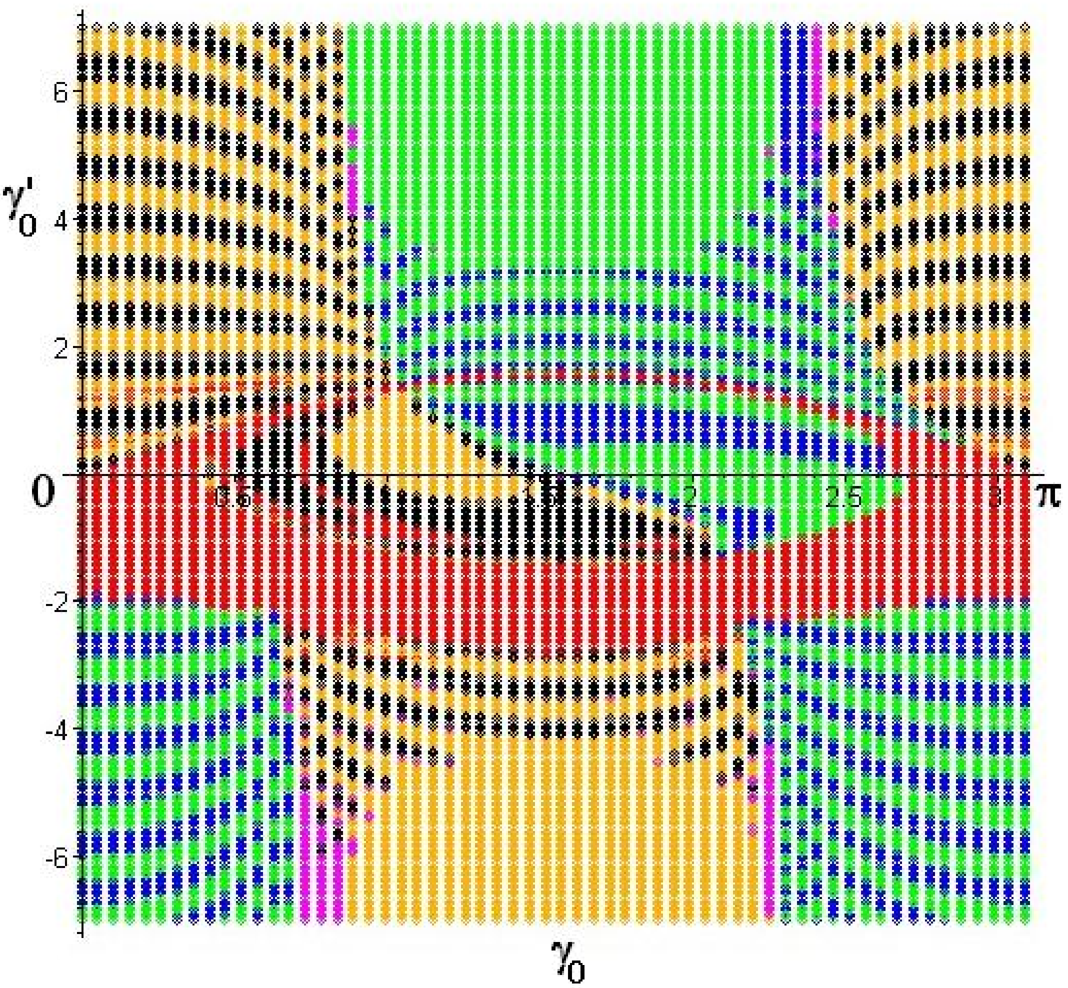


Рисунок 6.6 – $\mu = 0,\ e = 1/3,\ \varphi_0 = -\pi/2,\ \varphi_0' = 0$

6.6 Примеры численного анализа движения гантели для сравнительно короткого троса

Приведем несколько примеров численного анализа околосепаратрисных вращений гантели в двумерных сечениях четырехмерного пространства начальных условий рассматриваемой задачи в случае, когда трос сравнительно короток и/или гантель несимметрична. Ограничимся двумя первыми полуоборотами. В этом случае возможны четыре варианта движений - это описанные в приамбуле к этой главе случаи a)-d). Примеры проекций фазовых траекторий рассматриваемой механической системы, начинающихся при $\varphi_0 \approx -\pi/2$, на плоскость (φ, γ) приведены на рис. 6.5.

Для обозначения соответствующих областей в пространстве начальных условий будем использовать те же цвета, что и на этом рисунке, то есть для траекторий типа a) (поворотов гантели по часовой стрелке на угол, близкий к 2π) - **зеленый**, для траекторий типа b) (поворотов гантели по часовой стрелке на угол, близкий к π с последующим поворотом против часовой стрелки и возвращение в положение, близкое к первоначальному) - **синий**, для траекторий типа b) (поворотов гантели против часовой стрелки на угол, близкий к 2π) - **желтый**, для траекторий типа d) (поворотов гантели против часовой стрелки на угол, близкий к π с последующим поворотом по часовой стрелке и возвращение в положение, близкое к первоначальному) - **черный**. Кроме того, будем обозначать **красным** области начальных условий, для которых до конца второго полуоборота гантели происходит сход груза со связи. Области, в которых за время численного интегрирования не удается отнести траекторию к одному из вышеперечисленных типов, будем обозначать **розовым** цветом (движения начинающиеся из этих областей являются близкими к асимптотическим движениям, стремящимся к колебаниям гантели в окрестности ее "горизонтального положения").

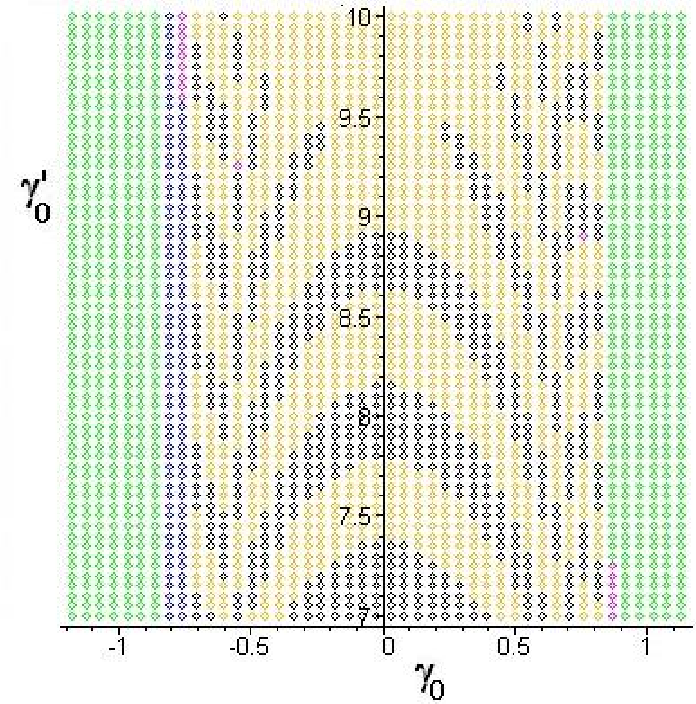


Рисунок 6.7 – $\mu = 0,\ e = 1/3,\ \varphi_0 = -\pi/2,\ \varphi_0' = 0$

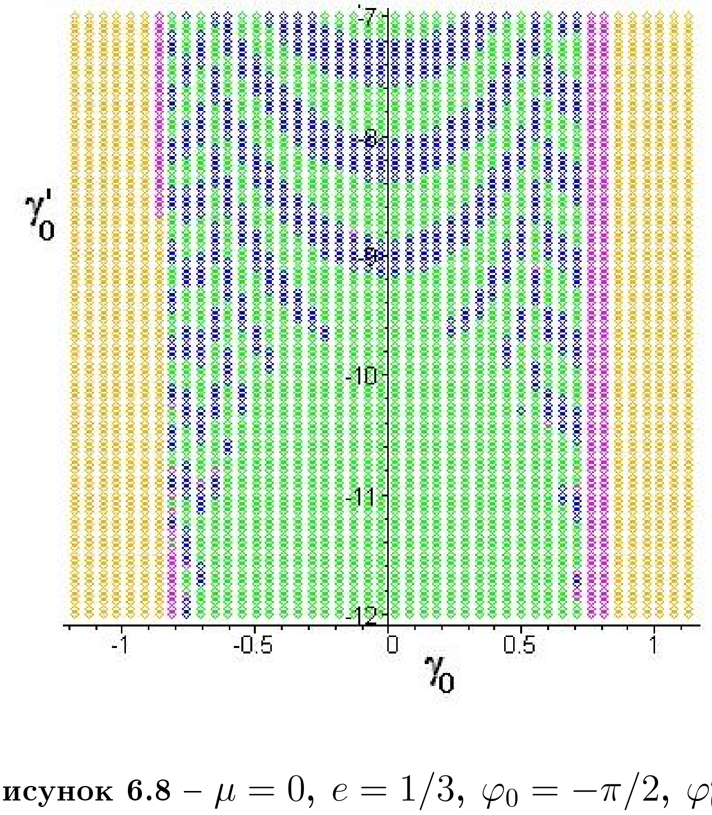


Рисунок 6.8 – $\mu = 0,\ e = 1/3,\ \varphi_0 = -\pi/2,\ \varphi_0' = 0$

В случае $\mu = 0$ в силу симметрии достаточно считать, что $0 \leq \gamma_0 < \pi$. Прежде всего отметим, что с ростом e, то есть при уменьшении длины троса неминуемо увеличивается доля области начальных условий, приводящих к сходу со связи (см. рис. 6.6,6.9,6.11). Отметим также, что наиболее сложная картина возникает в плоскостях $(\varphi_0 \approx \pm\pi/2, \varphi' \approx 0)$, особенно, если $(\varphi_0 = \pm\pi/2, \varphi' = 0)$, когда присутствуют все рассматриваемые типы движений, а соответствующие области образуют весьма сложную структуру, состоящую из чередующихся полос различных типов движений.

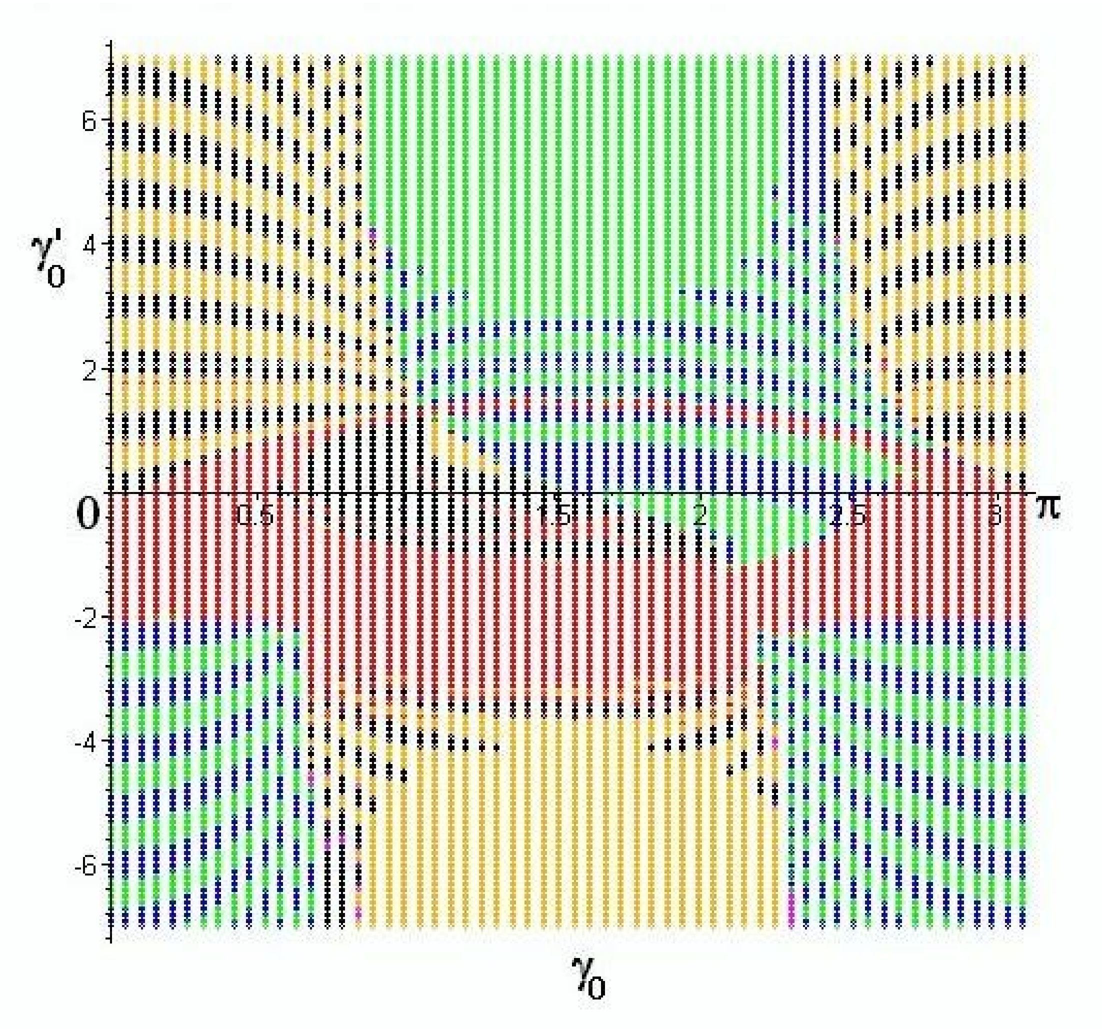


Рисунок 6.9 – $\mu = 0$, $e = 1/2$, $\varphi_0 = -\pi/2$, $\varphi_0' = 0$

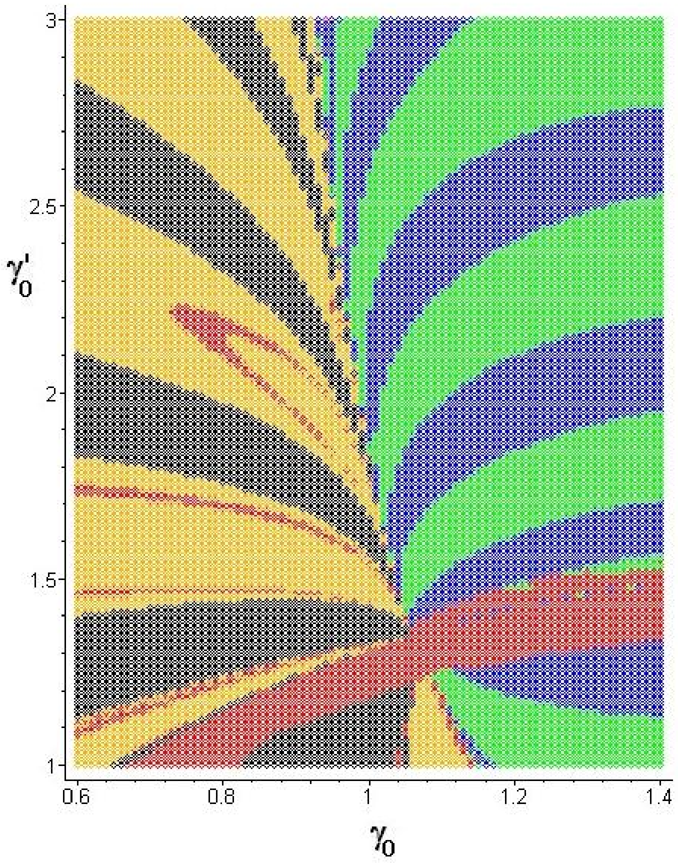


Рисунок 6.10 – $\mu = 0$, $e = 1/2$, $\varphi_0 = -\pi/2$, $\varphi_0' = 0$

Следует однако, заметить, что количество полос, соответствующих "колебаниям", то есть движений, состоящих из двух полуоборотов в противоположных направлениях, конечно и с ростом $|\gamma_0'|$ сохраняются только "вращения", то есть движения, представляющие собой повороты гантели на угол близкий к $\pm 2\pi$ (см. рис.6.7,6.8).

На всех рисунках, где присутствуют как движения типа a),b), так и движения типа c),d) можно заметить своеобразный "водораздел" между сине-зелеными и желто-черными областями. Точкам этого "водораздела" соответствуют асимптотические движения, стремящиеся к колебаниям в окрестности "горизонтального" положения гантели (часть "водораздела"

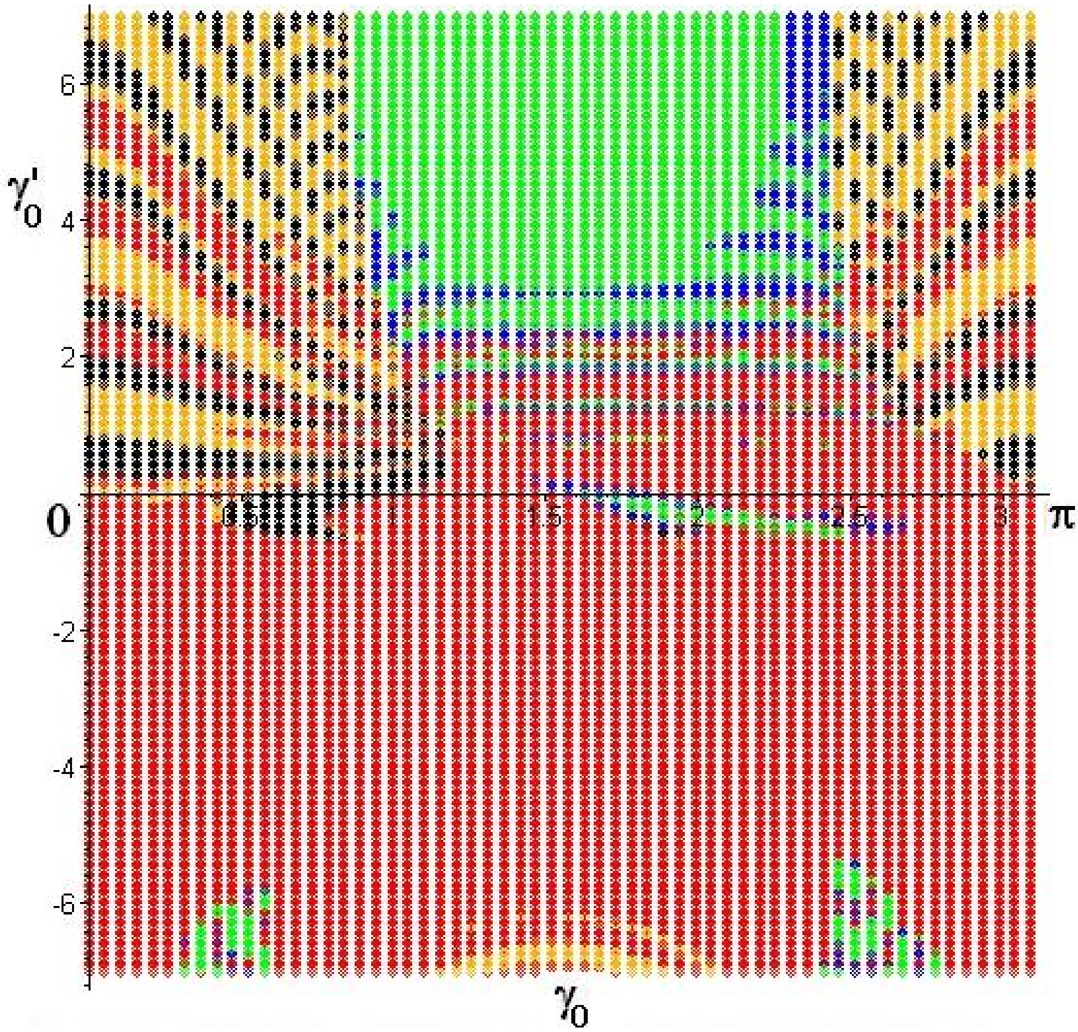


Рисунок 6.11 – $\mu = 0$, $e = 1/2$, $\varphi_0 = -\pi/2$, $\varphi_0' = 0$

подробно показана на рис. 6.10). Как нетрудно видеть, “водоразделы” есть не что иное, как сечения поверхностей, приближенно определяемых равенством (6.7).

При отклонении φ_0 от $\pm\pi/2$ и/или φ_0' от 0 структура областей различных типов движений начинает деградировать. Так, если отклонять гантель от ее “горизонтального” положения по часовой стрелке, движения гантели, начинающиеся с полуоборота против часовой стрелки начинают исчезать (см. рис 6.12,6.13), причем в дальнейшем будут преобладать “колебания”, начинающиеся с полуоборота по часовой стрелке.

В то же время при сравнительно большом (начиная с нескольких угловых минут) отклонении гантели из “горизонтального” положения против

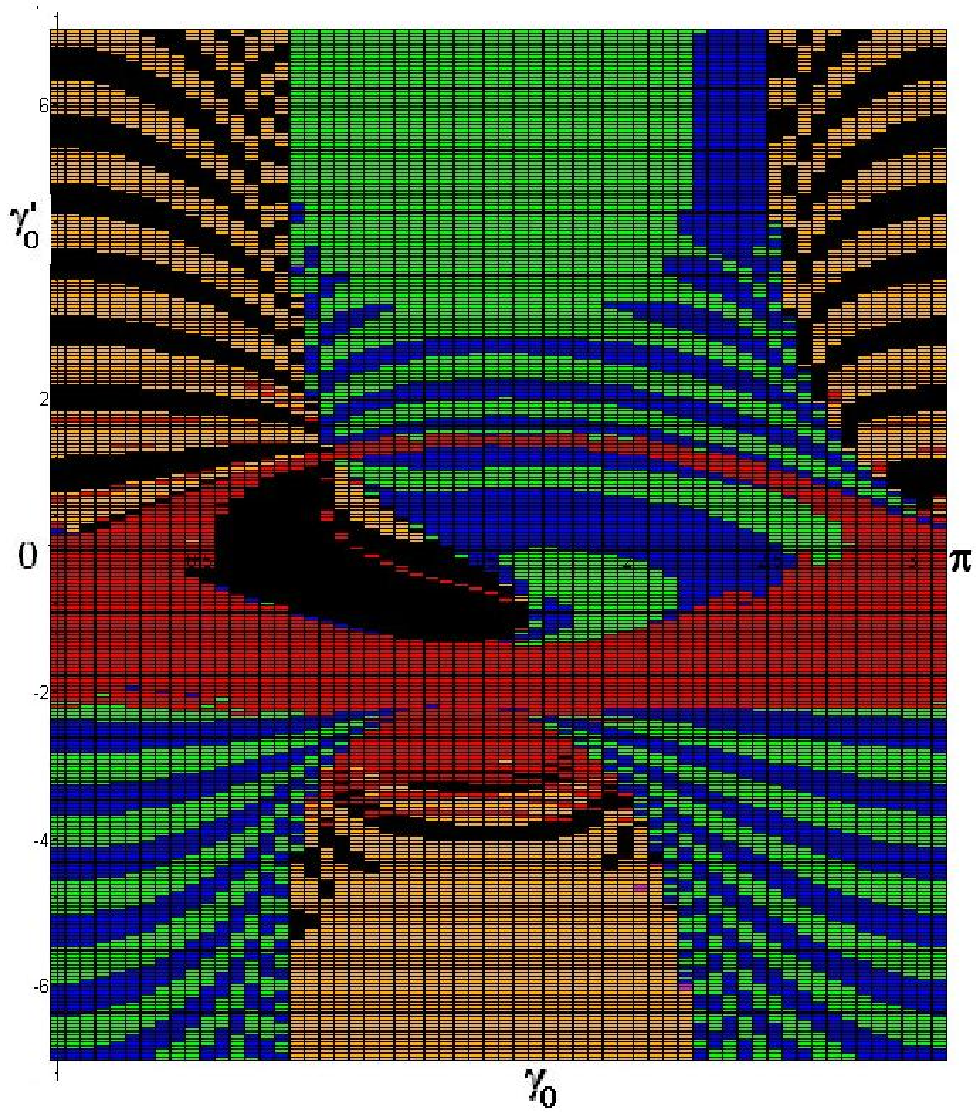


Рисунок 6.12 – $\mu = 0,\ e = 1/2,\ \varphi_0 = -90^0 1',\ \varphi_0' = 0$

часовой стрелки, движения гантели, начинающиеся с полуоборота по часовой стрелке исчезают и начинают преобладать "колебания", начинающиеся с полуоборота против часовой стрелки (см. рис. 6.14,6.15,6.16). Можно заметить, что если отождествить значения $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0 = \pi$, область "вращений" оказывается своеобразной конечной обмоткой соответствующего цилиндра (при дальнейшем отклонении сохраняются только колебания).

Если же в начальный момент времени, оставляя гантель "горизонтальной" задать некоторую небольшую положительную начальную угловую скорость ее вращения, движения гантели, начинающиеся с полуоборота по

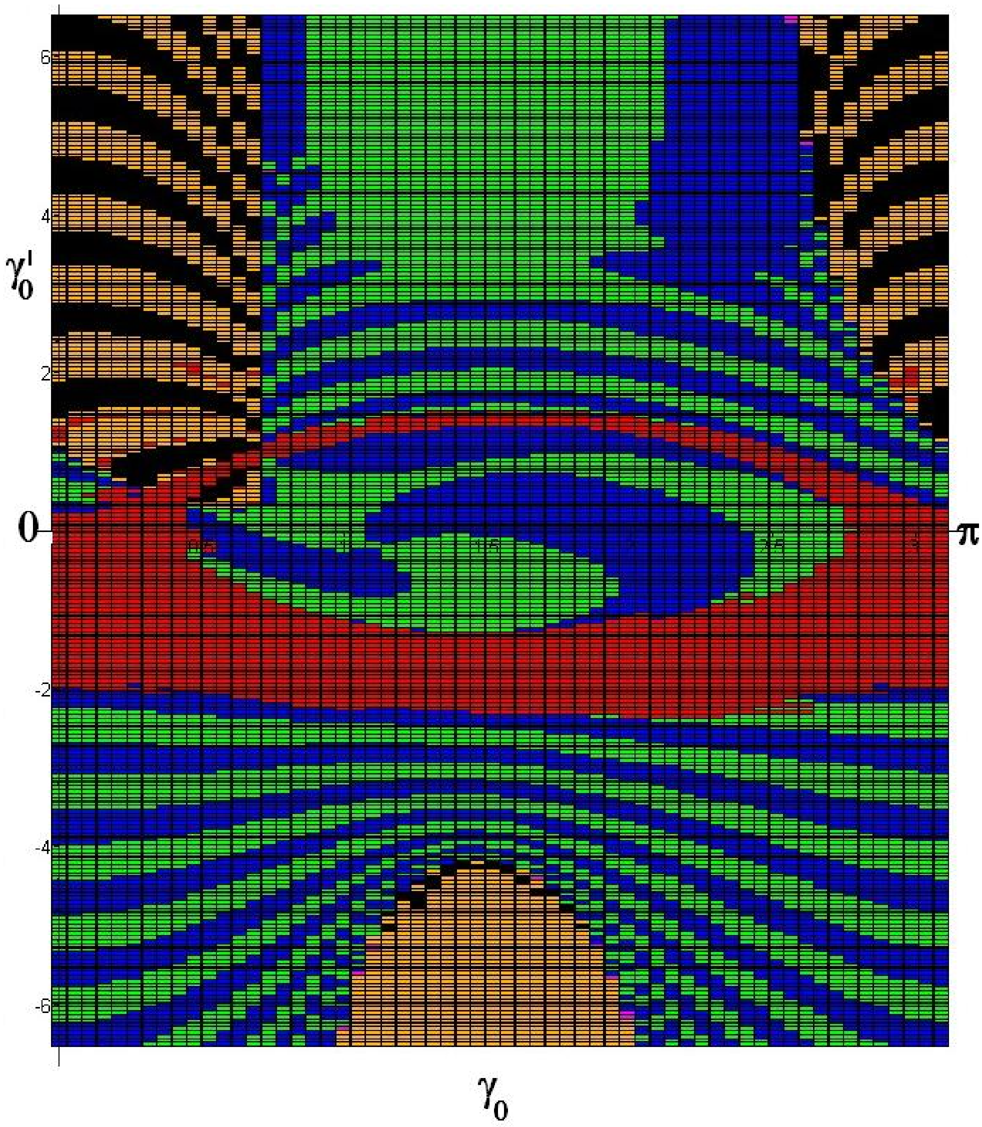


Рисунок 6.13 – $\mu = 0$, $e = 1/2$, $\varphi_0 = -90^0 3'$, $\varphi_0' = 0$

часовой стрелке, также исчезают, но начинают преобладать "вращения" против часовой стрелки, и уже исчезающяя с ростом начальной угловой скорости область "колебаний" представляется обмоткой цилиндра, получающегося отождествлением $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0 = \pi$ (см. рис. 6.17). Заметим, что изменение знака начального отклонения гантели от "горизонтального" положения и/или знака начальной угловой скорости приводит к качественно аналогичным результатам, но начинают преобладать движения, начинающиеся с полуоборотов по часовой стрелке.

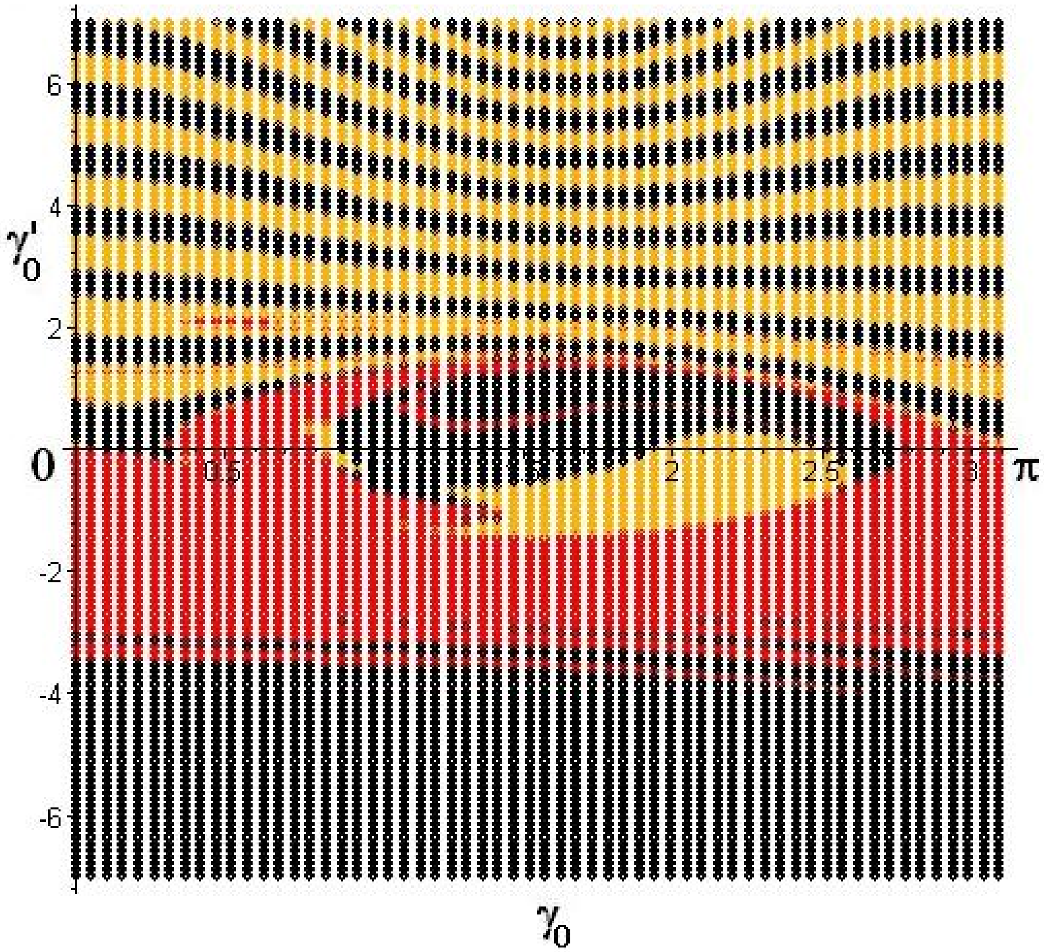


Рисунок 6.14 – $\mu = 0$, $e = 1/2$, $\varphi_0 = -89^0 42'$, $\varphi_0' = 0$

В случае $\mu \neq 0$ из-за ассимметрии гантели приходиться считать, что $0 \leq \gamma_0 < 2\pi$. Однако, картина распределния областей начальных условий для того или иного типа вращения гантели качествеенно сходна с аналогичной картиной для симметричного случая (см. рис. 6.18). Как и раньше, в плоскости ($\varphi_0 = \pm\pi/2, \varphi' = 0$ области различных типов движения представляются набором полос, причем количество полос, отвечающих "колебаниям" типа b) и d) конечно и с ростом $|\gamma_0'|$ остаются только "вращения" типа a) и c) (направление вращения при этом не определяется знаком γ_0'). Как и в симметричном случае, можно проследить "водораздел", точки которого отвечают ассимптотическим движениям, стремящимся к колебаниям

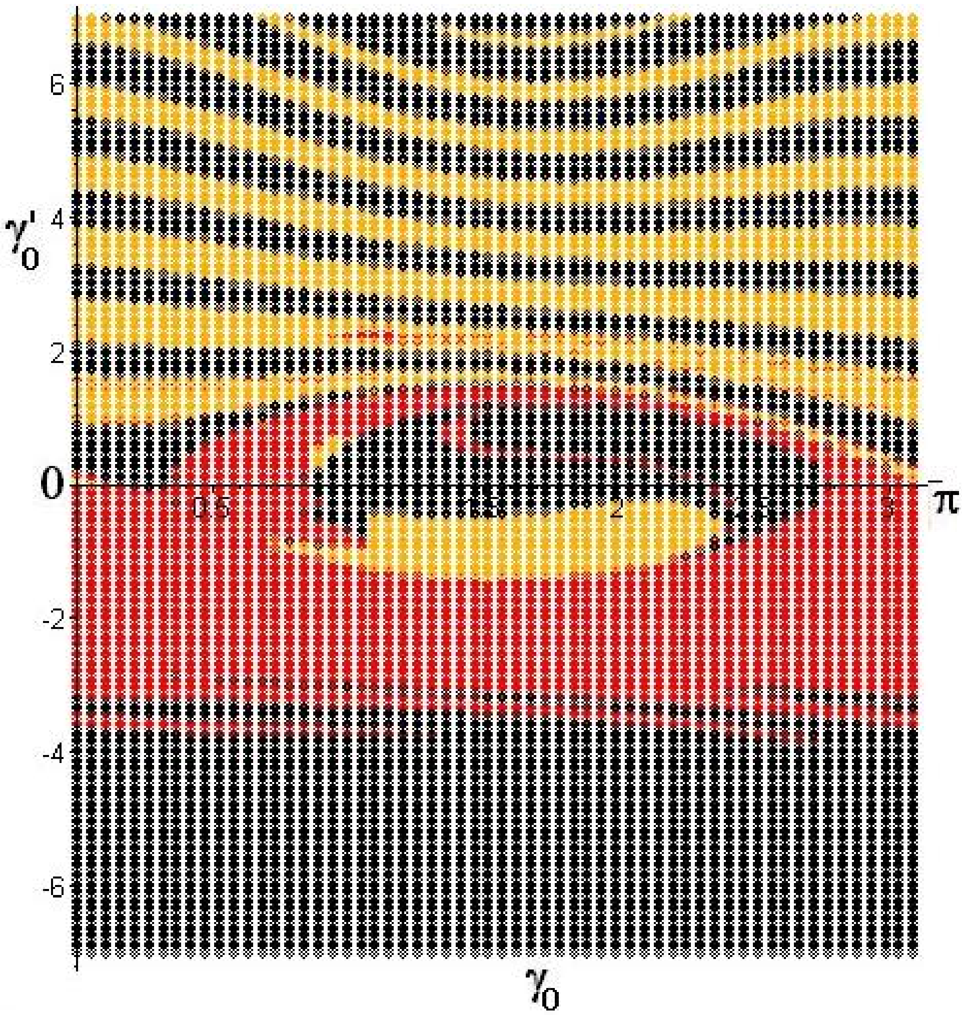


Рисунок 6.15 – $\mu = 0$, $e = 1/2$, $\varphi_0 = -89^0 25'$, $\varphi'_0 = 0$

гантели в окрестности ее “горизонтального” положения. (Отметим, что границы между зелеными и синими областями, равно как и границы между желтыми и черными областями, также отвечают анологичным асимптотическим движениям, только начинающимся с полуоборота соответственно по- или против часовой стрелки). Отметим также, что, как и следовало ожидать, при увеличении $|\varphi'_0|$ начинают преобладать ’вращения’, а при увеличении $|\varphi_0 \pm \pi/2|$ - ’колебания’.

В плоскостях вида $\gamma_0 = \mathrm{const}$, $\varphi'_0 = \mathrm{const}$ и $\gamma_0 = \mathrm{const}$, $\varphi_0 = \mathrm{const}$ ’полоски’ меняются на ’лепестки’ (см. рис. 6.19 и рис. 6.20). Здесь можно отметить, что при увеличении $|\varphi'_0|$ сначала возрастает доля “вращений”, потом остаются только “вращения”, если же увеличивается отклонение φ_0

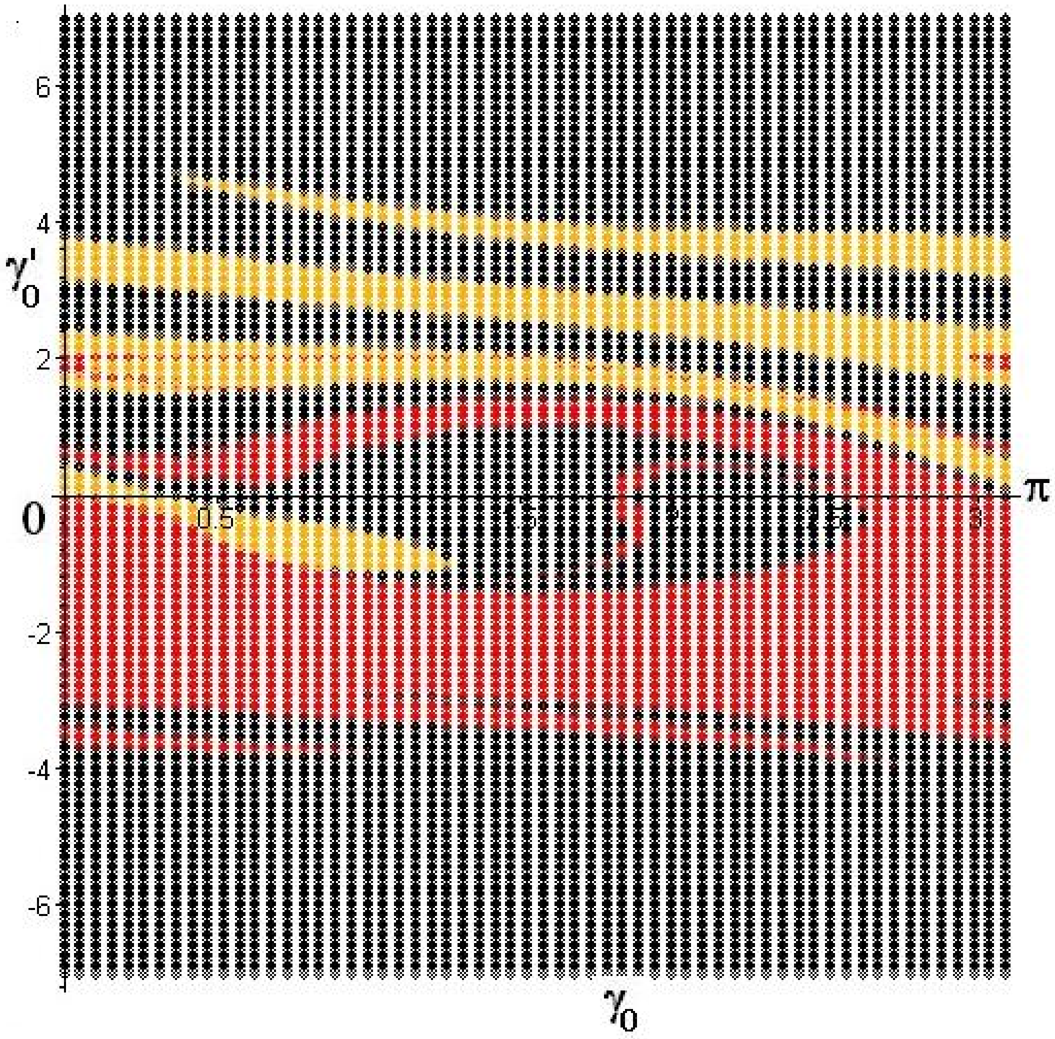


Рисунок 6.16 – $\mu = 0,\ e = 1/2,\ \varphi_0 = -87^0 8',\ \varphi_0' = 0$

от $\pm\pi/2$, то сначала увеличивается доля “колебаний”, потом остаются только колебания. Кроме того, в этих плоскостях хорошо прослеживается след поверхности асимптотических движений (“водораздел”) и тот факт, что в малой окрестности “водораздела” существуют движения всех рассматриваемых типов.

Картина областей различных движений в плоскостях $\gamma_0 = \text{const}, \gamma_0' = \text{const}$ на рис. 6.21,6.22,6.23,6.24 иллюстрирует с одной стороны разрушение фазового портрета относительного движения гантели в некоторой окрестности ее неустойчивого равновесия при различных начальных положениях и скоростях груза на леере, с другой стороны, сохранение асимптотических

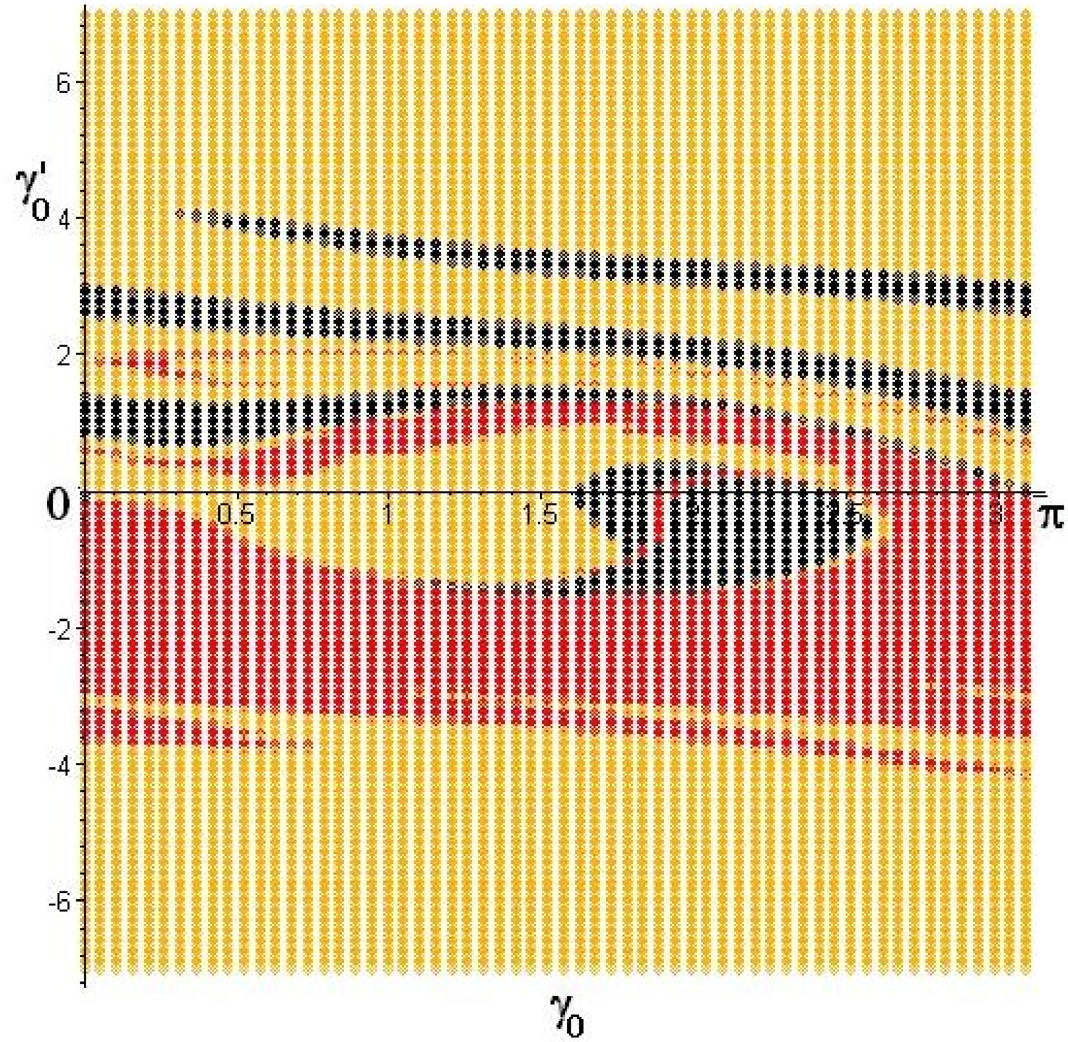


Рисунок 6.17 – $\mu = 0$, $e = 1/2$, $\varphi_0 = -\pi/2$, $\varphi_0' = 0.1$

движений, стремящихся в малую окрестность этого равновесия.

Рис. 6.25,6.26 иллюстрируют области различных типов движения гантели в плоскостях $\varphi_0' = \text{const}, \gamma_0' = \text{const}$ и $\varphi_0 = \text{const}, \gamma_0' = \text{const}$

Во всех изображенных примерах рассчеты проводились при $\kappa = 0.01$.

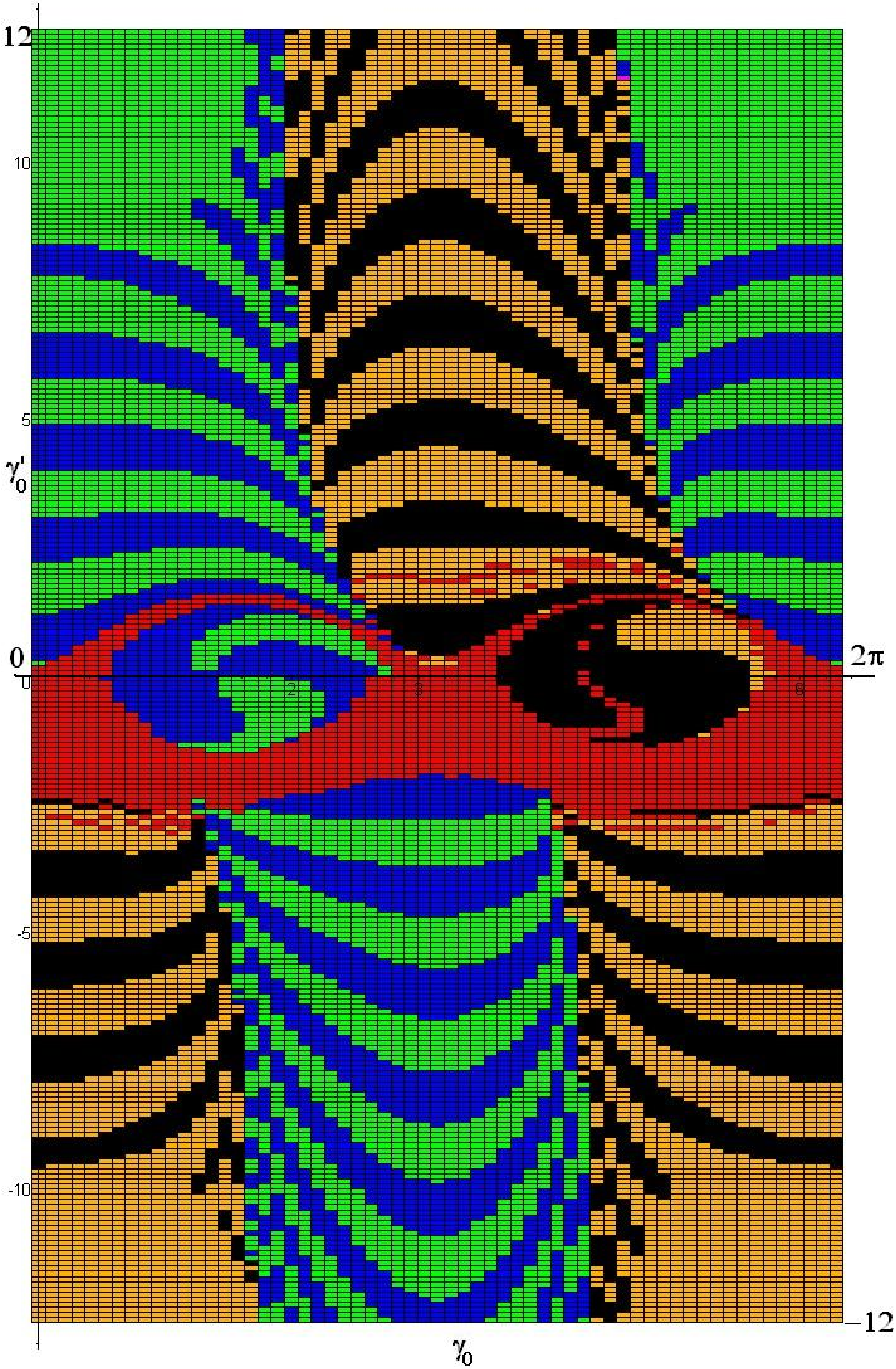


Рисунок 6.18 – $\mu = 1/3,\ e = 1/3,\ \varphi_0 = -\pi/2,\ \varphi_0' = 0$

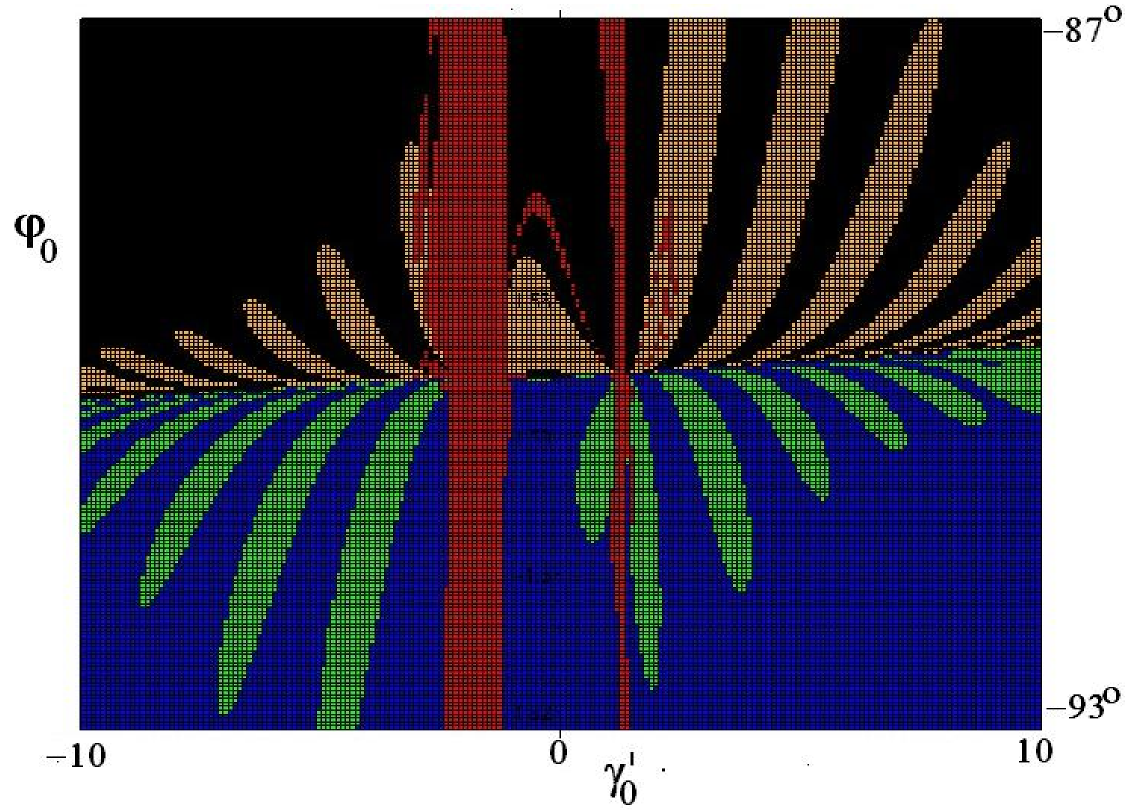


Рисунок 6.19 – $\mu = 1/3$, $e = 1/3$, $\gamma_0 = 12\pi/7$, $\varphi_0' = 0$

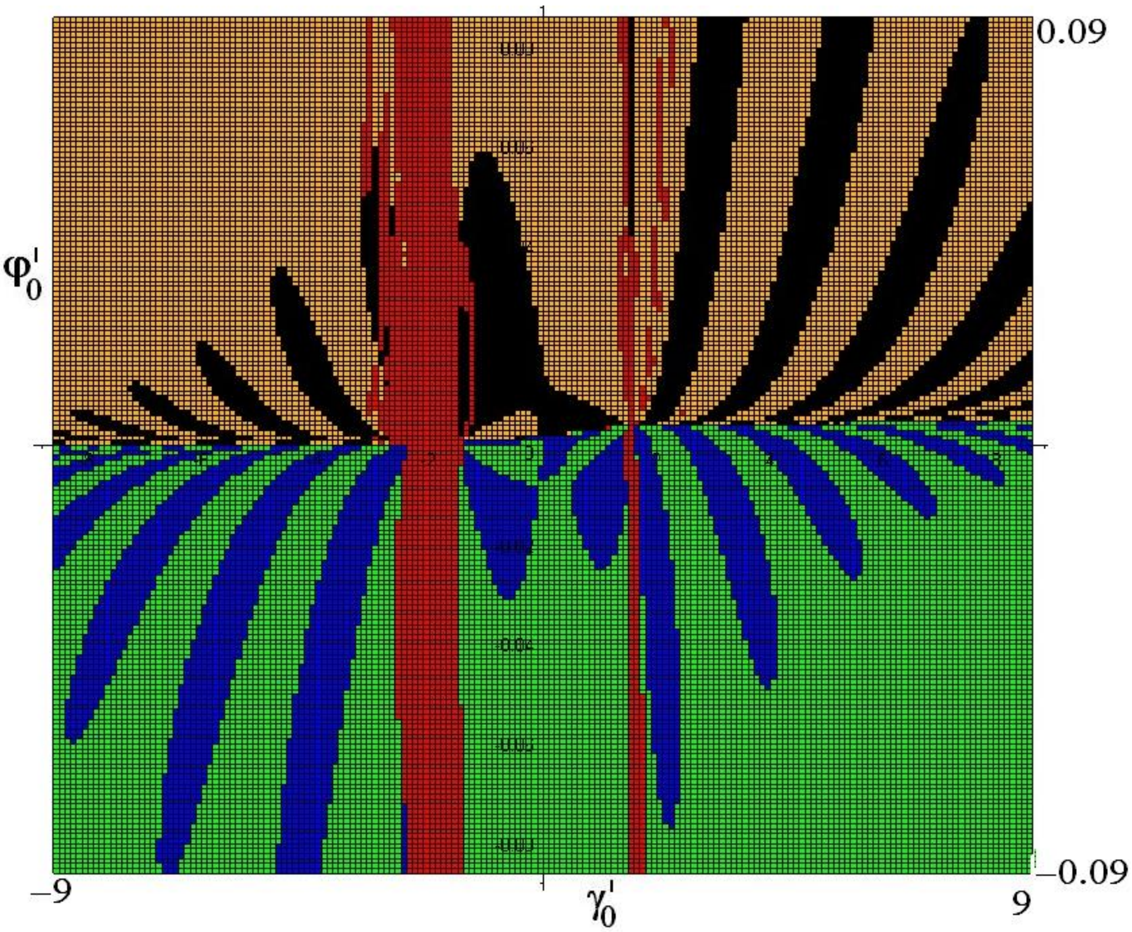


Рисунок 6.20 – $\mu = 1/3$, $e = 1/3$, $\gamma_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = -\pi/2$

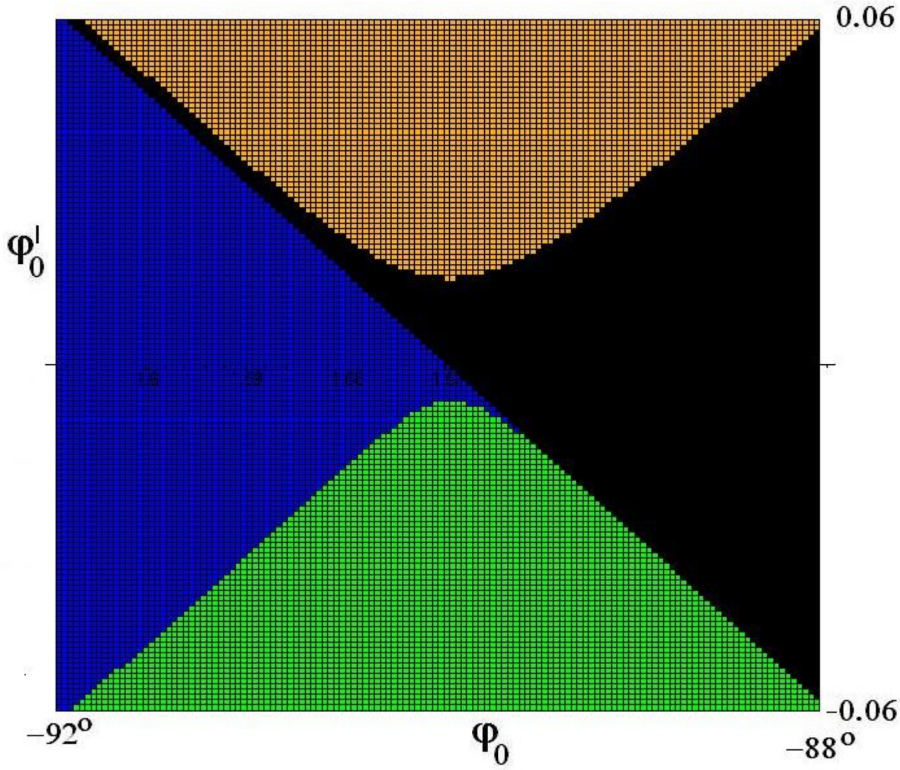


Рисунок 6.21 – $\mu = 1/3,\ e = 1/3,\ \gamma_0 = \pi/2,\ \gamma_0' = 0$

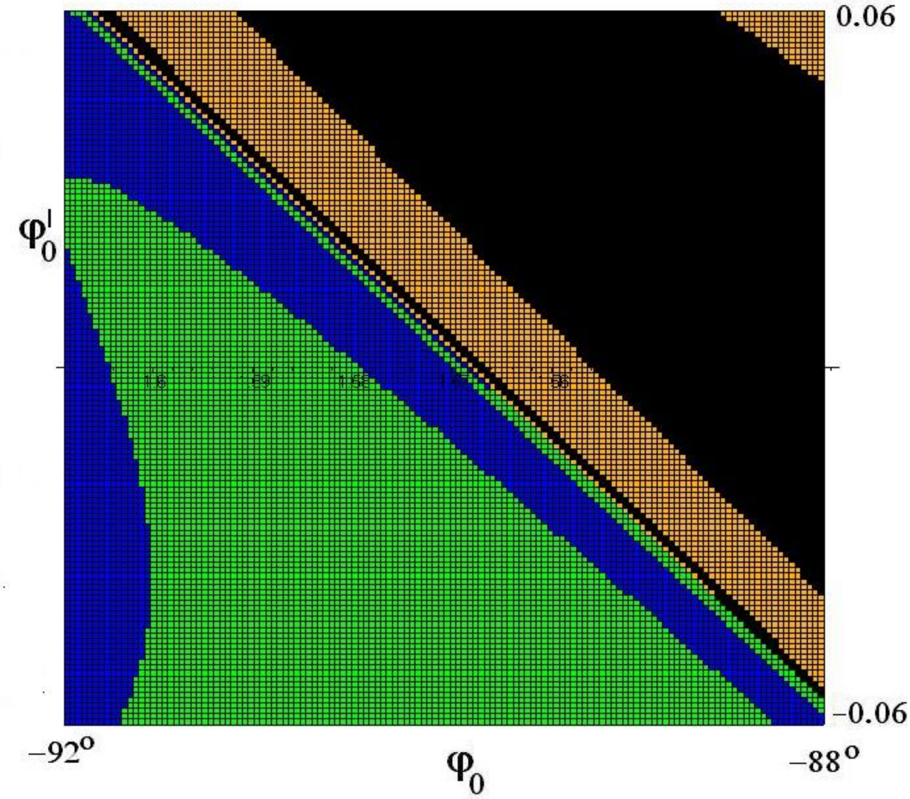


Рисунок 6.22 – $\mu = 1/3,\ e = 1/3,\ \gamma_0 = \pi/6,\ \gamma_0' = 3$

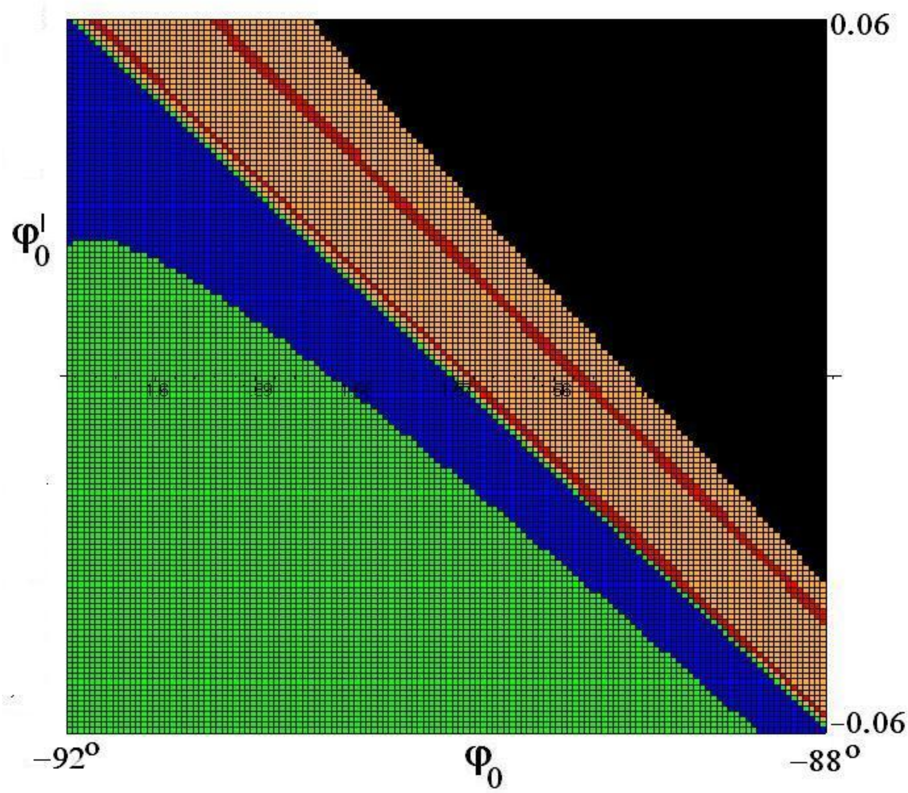


Рисунок 6.23 – $\mu = 1/3,\ e = 1/3,\ \gamma_0 = 0,\ \gamma_0' = 1$

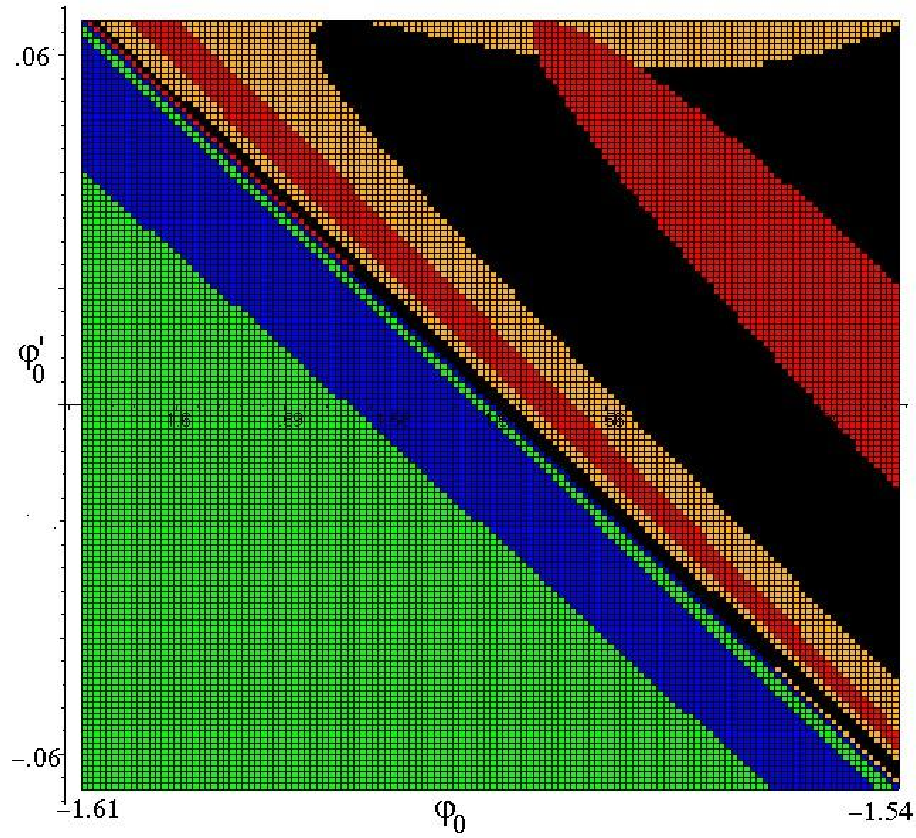


Рисунок 6.24 – $\mu = 1/3,\ e = 1/3,\ \gamma_0 = \pi/2,\ \gamma_0' = -3$

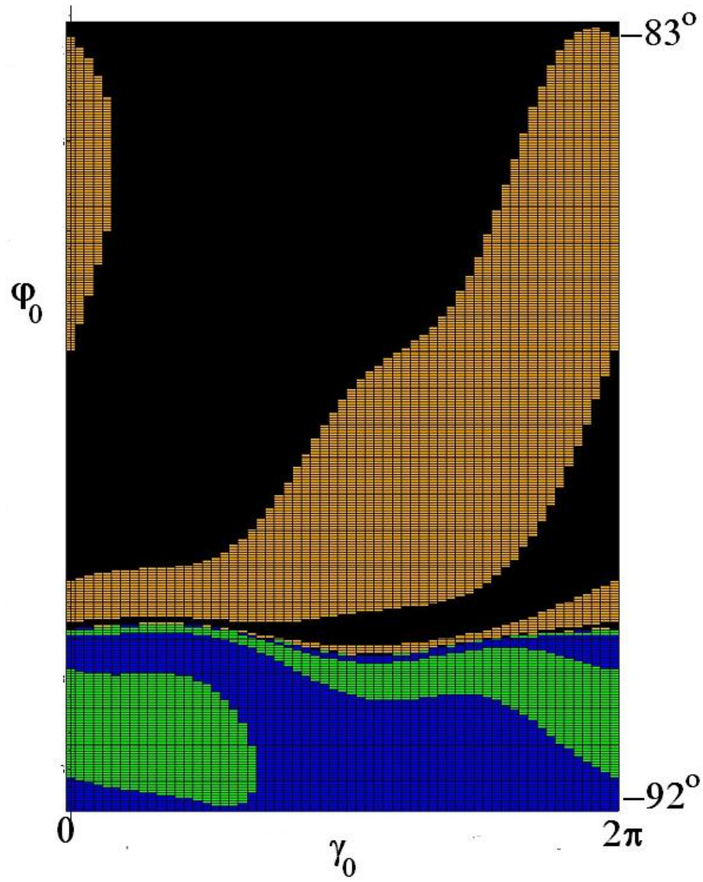


Рисунок 6.25 – $\mu = 1/3,\ e = 1/3,\ \gamma_0' = 3,\ \varphi_0' = 0$

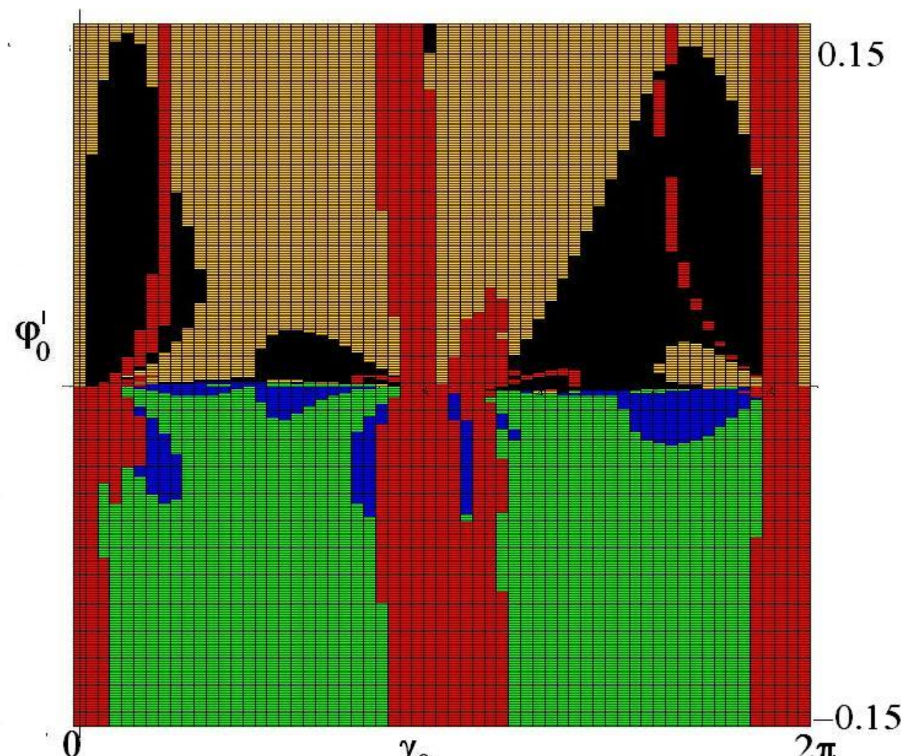


Рисунок 6.26 – $\mu = 1/3,\ e = 1/3,\ \varphi_0 = -\pi/2,\ \gamma_0' = 0$

Часть II.
Динамика материальной точки на леере, закрепленном на гравитирующем прецессирующем динамически симметричном твердом теле, и некоторые смежные задачи

ГЛАВА 7

Анализ устойчивости треугольных точек либрации Обобщенной Ограниченной Круговой Задачи Трех тел

При планировании космических миссий, предусматривающих создание космической станции в окрестности астероида, необходимо учитывать ряд факторов, усложняющих реализацию таких миссий. В частности, необходимо учитывать сложность формы астероида, следствием чего является тот факт, что вращение астероида вокруг центра масс не является перманентным вращением. Кроме того, необходимо учитывать гравитационное влияние больших тел Солнечной системы. Важно также предложить такой вариант движения станции, при котором исключается уход станции от астероида и падение на астероид. Известно, что почти во всех случаях сила тяжести Солнца на несколько порядков больше силы тяжести астероида даже на поверхности астероида. Однако, если перейти в систему отсчета, двигающуюся поступательно вместе с центром масс астероида, окажется, что абсолютная величина суммы силы тяжести Солнца и переносной силы инерции во много раз меньше силы тяжести астероида, по крайней мере, на небольшом расстоянии от его поверхности. Кроме того, если астероид является близким к динамически симметричному твердым телом (предположение, по всей видимости, справедливое для ряда астероидов), его движение вокруг центра масс можно считать регулярной прецессией. Если считать, что динамически симметричный астероид имеет вытянутую форму, то его гравитационный потенциал может быть аппроксимирован композицией потенциалов двух материальных точек, лежащих на оси динамической симметрии, причем и массы, и координаты этих точек - действительные числа.

Исходя из из сделанных предположений, можно считать, что модельной задачей для движения космической станции вблизи астероида является задача о движении материальной точки в окрестности прецессирующей гравитирующей гантели. Эта задача, впервые рассмотренная в [13], была названа Обобщенной Ограниченной Круговой Задачей Трех Тел (ООКЗЗТ), так как уравнения движения материальной точки в этом случае являются двупараметрическим обобщением уравнений движения соответствующей классической задачи. Эти уравнения допускают стационарные решения, соответствующие равновесиям материальной точки в системе координат, вращающейся вокруг оси прецессии вместе с осью динамической симметрии. Заметим, что находясь в таком положении равновесия, материальная точка, моделирующая космическую станцию, во все время движения остается на неизменном расстоянии от полюсов твердого тела, моделирующего астероид, и может быть соединена с ними леером или двумя тросами. (Очевидно, материальная точка подвижна по отношению к остальным точкам поверхности твердого тела). Однако, если соответствующее стационарное решение устойчиво, для удержания точки в окрестности твердого тела в тросах необходимости нет. В [13] определены стационарные решения, соответствующие равновесиям материальной точки в плоскости, проходящей через центр масс гантели перпендикулярно к оси прецессии. Соответствующие положения равновесия, названные Треугольными Точками Либрации (ТТЛ), являются аналогами Лагранжевых точек либрации классической Ограниченной Круговой Задачи Трех Тел (ОКЗЗТ) (см. [54, 159]). В этой главе исследуется устойчивость ТТЛ в линейном приближении.

7.1 Обобщенная Ограниченная Круговая Задача Трех Тел В.В.Белецкого

7.1.1 Параметры и уравнения движения

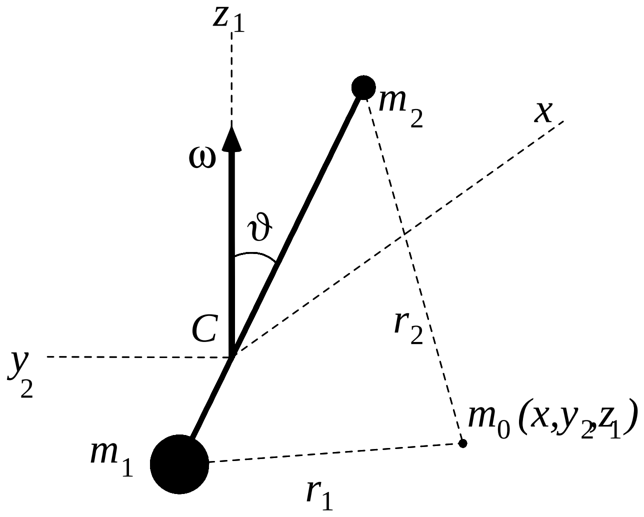


Рисунок 7.1 –

Пусть гантелевидное твердое тело длины l, состоящее из точечных масс m_1 (“туловище”) и m_1 (“голова”) ($m_1 \leq m_2$) с центром масс C совершает регулярную прецессию вокруг оси Cz_1. Обозначим угловую скорость прецессии через ω, а угол нутации через ϑ (не ограничивая общности рассуждений, $0 \leq \vartheta\pi/2$). Свяжем с осью гантели правую систему координат Cxy_2z_1 (см. 7.1) так, чтобы ось гантели, ось Cz_1 и ось Cy_2 все время находились в одной плоскости. Пусть материальная точка $m_0(x, y_2, z_1)$ настолько малой массы, чтобы не оказывать влияния на движение гантели, движется в поле тяготения последней. Перейдем к безразмерным переменным ξ_1, η_1, ζ_1 и безразмерному времени τ по формулам

$$y_2 = -l\xi_1, \quad x = l\eta_1, \quad z_1 = l\zeta_1; \quad \omega dt = d\tau. \tag{7.1}$$

Тогда уравнения движения точки m_0 запишутся как ([13])

$$\begin{cases} \xi_1'' - 2\eta_1' - \xi_1 = \dfrac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi_1} \\[2em] \eta_1'' + 2\xi_1' - \eta_1 = \dfrac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta_1} \quad , \\[2em] \zeta_1'' \qquad\qquad = \dfrac{\partial \tilde{W}}{\partial \zeta_1} \end{cases} \tag{7.2}$$

где

$$\tilde{W} = \alpha \left[\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \right], \tag{7.3}$$

$\rho_1 = r_1/l$ и $\rho_2 = r_2/l$ - безразмерные расстояния от m_0 до концов гантели. Безразмерные параметры α и μ определяются формулами

$$\alpha = \frac{G(m_1+m_2)}{\omega^2 l^3} \quad \mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}, \tag{7.4}$$

где G - константа тяготения. Очевидно, $\alpha > 0$ и $0 < \mu \leq 1/2$.

Если $\vartheta = \pi/2$ и $\alpha = 1$ уравнения (7.2) совпадают с уравнениями Ограниченной Круговой Задачи Трех Тел ([13]).

7.1.2 Треугольные точки либрации

В [13] показано, что существуют такие стационарные движения системы, при которых $r_1 = r_2$, m_0 не меняет своего положения в Oxy_2z_1 и имеет координаты

$$\begin{gathered} \xi_1 = \frac{1-2\mu}{2\sin\vartheta}; \\[1em] \eta_1 = \pm\sqrt{\alpha^{2/3} - \frac{1-4\mu(1-\mu)\cos^2\vartheta}{4\sin^2\vartheta}}; \quad \zeta_1 = 0. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Условием существования таких стационарных движений, названных ТТЛ, является неотрицательность подкоренного выражения во втором из равенств (7.5), для чего, в частности, необходимо выполнение условия $\alpha \geq$

1/8. Геометрически ТТЛ (точки L_1 и L_2 на рис. 7.2) являются точками

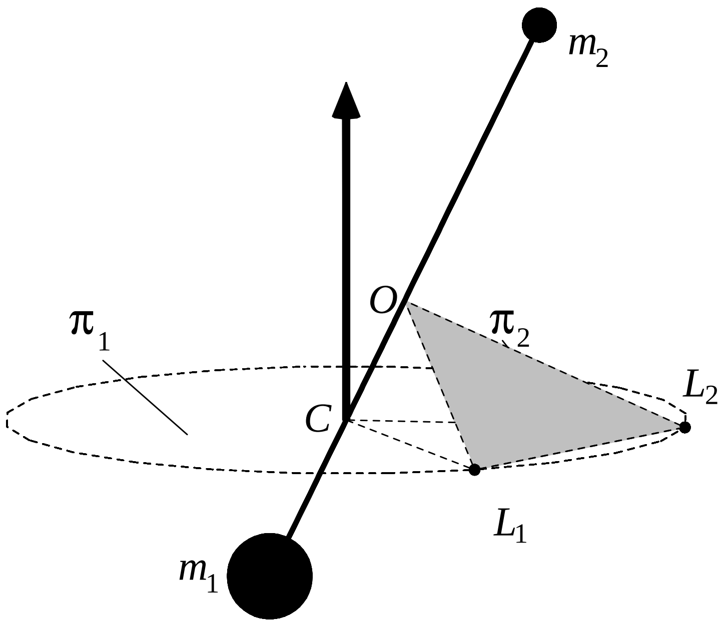


Рисунок 7.2 –

пересечения некоторой окружности с центром в центре масс гантели C в плоскости π_1, перпендикулярной оси прецессии, и плоскости π_2, проходящей через геометрический центр гантели O перпендикулярно оси гантели.

7.1.3 Характеристическое уравнение

В [13, 24] показано, что характер устойчивости треугольных точек либрации определяется корнями характеристического уравнения

$$D(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_0 = 0 \tag{7.6}$$

где

$$A_2 = 1 + 9\beta\mu(1-\mu)\sin^2\vartheta - \frac{9}{4}\beta^2\mu(1-\mu) \tag{7.7}$$

$$A_0 = 9\beta^2\mu(1-\mu)\left(\frac{\sin^2\vartheta}{\beta} + \mu(1-\mu)\cos^2\vartheta - \frac{1}{4}\right) \tag{7.8}$$

Здесь

$$\beta^2 = \frac{1}{\alpha^{4/3}}. \tag{7.9}$$

Заметим, что в силу условий существования треугольных точек либрации, $A_0 \geq 0$.

7.2 Условия устойчивости в линейном приближении

Корни уравнения (7.6) полностью определяются корнями кубического уравнения

$$x^3 + 2x^2 + A_2x + A_0 = 0, \tag{7.10}$$

что дает возможность, не используя подходы из [42], сформулировать следующие утверждения:

1. если уравнение (7.10) имеет хотя бы один комплексный корень (т.е. корень с ненулевой мнимой частью), характеристическое уравнение (7.6) имеет корень с положительной действительной частью, что гарантирует неустойчивость рассматриваемой точки либрации,
2. если уравнение (7.10) имеет положительный действительный корень, то и характеристическое уравнение (7.6) имеет положительный действительный корень, что гарантирует неустойчивость рассматриваемой точки либрации,
3. если уравнение (7.10) имеет три различных действительных отрицательных корня (то есть если его дискриминант отрицателен [31]), характеристическое уравнение (7.6) имеет три различные пары чисто мнимых корней и рассматриваемая точка либрации устойчива в первом приближении.

Заметим, что если кубическое уравнение имеет только действительные корни, то для отрицательности этих корней необходимо и достаточно чтобы все коэффициенты уравнения были положительны.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся теоремой Виета для кубического уравнения: если числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, то справедливы формулы

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b, \quad x_1x_2x_3 = -c$$

Заметим сразу, что если $x_1 < 0, \; x_2 < 0, \; x_3 < 0$, то в силу теоремы Виета $a > 0, \; b > 0, \; c > 0$. Для доказательства обратного предположим, что коэффициенты a, b, c положительны, но не все из x_1, x_2, x_3 отрицательны, тогда два корня - положительны, а один - отрицательный. Пусть для определенности $x_1 > 0, \; x_2 > 0, \; x_3 < 0$. Тогда

$$x_1 + x_2 < -x_3 < \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2},$$

откуда $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 < 0$, что неверно. Таким образом, можно утверждать, что при выполнении условий

$$d < 0; \quad A_2 > 0; \quad A_0 > 0, \tag{7.11}$$

где d - дискриминант (7.10), треугольные точки либрации, определяемые формулами (7.5) устойчивы в линейном приближении. Последнее из неравенств (7.11) с точностью до пограничной ситуации $A_0 = 0$ совпадает с условием существования треугольных точек либрации. Если же

$$d > 0 \;\; \text{или} \;\; A_2 < 0, \tag{7.12}$$

то треугольные точки либрации неустойчивы.

Условия (7.11), записанные через параметры задачи, принимают вид

$$-27q\beta\cos^6\vartheta+\frac{3}{4}(27\beta^2q^2-27\beta^2q+90\beta q-1)\cos^4\vartheta+$$

$$+\frac{3}{16}\left(-27q\beta^3+198\beta^2q-360\beta q+\frac{56}{9}-2\beta\right)\cos^2\vartheta-$$

$$-\frac{3}{64}(4-\beta)^2(9\beta^2q-36\beta q+1)<0, \tag{7.13}$$

$$\frac{\beta}{4}-\frac{1}{9\beta q}<\sin^2\vartheta,\quad \frac{\sin^2\vartheta}{\beta}+q\cos^2\vartheta>\frac{1}{4},$$

где использовано обозначение $q=\mu(1-\mu)$.

7.3 Области устойчивости в плоскости коэффициентов характеристического уравнения

Так как устойчивость треугольных точек либрации определяется значениями двух коэффициентов характеристического уравнения, удобно изобразить области, определяемые условиями (7.11) и (7.12) в плоскости переменных A_2 и A_0 (рис. 7.3,7.4). В силу положительности этих коэффициентов, область, удовлетворяющая (7.11), целиком лежит в первом квадранте этой плоскости (криволинейный треугольник BCD). Стороны BC и CD этого треугольника есть кривые, определяемые равенствами

$$A_0=\frac{2}{27}\left(9A_2-8+(4-3A_2)^{3/2}\right) \tag{7.14}$$

$$A_0=\frac{2}{27}\left(9A_2-8-(4-3A_2)^{3/2}\right) \tag{7.15}$$

соответственно, являющиеся решениями уравнения (см. [13])

$$d = \left(\frac{A_0}{2} - \frac{A_2}{3} + \frac{8}{27}\right)^2 + \left(\frac{3A_2 - 4}{9}\right)^3 = 0,$$

квадратного относительно A_0 .

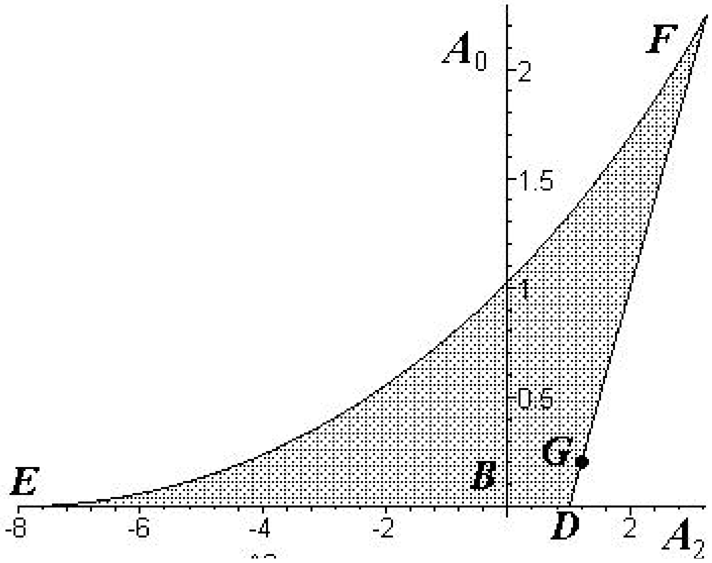


Рисунок 7.3 –

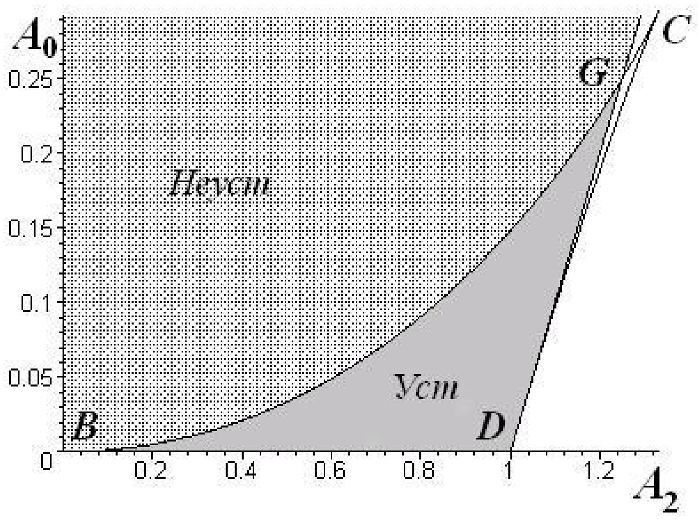


Рисунок 7.4 –

Заметим, однако, что коэффициенты A_2 и A_0 не могут принимать произвольные значения. Область допустимых значений этих коэффициентов определяется ограничениями на допустимые значения параметров задачи.

Прежде всего, из (7.7)-(7.8) следует, что $A_0 \geq A_2 - 1$, причем равенство достигается при $\vartheta = \pi/2$ или $\beta = 0$. Кроме того, как уже отмечалось, $A_0 \geq 0$ в силу условий существования треугольных точек либрации. Остается найти максмально возможное при всех допустимых ϑ, μ, β значение A_0 при фиксированном A_2 . Исключив из (7.7)-(7.8) переменную ϑ , выразим величину A_0 как функцию μ ,β и A_2 . Нетрудно убедиться, что эта функция при фиксированном A_2 достигает своего наибольшего значения на множестве допустимых значений μ ,β при

$$\mu = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{4}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{4 - A_2}{3}}\right)$$

и это наибольшее значение равно

$$A_0 = \frac{2}{27}\left(\sqrt{3}(4 - A_2)^{3/2} + 9A_2\right) \qquad (7.16)$$

Таким образом, область существования треугольных точек либрации в плоскости параметров A_2 и A_0 представляется криволинейным треугольником EFD (рис. 7.3), причем кривая EF определяется равенством (7.7), а FD - отрезок прямой $A_0 = A_2 - 1$ Заметим, что криволинейный треугольник BCD не лежит целиком внутри EFD. Малая его часть, прилегающая к вершине C, лежит вообще вне треугольника EFD и не подлежит рассмотрению. Поэтому область устойчивости представляет собой криволинейный треугольник BGD (рис. 7.4) (точка G является пересечением кривой BC и прямой DF, кривая BG определяется равенством (7.14), GD - отрезок прямой $A_0 = A_2 - 1$).

Координаты характерных точек на рис. 7.3 и 7.4: $B(0;0)$, $C(4/3;8/27)$, $D(1;0)$, $E(-8;0)$, $F(15/4;9/4)$, $G(5/4;1/4)$.

Итак, три параметра μ, α (или β), ϑ рассматриваемой задачи удачно “упаковываются” формулами (7.7)-(7.8) в два параметра A_0 и A_2, и можно сформулировать следующие два утверждения:

1. Каковы бы ни были значения параметров μ, β, ϑ, отвечающая этим значениям треугольная точка либрации устойчива (в линейном смысле), если значения параметров $A_2(\mu, \beta, \vartheta)$ и $A_0(\mu, \beta, \vartheta)$, вычисляемые по формулам (7.7)-(7.8), таковы, что определяют точку в плоскости (A_2, A_0), лежащую внутри криволинейного треугольника BGD (рис. 7.4).
2. Если в плоскости (A_2, A_0) изображающая точка $A_2(\mu, \beta, \vartheta), A_0(\mu, \beta, \vartheta)$ лежит внутри треугольника EDF (рис. 7.3), но вне треугольника BGD (рис. 7.4), то для всех этих значений μ, β, ϑ треугольная точка либрации неустойчива.

7.4 Область устойчивости в случае $\vartheta = \pi/2$

Построенная на рис. 7.4 область устойчивости является отображением трехмерной области в пространстве параметров μ, β, ϑ на двумерную область в пространстве параметров A_2, A_0. Для изучения характера этого отображения изучим сначала частный случай, когда гантель перпендикулярна вектору ее кинетического момента. По-существу, имеем однопараметрическое β-обобщение классической ограниченной круговой задачи трех тел, в котором два массивных тела связаны между собой жесткой связью и поэтому могут вращаться вокруг общего центра масс с любой угловой скоростью. В этом случае для существования треугольных точек либрации достаточно выполнения условия $0 < \beta \leq 4$. Если $\vartheta = \pi/2$, то $A_0 = A_2 - 1$ и на диаграмме, изображенной на рис. 7.4 всему рассматриваемому случаю соответствует отрезок DF. Условие устойчивости в линейном приближении сводится к неравенству $d < 0$, а неустойчивости $d > 0$. Условие устойчивости, выраженное через параметры задачи, имеет вид

$$\mu(1-\mu) < \frac{1}{9\beta(4-\beta)} \tag{7.17}$$

Область устойчивости в осях β и $q = \mu(1-\mu)$ (заметим, что $0 < q \leq 1/4$) изображена на рис. 7.5. Точки, отмеченные на этом рисунке, имеют следующие координаты: $A(2-4\sqrt{2}/3; 1/4)$; $B(1; 1/27)$; $C(2; 1/36)$; $D(2+4\sqrt{2}/3; 1/4)$. В качестве иллюстрации рассмотрим классический случай, т.е. $\beta = 1$ (пунктирная линия на рис. 7.5). Из неравенства (7.17) получим

$$\mu(1-\mu) < \frac{1}{27},$$

что совпадает с условием устойчивости в линейном приближении в классической задаче (см., например,[54]).

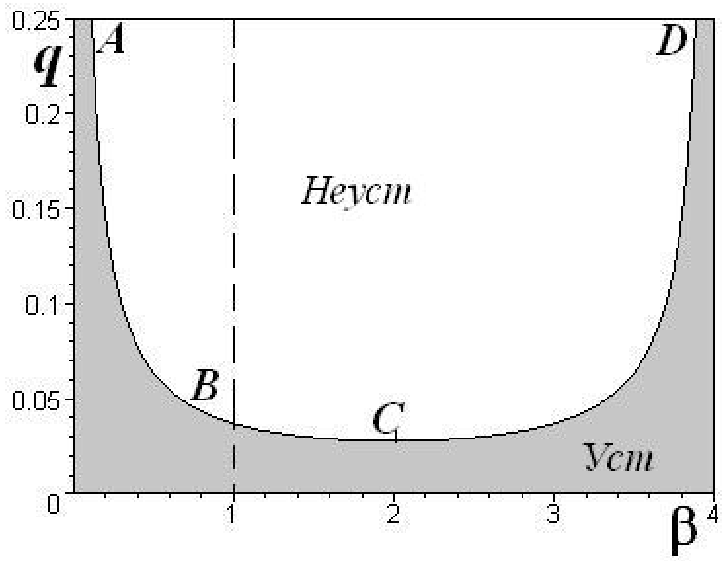


Рисунок 7.5 –

7.5 Линии уровня параметров на плоскости коэффициентов характеристического уравнения

Изучим теперь случай, когда $\vartheta \neq \pi/2$, то есть движение гантели существенно пространственное. Рассмотрим на плоскости коэффициентов A_2, A_0 характеристического уравнения (7.6) кривые, определяемые условиями

$$\mu(1-\mu) = \text{const}; \quad \vartheta = \text{const} \neq \frac{\pi}{2}; \quad \beta \in [0; \beta_{\max}] \tag{7.18}$$

где $\beta_{\max}$ определяется из условия существования треугольных точек либрации по формуле

$$\beta_{\max} = \frac{4\sin^2\vartheta}{1 - 4\mu(1-\mu)\cos^2\vartheta} \tag{7.19}$$

(при $\mu = 1/2$ справедливо равенство $\beta_{\max} = 4$). Кривые (7.18) можно назвать "линиями уровня"параметров задачи. Заметим, прежде всего, что все линии уровня выходят из точки $A_0 = 0, A_2 = 1$ (при $\beta = 0$) и заканчиваются на прямой $A_0 = 0$ (при $\beta = \beta_{\max}$). Все линии уровня можно разделить на три типа: I - когда линия уровня не покидает область устойчивости (рис. 7.6),

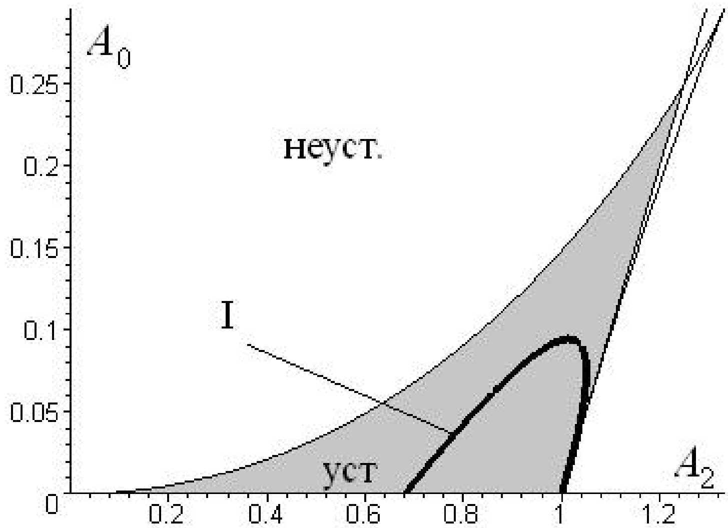


Рисунок 7.6 –

II - когда линия уровня при увеличении β сначала покидает область устойчивости, а потом возвращается в нее (рис. 7.7) и

III - когда линия уровня, покинув область устойчивости, уже в нее не возвращается (рис. 7.8).

В соответствии с этой классификацией множество допустимых значений параметров μ и ϑ можно разделить соответственно на области I, II, III. Диаграмма таких областей приведена на (рис. 7.9).

На этом рисунке $u = \cos^2\vartheta$ и $q = \mu(1-\mu)$. Точки, отмеченные на этой

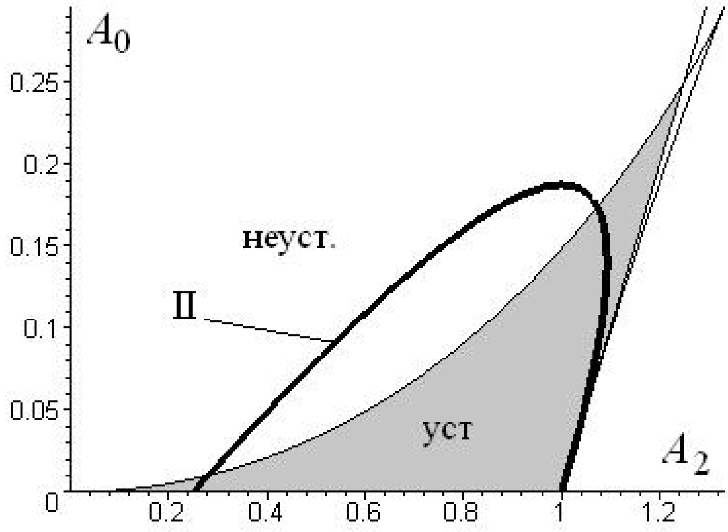


Рисунок 7.7 –

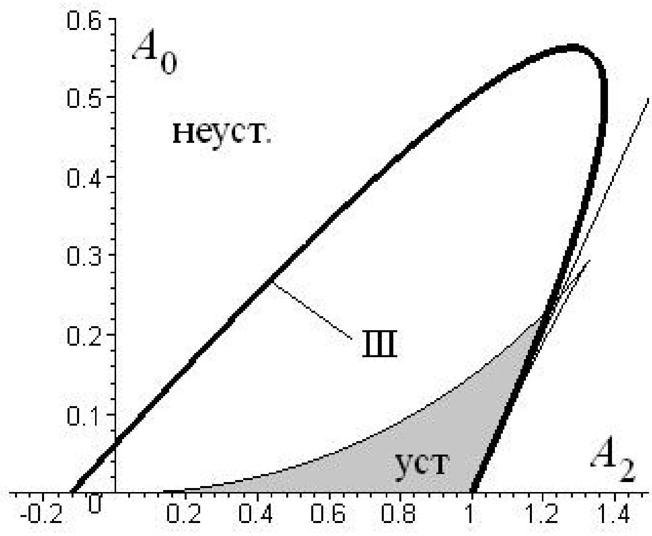


Рисунок 7.8 –

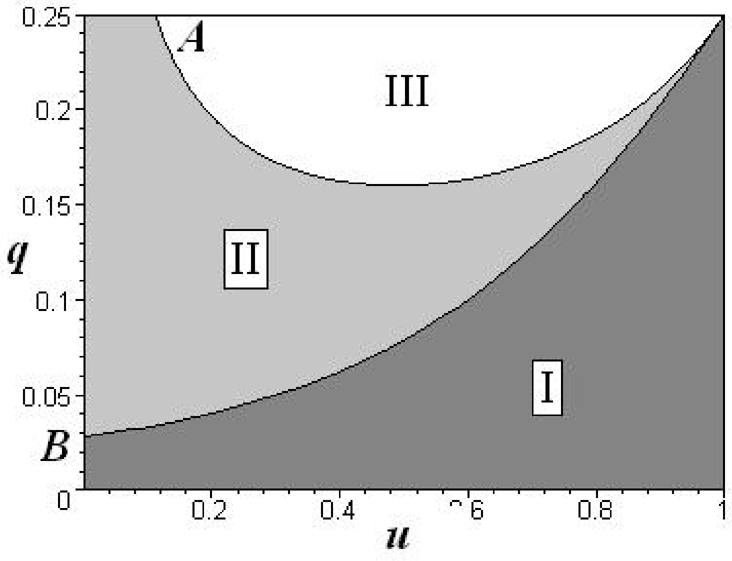


Рисунок 7.9 –

диаграмме имеют координаты $A(1/9;1/4)$, $B(0;1/36)$. Кривая, разделяющая области II и III, определяется формулой

$$\mu(1-\mu) = \frac{-|\cos\vartheta| + 3\sin^2\vartheta}{4|\cos\vartheta|(9 - 19\cos^2\vartheta + 9\cos^4\vartheta)}$$

а кривая, разделяющая области I и II формулой

$$\mu(1-\mu) = \frac{1}{4\cos^2\vartheta} + \frac{3}{8}\tan^4\vartheta \cdot \left(3 - \sqrt{9 + 4\frac{\cot^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}}\right)$$

Отметим, что граница областей I и II и граница областей II и III касаются друг друга в точке $u = 1$, $q = 1/4$, т.е. при $\vartheta = 0$ и $\mu = 1/2$.

Анализ диаграммы областей I, II, III позволяет сделать следующие выводы об устойчивости треугольных точек либрации, а именно, если треугольные точки либрации существуют и не совпадают, справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. Если

$$\mu(1-\mu) < \frac{1}{36}, \tag{7.20}$$

то треугольные точки либрации устойчивы при любых допустимых значениях параметров ϑ и β.

(Неравенство (7.20) можно рассматривать как “достаточное условие устойчивости в линейном смысле”).

Утверждение 2. Для каждого фиксированного значения угла нутации ϑ найдется такое значение μ_0, что треугольные точки либрации будут устойчивы при $0 < \mu < \mu_0$ и любых допустимых значениях угловой скорости прецессии (т.е.при любых допустимых β). При этом если ϑ стремится к 0, то μ_0 стремится к $1/4$.

Утверждение 3. Если значения параметров ϑ и μ отвечают линии уровня типа II (область II на рис. 7.9), то существуют такие числа β_1 и β_2 ($0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_{\max}$), что треугольные точки либрации устойчивы при $\beta \in (0; \beta_1) \cup (\beta_2; \beta_{\max})$ и неустойчивы при $\beta \in (\beta_1; \beta_2)$.

Утверждение 4. Если значения параметров ϑ и μ отвечают линии уровня типа III (область III на рис. 7.9), то существует такое число β_1 ($0 < \beta_1 < \beta_{\max}$), что треугольные точки либрации устойчивы при $\beta \in (0; \beta_1)$ и неустойчивы при $\beta \in (\beta_1; \beta_{max})$.

Утверждение 5. Каковы бы ни были угол нутации и соотношение масс на концах гантели, всегда найдутся значения угловой скорости прецессии, при которых треугольные точки либрации устойчивы.

7.6 Случай симметричной гантели

Заметим, что линии уровня параметров задачи могут выходить на границу области возможных значений коэффициентов характеристического уравнения в своей внутренней точке (т.е. касаться кривой EF на рис. 7.3) только в случае $\mu = 1/2$, т.е. когда гантель симетрична. На плоскости параметров β и $u = \cos^2 \vartheta$ в этом случае существуют две области устойчивости (рис. 7.10), отвечающие окрестностям нулевого и предельно возможного значения угловой скорости прецессии (т.е. в окрестности значений $\beta = 0$

и $\beta = 4$ соответственно). Криволинейные границы областей устойчивости определяются уравнением

$$\frac{27}{4}\beta\cos^6\vartheta + \left(\frac{243}{64}\beta^2 - \frac{135}{8}\beta + \frac{3}{4}\right)\cos^4\vartheta +$$

$$+\left(\frac{81}{64}\beta^3 - \frac{297}{32}\beta^2 + \frac{69}{4}\beta - \frac{7}{6}\right)\cos^2\vartheta + \frac{3}{64}(4-\beta)^2\left(\frac{9}{4}\beta^2 - 9\beta + 1\right) = 0$$

Координаты точек на рис. 7.10 есть $A(2 - 4\sqrt{2}/3; 0)$, $B(4/3; 0)$; $C(4; 1/9)$; $D(2 + 4\sqrt{2}/3; 0)$.

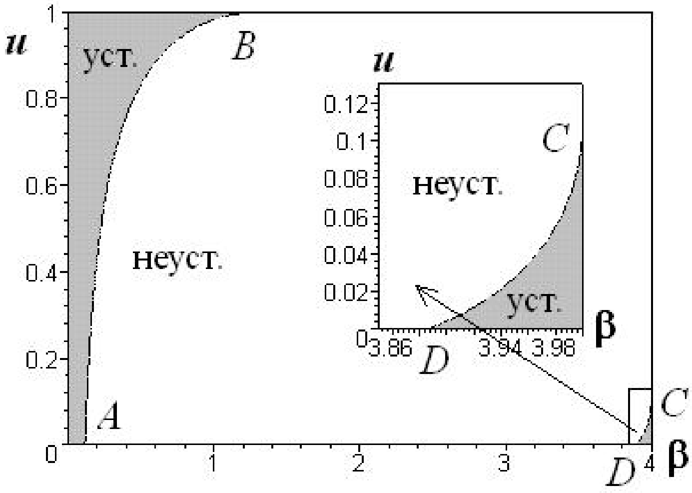


Рисунок 7.10 –

Отметим, что анализируя линии уровня для симметричной гантели, можно показать, что каждая из областей устойчивости, изображенных на рис. 7.10, взаимнооднозначно соответствует треугольнику устойчивости в плоскости коэффициентов характеристического уравнения (рис. 7.3,7.4).

7.7 Эволюция областей устойчивости при изменении параметров задачи

В заключение изучим эволюцию областей устойчивости при изменении каждого из трех параметров задачи. Рассмотрим сечения пространства параметров задачи плоскостями

$$\vartheta = \text{const}; \quad \mu = \text{const}, \quad \beta = \text{const}$$

7.7.1 Эволюция областей устойчивости в плоскости (β, q) (рис. 7.11,7.12)

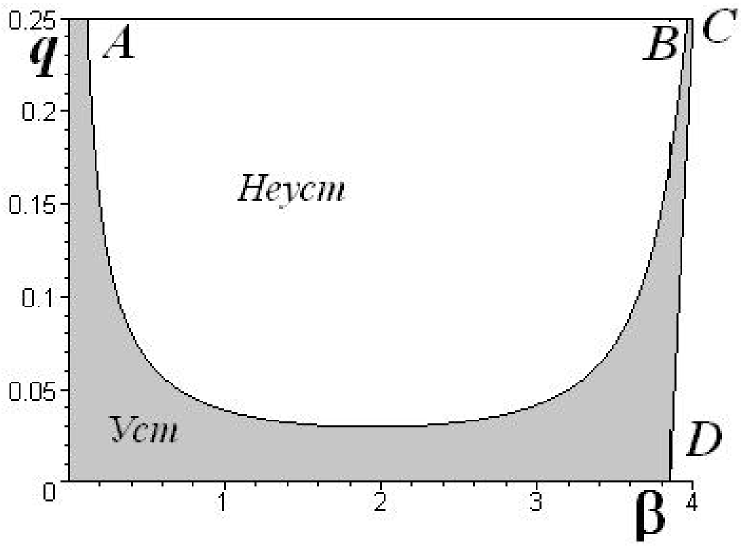


Рисунок 7.11 –

Рассмотрим сначала эволюцию областей устойчивости при различных значениях ϑ в плоскости (β, q). Ситуация, когда $\vartheta = \pi/2$, изображена на рис. 7.5. В случае, когда $\arccos(1/3) < \vartheta$ область устойчивости изображена на рис. 7.11. Если $\vartheta = \arccos(1/3)$, то точки B и C на этом рисунке сливаются.

Если же $0 < \vartheta < \arccos(1/3)$ область устойчивости представлена на рис. 7.12. При стремлении величины угла нутации к 0 эта область устойчивости вырождается в ломаную, соединяющую точки с координатами $(0; 0)$,$(0; 1/4)$,$(4/3; 0)$. Кривая AB на рис. 7.11 и кривая AE на рис. 7.12

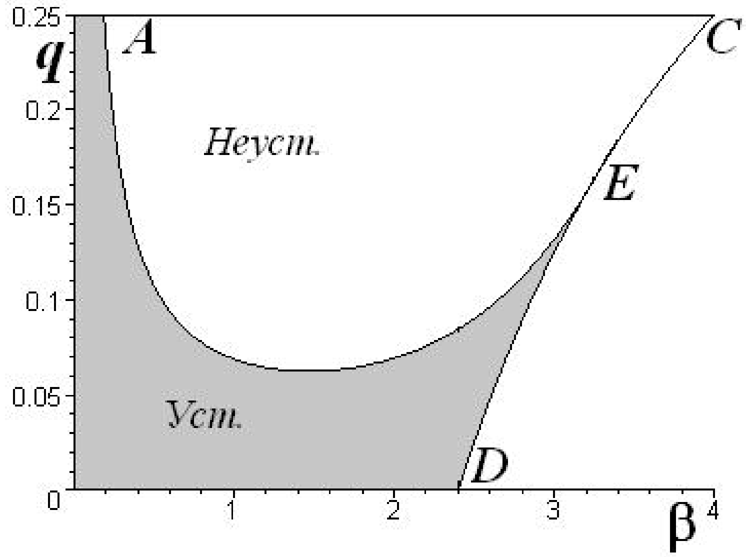


Рисунок 7.12 –

определяются формулой

$$\mu(1-\mu)=\frac{\sqrt{3}\left(48\cos^4\vartheta-8(10-3\beta)\cos^2\vartheta+3(4-\beta)^2\right)^{3/2}}{864\beta\cos^2\vartheta}+$$
$$+\frac{\left(\beta-4\sin^2\vartheta\right)\left(16\cos^4\vartheta-8(3-\beta)\cos^2\vartheta+(4-\beta)^2\right)}{96\beta\cos^4\vartheta}, \tag{7.21}$$

а кривая CD равенством

$$\mu(1-\mu)=\frac{1}{4\cos^2\vartheta}-\frac{\tan^2\vartheta}{\beta} \tag{7.22}$$

Координаты характерных точек на рис. 7.11,7.12 : $A(\tilde{\beta}_1, 1/4)$, $B(\tilde{\beta}_2, 1/4)$, $C(4, 1/4)$, $D(4\sin^2\vartheta, 0)$,

$$E\left(4\sin^2\vartheta+\frac{4}{3}|\cos\vartheta|, \frac{1}{4|\cos\vartheta|(3\sin^2\vartheta+|\cos\vartheta|)}\right)$$

Величины $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$ являются действительными корнями уравнения четвертой степени относительно β :

$$-\frac{27}{256}\beta^4+\frac{81}{64}\sin^2\vartheta\cdot\beta^3-\frac{3}{64}\left(81\cos^4\vartheta+109\cos^2\vartheta-198\right)\beta^2+$$
$$+\frac{3}{8}\sin^2\vartheta\cdot\left(18\cos^4\vartheta-27\cos^2\vartheta+19\right)\beta+\frac{7}{6}\cos^2\vartheta-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos^4\vartheta=0 \tag{7.23}$$

7.7.2 Эволюция областей устойчивости в плоскости $(\beta, u = \cos^2\vartheta)$ (рис. 7.13,7.14,7.15)

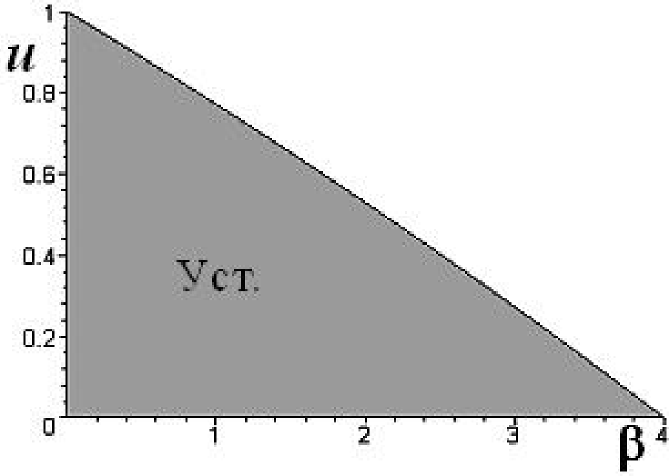


Рисунок 7.13 –

Рассмотрим теперь эволюцию областей устойчивости при различных значениях μ в плоскости $(\beta, u = \cos^2\vartheta)$. Как было отмечено выше, при $0 < \mu(1-\mu) \leq 1/36$ точки либрации устойчивы при всех тех значениях ϑ и β, когда треугольные точки либрации существуют (см. рис. 7.13).

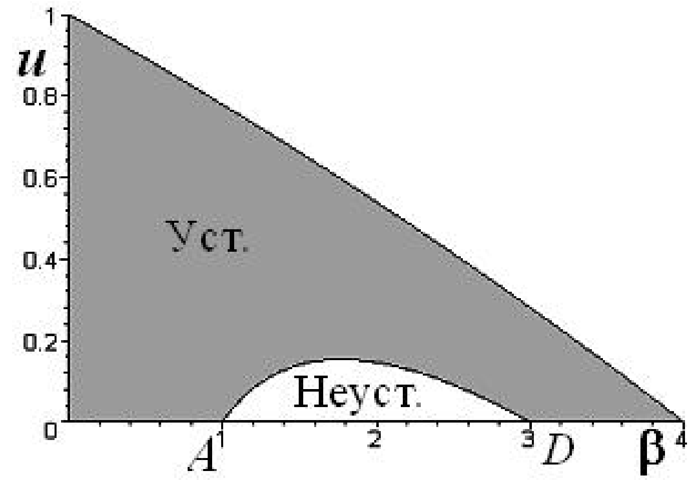


Рисунок 7.14 –

При $1/36 < \mu(1-\mu) < q_1$ появляется область неустойчивости, но область устойчивости остается односвязной (рис. 7.14).

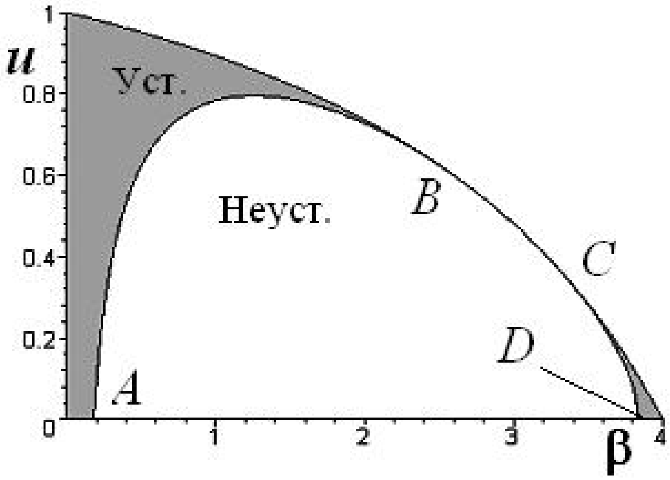


Рисунок 7.15 –

В случае $q_1 \leq \mu(1-\mu) \leq 1/4$ область устойчивости становится двусвязной (рис. 7.15) и с ростом μ стремится к ситуации, изображенной на рис. 7.10.

Величина q_1 определяется формулой

$$q_1 = -\frac{83}{1332} + \frac{28\sqrt{7}}{333} \approx 0.1601532634$$

На рис. 7.13,7.14,7.15 кривая, соединяющая точки с координатами $(0;1)$ и $(4;0)$ определяется первым из неравенств (7.13), а кривые AD, AB и CD - равенством

$$\cos^2\vartheta = \frac{4-\beta}{4(1-\beta\mu(1-\mu))}$$

Координаты характерных точек на рис. 7.13,7.14,7.15:

$$A\left(2-\frac{1}{3}\sqrt{36-\frac{1}{q}};0\right),\quad D\left(2+\frac{1}{3}\sqrt{36-\frac{1}{q}};0\right)$$

Аналитическая процедура определения координат точек B и C оказывается весьма сложной, поэтому координаты этих точек при каждом фиксированном μ проще определять численно.

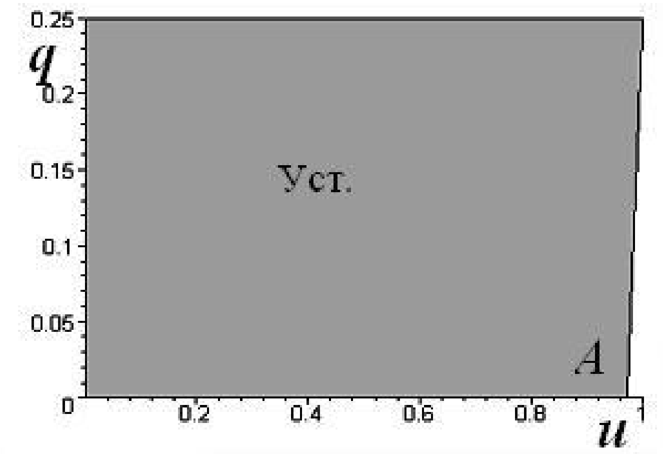


Рисунок 7.16 –

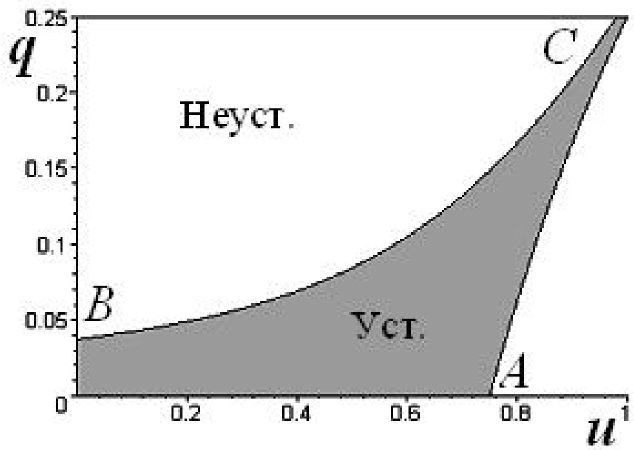


Рисунок 7.17 –

7.7.3 Эволюция областей устойчивости в плоскости (u, q) (рис. 7.16,7.17,7.18,7.19)

Рассмотрим, наконец, эволюцию областей устойчивости при различных значениях β в плоскости (u, q). Заметим, что в случае

$$0 < \beta \leq 2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

треугольные точки либрации устойчивы при всех тех значениях ϑ и μ, когда треугольные точки либрации существуют (рис. 7.16).

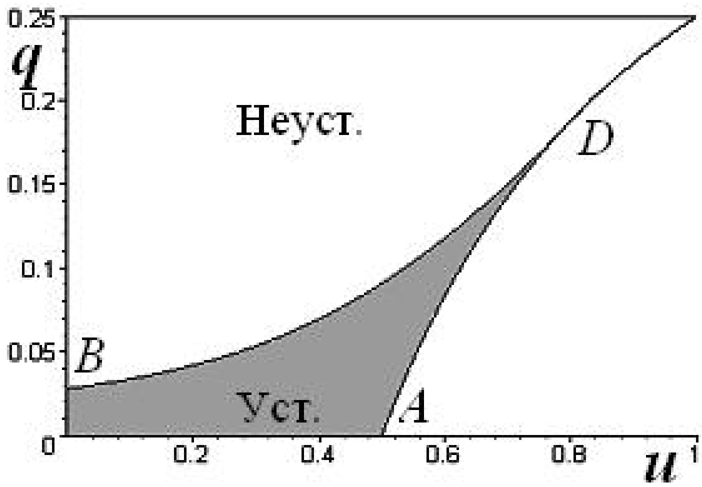


Рисунок 7.18 –

В случае, когда

$$2 + \frac{4}{3}\sqrt{2} \leq \beta < 4 \qquad \text{или} \qquad 2 - \frac{4}{3}\sqrt{2} < \beta < \frac{4}{3}$$

треугольные точки либрации могут быть устойчивы при любых μ , но не при всех ϑ (рис. 7.17 и 7.19 соответствено).

Если же

$$\frac{4}{3} \leq \beta \leq 2 + \frac{4}{3}\sqrt{2},$$

то для каждого такого β существует такое $\mu_\star$, что при $1/2 \geq \mu > \mu_\star$ точки либрации неустойчивы при любых допустимых ϑ (рис. 7.18).

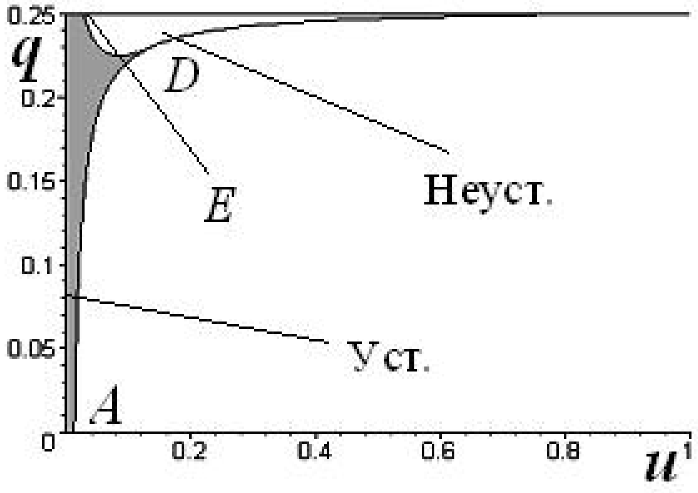


Рисунок 7.19 –

На рис. 7.16,7.17,7.18,7.19 кривая, соединяющая точку A с точкой с координатами $(1; 1/4)$ определяется формулой (7.21), а кривые BC, BD и ED на рис. 7.17,7.18,7.19 соответственно - равенством (7.22). Координаты характерных точек на рис. 7.16,7.17,7.18,7.19:

$$A(4-4u;0), \quad B\left(0;\frac{1}{9\beta(4-\beta)}\right).$$

Координаты остальных точек на этих рисунках проще находить численно.

ГЛАВА 8

Существование и устойчивость Компланарных точек либрации Обобщенной Ограниченной Круговой Задача Трех Тел

В [13] показано, что в условиях задачи, описанной в предыдущей главе, равновесия материальной точки в системе отсчета, вращающейся вместе с гравитирующей гантелью (или вместе с осью динамической симметрии твердого тела, чей гравитационный потенциал аппроксимируется гравитационным потенциалом этой гантели), отличные от ТТЛ, то есть для которых $r_1 \neq r_2$ (см. рис. 7.1), возможны только если $x = 0$, то есть только в плоскости осей прецессии и динамической симметрии. Такие положения равновесия, являющиеся аналогами Эйлеровых точек либрации классической Ограниченной Круговой Задачи Трех Тел [54, 159], могут быть названы Компланарными точками либрации (КТЛ) ООКЗЗТ. В настоящей главе выводятся уравнения для определения координат КТЛ, устанавливается количество КТЛ в зависимости от значений параметров рассматриваемой задачи, в некоторых частных случаях анализируется устойчивость КТЛ в линейном приближении.

8.1 Уравнения для вычисления координат КТЛ

Как показано в [13], уравнения движения ООКЗЗТ допускают стационарные решения, соответствующие равновесиям материальной точки m_0 во вращающейся системе координат Cxy_2z_1 (рис. 7.1) только если $r_1 = r_2$ или $x = 0$. В последнем случае условия равновесия, получаемые из уравнений движения (7.2) в безразмерных переменных, определяемых равенствами

(7.1), имеют вид

$$\eta_1 = 0,$$

$$\zeta_1 \left[\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}\right] + (1-\mu)\mu \left[\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right] \cos\vartheta = 0, \tag{8.1}$$

$$\xi_1 \left\{1 - \alpha\frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \alpha\frac{\mu}{\rho_2^3}\right\} - \alpha \left\{(1-\mu)\mu \left[\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right] \sin\vartheta\right\} = 0, \tag{8.2}$$

где, как и раньше, $\rho_1 = r_1/l$, $\rho_2 = r_2/l$ – безразмерные расстояния от m_0 до концов гантели, в рассматриваемом случае определяемые равенствами

$$\rho_1 = \left\{[\xi_1 + \mu\sin\vartheta]^2 + [\zeta_1 + \mu\cos\theta]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_2 = \left\{[\xi_1 - (1-\mu)\sin\vartheta]^2 + [\zeta_1 - (1-\mu)\cos\theta]^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

а l - расстояние между притягивающими центрами, ϑ - угол нутации, параметры α и μ определяются формулами (7.4). Отметим, что (8.1) не зависит от α.

Если $\vartheta \neq 0$ и $\vartheta \neq \pi/2$ (случай “наклонной” гантели), то после замены $\zeta_2 = \zeta_1/cos\vartheta + \mu$, $\xi_2 = \xi_1/\sin\vartheta + \mu$ уравнение (8.1) можно переписать в виде

$$\xi_2^2 - \frac{2\xi_2}{1-\Phi} + \left(\zeta_2^2 - \frac{2\zeta_2}{1-\Phi}\right)\cot^2\vartheta + \frac{1}{(1-\Phi)\sin^2\vartheta} = 0, \tag{8.3}$$

где

$$\Phi = \left(\frac{\mu(1-\zeta_2)}{\zeta_2(1-\mu)}\right)^{2/3}.$$

Выражая α из (8.2) и используя ту же замену, получим

$$\alpha = \frac{(\mu-\xi_2)(1-\zeta_2)(\xi_2^2\sin^2\vartheta + \zeta_2^2\cos^2\vartheta)^{3/2}}{(1-\mu)(\zeta_1-\xi_2)} \tag{8.4}$$

Заметим, что $0 < \zeta_2 < 1$, т.к. КТЛ не могут находиться вне полосы, ограниченной прямыми, проходящими через m_1 и m_2 параллельно Oy_2. По-существу, (8.3) определяет в этой полосе некоторую кривую, которую можно назвать “геометрическим местом КТЛ” (ГМ). ГМ может быть трех видов: бесконечной кривой, проходящей через концы гантели и стремящейся к $\zeta_1 = 0$ при $\xi_1 \to \pm\infty$ (см. рис. 8.1), такой же кривой, но с самопересечением (см. рис. 8.2) или же объединением ограниченной замкнутой и бесконечной кривых (см. рис. 8.3)

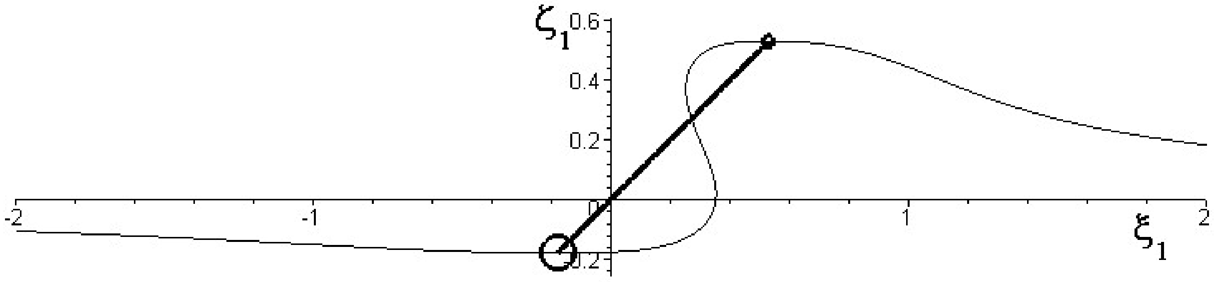


Рисунок 8.1 – $\mu = 1/4$, $\vartheta = \pi/4$

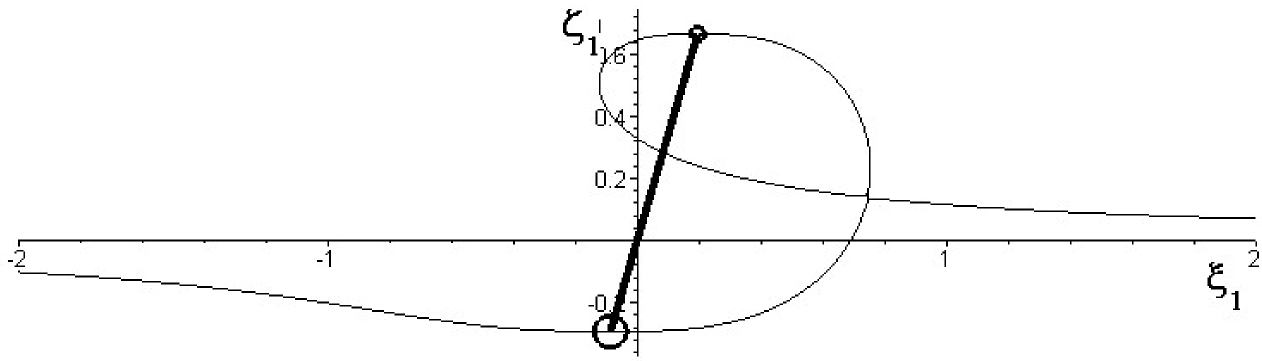


Рисунок 8.2 – $\mu = 0.306$, $\vartheta = \pi/11$

Подставив координаты какой-либо точки ГМ в (8.4), можно найти то значение α, при котором данная точка является КТЛ, конечно, если это значение оказалось положительным.

Заметим, что уравнение (8.3) является квадратным уравнением относительно ξ_2 с коэффициентами, не зависящими от α. Подставляя его корни

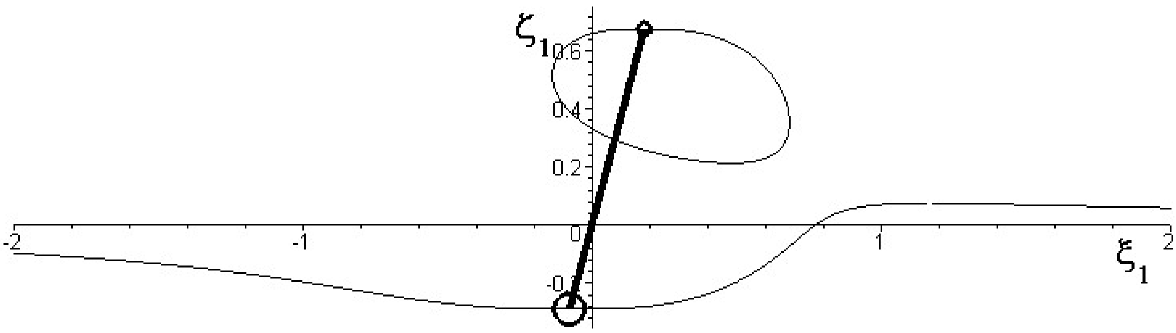


Рисунок 8.3 – $\mu = 0.3,\ \vartheta = \pi/12$

в (8.4), получим уравнения для координаты ζ_2 КТЛ в виде

$$\alpha = f_{1,2}(\zeta_2; \vartheta, \mu) \tag{8.5}$$

Если $\vartheta = \pi/2$ (случай "горизонтальной" гантели), КТЛ могут лежать только на Oy_2, причем

$$\alpha = \frac{(\mu - \xi_2)(1-\xi_2)^2\xi_2^2}{\mu(1-\xi_2)^2 \mathrm{sign}(1-\xi_2) - (1-\mu)\xi_2^2 \mathrm{sign}\xi_2}, \tag{8.6}$$

где $\xi_2 = \xi_1 + \mu$.

Если $\vartheta = 0$ (случай "вертикальной" гантели), удобнее использовать координату z_1 и переменную ρ - расстояние от КТЛ до Oz_1. В этом случае при $\rho \neq 0$ и $\mu \neq 1/2$ справедливы равенства

$$\tilde{\xi} = \frac{\rho}{l} = \sqrt{\frac{\zeta_2^2 \Phi - (1-\zeta_2)^2}{1-\Phi}},$$

$$\alpha = \zeta_2(1-\zeta_2)\left(\frac{2\zeta_2 - 1}{((1-\mu)\zeta_2)^{2/3} - ((1-\zeta_2)\mu)^{2/3}}\right)^{3/2}, \tag{8.7}$$

где $\zeta_2 = \zeta_1 + \mu$. Если же одновременно $\mu = 1/2$ и $\vartheta = 0$, то кроме КТЛ, определяемых (8.7), существуют также КТЛ, для которых

$$\zeta_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \left(\tilde{\xi}^2 + \frac{1}{4}\right)^{3/2}$$

(Геометрическое место КТЛ для этого случая изображено на рис. 8.14).

8.2 Диаграммы количества КТЛ в зависимости от значений параметров

Количество КТЛ для соответствующих значений параметров α, μ, θ равно количеству корней уравнений (8.5), (8.6) или (8.7). Так, правая часть (8.6) является знакопеременной монотонной функцией переменной ξ_2 на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ и $(1; \infty)$. Поэтому для горизонтальной гантели, как и в классической Ограниченной Круговой Задаче Трех Тел, существуют ровно три КТЛ.

В случае вертикальной гантели существует одна изолированная КТЛ, лежащая на оси гантели, для которой $\zeta_2 = \sqrt{1-\mu}/\left(\sqrt{1-\mu}+\sqrt{\mu}\right)$ и от 1 до 3 окружностей, перпендикулярных Oz_1 с центрами на этой оси, целиком состоящих из точек либрации, каждая из которых может быть названа КТЛ при соответствующем выборе оси Oy_2. Количество таких окружностей (фактически являющихся стационарными орбитами - СО) определяется экстремумами функции, стоящей в правой части второго из равенств (8.7) на промежутке $0 < \zeta_2 < 1$, и значениями этой функции в крайних точках ее области определения. Так, для значений μ и α из области I на фиг. 8.4 существует 1 СО, в области II - 2 СО, в области III - 3 СО. Кривым AC и BC отвечают 2 СО, кривой CD - 1 СО. Уравнение кривой BCD имеет вид

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu(1-\mu)}}{\left(1+2\sqrt{\mu(1-\mu)}\right)^2} \tag{8.8}$$

Кривая AC была определена численно. Характерные точки имеют следующие координаты: $A(1/2; 3\sqrt{3}/8)$, $B(1/2; 1/8)$, $C(1/2-\sqrt{3}/4; 1/9)$, $D(0; 0)$.

В общем случае наклонной гантели количество КТЛ определяется экстремумами правых частей (8.5) на интервале $0 < \zeta_2 < 1$. Результаты анализа этих экстремумов представим в виде диаграмм в плоскостях $\mu = \mathrm{const}$ пространства параметров ϑ, α, μ. Возможны следующие ситуации.

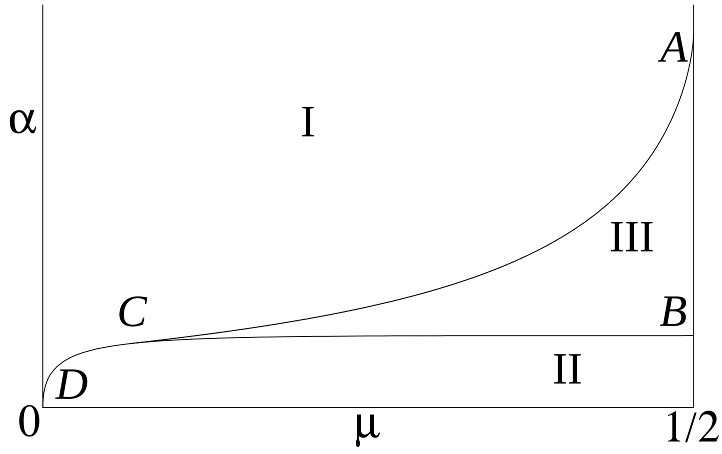


Рисунок 8.4 –

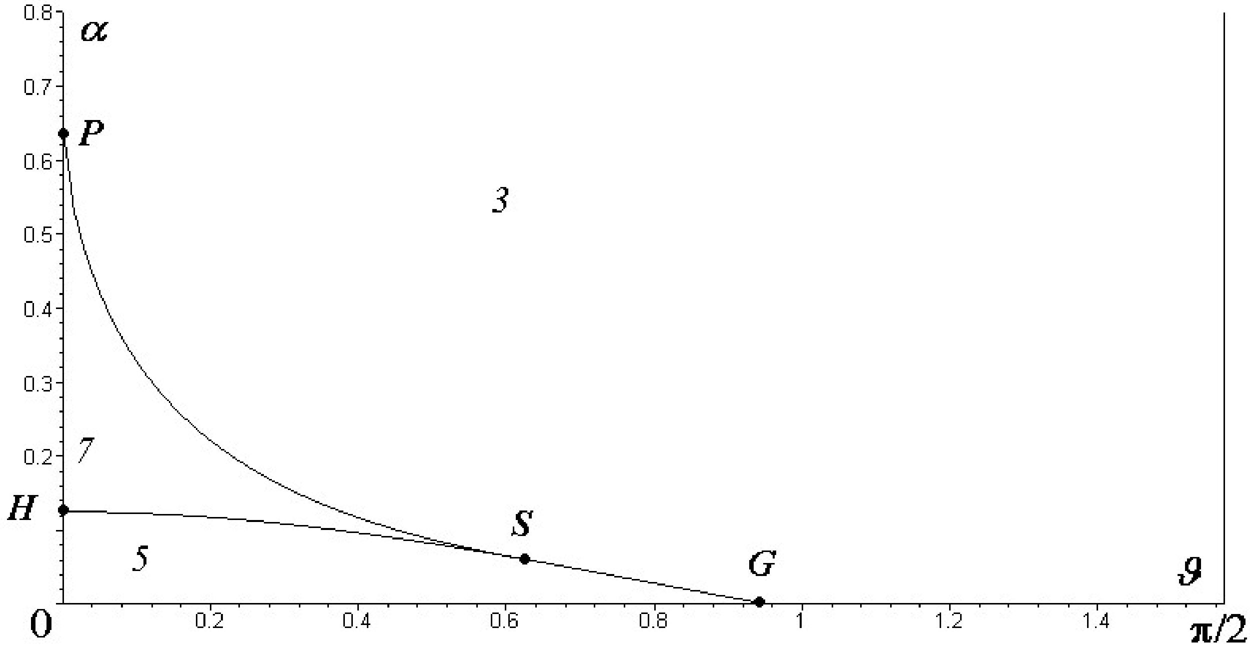


Рисунок 8.5 –

8.2.1 Случай "симметричной" гантели" $\mu = 1/2$

В этой ситуации существует "центральная" КТЛ, совпадающая с геометрическим центром гантели, а про остальные можно сказать, что если какая-то из КТЛ имеет координаты (ξ_1, ζ_1), то точка с координатами $(-\xi_1, -\zeta_1)$ также является КТЛ. Из этого следует, что при $m_1 = m_2$ количество КТЛ нечетно. Заметим также, что в этом случае ГМ представляется симметричной относительно геометрического центра гантели бесконечной кривой, проходящей через O и притягивающие центры. Очевидно, что ГМ, соответствующие разным ϑ в плоскости переменых ξ_2 и ζ_2 пересекаются только в точках $(0, 0)$, $(1/2, 1/2$ и $(1, 1)$. В силу симметрии равенства (8.5) можно рассматривать только при $\zeta 2 \in (0, 1/2)$. При этом одна из функций $f_{1,2}$ на этом промежутке является монотонной при $\alpha > 0$ и может принимать любые положительные значения, в то время как вторая может иметь не более одного экстремума, причем этот экстремум - максимум. Отметим, что монотонная функция определяет две КТЛ, для одной из которых $\xi_2 > 1$ и $\zeta_2 > 1/2$, в то время как для другой $\xi_2 < 0$ и $\zeta_2 < 1/2$. Из всего этого, с учетом симметрии и "центральной" КТЛ, следует, что возможно существование 3, 5 или 7 КТЛ. Соответствующие области представлены на рис. 8.5. На этом рисунке координаты точкек кривой HSG подчиняются равенству

$$\alpha = \frac{2 - 3\sin^2\vartheta}{16}, \tag{8.9}$$

соответствующему значению одной из $f_{1,2}$ при $\zeta_2 = 1/2$, а кривая PS, соответствующая максимуму этой же функции, была построена численно. Характерные точки имеют координаты: $P(0, 3\sqrt{3}/8)$, $H(0, 1/8)$, $S(0.626016 = 35_0 52' 5'', 0.60653)$, $G(\operatorname{arctg}\sqrt{2}, 0)$. Отметим также, что для точек кривых PS и HS существуют 5 КТЛ, а для точек кривой SG (включая точку G) - 3 КТЛ. Примеры, когда количество КТЛ для "симметричной" гантели равно 3, 5 или 7 изображены соответственно на рис. 8.6, 8.7 8.8. Стрелками на этих рисунках показаны направления перемещения КТЛ при увеличении α.

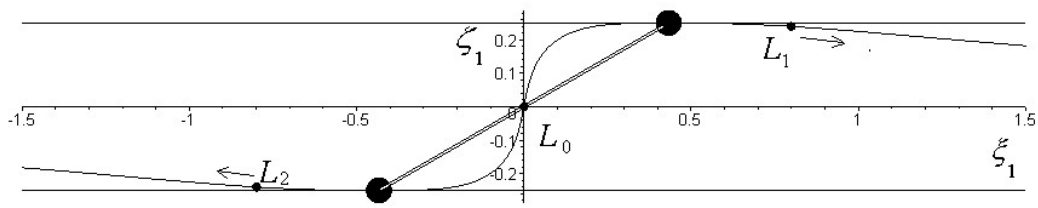


Рисунок 8.6 – $\mu = 1/2$, $\vartheta = \pi/3$, $\alpha = 0.2$

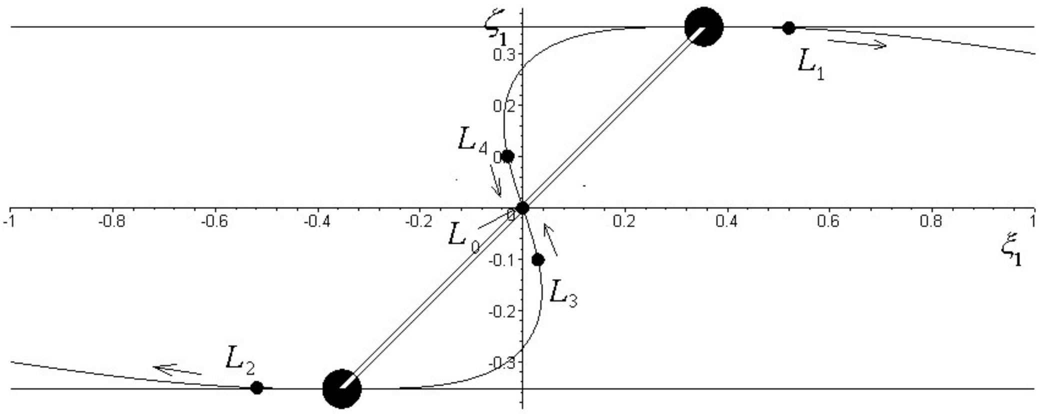


Рисунок 8.7 – $\mu = 1/2$, $\vartheta = \pi/4$, $\alpha = 0.03$

8.2.2 Случай "несимметричной" гантели" $\mu < 1/2$

1) $0.1375.. < \mu < 1/2$. В этом случае может быть от 3 до 7 КТЛ. Качественная картина распределения областей плоскости параметров ϑ и α, соответствующих различному количеству КТЛ изображена на рис. 8.9. Области, в которых существует 3, 5 или 7 КТЛ, отмечены соответствующими цифрами. Для точек кривых EF и BF существуют 6 КТЛ, для точек кривых EA, AC, CF и FD существует 4 КТЛ, однако, в точке F существует 5 КТЛ.

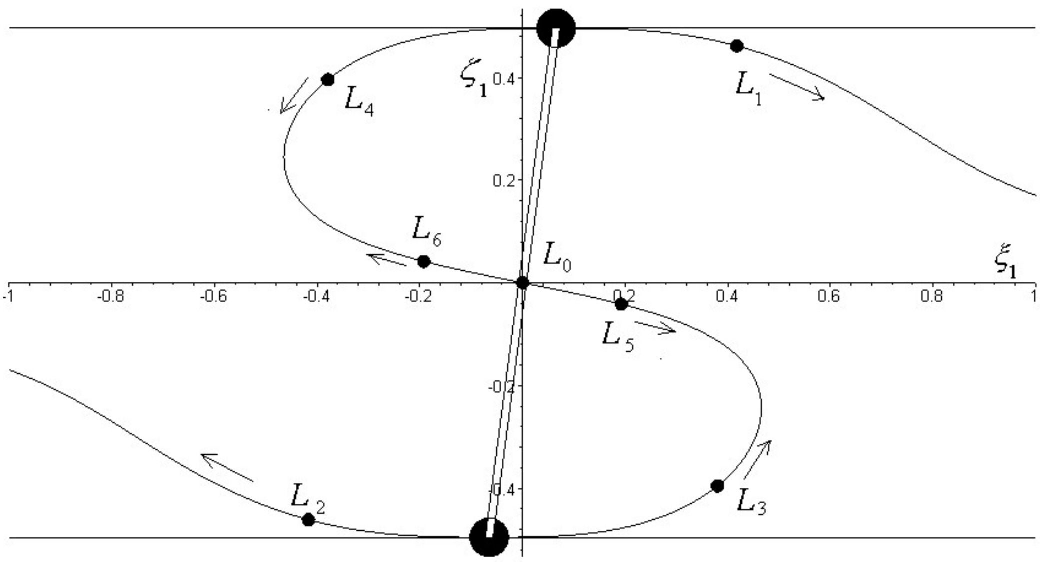


Рисунок 8.8 – $\mu = 1/2,\ \vartheta = \pi/24,\ \alpha = 0.15$

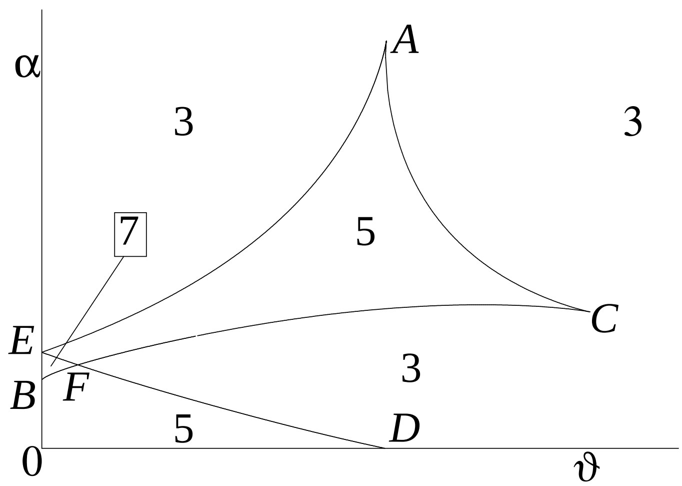


Рисунок 8.9 –

2) $\mu = 0.1375..$ этот случай отличается от изображенного на рис. 8.9 тем, что кривые EA и FC касаются друг друга, т.е. одна из областей, соответствующих 5 КТЛ разрывается на две части, причем в точке касания оказывается 3 КТЛ.

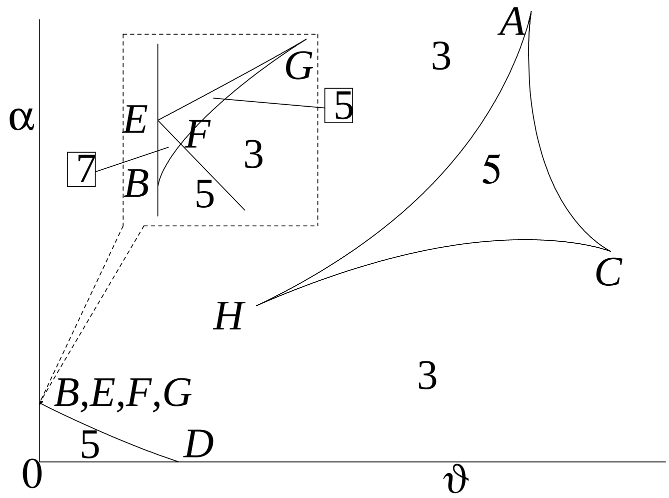


Рисунок 8.10 –

3) $1/2 - \sqrt{3}/4 < \mu < 0.1375..$ Этот случай отличается от предыдущих наличием трех областей, в точках которых существуют 5 КТЛ и сохранением области, соответствующей 7 КТЛ, причем в точках кривых, ее ограничивающих, существуют 6 КТЛ (за исключением точки F, в которой по-прежнему 5 КТЛ). В точках остальных "пограничных"кривых - 4 КТЛ (рис. 8.10)

4) $0 < \mu \leq 1/2 - \sqrt{3}/4$. В этом случае существуют от 3 до 5 КТЛ (рис. 8.11). На "пограничных"кривых существуют 4 КТЛ.

На рис. 8.9-8.11 координаты точки B определяются формулой (8.8). Отметим также, что эти диаграммы показывают, что четное число КТЛ возможно только на некоторых двумерных многообразиях трехмерного пространства параметров задачи. Примеры ситуаций, когда число КТЛ четно (4 или 6) изображены соответственно на рис. 8.12, 8.13. По-существу, четное количество КТЛ возможно, если какие-то две из них “слиплись”. (Соответ-

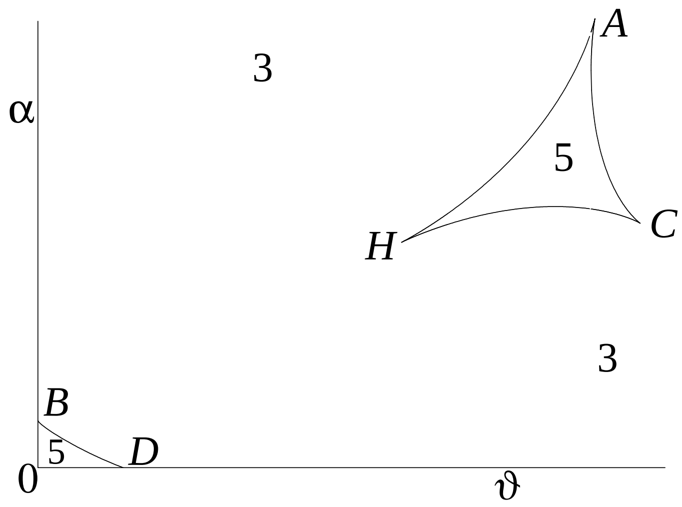


Рисунок 8.11 –

ствующие КТЛ на рис. 8.12, 8.13 отмечены стрелочками).

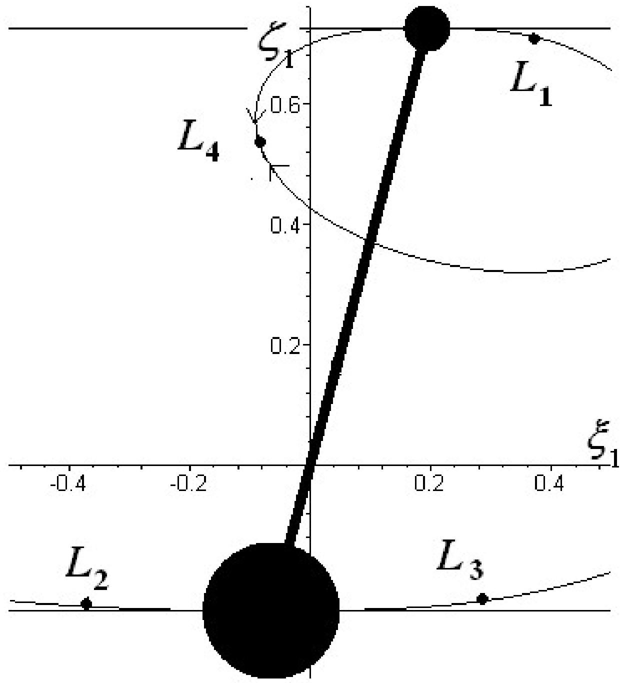


Рисунок 8.12 – $\mu = 1/4$, $\vartheta = \pi/12$, $\alpha = 0.046$

8.3 Условия устойчивости КТЛ

Можно показать, что какова бы ни была КТЛ, характеристическое уравнение для линеаризованных в окрестности этой точки уравнений дви-

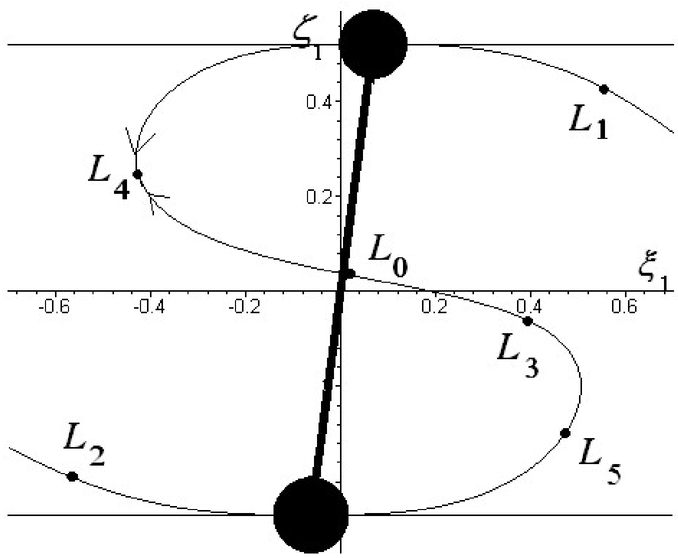


Рисунок 8.13 – $\mu = 0.475,\ \vartheta = \pi/24,\ \alpha = 0.255$

жения имеет вид

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_0 = 0, \tag{8.10}$$

где коэффициенты A_2 и A_0 зависят от параметров задачи и координат исследуемой КТЛ. Как и в предыдущей главе, не трудно убедиться, что если

$$A_0 > 0, \quad A_2 > 0, \quad d = \left(\frac{A_0}{2} - \frac{A_2}{3} + \frac{8}{27}\right)^2 + \left(\frac{3A_2 - 4}{9}\right)^3 < 0, \tag{8.11}$$

то кубическое уравнение $x^3 + 2x^2 + A_2x + A_0 = 0$ имеет три различных отрицательных действительных корня, следовательно, (8.10) имеет три различные пары чисто мнимых корней, т.е. рассматриваемая КТЛ устойчива в первом приближении. Если же в (8.11) хотя бы один из знаков неравенства заменить на противоположный, то хотя бы один из корней кубического уравнения будет либо действительным положительным, либо будет иметь ненулевую мнимую часть. В этом случае (8.10) имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью, т.е. рассматриваемая КТЛ неустойчива.

Если гантель "вертикальна"($\vartheta = 0$), очевидно, что все КТЛ неустойчивы, однако, в ряде случаев можно говорить об устойчивости СО. В частности, пусть одновременно $\vartheta = 0$ и $\mu = 1/2$, тогда $A_0 = 0$, то есть (8.10) имеет два нулевых корня. Остальные корни (8.10) будут чисто мнимыми, если СО определяются равенствами (8.7) или если $\zeta_2 = 1/2$, то есть если СО лежит в плоскости, проходящей через центр масс C, и $\tilde{\xi} > \sqrt{2}/2$. В то же время, если СО такова, что $\zeta_2 = 1/2$ и $\tilde{\xi} < \sqrt{2}/2$, один из корней (8.10) будет иметь положительную действительную часть. Из этого можно сделать вывод, что СО, соответствующие точкам ветвей ГМ на рис. 8.14, отмеченных зеленым цветом, устойчивы в линейном приближении, а соответствующие точкам отрезка ГМ, отмеченного красным цветом, неустойчивы. На этом рисунке точка A соответствует $\tilde{\xi} = \sqrt{2}/2$, $\zeta_2 = 1/2$, в этой точке $\alpha = 3\sqrt{3}/8$. При этом при $\tilde{\xi} \to \infty$ величина α стремится к ∞, при стремлении к точкам m_1 и m_2 $\alpha \to 0$, при стремлении к C $\alpha \to 1/8$.

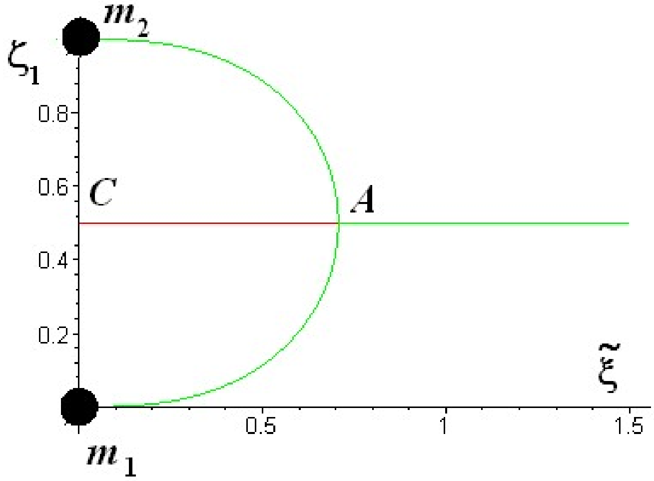


Рисунок 8.14 –

В случае "горизонтальной"($\vartheta = \pi/2$) гантели оказывается, что КТЛ, для которых $\xi_2 < 0$ и $\xi_2 > 1$ (такие КТЛ можно назвать “внешними”), неустойчивы, так как для них $A_0 < 0$ для любых допустимых значений α и μ (этот факт также легко проверяется с помощью процедуры, аналогичной описанной в [54] для классической задачи). В то же время КТЛ, расположенная между m_1 и m_2, оказывается устойчивой в линейном приближении для внутренних точек области, закрашенной на рис. 8.15. На этом рисунке верхняя прямая соответствует условию $A_0 = 0$, а нижняя - $d = 0$. Для значений α и μ, соответствующих точкам, лежащим вне закрашенной области, "внутренняя" КТЛ неустойчива.

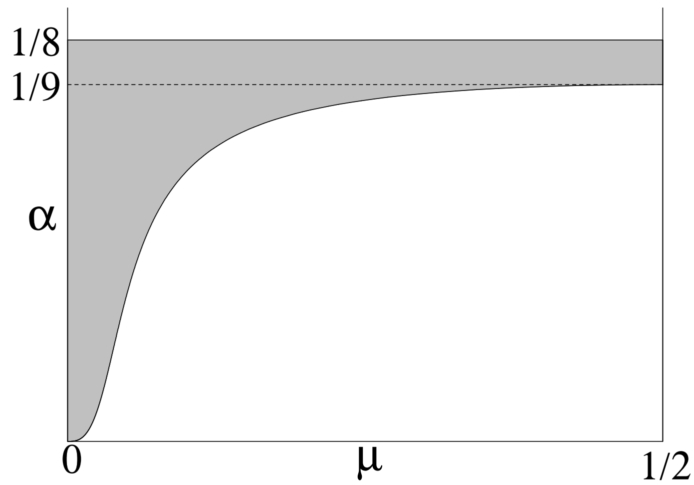


Рисунок 8.15 –

В случае гантели, состоящей из равных масс ($\mu = 1/2$) при любых допустимых значениях α и μ существует "центральная"КТЛ, расположенная в геометрическом центре гантели. Подставив ее координаты в (8.11), получим условия устойчивости этой точки. Из этих условий в частности следует, что центральная КТЛ может быть устойчива только если кроме нее существуют еще только 2 другие, как будет показано ниже, неустойчивые КТЛ. Соответствующие области устойчивости (криволинейные треугольники BCD и FEG, наложенные на диаграмму количества КТЛ на рис. 8.5 изображены на рис. 8.17. Участок FG, на котором $A_0 = 0$, определяется равенством (8.9), участок BC прямолинеен и горизонтален (на нем также $A_0 = 0$), остальные участки границы определяются равенством $d = 0$. Здесь $B(\arccos(1/3); 1/8)$, $C(\pi/2; 1/8)$, $D(\pi/2; 1/9)$, $E)\arccos(1/3); 1/24)$, $F(\arccos(\sqrt{5}/3); 1/24)$, $G(\arccos(1/\sqrt{3}); 0)$.

Для построения областей устойчивости для КТЛ, отличных от центральной, исключим с помощью (8.3) и (8.4) параметры α и ϑ из выражений для A_0 и A_2. Для некоторого упрощения сделаем замену $\xi_2 = 1/2 + \xi_3$, $\zeta_2 = 1/2 + \zeta_3$, поместив тем самым геометрический центр O гантели в начало координат. Заметим, что в каждой из областей $\xi_3 > 0$ и $\zeta_3 > 0$ при любых допустимых значениях параметров существует по одной КТЛ. Для этих точек $A_0 < 0$, поэтому они неустойчивы. Отметим, что эти точки являются аналогами L_2 и L_3 из ОКЗЗТ (в нумерации, принятой в [54]), поэтому и в этом случае можно говорить, что "внешние"КТЛ неустойчивы. Далее, в квадрантах $\xi_3 > 0$, $\zeta_3 < 0$ и $\xi_3 < 0$, $\zeta_3 > 0$ существуют 4 области устойчивости. Две из них закрашены на рис. 8.16. Оставшиеся две симметричны изображенным относительно начала координат. (На рис. 8.16 $A(0.342.., -0.407..)$). Заметим, что (8.3) и (8.4) при фиксирован-

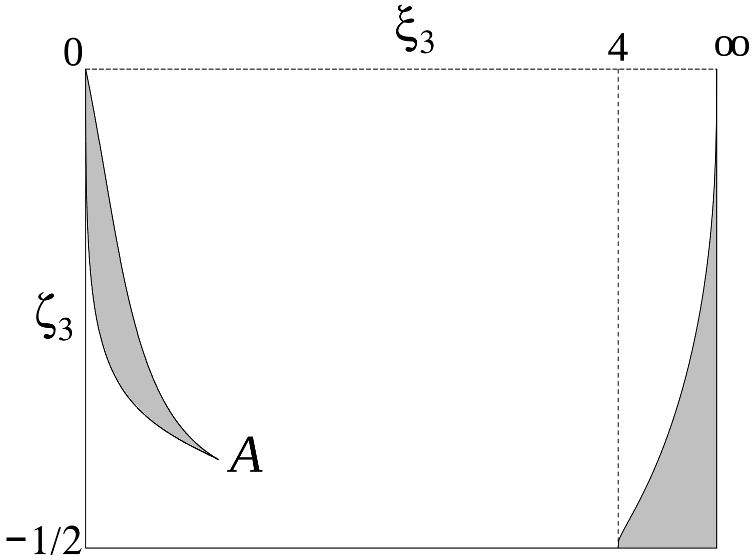


Рисунок 8.16 –

ном μ по-существу определяют некоторое отображение из плоскости переменных ξ_2, ζ_2 (или из плоскости переменных ξ_3, ζ_3) в плоскость параметров ϑ, α. Образом каждой из двух областей устойчивости, примыкающих к точке $\xi_3 = \zeta_3 = 0$ при этом оказывается треугольник AFG на 8.17, в то время как образом каждой из областей устойчивости, примыкающих к $\xi_3 = \pm\infty$ будет область $OHPQ$ (точке A на рис. 8.16 соответствует точка $A(0.458..; 0.046..)$ на рис. 8.17, $Q(0.07..; 0.012..)$). Покажем, что в каждой точке построенных таким образом областей существуют ровно две устойчивые (в линейном приближении) симметричные относительно центра гантели КТЛ.

В каждой из внутренних точкех треугольника AFG общее количество КТЛ равно 5. Две из них являются "внешними", то есть неустойчивыми. "Центральная" КТЛ в этом случае также неустойчива. Следовательно, оставшиеся две КТЛ являются устойчивыми, как прообразы при рассматриваемом отображении.

Далее, рассмотрим эволюцию КТЛ при уменьшении α и фиксированном значении ϑ. Очевидно, что при рассматриваемом отображении каждому ГМ соответствует прямая $\vartheta = \text{const}$. Из этого следует, что при достаточно малом ϑ ГМ обязательно пересечет каждую из "бесконечных" областей устойчивости (так как в этом случае прямая $\vartheta = \text{const}$ обязательно пересечет область $OHPQ$). При достаточно больших α существуют только "внешние" КТЛ. При уменьшении значения α в точке, где прямая $\vartheta = \text{const}$ пересекается с кривой PS, возникают еще две неустойчивые (так как эта точка пересечения не лежит в области устойчивости) КТЛ. При дальнейшем уменьшении α каждая из этих КТЛ распадается на две, причем две из этих четырех точек перемещаются вдоль ГМ в сторону "центральной" КТЛ и в какой-то момент сливаются с ней, не попадая в область устойчивости. В то же время другие две точки могут попасть в область устойчивости в силу их симметрии относительно центра гантели, каждая в свою. Из этого и следует доказываемое утверждение, так как других КТЛ возникнуть не может, а каждая внутренняя точка области $OHPQ$ имеет прообраз. Этот же факт можно установить по-другому (по-существу, идейно опираясь на

[49, 87]), если рассмотреть α как функцию точки каждой из ветвей ГМ, соединяющих центр гантели с одним из притягивающих центров. Такая функция имеет единственный экстремум (максимум) в точке, соответствующей пересечению $\vartheta = \text{const}$ и PS, откуда следует монотонность α на пересечении ГМ и каждой из бесконечных областей устойчивости.

Таким образом, во внутренних точках криволинейных треугольников BCD и FEG существует одна устойчивая (центральная) и две неустойчивые КТЛ, в криволинейных треугольниках AFG и OHQ - 2 устойчивые и 3 неустойчивые КТЛ, в QPH - 2 устойчивые и 5 неустойчивых КТЛ, во внутренних точках остальных областей устойчивых КТЛ нет. Каждая из областей на рис. 8.17 помечена так: <количество устойчивых КТЛ>+<количество неустойчивых КТЛ>.

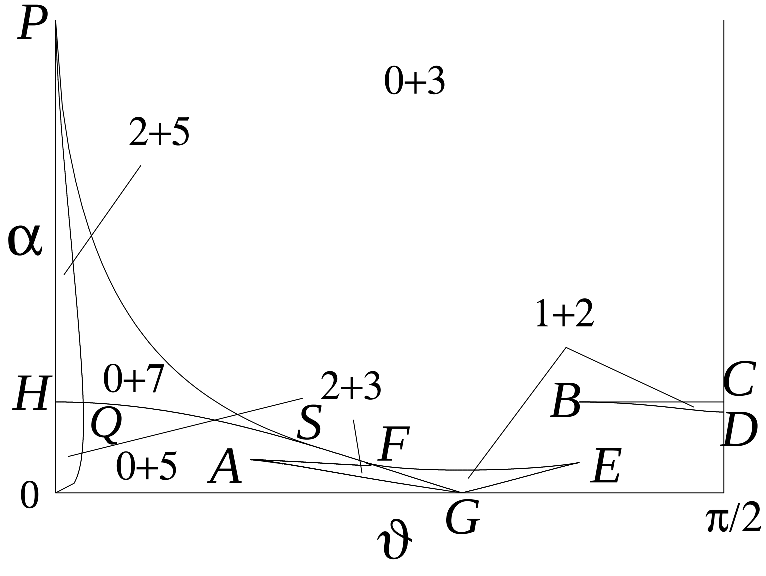


Рисунок 8.17 –

ГЛАВА 9

Точки либрации прецессирующего твердого тела, сжатого вдоль оси динамической симметрии

В предыдущих двух главах рассматривалась ситуация, когда движение материальной точки происходило в поле тяготения твердого тела, имеющего вытянутую вдоль оси динамической симметрии форму, что и позволяло заменить его потенциал гравитацинным потенциалом гантели. Если же твердое тело сжато вдоль оси динамической симметрии, то его гравитационный потенциал также можно аппроксимировать композицией гравитационных потенциалов двух материальных точек (притягивающих центров), но массы и координаты этих точек приходится предполагать комплексными. (Ранее такой подход позволил построить высокоточные приближения потенциала Земли - см. [1, 40, 113]). Как было показано в [40], итоговый потенциал в этом случае будет действительным, только если массы притягивающих центров будут комплексно сопряженными, то же можно сказать и об их координатах. (Очевидно, что с формальной точки зрения, притягивающие центры должны “лежать” на оси динамической симметрии). Посуществу, заменив гравитационный потенциал твердого тела потенциалом этих двух центров, мы снова оказываемся в рамках ООКЗЗТ. В настоящей главе изучаются стационарные движения материальной точки, соответствующие ее равновесиям в системе отсчета, связанной с осями прецессии и динамической симметрии сжатого твердого тела. Такие равновесия, как и выше, можно назвать точками либрации.

9.1 Обозначения, координаты, параметры

Рассмотрим, как и раньше, движение материальной точки массы m_0, пренебрежимо малой по сравнению с массой m твердого тела, с центром масс C и осью динамической симметрии Cz, совершающего регулярную прецессию вокруг оси Cz_1. Направим ось Cy_2 перпендикулярно Cz_1 так, чтобы оси Cz_1, Cz и Cy_2 лежали в одной плоскости и угол между осями Cy_2 и Cz был тупым. Пусть по-прежнему ϑ - угол нутации, а ω - угловая скорость прецессии Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$. Выберем ось Cx так, чтобы декартова система координат Cxy_2z_1 была правой (см. рис. 9.1).

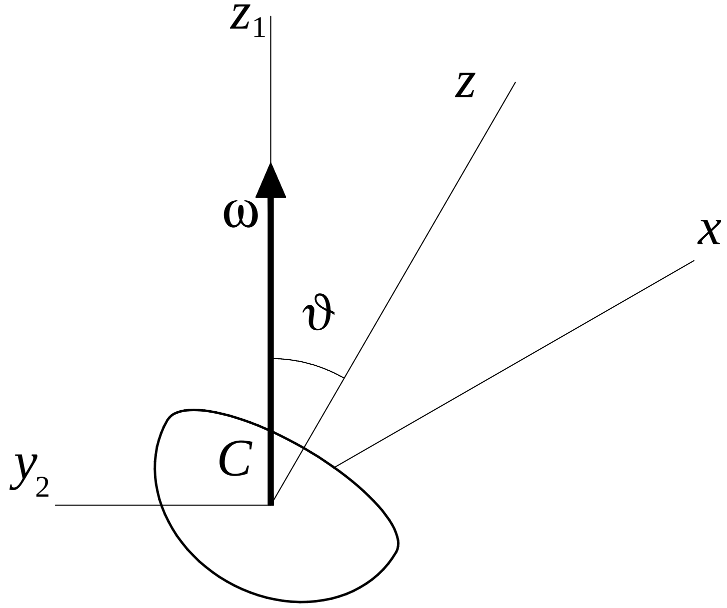


Рисунок 9.1 –

Если твердое тело сжато вдоль оси динамической симметрии, его гравитационное поле, как и раньше, можно аппроксимировать композицией гравитационных полей двух материальных точек m_1 и m_2. При этом, однако, массы этих точек следует выбрать комплексно сопряженными (сумма этих масс должна быть равна массе твердого тела). Кроме того, точки m_1 и m_2 должны "принадлежать" оси динамической симметрии, но их координаты вдоль этой оси также должны быть комплексно-сопряженными числами. Как показано в [40], только эти предположения гарантируют действительность итогового гравитационного потенциала. Поэтому примем $m_1 = m(1 - \mathbf{i}\nu)/2$ и $m_2 = m(1 + \mathbf{i}\nu)/2$, где $\mathbf{i}$ - мнимая единица, а ν - отношение мнимой и действительной частей второй массы (не ограничивая общности рассуждений, можно считать $\nu \geq 0$). Кроме того, положим в системе координат Oxy_2z_1 : $m_1(0, l(\nu_1 - \mathbf{i})(\sin\vartheta)/2, -l(\nu_1 - \mathbf{i})(\cos\vartheta)/2)$ и $m_2(0, l(\nu_1 + \mathbf{i})(\sin\vartheta)/2, -l(\nu_1 + \mathbf{i})(\cos\vartheta)/2)$, где l -некоторое действительное расстояние, а ν_1 - отношение действительной и мнимой частей координаты вдоль оси Cz точки m_2.

При описании равновесий материальной точки m_0 будем, в частности, использовать безразмерные координаты ξ_1, η_1, ζ_1, определяемые, как и в предыдущих двух главах, формулами $y_2 = -l\xi_1$, $x = l\eta_1$, $z_1 = l\zeta_1$.

9.2 Потенциал, интеграл Якоби и условия равновесия

Кинетическая энергия точки m_0 с точностью до постоянного множителя может быть записана в виде $T = T_2 + T_1 + T_0$, где T_2 - квадратичная форма обобщенных скоростей ξ_1', η_1', ζ_1' (штрихом, как и раньше, обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \omega t$), T_1 - линейная форма этих же скоростей, а $T_0 = (\xi_1^2 + \eta_1^2)/2$. Тогда интеграл Якоби рассматриваемой задачи может быть записан в виде

$$T_2 - T_0 + \tilde{\Pi} = h_0, \tag{9.1}$$

где h_0 - константа, а $\tilde{\Pi}$ - обезразмеренный гравитационный потенциал твердого тела, который можно записать в виде

$$\tilde{\Pi} = -\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1+\mathbf{i}\nu}{a+\mathbf{i}b} + \frac{1-\mathbf{i}\nu}{a-\mathbf{i}b}\right) = -\alpha\frac{a+\nu b}{a^2+b^2}, \tag{9.2}$$

где $a \pm \mathbf{i}b$ - безразмерные "расстояния" между m_0 и притягивающими центрами m_1 и m_2, которые выбираются сопряженными, чтобы обеспечить действительность $\tilde{\Pi}$, а безразмерный параметр α определяется, как и в предыдущих двух главах, равенством $\alpha = Gm/(\omega^2 l^3)$, в котором G - Гауссова константа тяготения ($\alpha > 0$). Примем $a \geq 0$, т.к. потенциал (9.2) определяет силы притяжения, а не отталкивания. Величины a и b связаны с ξ_1, η_1, ζ_1 формулами

$$a^2 - b^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + \nu_1(\xi_1 \sin\vartheta + \zeta_1 \cos\vartheta) + \frac{\nu_1^2}{4} - \frac{1}{4},$$
$$2ab = \xi \sin\vartheta + \zeta \cos\vartheta + \frac{\nu_1}{2} \tag{9.3}$$

Заметим, что равенства (9.3) определяют в пространстве переменных ξ_1, η_1, ζ_1 целую окружность точек, для которых $a = b = 0$. Каждая из точек этой окружности является особой точкой потенциала (9.2), причем в сколь угодно малой окрестности каждой из таких точек $\tilde{\Pi}$ может принимать сколь угодно малые значения. В связи с этим будем называть эти особые точки "фиктивными притягивающими центрами", не рассматривая их как возможные положения относительного равновесия точки m_0.

Из (9.1)) следует, что уравнения для определения положений равновесия точки m_0 во вращающейся системе отсчета Cxy_2z_1 имеют вид

$$-\xi_1 + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\xi_1} = 0, \quad -\eta_1 + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\eta_1} = 0, \quad \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\zeta_1} = 0. \tag{9.4}$$

Дифференцируя (9.3) по ξ, η, ζ, получим соотношение

$$\begin{pmatrix} \partial a/\partial\xi_1 & \partial a/\partial\eta_1 & \partial a/\partial\zeta_1 \\ \partial b/\partial\xi_1 & \partial b/\partial\eta_1 & \partial b/\partial\zeta_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 + \nu_1(\sin\vartheta)/2 & \eta_1 & \zeta_1 + \nu_1(\cos\vartheta)/2 \\ (\sin\vartheta)/2 & 0 & (\cos\vartheta)/2 \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

с учетом которого, считая, что a и b не равны нулю одновременно, (9.4) можно переписать в виде

$$\xi_1\left(\frac{(a^2+b^2)^3}{\alpha}-P\right)=\frac{\sin\vartheta}{2}(\nu_1 P-Q), \tag{9.6}$$

$$\eta_1\left(\frac{(a^2+b^2)^3}{\alpha}-P\right)=0, \tag{9.7}$$

$$\zeta_1 P+\frac{\cos\vartheta}{2}(\nu_1 P-Q)=0, \tag{9.8}$$

где

$$P=a^3+3\nu a^2b-3ab^2-\nu b^3 \tag{9.9}$$

$$Q=\nu a^3-3a^2b-3\nu ab^2+b^3 \tag{9.10}$$

Из (9.7) следует, что либо $\eta_1=0$, либо $P=(a^2+b^2)^3/\alpha$.

Положения равновесия точки m_0, соответствующие $\eta_1=0$, лежат в плоскости Cy_2z_1. Будем, как и раньше, называть их компланарными точками либрации (КТЛ).

Если же $\eta_1\neq 0$, то в общем случае $0<\vartheta<\pi/2$ из(9.6) следует, что

$$\nu_1 P=Q. \tag{9.11}$$

Так как в силу сделанных предположений a и b не равны нулю одновременно, $C>0$. Но тогда из (9.6) следует, что $\zeta_1=0$, то есть положения равновесия, отличные от КТЛ, могут лежать только в плоскости Cxy_2. Будем, как и раньше, называть эти положения равновесия Треугольными точками либрации (ТТЛ).

9.3 Треугольные точки либрации

Изучим сначала положения равновесия точки m_0 в плоскости Cxy_2, то есть ТТЛ.

Очевидно, ТТЛ можно рассматривать как стационарные точки функции $J_0 = \tilde{\Pi} - T_0$, ограниченной на плоскость $\zeta_1 = 0$. Рассмотрим в качестве примера случай $\nu_1 = 0$, когда притягивающие центры имеют чисто мнимые координаты. В этом случае, анализируя линии уровня $J_0 = \mathrm{const}$ на плоскости $\xi_1\eta_1$, можно выделить две ситуации. В случае, изображенном на рис. 9.2, седловые точки L_1 и L_2, симметричные относительно оси $C\xi_1$, являются искомыми ТТЛ, в то время как в случае, изображенном на рис. 9.3, ТТЛ не существуют. Отметим также, что стационарные точки N_1 и N_2 на этих рисунках, лежащие на прямой ξ_1 вообще не являются положениями равновесия, т.к. в этих точках не выполняется условие (9.6). Точка N_3 на рис. 9.3 может в отдельных случаях оказаться одной из КТЛ, являющихся аналогами "внешних" Эйлеровых точек либрации классической Ограниченной круговой задачи трех тел.

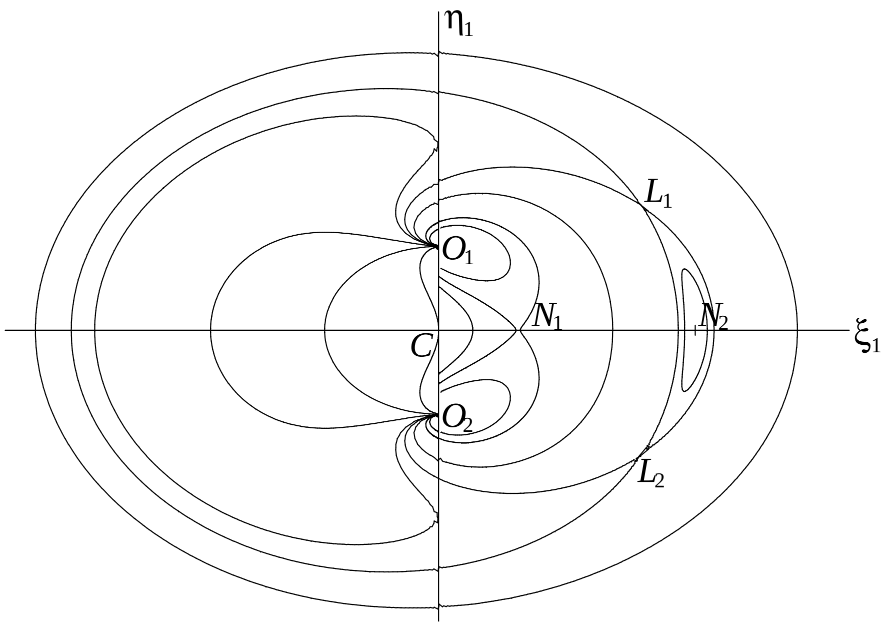


Рисунок 9.2 –

Заметим, что в рассматриваемом случае в плоскости $\zeta_1 = 0$ величина a может быть нулевой только на отрезке O_1O_2 оси η_1 с концами в точках, для которых $\eta_1 = \pm 1/2$. Все точки этого отрезка являются особыми точками функции J_0, причем O_1 и O_2 оказываются "фиктивными притягивающими

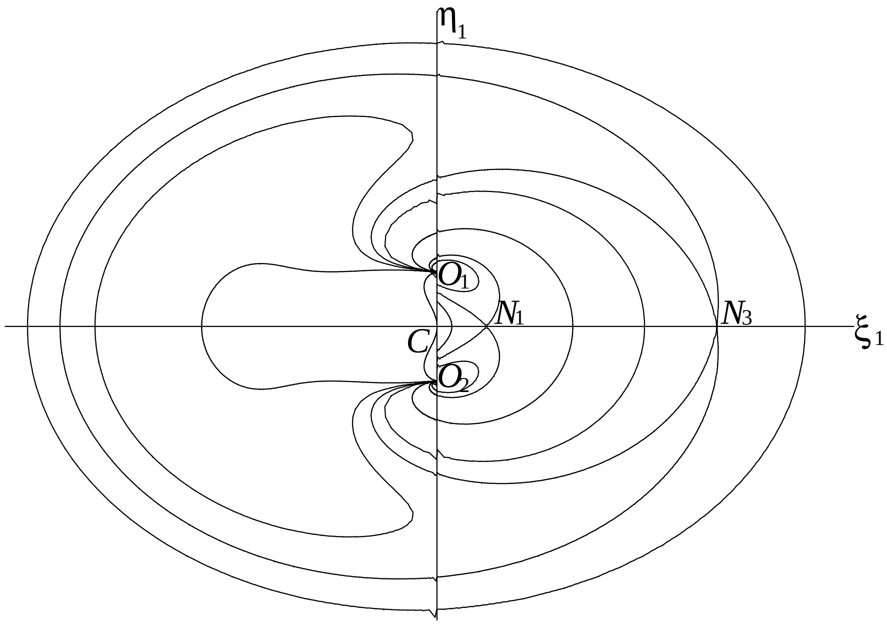


Рисунок 9.3 –

центрами". Отметим также, что во внутренних точках O_1O_2 линия действия гравитационной силы не параллельна оси Ox, откуда следует, что внутри этого отрезка ТТЛ отсутствуют. Таким образом, в рассматриваемом случае в любой ТТЛ $a > 0$.

9.3.1 Координаты Треугольных точек либрации

Предположим таперь, что ν_1 произвольно. Предположим, что в какой-то ТТЛ $a = 0$. Тогда если $\nu\nu_1 \neq -1$, то из (9.9,9.10,9.11) следует, что и $b = 0$, то есть мы попадаем в "фиктивный притягивающий центр. Если же $\nu\nu_1 = -1$, то из (9.7) следует, что $b^3 = -\nu\alpha \neq 0$. Тогда из (9.3) получим равенства

$$\xi_1 = -\frac{\nu_1}{2\sin\vartheta}, \quad \eta_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - \nu^{2/3}\alpha^{2/3} - \frac{\operatorname{ctg}^2\vartheta}{4\nu^2}}, \tag{9.12}$$

определяющие две ТТЛ в случае положительности подкоренного выражения. (Если подкоренное выражение равно нулю, то (9.12) определяет одну точку либрации, которую можно назвать как ТТЛ, так и КТЛ.

Предположим теперь, что $a > 0$. В этом случае (9.11) можно переписать в виде

$$(1+\nu\nu_1)u^3+3(\nu_1-\nu)u^2-3(1+\nu\nu_1)u-(\nu_1-\nu)=0, \tag{9.13}$$

где $u=b/a$.Пусть $\nu=\operatorname{tg}3\delta$ и $\nu_1=\operatorname{tg}3\delta_1$. (Очевидно, можно считать, что $0\le\nu<\pi/6$ и $-\pi/6<\nu_1<\pi/6$). С помощью замены $u=\operatorname{tg}\psi$ уравнение (9.13) преобразуется к виду

$$\sin(3\delta-3\delta_1-3\psi)=0, \tag{9.14}$$

из чего следует, что корни (9.13) можно записать как

$$u_1=\operatorname{tg}(\delta-\delta_1-\pi/3),\quad u_2=\operatorname{tg}(\delta-\delta_1),\quad u_3=\operatorname{tg}(\delta-\delta_1+\pi/3)$$

(в случае $\nu\nu_1=-1$ корень u_3 не существует). Легко проверить, что при $u=u_1$ и $u=u_3$ оказывается, что $P<0$, что невозможно в силу (9.7). В то же время при подстановке $b=u_2a$ из (9.7) получим, что

$$a^3=\frac{\alpha\cos^3(\delta-\delta_1)\cos 3\delta_1}{\cos 3\delta}.$$

Заметим, что правая часть этого равенства положительна, так как $0\le\delta<\pi/6$, $-\pi/6<\delta_1<\pi/6$ и, как следствие этого, $-\pi/6<\delta-\delta_1<\pi/3$. Тогда, используя (9.3), можно записать координаты ТТЛ в виде

$$\xi_1=\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\alpha^{2/3}\sin(2\delta-2\delta_1)\cos^{2/3}3\delta_1}{\cos^{2/3}3\delta}-\frac{\operatorname{tg}3\delta_1}{2}\right), \tag{9.15}$$

$$\begin{gathered}\eta_1^2=\frac{\alpha^{2/3}\cos(2\delta-2\delta_1)\cos^{2/3}3\delta_1}{\cos^{2/3}3\delta}-\frac{\alpha^{4/3}\sin^2(2\delta-2\delta_1)\cos^{4/3}3\delta_1}{\cos^{4/3}3\delta\sin^2\vartheta}+\\+\frac{\alpha^{2/3}\nu_1\sin(2\delta-2\delta_1)\cos^{2/3}3\delta_1}{\cos^{2/3}3\delta}\operatorname{ctg}^2\vartheta-\frac{\nu_1^2}{4}\operatorname{ctg}^2\vartheta+\frac{1}{4}\end{gathered} \tag{9.16}$$

Если формально вычисленные координаты центра масс системы точек m_0 и m_2 - нулевые (то есть если этот центр масс - точка C), то справедливо равенство $\nu_1 = \nu$. (Этот случай можно назвать случаем В.Г.Демина [40]). В этом случае координаты ТТЛ определяются формулами

$$\xi_1 = -\frac{\nu}{2\sin\vartheta}, \tag{9.17}$$

$$\eta_1 = \pm\sqrt{\alpha^{2/3} - \frac{\nu^2}{4}\operatorname{ctg}^2\vartheta + \frac{1}{4}} \tag{9.18}$$

В случае $\nu_1 = 0$, когда притягивающие центры имеют чисто мнимые массы (эту ситуацию можно назвать случаем Винти -[157, 158]), формулы (9.15,9.16) запишутся как

$$\xi_1 = \frac{\alpha^{2/3}\sin(2\delta)}{\sin\vartheta\cos^{2/3}(3\delta)}, \tag{9.19}$$

$$\eta_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\alpha^{2/3}\cos(2\delta)}{\cos^{2/3}(3\delta)} - \frac{\alpha^{4/3}\sin^2(2\delta)}{\cos^{4/3}(3\delta)\sin^2\vartheta}}. \tag{9.20}$$

Если же кроме этого $\nu = 0$, то есть притягивающие центры имеют действительные массы, то (9.19,9.20) упростятся к виду

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \pm\sqrt{\alpha^{2/3} + 1/4}. \tag{9.21}$$

9.3.2 Условия существования треугольных точек либрации

Как следует из (9.21), в случае $\nu = \nu_1 = 0$ при любых допустимых значениях α и ϑ существуют две ТТЛ, лежащие на оси Cx симметрично относительно C.

В общем случае $\nu \geq 0$, $\nu_1 \neq 0$, при положительности правой части (9.16), также существуют две ТТЛ, расположенные симметрично относительно оси Cy_2 (за исключением случая $\nu\nu_1 = -1$, когда могут существовать еще не более двух ТТЛ, координаты которых определяются формулами (9.12)). Если же правая часть (9.16) равна нулю, то формулы (9.15) и

(9.16) определяют одну точку либрации, лежащую на оси Cy_2, и которую можно считать как ТТЛ, так и КТЛ.

В случае В.Г.Демина $\nu = \nu_1$ условие существования ТТЛ, как следует из (9.18), можно записать как

$$\alpha \geq \frac{1}{8} \left(\nu^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta - 1\right)^{3/2},$$

причем знак строгого неравенства соответствует существованию двух ТТЛ, а равенство - существованию одной точки либрации, которую можно отнести как к ТТЛ, так и к КТЛ.

Рассмотрим более подробно случай Винти $\nu \geq 0$, $\nu_1 = 0$, когда координаты притягивающих центров являются чисто мнимыми. Очевидно, условием существования КТЛ является неотрицательность подкоренного выражения в правой части (9.20), причем положительность этого выражения означает существование двух ТТЛ, симметричных относительно Oy_2. Если же это выражение равно нулю, то в плоскости Oxy_2 существует только одна точка либрации. Эта точка либрации также может быть названа ТТЛ, являясь одновременно КТЛ. С учетом положительности α условие существования ТТЛ можно переписать в виде

$$\alpha \leq f(\delta, \vartheta) = \frac{\cos 3\delta \sin^3 \vartheta}{2\sqrt{2} \sin^{3/2} 2\delta} \left(\operatorname{ctg} 2\delta + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 2\delta + \frac{1}{\sin^2 \vartheta}} \right)^{3/2}. \qquad (9.22)$$

Равенство $\alpha = f(\delta, \vartheta)$ определяет в области допустимых значений параметров $(\delta, \vartheta, \alpha)$ некоторую поверхность. Сечением этой поверхности плоскостью $\vartheta = const$ является некоторая кривая, соединяющая точку A, для которой $\delta = 0$ и $\alpha = \infty$, с точкой B, для которой $\delta = \pi/6$ и $\alpha = 0$ (сплошная кривая ADB на рис. 9.4). Для точек, лежащих ниже ADB, существуют две ТТЛ; для точек, лежащих на ADB, в плоскости $\zeta_1 = 0$ существует только одна точка либрации, совпадающая с одной из КТЛ; для точек, лежащих выше ADB, ТТЛ не существуют. Нетрудно показать, что $f(\delta, \vartheta) < f(\delta, \pi/2) = (\operatorname{ctg}^3 \delta - 3 \operatorname{ctg} \delta)/8$. Следовательно, если

$\alpha \geq (\operatorname{ctg}^3 \delta - 3 \operatorname{ctg} \delta)/8$, т.е. для точек, лежащих выше пунктирной кривой ACB на рис. 9.4, ТТЛ не существуют при любых допустимых значениях ϑ.

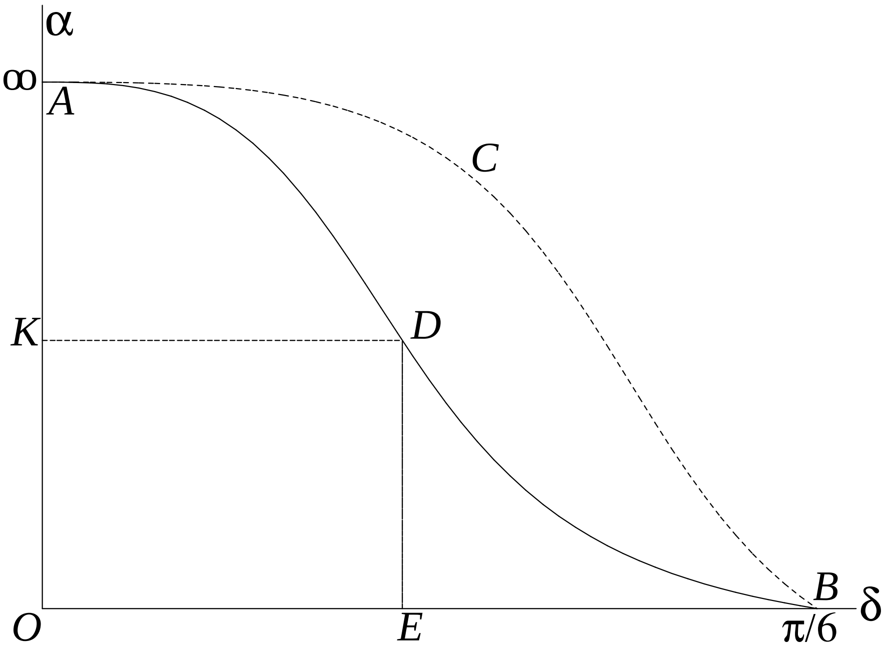


Рисунок 9.4 –

9.3.3 Эволюция треугольных точек либрации в случае чисто мнимых координат притягивающих центров

Характер эволюции ТТЛ в случае Винти $\nu_1 = 0$ при изменении того или иного параметра рассматриваемой системы изображен на рис. 9.5.

Как следует из (9.22), при фиксированных значениях δ и ϑ ТТЛ существуют только если $0 < \alpha < \alpha_{\max}$ (отрезок ED на рис. 9.4), где $\alpha_{\max} = f(\delta, \vartheta)$. (Заметим, что если $\vartheta \to 0$, то и $\alpha_{\max} \to 0$). При этом при изменениии α от 0 до $\alpha_{\max}$ (т.е. при уменьшении угловой скорости прецессии от бесконечности до некоторого минимального допустимого значения) ТТЛ перемещаются в плоскости $C\xi_1\eta_1$ по дугам окружности с центром в точке $O_1\,((\operatorname{ctg} 2\delta \sin \vartheta)/2, 0)$ из точек $E_1(0, 1/2)$ и $E_2(0, -1/2)$, чтобы при

$\alpha = \alpha_{\max}$ слиться в точке $D(\xi_{1D}, 0)$, где

$$\xi_{1D} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg} 2\delta \sin\vartheta + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 2\delta \sin^2\vartheta + 1}\right). \tag{9.23}$$

Аналогично, при фиксированных значениях α и ϑ ТТЛ существуют, только если $0 \le \delta < \delta_{\max}$ (отрезок KD на рис. 9.4), где $\delta_{\max}$ определяется из уравнения $\alpha = f(\delta_{\max}, \vartheta)$. (Заметим, что если $\vartheta \to 0$, то и $\delta_{\max} \to 0$). При этом при изменениии δ от 0 до $\delta_{\max}$ ТТЛ перемещаются вдоль некоторой кривой в плоскости $C\xi_1\eta_1$ из точек $K_1(0, \sqrt{\alpha^{2/3} + 1/4})$ и $K_2(0, -\sqrt{\alpha^{2/3} + 1/4})$, чтобы при $\alpha = \alpha_{max}$ слиться в точке D на оси $C\xi_1$, для которой в этом случае $\delta = \delta_{\max}$.

Кроме того, при фиксированных значениях α и δ ТТЛ существуют, только если $\vartheta_{\min} < \vartheta < \pi/2$, где

$$\vartheta_{\min} = \arcsin\left(\frac{2\alpha^{2/3}\sin 2\delta}{\cos^{1/3} 3\delta\sqrt{4\alpha^{2/3}\cos 2\delta + \cos^{2/3} 3\delta}}\right). \tag{9.24}$$

При этом при изменениии ϑ от $\vartheta_{\min}$ до $\pi/2$ ТТЛ перемещаются в плоскости $C\xi_1\eta_1$ по дугам окружности с центром в точке O из точки D на оси Ox, для которой в данном случае

$$\xi_{1D} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\alpha^{2/3}\cos 2\delta}{\cos^{2/3} 3\delta}} \tag{9.25}$$

в точки $M_1(\xi_1, \eta_1)$ и $M_2(\xi_1, -\eta_1)$, где

$$\xi_1 = \frac{\alpha^{2/3}\sin 2\delta}{\cos^{2/3} 3\delta}, \qquad \eta_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 \operatorname{ctg} 2\delta - \xi_1^2}. \tag{9.26}$$

9.3.4 Неустойчивость треугольных точек либрации

Характеристическое уравнение для уравнений движения, линеаризованных в окрестности любой точки либрации, может быть записано в виде

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_0 = 0, \tag{9.27}$$

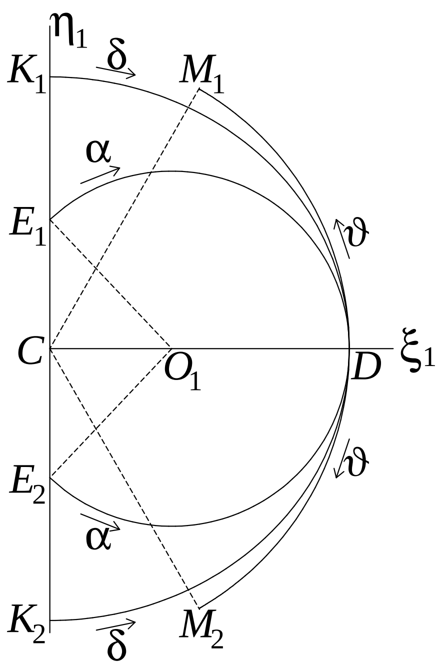


Рисунок 9.5 –

где A_0 - определитель системы линеаризованных уравнений движения, определяемый равенством

$$\begin{gathered}A_0 = P_{\xi\xi}P_{\eta\eta}P_{\zeta\zeta} + 2P_{\xi\eta}P_{\eta\zeta}P_{\xi\zeta} - P^2_{\xi\zeta}P_{\eta\eta} - P^2_{\xi\eta}P_{\zeta\zeta} - \\ -P^2_{\eta\zeta}P_{\xi\xi} + P^2_{\xi\zeta} + P^2_{\eta\zeta} + P^2_{\zeta\zeta} + P_{\zeta\zeta},\end{gathered} \tag{9.28}$$

в котором частные производные

$$P_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2\tilde{\Pi}}{\partial\beta\partial\gamma}, \qquad \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}, \qquad \gamma \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \tag{9.29}$$

вычисляются в точке либрации. (При выводе (9.27) и (9.29) учтено, что $\Delta\tilde{\Pi} = P_{\xi\xi} + P_{\eta\eta} + P_{\zeta\zeta} = 0$). Используя выражения 9.5 для частных производных величин a и b по переменным ξ_1, η_1, ζ_1, условие $\zeta_1 = 0$, зависимость $b = ua$ и формулы (9.3,9.13,9.3,9.15,9.16), после ряда преобразований равенство (9.28) можно записать как

$$A_0 = -\frac{9}{4}\frac{\alpha^2(1+\nu^2)\sin^2\vartheta}{a^{10}(1+u^2)^5}{\eta_1}^2, \tag{9.30}$$

т.е. если $a \neq 0$ и $\eta_1 \neq 0$, то $A_0 < 0$. В этом случае уравнение $x^3+2x^2+A_2x+A_0 = 0$ обязательно имеет положительный действительный корень. Но тогда и уравнение (9.27) обязательно имеет положительный действительный корень. Следовательно, ТТЛ, определяемые формулами (9.15,9.16), не лежащие на оси Cy_2 (то есть если таких ТТЛ - две), неустойчивы.

9.4 Компланарные точки либрации в случае чисто мнимых координат притягивающих центров

В случае $nu_1 = 0$ условие равновесия (9.7) выполняется тождественно. Если $\nu_1 = 0$, то (9.6) и (9.8) запишутся как

$$\xi_1 \left(\frac{(a^2+b^2)^3}{\alpha} - P \right) + \frac{Q \sin \vartheta}{2} = 0, \tag{9.31}$$

$$\zeta_1 P - \frac{Q \cos \vartheta}{2} = 0, \tag{9.32}$$

или, в развернутом виде, как

$$\begin{gathered} \alpha \left((a^3 - 3ab^2 + 3\nu b a^2 - \nu b^3)\xi + \tfrac{1}{2}(3a^2 b - b^3 - \nu a^3 + 3\nu a b^2) \sin \vartheta \right) - \\ - \xi (a^2+b^2)^3 = 0, \end{gathered} \tag{9.33}$$

$$(a^3 - 3ab^2 + 3\nu b a^2 - \nu b^3)\zeta + \frac{1}{2}(3a^2 b - b^3 - \nu a^3 + 3\nu a b^2) \cos \vartheta = 0 \tag{9.34}$$

Для удобства дальнейших преобразований, ограничиваясь общим случаем $0 < \vartheta < \pi/2$, будем использовать переменные κ и χ, определяемые формулами

$$\kappa = 2\zeta / \cos \vartheta \quad \chi = 2\xi / \sin \vartheta. \tag{9.35}$$

Очевидно, КТЛ можно рассматривать как стационарные точки функции $J_0 = \tilde{\Pi} - T_0$, ограниченной на плоскость $\eta_1 = 0$. Анализируя линии уровня $J_0 = \mathrm{const}$ на плоскости $\xi_1 \zeta_1$, можно выделить две ситуации. В случае $\nu = 0$ центр масс C является максимумом функции J_0 (см. рис. 9.6), и, следовательно, является "центральной" КТЛ. (Очевидно, в этом случае в силу симметрии общее число КТЛ нечетно). Однако, J_0 не является дифференцируемой в точках отрезка A_1A_2 с концами в "фиктивных притягивающих центрах" с координатами $A_1(-\operatorname{ctg}\vartheta, \operatorname{tg}\vartheta)$ и $A_2(\operatorname{ctg}\vartheta, -\operatorname{tg}\vartheta)$. Если же $\nu \neq 0$, то на всем отрезке A_1A_2 функция J_0 не определена и ни одну его точку нельзя рассматривать, как КТЛ (см. рис. 9.7). В то же время на обоих рисунках можно заметить по несколько седловых точек, которые и являются искомыми КТЛ.

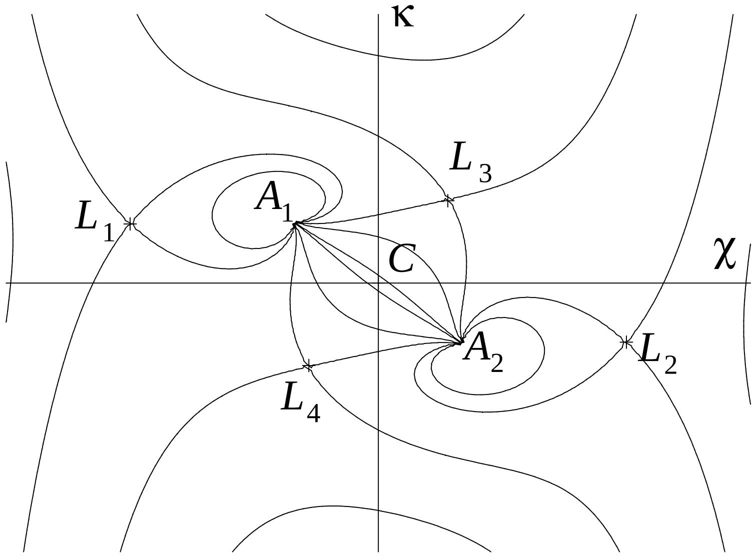


Рисунок 9.6 –

9.4.1 Квадратное и кубическое уравнения, выражение для угловой скорости прецессии

Равенства 9.3 в нашем случае запишутся как

$$a^2 - b^2 = \xi_1^2 + \zeta_1^2 - \frac{1}{4}, \quad 2ab = \xi \sin\vartheta + \zeta \cos\vartheta \tag{9.36}$$

Наряду с ранее введенными переменными будем также использовать тригонометрические переменные γ, ψ и тригонометрический параметр δ, определяемые равенствами

$$\kappa = \tan(3\gamma) \quad \nu = \tan(3\delta) \quad u = b/a = \tan(\psi). \tag{9.37}$$

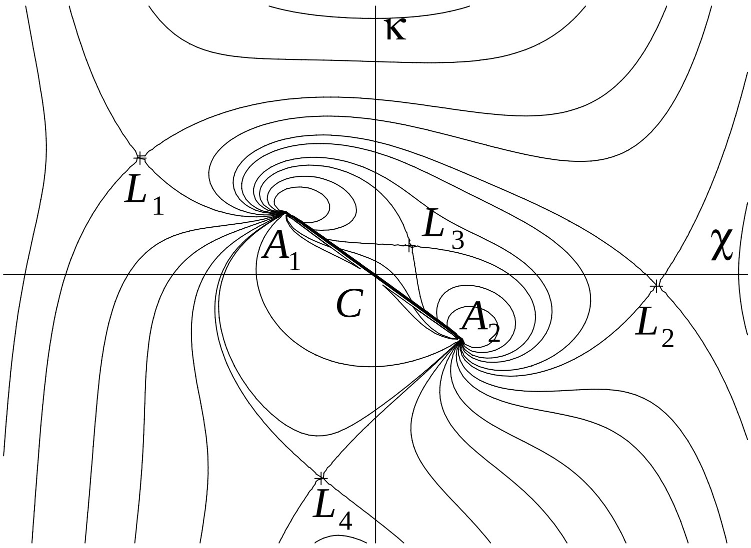


Рисунок 9.7 –

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\nu \geq 0$, т.к. замена ν на $-\nu$ и b на $-b$ равносильна замене ξ и ζ на $-\xi$ и $-\zeta$ соответственно. Поэтому $0 \leq \delta < \pi/6$, в то время как $-\pi/6 < \gamma < \pi/6$, $-\pi/2 < \psi < \pi/2$.

Разделив уравнения (9.36) друг на друга, с учетом (9.35) получим квадратное относительно χ уравнение вида

$$\chi^2 - \Phi\chi + \cot^2\vartheta(\kappa^2 - \Phi\kappa - 1) - 1 = 0, \tag{9.38}$$

где $\Phi = 1/u - u = 2\cot(2\psi)$. Корни этого уравнения можно записать как

$$\chi = -\cot(2\psi) \pm \sqrt{D}/\sin(2\psi), \tag{9.39}$$

где дискриминант D определяется равенством

$$D = 1 - \left(\kappa^2 \sin^2 2\psi + \kappa \sin 4\psi - \sin^2 2\psi\right)\cot^2\vartheta \tag{9.40}$$

Далее, преобразовывая (9.34) и используя (9.35), получим кубическое относительно u уравнение

$$u^3 + \frac{3(\kappa-\nu)}{1+\kappa\nu}u^2 - 3u - \frac{\kappa-\nu}{1+\kappa\nu} = 0, \tag{9.41}$$

имеющее, как нетрудно убедиться, три действительных корня u_1, u_2, u_3 по одному на каждом из интервалов $(-\infty; -1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$ и $1/\sqrt{3}; +\infty)$. Уравнение (9.41) легко преобразуется к виду $\tan 3(\gamma - \delta) = -\tan 3\psi$, откуда с учетом ограничений на величины γ и δ получим три допустимых значения ψ

$$\psi_1 = \delta - \gamma - \pi/3 \quad \psi_2 = \delta - \gamma \quad \psi_3 = \delta - \gamma + \pi/3 \tag{9.42}$$

и равенства

$$u_1 = \tan(\psi_1) = \tan(\delta - \gamma - \pi/3),$$

$$u_2 = \tan(\psi_2) = \tan(\delta - \gamma), \tag{9.43}$$

$$u_3 = \tan(\psi_3) = \tan(\delta - \gamma + \pi/3).$$

Обозначим через D_n выражения, получающиеся в правой части (9.40), если вместо ψ подставить ψ_n, $n = 1, 2, 3$

Наконец, выразим α из (9.33). (Напомним, что параметр α характеризует угловую скорость прецессии твердого тела). Используя (9.35), после простых преобразований получим

$$\alpha = \frac{1}{8}\frac{\chi}{\kappa - \chi}\left(\frac{\chi \sin^2\vartheta + \kappa\cos^2\vartheta}{u}\right)^{3/2}\frac{(1+u^2)^3(1+\nu\kappa)}{(3u^2-1)(1+\nu^2)} \tag{9.44}$$

9.4.2 Алгоритм определения координат компланарных точек либрации

Учитывая (9.37), подставим каждое из выражений (9.42) в каждое из выражений (9.39). В результате получим шесть выражений вида

$$\chi = \chi_{mn}(\gamma, \delta, \vartheta), \tag{9.45}$$

где $n = 1, 2, 3$ определяется номером подставленного корня u_n, а $m = 1, 2$ для знаков “+”или “−” в (9.39) соответственно. Далее, подставим в (9.44) каждое из χ_{nm} вместо χ, а также u_m вместо u. В результате, с учетом (9.37), получим шесть равенств вида

$$\alpha = \alpha_{mn}(\gamma, \delta, \vartheta) \tag{9.46}$$

Очевидно, что каждое решение $\tilde{\gamma}$ любого из уравнений (9.46) при заданных значениях $\alpha, \delta, \vartheta$ определяет КТЛ, для которой $\kappa = \tan(3\tilde{\gamma})$. Для определения второй координаты при этом достаточно подставить $\tilde{\gamma}$ в соответствующее из уравнений (9.45). Таким образом, поиск КТЛ сводится к полному решению всех уравнений (9.46) относительно γ.

9.4.3 Некоторые свойства правых частей уравнений для определения α

Очевидно, каждая из правых частей (9.46) в нашем случае должна быть действительной и положительной. Действительность при этом гарантируется неотрицательностью дискриминанта (9.40) и выражения $(\chi \sin^2\vartheta + \kappa\cos^2\vartheta)/u$. Используя (9.38), нетрудно показать, что числитель последней дроби может (хотя и не обязан) обращаться в 0, только если $\gamma = \pm\vartheta/3$, в то время как равенство $u = 0$ возможно, только если $n = 2$ и $\gamma = \delta$. Отметим также, что правые части (9.46) обращаются в 0, если $\chi = 0$, и в бесконечность при $\chi = \kappa$. Последнее равенство, как можно показать, используя (9.38), может (но не обязано) реализовываться для $n = 1$, если $\gamma = \pi/6 - \delta/2$ или $\gamma = -\pi/12 - \delta/2$, для $n = 2$, если $\gamma = -\delta/2$, для $n = 3$, если $\gamma = \pi/12 - \delta/2$. Далее, с учетом (9.35,9.43) уравнения (9.46) можно переписать в виде

$$\alpha = \alpha_{m1} = \frac{1}{8}\frac{\chi_{m1}}{\chi_{m1} - \kappa}\left(\frac{\chi_{m1}\sin^2\vartheta + \kappa\cos^2\vartheta}{\tan(\delta - \gamma - \pi/3)}\right)^{3/2}\frac{\cos 3\delta}{\cos 3\gamma \sin^3(\gamma - \delta - \pi/6)} \tag{9.47}$$

$$\alpha = \alpha_{m2} = \frac{1}{8} \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m2} - \kappa} \left(\frac{\chi_{m2} \sin^2 \vartheta + \kappa \cos^2 \vartheta}{\tan(\delta - \gamma)} \right)^{3/2} \frac{\cos 3\delta}{\cos 3\gamma \cos^3(\gamma - \delta)} \qquad (9.48)$$

$$\alpha = \alpha_{m3} = \frac{1}{8} \frac{\chi_{m3}}{\kappa - \chi_{m3}} \left(\frac{\chi_{m3} \sin^2 \vartheta + \kappa \cos^2 \vartheta}{\tan(\delta - \gamma + \pi/3)} \right)^{3/2} \frac{\cos 3\delta}{\cos 3\gamma \sin^3(\gamma - \delta + \pi/6)} \qquad (9.49)$$

9.4.4 Классификация и эволюция компланарных точек либрации

9.4.4.1 Внутренние КТЛ Можно показать, что при любых допустимых значениях параметров ϑ и δ уравнение $D_1(\gamma) = 0$ имеет ровно один корень γ_* на интервале $(-\pi/6, \gamma_m)$, где $\gamma_m = \min(-\vartheta/3, -\delta/2 - \pi/12)$. Из этого следует, что α_{11} принимает действительные значения только если $\gamma \in [\gamma_*, -\theta/3]$. Кроме того, уравнение $\chi_{11}(\gamma) = 0$ имеет ровно один корень γ_{**} на этом промежутке. Из вышесказанного можно сделать вывод, что α_{11} является положительной функцией переменной γ только на промежутке $[\gamma_*, \gamma_{**})$, причем, как можно установить анализируя ее производную, убывающей.

Используя информацию из предыдущего раздела и (9.47), нетрудно установить, что α_{21} принимает действительные положительные значения только если $\gamma \in [\gamma_*, -\delta/2 - \pi/12)$, причем если $\gamma \to -\delta/2 - \pi/12$, то $\alpha_{21} \to +\infty$. Анализируя первую и вторую производную α_{21} по γ, можно установить, что для любого допустимого значения δ существует такое ϑ_*, что для любого $\vartheta \le \vartheta_*$ функция $\alpha_{21}(\gamma)$ является возрастающей на интервале $(\gamma_*, -\delta/2 - \pi/12)$, в то время как для любого $\vartheta > \vartheta_*$ эта функция на том же промежутке имеет два экстремума. (График зависимости $\vartheta = \vartheta_*(\delta)$ представлен кривой AC на рис. 9.10. На этом рисунке $A(1.54136, 0)$, $B(1.549694, \pi/6)$)

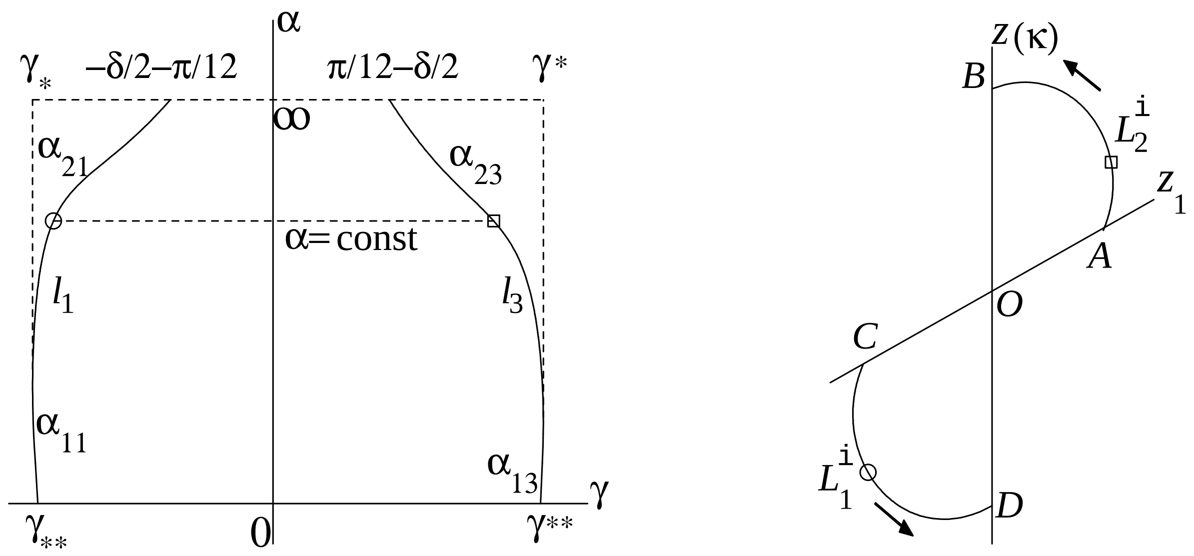
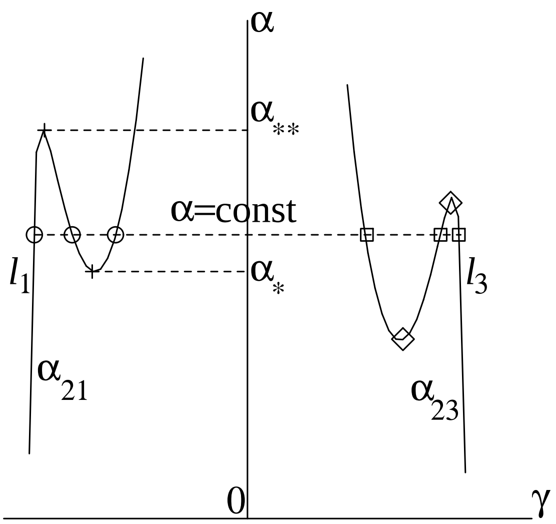


Рисунок 9.8 –

Так как $\alpha_{11}(\gamma_*) = \alpha_{21}(\gamma_*)$, при фиксированных значениях ϑ и δ функции α_{11} и α_{21} определяют в полуполосе $-\pi/6 < \gamma < \pi/6$, $\alpha > 0$ непрерывную кривую l_1, соединяющую точки, для которых $\alpha = 0$ и $\alpha = +\infty$ соответственно. Из этого следует, что если $\vartheta \leq \vartheta_*(\delta)$, то каждая из прямых $\alpha = const > 0$ имеет с l_1 ровно одно пересечение (см. рис. 9.8), т.е. для каждого положительного α существует ровно одна КТЛ L_1^i, расположенная между отрицательными лучами осей прецессии и динамической симметрии. При изменении угловой скорости прецессии от 0 до $+\infty$ (т.е. при изменении α от $+\infty$ до 0) эта КТЛ перемещается по кривой CD (см. рис. 9.8) от точки C на оси динамической симметрии, для которой $\kappa = \chi = -(\sqrt{1+\nu^2}+1+\nu)/(\sqrt{1+\nu^2}+1-\nu)$, в точку D на оси прецессии, для которой $\kappa < -\tan\vartheta$). (На этом и последующих рисунках стрелкой показано направление перемещения соответствующей КТЛ с ростом угловой скорости прецессии)

Если же $\vartheta > \vartheta_*(\delta)$, то существуют такие α_* и α_{**}, зависящие от ϑ и δ, что при $\alpha = \alpha_{**}$ или $\alpha = \alpha_*$ прямая $\alpha = const > 0$ имеет две общие



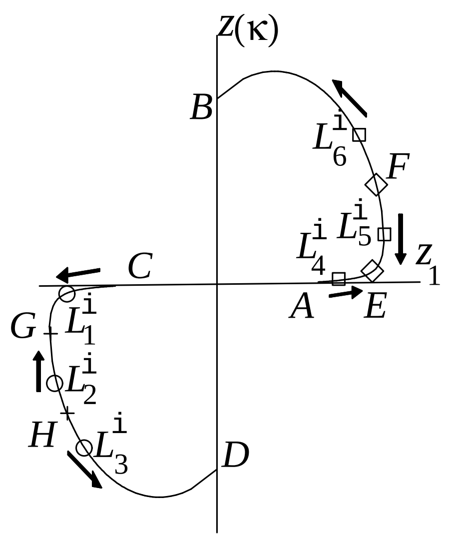


Рисунок 9.9 –

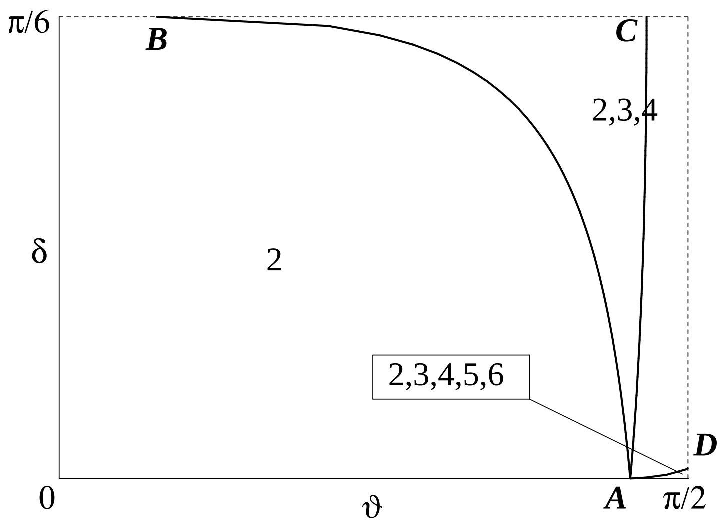


Рисунок 9.10 –

точки с l_1, для $\alpha_* < \alpha < \alpha_{**}$ эта прямая имеет с l_1 три пересечения (см. рис. 9.9), для остальных допустимых значений α существует только одна точка пересечения . Таким образом, при $\vartheta > \vartheta_*(\delta)$ функции α_{11} и α_{21} определяют от одной до трех КТЛ. С ростом угловой скорости прецессии от 0 до $+\infty$ сначала существует одна КТЛ L_1^i, постепенно отходящая от точки C на оси динамической симметрии, потом в точке H возникает вторая КТЛ, в дальнейшем распадающаяся на две (L_2^i и L_3^i), из которых одна со временем сливается в точке G с L_1^i и они исчезают, в то время как вторая перемещается к точке D на оси прецессии (рис. 9.9.

Можно показать, что при любых допустимых значениях параметров ϑ и δ уравнение $D_3(\gamma) = 0$ имеет ровно один корень γ^* на промежутке $[\gamma_r, \pi/6)$, где $\gamma_r = \max(\pi/12 - \delta/2, \vartheta/3)$. Анализируя выражение для D_3 и используя сформулированные выше свойства, можно сделать вывод, что если $\nu < \tan^2(\vartheta/2)$, то α_{23} при $\gamma \in (0, \pi/6)$ принимает положительные действительные значения только если $\gamma \in (\pi/12 - \delta/2, \gamma^*)$, в то время как уравнение $\chi_{13}(\gamma) = 0$ имеет ровно один корень γ^{**} на промежутке $(\vartheta/3, \gamma^*)$, из чего следует, что α_{13} принимает положительные действительные значения только при $\gamma \in (\gamma^{**}, \gamma^*)$ и является на этом промежутке возрастающей функцией γ. Если же $\nu \geq \tan^2(\vartheta/2)$, то α_{13} не может принимать положительных действительных значений, в то время как уравнение $\chi_{23}(\gamma) = 0$ имеет единственный корень γ^{***} на промежутке $(\pi/12 - \delta/2, \gamma^*)$, из чего следует, что α_{23} принимает действительные положительные значения при положительных γ только если $\gamma \in (\pi/12 - \delta/2, \gamma^{***})$. Анализируя первую и вторую производную α_{23} по γ, можно установить, что для любого допустимого значения δ существует такое ϑ^*, что для любого $\vartheta \leq \vartheta^*$ функция $\alpha_{23}(\gamma)$ является убывающей на интервале своей знакоположительности, в то время как для любого $\vartheta > \vartheta^*$ эта функция на том же промежутке имеет два экстремума. (График зависимости $\vartheta = \vartheta^*(\delta)$ представлен кривой AB

на рис. 9.10. На этом рисунке $B(1.30000, \pi/6)$)

Так как $\alpha_{13}(\gamma^*) = \alpha_{23}(\gamma^*)$, при фиксированных значениях ϑ и δ функции α_{13} и α_{23} определяют в полуполосе $0 < \gamma < \pi/6$, $\alpha > 0$ непрерывную кривую l_2, соединяющую точки, для которых $\alpha = 0$ и $\alpha = +\infty$ соответственно. Из этого следует, что если $\vartheta \leq \vartheta^*(\delta)$, каждая из прямых $\alpha = const > 0$ имеет с l_3 ровно одно пересечение (см. рис. 9.8), т.е. для каждого положительного α существует ровно одна КТЛ L_2^i, расположенная между положительными лучами осей прецессии и динамической симметрии. При изменении угловой скорости прецессии от 0 до ∞ (т.е. при изменении α от ∞ до 0) эта КТЛ перемещается по кривой AB(см. рис. 9.8) от точки A на оси динамической симметрии, для которой $\kappa = \chi = (\sqrt{1+\nu^2}+1-\nu)/(\sqrt{1+\nu^2}+1+\nu)$ в точку B на оси прецессии.

Если же $\vartheta > \vartheta^*(\delta)$, то, как и кривая l_1, кривая l_2 определяет от одной до трех КТЛ (L_4^i, l_5^i и L_6^i на рис. 9.9) с тем же характером эволюции.

Заметим, что КТЛ, рассмотренные в этом разделе, при каждом фиксированном δ и для любых допустимых значений двух других параметров остаются в некоторой окрестности твердого тела, поэтому эти КТЛ могут быть названы внутренними. Количество внутренних КТЛ, как следует из вышесказанного, в зависимости от значений параметров задачи может меняться от 2 до 6. Отметим, однако, что прямая $\alpha = const$ может пересекать каждую из кривых l_1 и l_3 в трех точках только при $\vartheta > 1.541365$ и достаточно малых ν. Можно показать, что такая ситуация возможна только для точек, лежащих ниже кривой AD на рис. 9.10 (на этом рисунке $D(\pi/2, 0.00581)$). Таким образом, для точек, лежащих левее и на кривой AB существуют ровно 2 внутренние КТЛ, для точек лежащих правее AB и выше или на AD могут существовать от 2 до 4 КТЛ, для точек, лежащих ниже AD при различных α могут существовать от 2 до 6 внутренних КТЛ.

Как уже было отмечено, если $\nu = 0$, то к внутренним КТЛ также следует отнести центр масс C. В силу симметрии в этом случае может быть 3, 5 или 7 внутренних КТЛ. Диаграмма количества КТЛ в плоскости параметров ϑ и α для $\nu = 0$ изображена на рис. 9.11. На этой диаграмме для точек лежащих внутри криволинейного треугольника DEF с вершинами $D(1.5414, 1.5634)$, $E(\pi/2, 1.5814$, $F(\pi/2, \sqrt{3})$ существуют 7 внутренних КТЛ, в точках границы этого треугольника, за исключением точки D, - 5 внутренних КТЛ, во всех остальных точках - 3 КТЛ.

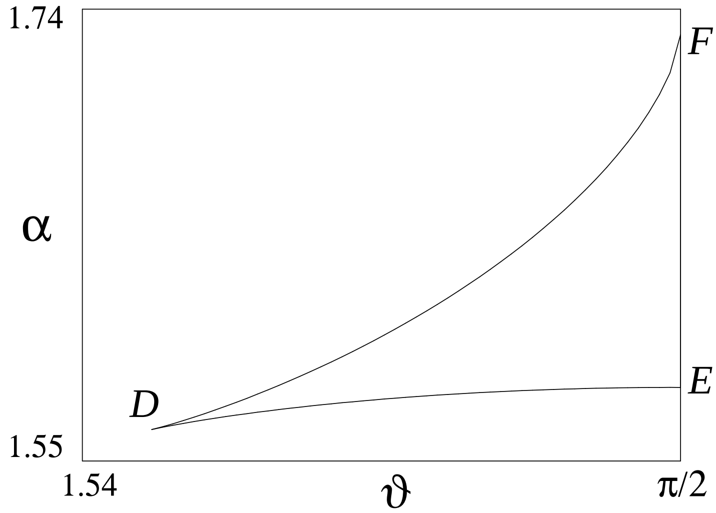


Рисунок 9.11 –

9.4.4.2 Внешние КТЛ Нетрудно показать, что для любых допустимых значений параметров δ и ϑ уравнение $D_2(\gamma) = 0$ имеет ровно два корня γ_l и γ_h на интервале $(-\pi/6, \pi/6)$, причем $\gamma_l \in (-\pi/6, -\vartheta/3)$, $\gamma_h \in (\gamma_q, \pi/6)$ (где $\gamma_q = \max(\delta, \vartheta/3)$) и $D_2 > 0$ только если $\gamma \in (\gamma_l, \gamma_h)$. Из этого, учитывая сформулированные выше свойства и (9.49), нетрудно убедиться в том, что если $\delta < \vartheta/6$, то α_{12} принимает действительные положительные значения только на интервале $(\gamma_l, -\vartheta/3)$ (на котором α_{12} является убывающей функцией γ) и на интервале $(\vartheta/3, \gamma_h)$ (на котором эта функция возрастает), в то время как α_{22} принимает положительные действительные значения на интервале (γ_l, δ) (на котором α_{22} является возрастающей функцией γ) и на интервале (δ, γ_h) (на котором эта функция убывает). Если же $\delta \geq \vartheta/6$, то α_{12} принимает действительные положительные значения только на интервале $(\vartheta/3, \gamma_h)$, (на котором эта функция возрастает с ростом γ), в то время как α_{22} принимает положительные действительные значения на интервале $(-\vartheta/3, \delta)$ (на котором α_{22} возрастает вместе с γ) и на интервале (δ, γ_h) (на котором эта функция убывает). В обоих случаях $\alpha_{22} \to +\infty$, если $\gamma \to \delta$. Т.к. $\alpha_{12}(\gamma_l) = \alpha_{22}(\gamma_l)$ и $\alpha_{12}(\gamma_r) = \alpha_{22}(\gamma_r)$, то из вышесказанного следует, что для любых значений δ и ϑ функции α_{12} и α_{22} определяют в полуполосе $-\pi/6 < \gamma < \pi/6, \alpha > 0$ две кривые: l_{21}, соединяющую точку, для которой $\gamma = -\vartheta/3, \alpha = 0$ с точкой, для которой $\gamma = \delta, \alpha = +\infty$, и l_{22}, оединяющую точку, для которой $\gamma = \vartheta/3, \alpha = 0$ с точкой, для которой $\gamma = \delta, \alpha = +\infty$. В силу монотонности α_{12} и α_{22} на каждом из промежутков их знакоположительности, каждая из прямых $\alpha = const > 0$ имеет с каждой из кривых l_{12} и l_{22} по одному пересечению (см. рис. 9.12). Следовательно, (9.48) для каждого положительного α определяет две КТЛ. Очевидно, что при изменении угловой скорости прецессии от 0 до $+\infty$ (т.е. при изменении α от $+\infty$ до 0) одна из этих точек (L_1^e) перемещается из “бесконечноудаленной точки” I_1 с координатами $\chi = -\infty$, $\kappa = \nu$ в “фиктивный притягивающий центр” A_1 с координатами $\chi = -\cot\vartheta, \kappa = \tan\vartheta$, а вторая ($L_2^e$) - из “бесконечно удаленной точки” I_2 с координатами $\chi = +\infty$, $\kappa = \nu$ в “фиктивный притягивающий центр” A_2 с координатами $\chi = \cot\vartheta, \kappa = -\tan\vartheta$ (см. рис. 9.12). Т.к. эти две КТЛ могут находиться как угодно далеко от твердого тела, они могут быть названы “внешними” КТЛ.

9.4.4.3 Центральные КТЛ Из сформулированных выше свойств следует, что если $\gamma \in (-\pi/6, 0)$, то функция α_{13} не может принимать действительных значений, в то время как при $\theta > \pi/2 - 3\delta$ функция α_{23} может

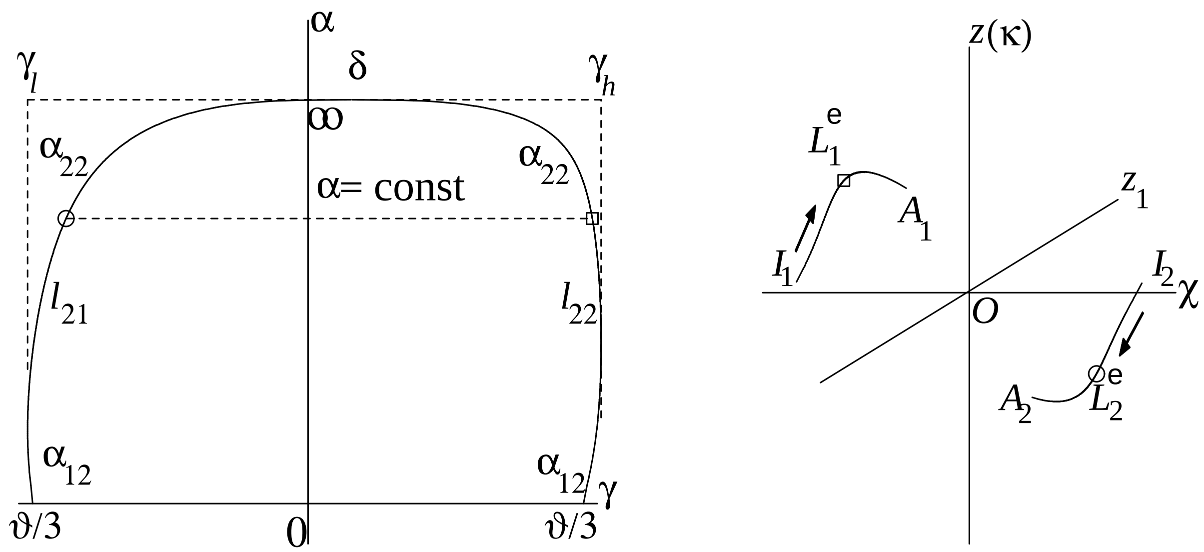


Рисунок 9.12 –

принимать положительные действительные значения только на интервале $(-\vartheta/3, \delta - \pi/6)$, причем $\alpha_{23} \to 0$, если $\gamma \to \vartheta/3 + 0$, и $\alpha_{23} \to \alpha_{\max}$, если $\gamma \to \delta - \pi/6 - 0$, где

$$\alpha_{\max} = \left(1 - \frac{\cot^2\vartheta}{\nu^2}\right)^{3/2} \frac{\cos^2\vartheta}{\nu}. \tag{9.50}$$

Нетрудно также проверить, что если $\gamma \to \delta - \pi/6 - 0$ то $\chi_{23} \to \cot^2\vartheta/\nu$. Анализ производных α_{23} по γ показывает, что для любого допустимого значения δ существует такое ϑ_{c1}, что если $0 < \vartheta \leq \vartheta_{c1}$ то α_{23} является возрастающей функцией γ на промежутке $(-\vartheta/3, \delta - \pi/6)$, в то время как при $\vartheta_{1c} < \vartheta < \pi/2$ эта функция имеет на этом промежутке два экстремума. Численный анализ показывает, что для каждого δ существует такое ϑ_{c2}, большее чем ϑ_{c1}, что если $0 < \vartheta < \vartheta_{c2}$, то уравнение $\chi_{23}(\gamma) = 0$ не имеет корней на $(-\vartheta/3, \delta - \pi/6)$, в то время как если $\vartheta_{c2} < \vartheta < \pi/2$, то это уравнение имеет на этом промежутке два корня. (На рис. 9.16 зависимость $\vartheta = \vartheta^{c1}(\delta)$ представлена кривой AD, а зависимость $\vartheta = \vartheta^{c2}(\delta)$ - кривой AC, на этом рисунке $C(0.954903, \pi/6)$, $D(0.626631, \pi/6)$)

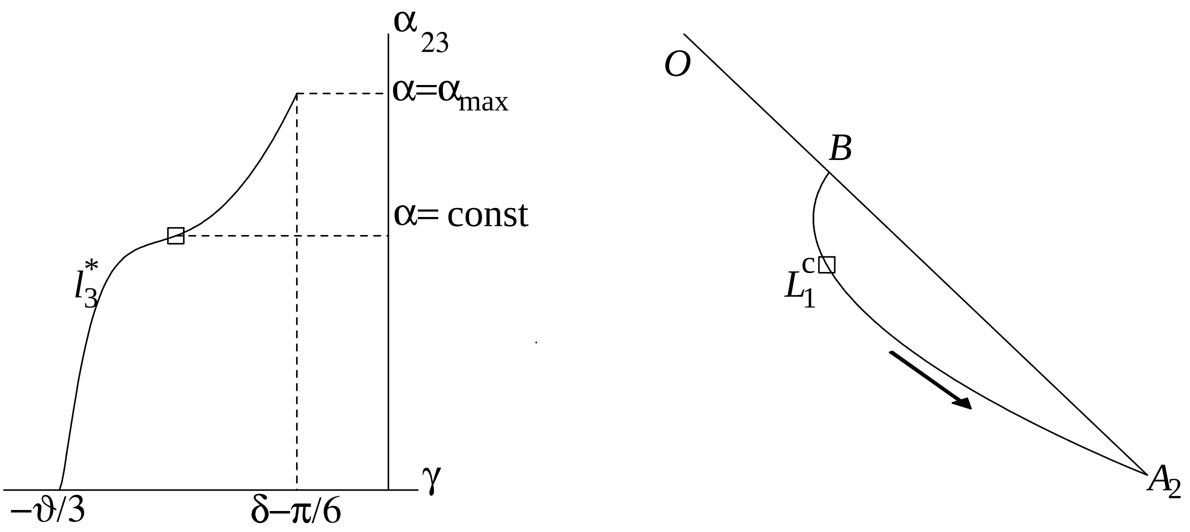


Рисунок 9.13 –

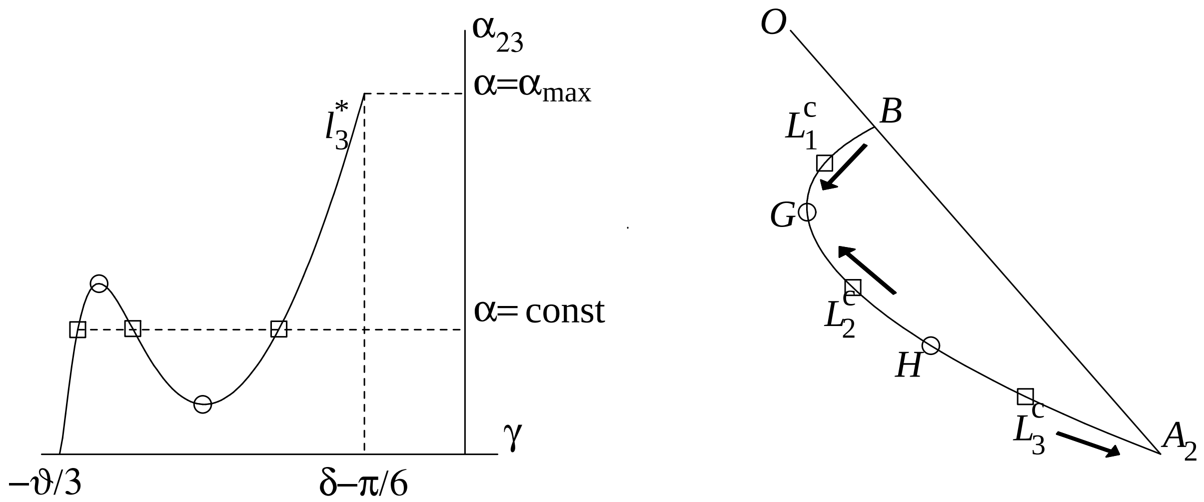


Рисунок 9.14 –

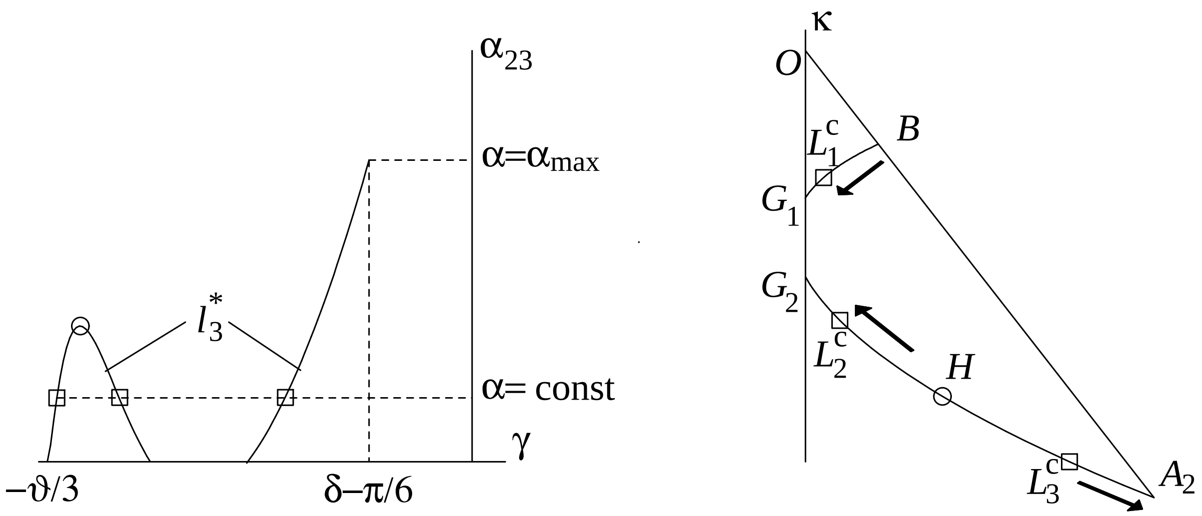


Рисунок 9.15 –

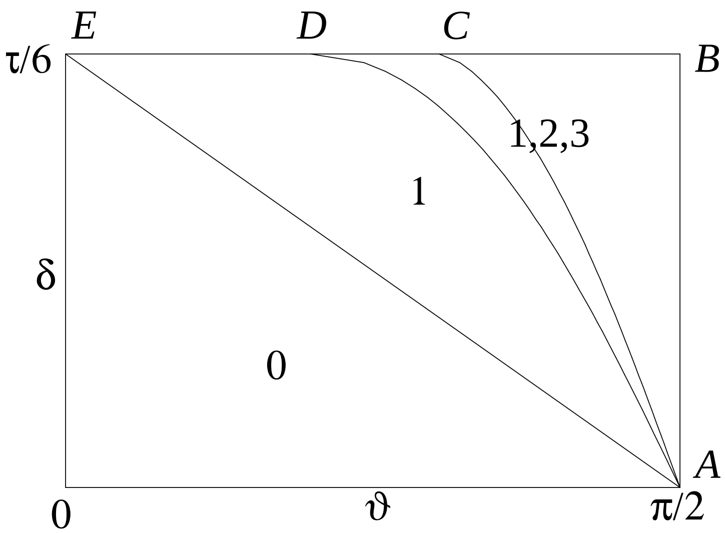


Рисунок 9.16 –

Очевидно, что если $\vartheta \le \vartheta_{c1}$, то уравнение $\alpha = \alpha_{23}$ определяет в полуполосе $-\pi/6 < \gamma < 0$, $\alpha > 0$ связную кривую l_3^*, соединяющую точку, для которой $\gamma = -\vartheta/3, \alpha = 0$, с точкой, для которой $\gamma = \delta - \pi/6$, $\alpha = \alpha_{\max}$, и имеющую одну точку пересечения с каждой из прямых $\alpha = \mathrm{const}$ $(0 < \alpha < \alpha_{\max})$. Таким образом, при выполнении условий $\pi/2 - 3\delta < \vartheta \le \vartheta_{c1}, 0 < \alpha < \alpha_{\max}$ существует ровно одна КТЛ, не являющаяся внешней или внутренней. Будем называть такую КТЛ "центральной". При изменении α от $\alpha_{\max}$ до 0 эта КТЛ (L_1^c на рис. 9.13) перемещается из особой точки B функции J_0, для которой $\chi = \cot^2\vartheta/\nu, \kappa = -1/\nu$, в "фиктивный притягивающий центр" A_2.

Если же $\vartheta_{c1} < \vartheta \le \vartheta_{c2}$, то прямая $\alpha = \mathrm{const}$ $(0 < \alpha < \alpha_{\max})$ может иметь с l_3^* одно, два или три пересечения. Соответственно, может быть 1, 2 или 3 центральных КТЛ. Эволюция таких КТЛ при уменьшении значения параметра α от $\alpha_{\max}$ до 0 качественно аналогична эволюции внутренних КТЛ (см. рис. 9.14).

Наконец, если $\vartheta_{c2} < \vartheta < \pi/2$, кривая l_3^* становится двусвязной. Эволюция центральных КТЛ в этом случае происходит следующим образом. При уменьшении α от $\alpha_{\max}$ до 0 сначала появляется одна центральная КТЛ (L_1^c на рис. 9.15, в дальнейшем перемещающаяся к точке G_1 на оси прецессии. При некотором $\alpha_{***} < \alpha_{\max}$ в точке H возникает вторая центральная КТЛ, при дальнейшем уменьшении α распадающаяся на две, одна из которых (L_2^c) перемещается к точке G_2 на оси прецессии, а другая (L_3^c) - в A_2.

Таким образом, для точек области OAE на рис. 9.16, включая ее границы, центральных КТЛ не существует; для точек области ADE, включая кривую AD, при $\alpha < \alpha_{\max}$ существует одна центральная КТЛ; во внутренних точках области ABC в зависимости от значений α может быть от 0 до 3 центральных КТЛ. (В частности, в симметричной ситуации $\nu = 0$ центральных КТЛ не существует)

Отметим также, что если $\alpha < \alpha_{\max}$, то существуют только две внутренние КТЛ, то есть при $\nu \neq 0$ общее количество КТЛ не может быть меньше 4 и больше 8, а при $\nu = 0$ может быть 5, 7 или 9 КТЛ. Пример расположения максимально возможного числа КТЛ (включая центр масс C) приведен на рис. 9.17. На этом рисунке L_1 и L_2 - внешние КТЛ, а 6 внутренних КТЛ обозначены как L_3, L_4, L_5, L_6, L_7 и L_8.

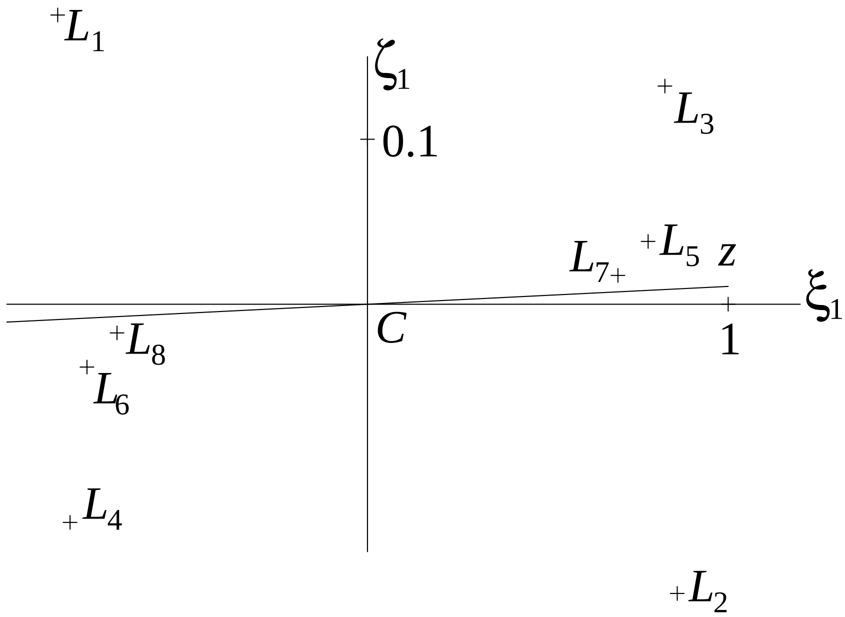


Рисунок 9.17 – $\nu = 0$, $\vartheta = 89^o 23'$, $\alpha = 1.01$

ГЛАВА 10

Движение материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле

Рассмотренная в предыдущих главах задача поиска и анализа устойчивости стационарных движений материальной точки в гравитационном поле прецессирующего динамически симметричного твердого тела может рассматриваться как элемент модельной задачи динамики космической станции в окрестности астероида, чья форма позволяет считать его динамически симметричным. Такую задачу, в свою очередь, можно рассматривать как частный случай более общей задачи, которую можно кратко сформулировать фразой "Как удержать космическую станцию около астероида?". В каждом конкретном случае эту задачу можно рассматривать как комбинацию трех компонент.

Первой компонентой является модель гравитационного потенциала астероида. Естественно считать, что такой потенциал инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии. Выше рассматривались ситуации, когда этот потенциал можно было так или иначе аппроксимировать композицией потенциалов двух точечных масс.

Второй компонентой является способ удержания станции около астероида. Выше были рассмотрены ситуации, когда материальная точка, моделирующая космическую станцию, удерживается в окрестности твердого тела, моделирующего астероид, фактически в результате баланса сил гравитации и сил инерции. Однако, было отмечено, что в этой ситуации материальная точка, совершающая одно из изученных стационарных движений, остается на неизменном расстоянии до полюсов твердого тела, то есть если соединить материальную точку с полюсами невесомыми нерастяжимыми тросами, равновесие не нарушится. Таким образом, рассмотренные выше точки либрации являются примерами равновесий материальной точки на тросах, закрепленных на полюсах астероида как минимум в трех ситуациях: если материальная точка соединена одним тросом с одним полюсом, если материальная точка соединена двумя тросами с двумя полюсами и если материальная точка находится на леере, концы которого закреплены в полюсах. Очевидно, что положения относительного равновесия материальной точки, так или иначе связанной тросами с полюсами астероида, не ограничиваются рассмотренными выше точками либрации. Таким образом, существует как минимум четыре способа удерживать материальную точку около твердого тела, а именно: без тросов (точки либрации), одним тросом, двумя тросами и леером. При этом точки либрации будут отличаться от остальных равновесий тем, что если материальная точка, размещенная на тросе (или тросах) оказывается в точке либрации, то натяжение тросов становится нулевым.

Третьей компонентой является конкретная динамическая задача. Такими задачами могут быть: поиск положений относительного равновесия, анализ устойчивости найденных стационарных движений. (Эти задачи рассматривались выше для материальной точки, не стесненной тросами). Однако, такой задачей может быть и описание каких-либо движений материальной точки. Например, если материальная точка связана с твердым телом двумя тросами, то связное движение этой точки (то есть движение с ненулевыми силами натяжения тросов) описывается в рамках механической системы с одной степенью свободы, обладающей интегралом Якоби, то есть заведомо интегрируемыми уравнениями движения. Если же материальная точка размещена на леере, то возможны движения вдоль леера, но в этом случае связное движение описывается в рамках механической системы с двумя степенями свободы, и становится актуальной задача поиска интегрируемых случаев уравнений движения.

В настоящей главе выводятся уравнения движения материальной точки, так или иначе связанной тросами с полюсами прецессирующего динамически симметричного твердого тела в двух различных системах координат. Уравнения представляют собой обощение уравнений движения из восьмой главы и описывают как свободное (с нулевым натяжением тросов) так и связное (с ненулевым натяжением тросов) движение материальной точки в системе отсчета, связанной с осями прецессии и динамической симметрии твердого тела. При этом указываются условия, при которых происходит связное движение. Для ситуации, когда материальная точка совершает связное движения вдоль леера с концами, закрепленными в полюсах твердого тела, потенциал которого инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии, указываются два интегрируемых случая выведенных уравнений движения: случай нулевого угла нутации и частный случай, когда угол нутации прямой и движения материальной точки происходят в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии. Приводится описание связного движения материальной точки (с указанием областей схода со связи) в этих интегрируемых случаях, если гравитационный потенциал твердого тела может быть аппроксимирован композицией потенциалов двух равных точечных масс, а полюса твердого тела расположены на равных расстояниях от центра масс твердого тела.

10.1 Параметры и обозначения

Как и в предыдущих главах, рассмотрим твердое тело с центром масс C (моделирующее астероид с центром масс C) и осью динамической симметрии Cz. С учетом сделанных ранее предположений, будем считать, что движение твердого тела вокруг C есть регулярная прецессия вокруг оси Cz_1 с угловой скоростью ω и с постоянным углом нутации ϑ (см. рис. 10.1). Пусть $Cx_1y_1z_1$ - неподвижная система координат (или Кёнигова система координат, связанная с центром масс астероида). Как и раньше, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $0 \le \vartheta \le \pi/2$. Кроме того, пусть $Cxyz$ - система координат, вращающаяся вокруг Cz_1 с угловой скоростью ω, такая, что ось Cx лежит в плоскости Cx_1y_1 (соответственно Cz_1 лежит в плоскости Cyz). Обозначим через F_1 и F_2 полюса твердого тела (т.е. точки пересечения его поверхности с осью прецессии Cz), а через O - середину F_1F_2. Напомним, что выше использовалась вращающаяся система координат Cxy_2z_1, в которой ось Cy_2 всегда перпендикулярна Cx и не покидает плоскость Cx_1y_1.

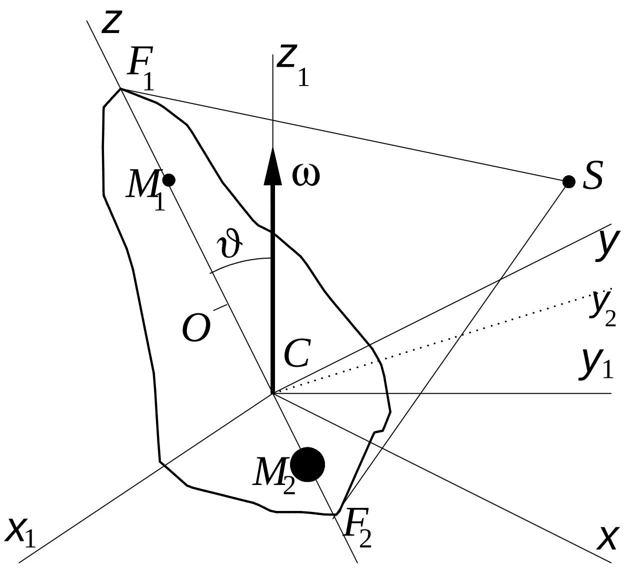


Рисунок 10.1 –

Пусть S - материальная точка (моделирующая космическую станцию), которая может быть соединена с полюсами F_1 и F_2 тросами. Будем рассматривать следующие ситуации:

1) S соединена с одним полюсом тросом SF_i $(i = 1, 2)$. В этом случае S не может выйти за пределы шара с центром в F_i. Очевидно, что S находится

“на связи”, если она находится на поверхности шара, в противном случае можно сказать, что S “сошла со связи” и совершает свободное движение.
2) S соединена тросами как с F_1, так и с F_2. В этом случае S не может выйти за пределы пересечения двух шаров с центрами в F_1 и в F_2, а ее связное движение будет происходить по окружности, перпендикулярной оси динамической симметрии Cz с центром на этой оси.
3) S помещена на леер (трос, концы которого закреплены в F_1 и F_2) и способна перемещаться вдоль него по инерции и без трения. Обозначим через $2a$ длину леера. Очевидно, что в этом случае точка S не может выйти за пределы эллипсоида вращения с фокусами F_1, F_2, большой полуосью a и эксцентриситетом e, где $e = c/a$, c - половина расстояния между фокусами. Пусть O - середина F_1F_2. Очевидно, что $c = F_1O = F_2O$, $0 < e < 1$. В этом случае S находится “на связи”, если она находится на поверхности эллипсоида, в противном случае можно сказать, что S “сошла со связи” и совершает свободное движение.

Заметим, что случай 1) можно рассматривать как предельный случай случая 3), если считать, что длина троса равна a, $c = 0$, $e = 0$ и точка O совпадает с полюсом, в котором закреплен трос, в то время как в случае 2) можно считать, что точка S, как и в случае 3) находится на леере, но движение вдоль леера запрещено.

Для описания движения точки S будем использовать цилиндрические безразмерные переменные ρ, φ, ζ, связанные с координатами x, y, z формулами

$$x = a\rho\cos\varphi, \quad y = a\rho\sin\varphi, \quad z = a\zeta, \tag{10.1}$$

а также декартовы безразмерные переменные ξ, η, ζ, определяемые формулами $x = a\xi$, $y = a\eta$, $z = a\zeta$.

Очевидно, что в случае 1) точка S будет находится на связи, если

$$Q_i = \left(\frac{z - c_i}{a_i}\right)^2 + \frac{x^2 + y^2}{a_i^2} - 1 = 0, \tag{10.2}$$

где c_i - координата полюса F_i на оси Cz, a_i - длина троса, $i = 1$ или $i = 2$.

Если точка S соединена двумя тросами с обоими полюсами (случай2)), то при связном движении $Q_1 = Q_2 = 0$.

Если же точка S помещена на леер (случай3)), то она будет находится на связи, если

$$F = (\zeta - ed)^2 + \rho^2/(1 - e^2) - 1 = 0, \tag{10.3}$$

где $d = z_0/c$, z_O - координата точки O на оси Cz.

Обозначим через Π гравитационный потенциал твердого тела. Будем считать, что Π зависит от ρ и ζ, но не зависит от ϑ, то есть инвариантен относительно поворотов вокруг Cz. Такая ситуация реализуется, например, если твердое тело есть однородное тело вращения.

Примером такого потенциала является потенциал, используемый в главах 7 и 8, то есть потенциал гантелевидного твердого тела, состоящего из двух однородных шаров (M_1 и M_2 на рис. 10.1) с массами m_1 и m_2, соединенных невесомым стержнем. В этом случае

$$\Pi = -Gm_0 \left(\frac{m_1}{SM_1} + \frac{m_1}{SM_1}\right), \tag{10.4}$$

где G - гауссова константа тяготения, m_0 - масса точки S, $SM_1 = a\rho_1$, $SM_2 = a\rho_2$,

$$\rho_1^2 = \rho^2 + (\zeta - (1-\mu)ke)^2, \qquad \rho_2^2 = \rho^2 + (\zeta + \mu ke)^2, \tag{10.5}$$

$k = l/c$, $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$, $l = M_1M_2$.

Другим примером может быть потенциал, которым аппроксимируется потенциал сжатого вдоль оси динамической симметрии твердого тела, используемый в главе 9, когда координаты точек M_1 и M_2 вдоль z выбираются комплексносопряженными, также, как и массы этих притягивающих центров.

10.2 Уравнения движения и условия нахождения на связи

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, можно представить уравнения движения материальной точки S в виде

$$\begin{gathered}\rho\varphi'' + 2\rho'\left(\varphi' + \cos\vartheta\right) - 2\zeta'\sin\varphi\sin\vartheta + \\ \cos\varphi\sin\vartheta\left(\rho\sin\varphi\sin\vartheta + \zeta\cos\vartheta\right) = 0\end{gathered} \tag{10.6}$$

$$\zeta'' - 2\frac{d(\rho\cos\varphi)}{d\tau}\sin\vartheta - (\zeta\sin\vartheta - \rho\cos\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\zeta} = \Lambda_\zeta \tag{10.7}$$

$$\begin{gathered}\rho'' - \rho\varphi'(\varphi' + 2\cos\varphi) + 2\zeta'\sin\vartheta\cos\varphi + \zeta\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - \\ -\rho(1 - \sin^2\varphi\sin^2\vartheta) + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\rho} = \Lambda_\rho\end{gathered} \tag{10.8}$$

или в виде

$$\xi'' + 2\eta''\cos\vartheta - 2\zeta''\sin\vartheta - \xi + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\rho}\frac{\xi}{\rho} = \Lambda_x \tag{10.9}$$

$$\eta'' - 2\xi''\cos\vartheta - (\eta\cos\vartheta - \zeta\sin\vartheta)\cos\vartheta + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\rho}\frac{\eta}{\rho} = \Lambda_y \tag{10.10}$$

$$\zeta'' + 2\xi'\sin\vartheta + (\eta\cos\vartheta - \zeta\sin\vartheta)\sin\vartheta + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\zeta} = \Lambda_\zeta, \tag{10.11}$$

где штрихом $()'$, как и раньше, обозначена производная по безразмерному времени τ: ($\tau = \omega t$), а $\tilde{\Pi}$ есть обезразмеренный гравитационный потенциал ($\tilde{\Pi} = \Delta\Pi$, Δ - некоторая размерная константа). Например, если потенциал определяется равенством (10.4), то

$$\tilde{\Pi} = -\alpha k^3 e^3 \left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right), \tag{10.12}$$

где $\alpha = G(m_1 + m_2)/(\omega^2 l^3)$.

Если точка S соединена с твердым телом одним тросом, то

$$\Lambda_\zeta = \lambda\frac{\partial Q_i}{\partial\zeta}, \quad \Lambda_\rho = \lambda\frac{\partial Q_i}{\partial\rho}, \quad \Lambda_x = \lambda\frac{\partial Q_i}{\partial\xi}, \quad \Lambda_y = \lambda\frac{\partial Q_i}{\partial\eta}, \tag{10.13}$$

где $i = 1$ или $i = 2$.

Если точка S соединена с твердым телом двумя тросами, то

$$\begin{aligned} \Lambda_\zeta &= \lambda\frac{\partial Q_1}{\partial\zeta} + \upsilon\frac{\partial Q_2}{\partial\zeta}, \quad \Lambda_\rho = \lambda\frac{\partial Q_1}{\partial\rho} + \upsilon\frac{\partial Q_2}{\partial\rho}, \\ \Lambda_x &= \lambda\frac{\partial Q_1}{\partial\xi} + \upsilon\frac{\partial Q_2}{\partial\xi}, \quad \Lambda_y = \lambda\frac{\partial Q_1}{\partial\eta} + \upsilon\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}. \end{aligned} \tag{10.14}$$

Наконец, если точка S расположена на леере, то

$$\begin{gathered} \Lambda_\zeta = \lambda\frac{\partial F}{\partial\zeta} = 2\lambda(\zeta - de), \Lambda_\rho = \lambda\frac{\partial F}{\partial\rho} = \frac{2\rho\lambda}{1-e^2}, \\ \Lambda_x = \frac{2\lambda\xi}{1-e^2}, \Lambda_y = \frac{2\lambda\eta}{1-e^2} \end{gathered} \tag{10.15}$$

В этом случае, если потенциал определяется равенством (10.4) (или в безразмерной форме (10.12)), то выполнены все предположения ООКЗЗТ, при этом динамика материальной точки на леере полностью определяется 6 параметрами: тремя параметрами ООКЗЗТ (α, μ, ϑ - см. [13, 24, 99]) - и величинами e, d, k. При этом не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $m_1 \leq m_2$, откуда следует, что $0 < \mu \leq 1/2$. Кроме того, естественно считать, что $-1 < d < 1$ и $0 < k < 2$.

Заметим, что во всех рассматриваемых случаях (10.6) не зависит от $\tilde{\Pi}$ и множителей Лагранжа, что связано с тем, что по предположению, Π инвариантен относительно поворотов вокруг оси Oz, то есть не зависит от $varphi$, и во всех рассматриваемых случаях уравнения связей могут быть записаны в форме также независящей от φ

В соответствии с методом Лагранжа, если множитель λ отрицателен (или оба множителя λ и υ отрицательны), то трос (или тросы) напряжен(ы), что гарантирует нахождение точки S на связи, если $\lambda = 0$ (или $\lambda = \upsilon = 0$), то сила реакции троса (тросов) равна нулю и S может как находиться на связи, так и совершать свободное движение. Положительные значения множителей Лагранжа физически нереализуемы из-за односторонности наложенных связей.

10.3 Случаи интегрируемости уравнений движения

Уравнения (10.6,10.7,10.8) допускают интеграл Якоби, однако даже если во все время движения материальная точка S не сходит со связи, то есть выполнено условие (10.3) или (10.2), этого не достаточно для интегрируемости. Рассмотрим тем не менее некоторые ситуации, когда эти уравнения интегрируемы.

10.3.1 Движение на двух напряженных тросах

Наиболее просто уравнения движения точки S интегрируются в случае, когда S соединена с полюсами двумя тросами и совершает связное движение. В этой ситуации движение происходит по окружности, определяемой равенствами $\zeta = \zeta_0 = \text{const}$ и $\rho = \rho_0 = \text{const}$, причем уравнения (10.7) и 10.8 выполняются тождественно. Из этого следует, что пока точка S не сошла со связи, ее движение не зависит от гравитационного потенциала твердого тела и определяется параметром ϑ и величинами ζ_0 и ρ_0. Как следует из (10.6), связное движение в рассматриваемом случае подчиняется интегралу Якоби

$$\varphi'^2 - \cos^2\varphi \sin^2\vartheta + \frac{\zeta_0}{\rho_0}\sin\varphi\sin 2\vartheta = h_0 = \text{const}. \tag{10.16}$$

Нетрудно убедиться в том, что фазовый портрет системы с интегралом (10.16) качественно не отличается от фазового портрета математического маятника, однако, возможны две ситуации. Если $-\rho_0 \le \zeta_0 \operatorname{ctg}\vartheta \le \rho_0$, то есть окружность $\rho = \rho_0, \zeta = \zeta_0$ имеет с плоскостью Cxy_2 не более одной общей точки, то существуют только два положения относительного равновесия точки S в системе отсчета $Cxyz$, для которых $\varphi = \pm\pi/2$, одно из которых устойчиво, а другое - неустойчиво. Эти равновесия находятся в точках пересечения окружности $\rho = \rho_0, \zeta = \zeta_0$ с плоскостью Cyz, причем устойчивым является то равновесие, которое принадлежит одному из острых углов между Cz и Cy_2. Если же $|\zeta_0 \operatorname{ctg}\vartheta| > \rho_0$, то оба положения равновесия $\varphi = \pm\pi/2$ оказываются неустойчивыми, но существуют еще два положения равновесия $\varphi = -\arcsin(\zeta_0 \operatorname{ctg}\vartheta/\rho_0)$ и $\varphi = \pi + \arcsin(\zeta_0 \operatorname{ctg}\vartheta/\rho_0)$, находящиеся в точках пересечения окружности $\rho = \rho_0, \zeta = \zeta_0$ с плоскостью Cxy_2. Эти положения равновесия всегда устойчивы.

10.3.2 Случай нулевого угла нутации

Предположим, что $\vartheta = 0$, т.е. твердое тело вращается вокруг "вертикальной"оси динамической симметрии. В этом случае кинетическая энергия точки S не зависит от φ' и имеет место циклический интеграл

$$\rho^2(\varphi' + 1) = c = \text{const}, \tag{10.17}$$

по существу являющийся интегралом кинетического момента и который можно рассматривать как следствие уравнения (10.6). Уравнения

(10.7,10.8) в рассматриваемом случае в результате редукции по Раусу упрощаются до вида

$$\zeta'' - 2\lambda(\zeta - ed) + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\zeta} = 0,$$
$$\rho'' - \frac{c^2}{\rho^3} - \frac{2\lambda\rho}{1-e^2} + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\rho} = 0 \tag{10.18}$$

Ограничимся описанием движения по поверхности эллипсоида (10.3). Для этого введем новую переменную γ по формулам

$$\rho = \sqrt{1-e^2}\sin\gamma, \quad \zeta = de + \cos\gamma \tag{10.19}$$

В нашем случае $0 \leq \gamma \leq \pi$. Интеграл Якоби, выраженный через γ' и γ, может быть записан в виде

$$\frac{1}{2}(1 - e^2\cos^2\gamma)\gamma'^2 + \tilde{\Pi} + \frac{c^2}{2(1-e^2)\sin^2\gamma} = h = \text{const} \tag{10.20}$$

Подставив (10.19) в (10.18) и исключив из получившихся уравнений γ'', условие нахождения точки S на связи $\lambda \leq 0$ можно записать в виде неравенства

$$\gamma'^2 - \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\rho} - \cos\gamma\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\zeta} + \left(\frac{c}{(1-e^2)\sin\gamma}\right)^2 \geq 0 \tag{10.21}$$

При анализе движения точки S будем считать, что величина $\tilde{\Pi}$ в (10.20,10.21) определяется формулой (10.12). Более того, ограничимся полностью симметричной ситуацией, когда F_1 и F_2, равно как и M_1 и M_2 симметричны относительно центра масс C, что возможно только если $\mu = 1/2$ и $d = 0$. Заметим, что если $c = 0$, то S будет находиться на связи во все время движения только при относительно больших $|\gamma'|$. При этом S будет вращаться вокруг C в неподвижной плоскости, содержащей Cz_1.

Если $c \neq 0$, с учетом необходимости учитывать возможность схода со связи и в зависимости от значений параметров e, α, k и c возможны 6 типов фазовых портретов изучаемой системы. Каждому из этих типов отвечает область в пространстве этих параметров. На рис. 10.2 изображено сечение этого пространства плоскостью $e = \mathrm{const}$ для $\sqrt{3}/3 < e \le 0.9965$. (Здесь по вертикальной оси откладываются значения комбинированного параметра $c_1 = c^2/(\alpha k^3)$, очевидно, $c_1 > 0$). Отметим, что при $e \le \sqrt{3}/3$ такое сечение будет содержать элементы только областей I,II,VI. Кроме того, при $e > 0.9965$ сечение области V оказывается двусвязным.

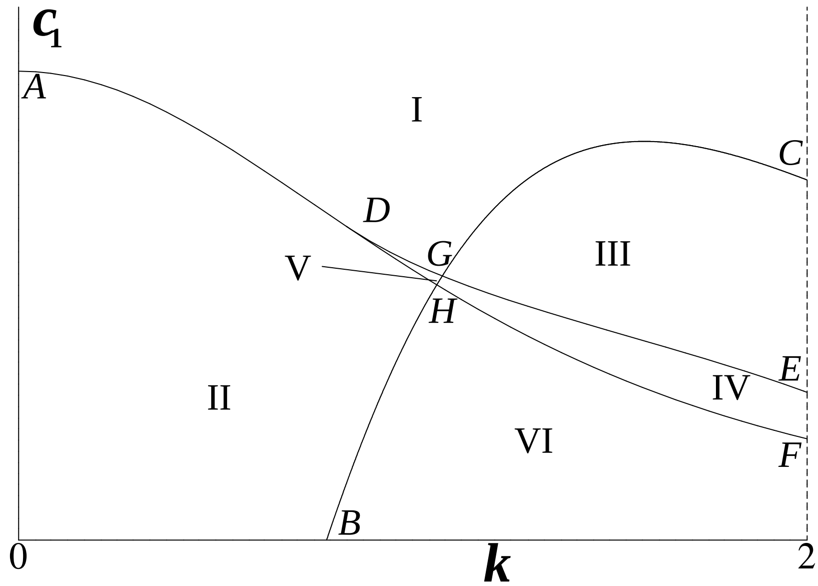


Рисунок 10.2 –

Типичный фазовый портрет для области I изображен на рис. 10.3. Единственной особой точке на этом фазовом портрете соответствует равновесие точки S на середине леера. При этом в абсолютном движении точка S описывает экватор эллипсоида (10.3). Остальные движения точки S в этом случае представляют собой колебания на леере около его середины при одновременном вращении вместе с леером вокруг Cz_1.

Фазовый портрет для области II отличается от предыдущего наличием вокруг равновесия $\gamma = \pi/2$ области схода со связи (ограничена жирной линией на рис. 10.4), т.е. в области II движение точки S по экватору эллипсоида нереализуемо. Заметим, что для точек кривой AD область схода со связи состоит из одной точки $\gamma = \pi/2$, т.е. в этом случае устойчивое движение по экватору эллипсоида происходит при нулевой силе реакции леера.

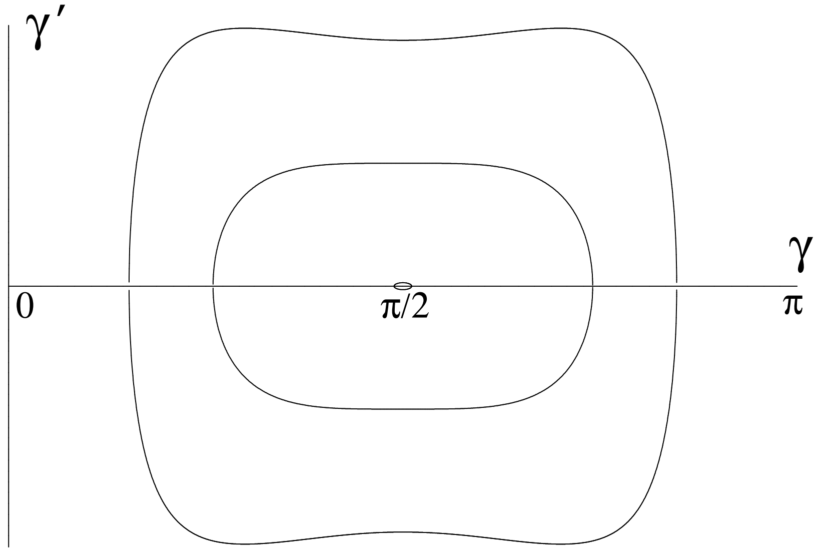


Рисунок 10.3 –

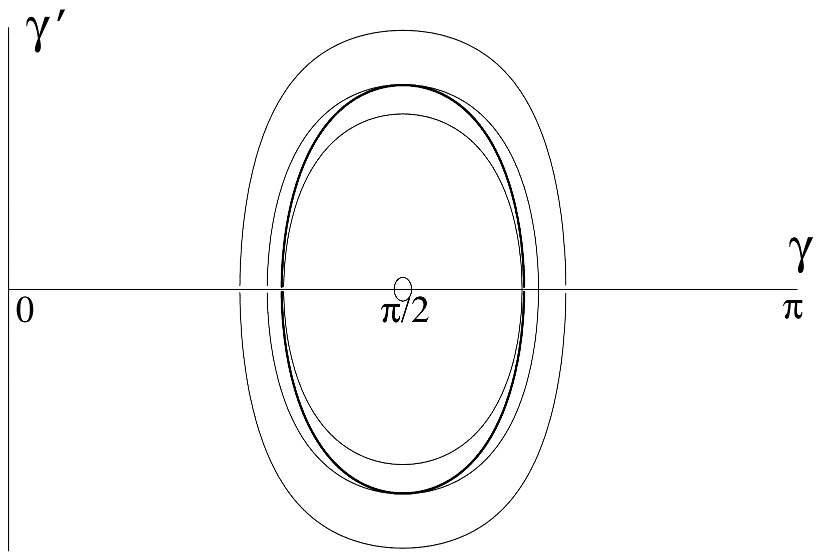


Рисунок 10.4 –

В области III особая точка $\gamma = \pi/2$ становится неустойчивой, однако появляются два устойчивых равновесия (см. рис. 10.5), соответствующие движениям точки S вдоль двух параллелей эллипсоида (10.3). Все движения происходят при ненулевой силе реакции троса, область схода со связи отсутствует. Движение по ветвям сепаратрисы соответствует траекториям изучаемой материальной точки, наматывающимся на экватор эллипсоида.

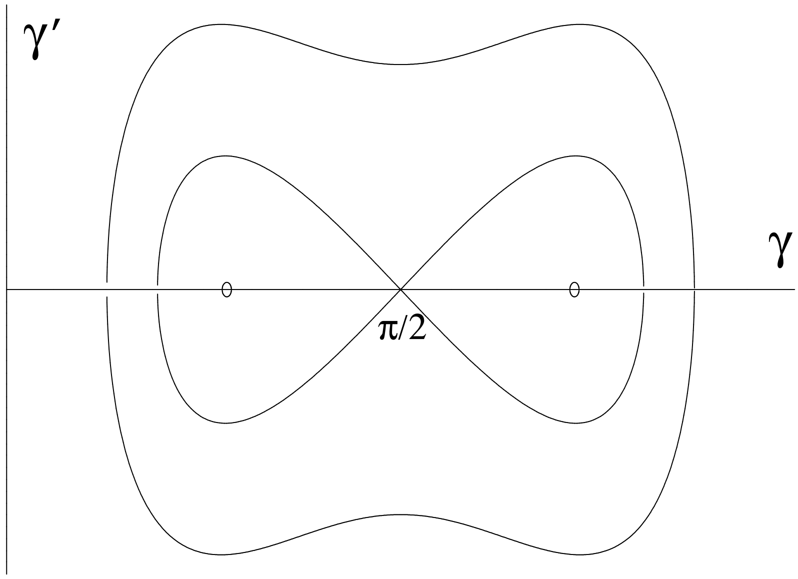


Рисунок 10.5 –

Фазовый портрет в области IV отличается от фазового портрета в области III наличием двух областей схода со связи, причем при неустойчивом движении вдоль экватора, соответствующим $\gamma = \pi/2$, сход со связи не происходит (рис. 10.6). Отметим, что области схода со связи могут как находиться целиком внутри петли сепаратрисы, так и выходить за эти пределы.

В области V также имеют место две области схода со связи, однако траектории движения оказываются такими же, как в области I (рис. 10.7).

Наконец, в области VI фазовый портрет аналогичен фазовым портретам в областях III и IV, однако, все особые точки оказываются внутри области схода со связи (рис. 10.8), т.е. равновесия точки S на леере нереализуемы.

На рис. 10.2 границы AD, DG, GC относятся к области I,BH - к об-

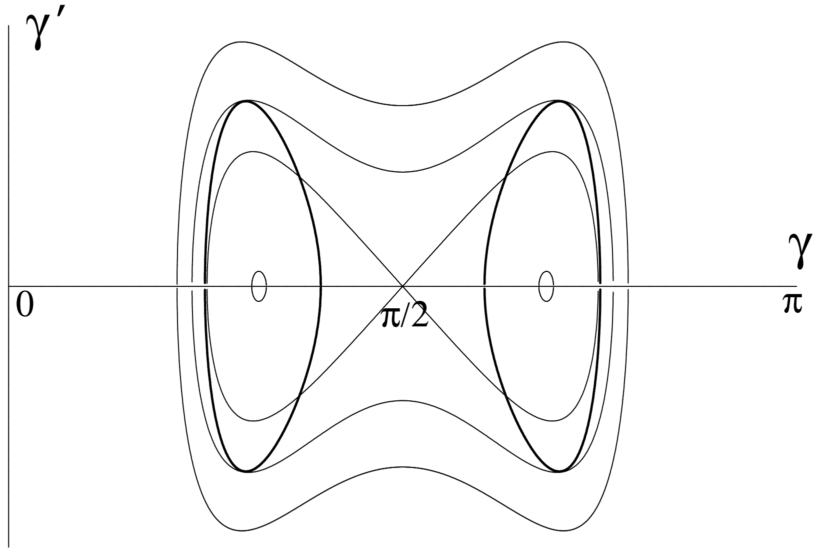


Рисунок 10.6 –

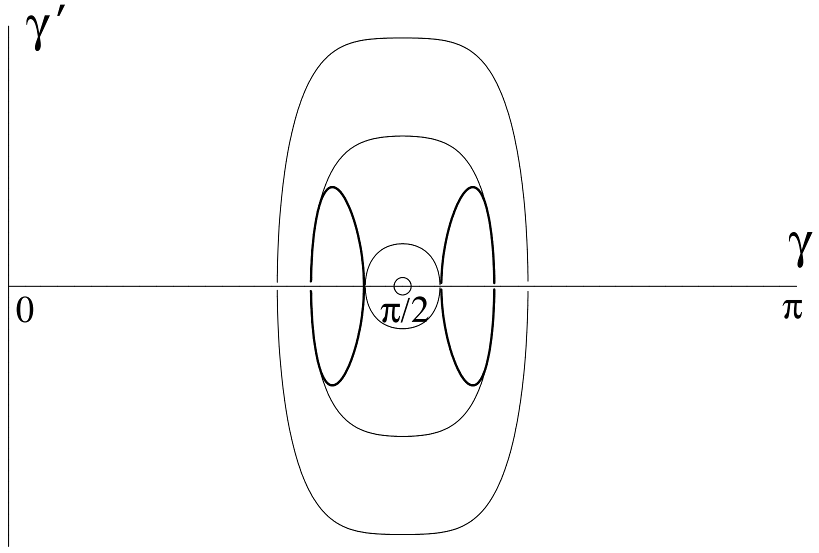


Рисунок 10.7 –

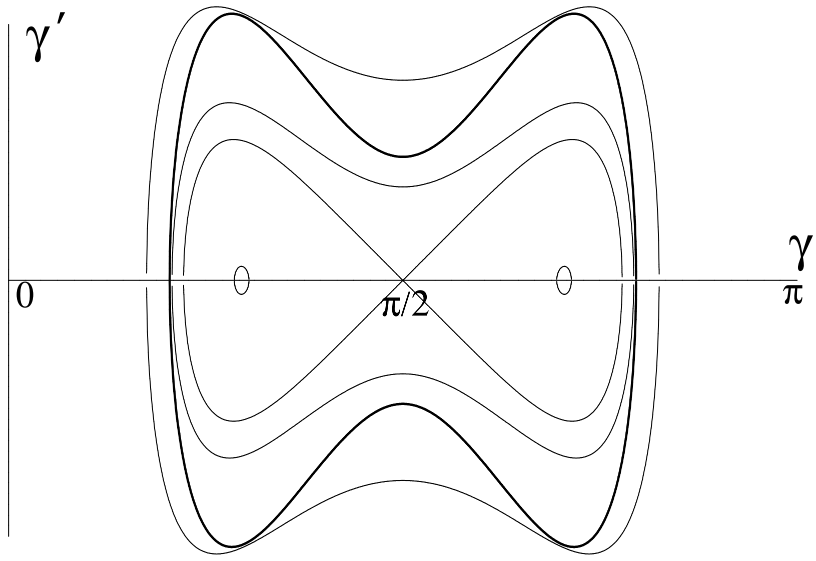


Рисунок 10.8 –

ласти II, GE - к области III, GH - к области V. Для точек кривых DH и HF существуют две области схода со связи, касающиеся в точке $\gamma = \pi/2$. Кривая $ADHF$ определяется уравнением

$$c_1 = \frac{8e^3(1-e^2)^2}{(4-4e^2+k^2e^2)^{3/2}}, \tag{10.22}$$

а кривая $BHGC$ уравнением

$$c_1 = \frac{8e^5(1-e^2)(3k^2-4+4*e^2-k^2e^2)}{(4-4e^2+k^2e^2)^{5/2}} \tag{10.23}$$

Координаты точки D есть

$$\begin{gathered} k = \frac{\sqrt{5+7e^2-\sqrt{81e^4+102e^2-32}}}{2e}, \\ c_1 = \frac{64(1-e^2)^2}{\left(21-9e^2-\sqrt{81e^4+102e^2-32}\right)^{3/2}}. \end{gathered} \tag{10.24}$$

10.3.3 Движения в горизонтальной плоскости при прямом угле нутации

В случае, когда $\vartheta = \pi/2$ уравнения движения точки S в безразмерных переменных $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\zeta = z/a$ имеют вид

$$\xi'' + 2\zeta' - \xi + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\xi} = \frac{2\lambda\xi}{1-e^2}, \tag{10.25}$$

$$\eta'' + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\eta} = \frac{2\lambda\eta}{1-e^2}, \tag{10.26}$$

$$\zeta'' - 2\xi'' - \zeta + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\zeta} = 2\lambda(\zeta - ed). \tag{10.27}$$

Заметим, что если $\tilde{\Pi}$ зависит только от ρ и ζ, то при $\eta = 0$ $\partial\tilde{\Pi}/\partial\eta = 0$. Следовательно, движения точки S в плоскости $\eta = 0$, т.е. в плоскости Cxz, в рассматриваемом случае совпадающей в каждый момент времени с Cx_1y_1, описываются уравнениями (10.25,10.27). Очевидно, что такие движения ограничены некоторым эллипсом, вращающимся в Cx_1y_1 вокруг Cz_1 с угловой скоростью ω. Ограничимся движениями по границе этого эллипса, для чего введем переменную γ по формулам

$$\xi = \sqrt{1-e^2}\sin\gamma, \quad \zeta = \cos\gamma + ed \tag{10.28}$$

(Здесь $0 \le \gamma < 2\pi$). Интеграл Якоби, выраженный через γ' и γ, имеет вид

$$\frac{1}{2}(1 - e^2\cos^2\gamma)\dot{\gamma}^2 + \tilde{\Pi} - de\cos\gamma - \frac{1}{2}e^2\cos^2\gamma = h = \mathrm{const} \tag{10.29}$$

Подставив (10.28) в (10.25,10.27) и исключив из полученных выражений γ'', получим условие $\lambda \le 0$ нахождения на связи как неравенство

$$\gamma'^2 + \frac{2(1-e^2\cos^2\gamma)}{\sqrt{1-e^2}}\gamma' + 1 + de\cos\gamma - \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\zeta}\cos\gamma - \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\xi}\frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-e^2}} \ge 0 \tag{10.30}$$

При анализе движения будем считать, что величина $\tilde{\Pi}$ определяется формулой (10.12). Рассмотрим случай полной симметрии, когда $\mu = 1/2$ и $d = 0$. Не трудно убедиться, что в этой ситуации равновесия системы с интегралом Якоби (10.29) лежат либо в точках $\gamma = \pi/2n$, $n = 0, 1, 2, 3$, либо удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{4e\cos\gamma}\left(\frac{2e\cos\gamma - k}{\rho_1^{3/2}} + \frac{2e\cos\gamma + k}{\rho_2^{3/2}}\right) \tag{10.31}$$

Заметим, однако, что если $\gamma' = 0$, то условие нахождения на связи (10.30) может быть переписано как

$$\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{4e}\left(\frac{2 - ke\cos\gamma}{\rho_1^{3/2}} + \frac{2 + ke\cos\gamma}{\rho_2^{3/2}}\right), \tag{10.32}$$

и, как не трудно видеть, равновесия определяемые (10.31) находятся за пределами области нахождения на связи и не могут быть реализованы. Более того, равновесия $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$ оказываются реализуемыми только при $\alpha \leq (2 - k^2e^2/2)^2/(4 + k^2e^2)$ и в этом случае они устойчивы, а равновесия $\gamma = \pm\pi/2$ оказываются реализуемыми только при $\alpha \leq (1 - e^2 + k^2e^2/4)^{3/2}$ и в этом случае они неустойчивы. Из этого следует, что хотя фазовый портрет рассматриваемой системы в изучаемом случае может оказаться существенно более содержательным, чем фазовый портрет математического маятника, движения точки S, не приводящие к сходу со связи, могут быть либо, при сравнительно больших начальных значениях $|\gamma'|$, "вращениями", при которых S периодически пробегает упомянутый выше эллипс, или, при сравнительно малых $|\gamma'|$, "колебаниями" вокруг устойчивых положений равновесия $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi$. Пример фазового портрета в качественно наиболее сложной ситуации, когда существует 12 положений равновесия, 10 из которых находятся вне области нахождения на связи, изображен на рис. 10.9 (граница областей схода со связи обозначена жирной линией, эти области являются ограниченными, на рисунке 10.9 изображены только их "верхние" части). Отметим также, что исследование количества и устойчивости положений равновесия существенно усложняется, если допустить отрицательные значения α (т.е. силы притяжения заменить на силы отталкивания) или же, если рассматривать движение точки по внешней поверхности эллипсоида (10.3).

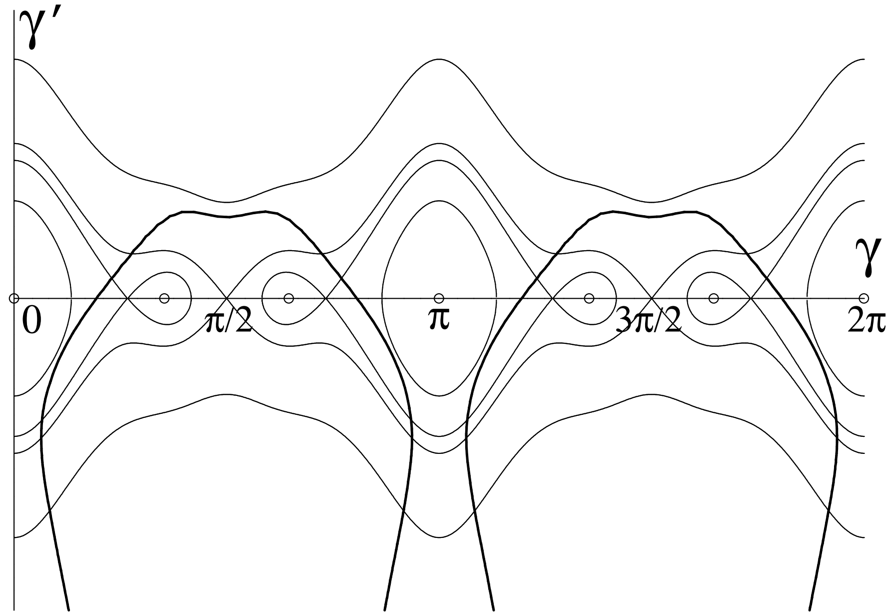


Рисунок 10.9 –

ГЛАВА 11

Равновесия материальной точки на леере, закрепленном на прецессирующем твердом теле

В этой главе изучаются равновесия материальной точки на леере в подвижной системе отсчета, связанной с осями прецессии и динамической симметрии твердого тела, в полюсах которого закреплены концы леера. Примерами таких равновесий в случае нулевой силы реакции леера, очевидно, являются рассмотренные выше точки либрации, но ими не исчерпывается множество всех таких равновесий. Отметим, что из-за собственного вращения твердого тела, материальная точка, находящаяся в равновесии на леере, неподвижна только по отношению к полюсам твердого тела (то есть во вращающихся системах координат $Cxyz$ или Cxy_2z_1 на рис. 10.1), но с точки зрения наблюдателя, находящегося на поверхности твердого тела, движется вокруг этого тела по некоторой круговой орбите.

Как следует из (10.6), при $0 < \vartheta < \pi/2$ координаты положений равновесия материальной точки S во вращающейся системе координат $Cxyz$ в случае, когда гравитационный потенциал Π гравитирующего твердого тела инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии Cz (то есть если Π зависит только от ζ и ρ, но не зависит от φ - см. (10.1)), и при любом из описанных в предыдущей главе способов соединения тросом или тросами материальной точки S с полюсами твердого тела (или при отсутствии таких соединений) подчиняются уравнению

$$\sin\vartheta\,(\rho\sin\varphi\sin\vartheta + \zeta\cos\vartheta) = 0,$$

из чего следует, что либо $\varphi = \pm\pi/2$, либо $\rho = -\zeta\sin\varphi\cot\vartheta$, то есть положения равновесия принадлежат соответственно либо плоскости Czz_1 (проходящей через оси прецессии и динамической симметрии), либо плоскости Cxy_2 (проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии). По аналогии с принятой выше классификацией точек либрации, будем называть положения равновесия первого типа "компланарными", а второго типа - "треугольными".

11.1 Равновесия материальной точки на леере в случае нулевой гравитации

Рассмотрим сначала ситуацию, когда гравитацией твердого тела можно пренебречь, то есть $\Pi \equiv 0$. (В этом случае рассматриваемая механическая система является моделью протяженной прецессирующей космической станции, находящейся вдали от массивных небесных тел и снабженной леером, по которому может перемещаться небольшой зонд).

Предположим, что угол нутации ϑ - острый. Считая без ограничения общности $d \geq 0$ и анализируя уравнения (10.6,10.8,10.7) нетрудно установить, что в системе отсчета $Cxyz$ существуют 4 или 6 положений равновесия точки S на эллипсоиде (10.3). Два из этих положений равновесия есть пересечения эллипсоида с Cz_1, для которых $\varphi = \pm\pi/2$, $\zeta = \eta \cot\varphi$. Можно показать, что в этом случае $\lambda = 0$, т.е. трос не напряжен. Очевидно, положения равновесия на Cz_1 неустойчивы. Изучая экстремумы интеграла Якоби и опираясь на теорему А.П.Иванова [43, 44], можно доказать, что положение равновесия

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{(1-e^2)\cos\vartheta}{\sqrt{1-e^2\cos^2\vartheta}}, \quad \zeta = ed + \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1-e^2\cos^2\vartheta}}$$

всегда устойчиво, в то время как положение равновесия

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{(1-e^2)\cos\vartheta}{\sqrt{1-e^2\cos^2\vartheta}}, \quad \zeta = ed - \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1-e^2\cos^2\vartheta}}$$

устойчиво только если

$$d < \frac{e \sin\vartheta}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\vartheta}} \tag{11.1}$$

Два последних компланарных равновесия соответствуют таким точкам пересечения эллипсоида (10.3) и плоскости Cyz, в которых касательная плоскость параллельна оси прецессии Cz_1.

Кроме описанных 4 компланарных положений равновесия в плоскости Czz_1, в случае выполнения условия (11.1) в плоскости Cx_1y_1 существуют два неустойчивых треугольных положения равновесия, для которых

$$\varphi = \pi/2 \pm \arccos\left(\frac{d\sqrt{1-e^2}\cot\vartheta}{\sqrt{e^2-d^2}}\right),$$
$$\rho = \frac{\sqrt{1-e^2}\sqrt{e^2-d^2}}{e}, \quad \zeta = -\frac{d(1-e^2)}{e}.$$

11.2 Условия устойчивости “закрепленных” равновесий

Изучим теперь возможность стабилизировать равновесия материальной точки S на леере, просто запретив движения вдоль леера. Ограничимся теми из таких “закрепленных” положений равновесия, для которых сила натяжения троса не равна нулю, исключив тем самым из рассмотрения точки либрации. Как следует из известной теоремы А.П.Иванова [43, 44], в этом случае выводы об устойчивости можно сделать, заменив неудерживающие связи удерживающими. В нашем случае такая замена приводит к системе с одной степенью свободы φ и интегралом Якоби

$$T_2 - T_0 = h = \mathrm{const}, \tag{11.2}$$

не зависящим от гравитационного потенциала астероида, где

$$T_2 = \frac{1}{2}\rho^2\varphi'^2, \qquad T_0 = \frac{1}{2}\left((\eta\cos\vartheta - \zeta\sin\vartheta)^2 + x^2\right). \tag{11.3}$$

Очевидно, для компланарных положений равновесия (как, впрочем, и для треугольных положений равновесия) $dT_0/d\varphi = 0$. С учетом того, что $\xi = \rho\cos\varphi$ и $\eta = \rho\sin\varphi$, при $\xi = 0$ справедливо равенство

$$\frac{d^2T_0}{d\varphi^2} = \eta\sin\vartheta\,(\eta\sin\vartheta + \zeta\cos\vartheta)\,. \tag{11.4}$$

Заметим также, что для равновесий, являющихся одновременно компланарными и треугольными, $d^2T_0/d\varphi^2 = d^3T_0/d\varphi^3 = 0$, но

$$\frac{d^4T_0}{d\varphi^4} = -3\eta^2\sin^2\vartheta. \tag{11.5}$$

Из (11.4,11.5) следует, что для компланарных положений равновесия, не лежащих на оси динамической симметрии при выполнении условия

$$\eta\,(\eta\sin\vartheta + \zeta\cos\vartheta) \leq 0 \tag{11.6}$$

достигается максимум T_0. Таким образом, "закрепленные" компланарные положения равновесия, не лежащие на оси динамической симметрии твердого тела и для которых сила натяжения троса не равна нулю, устойчивы внутри острых углов, образованных осями Cz и Cy_2 (включая равновесия, лежащие на Cy_2). Анализируя решения уравнений движения, линеаризованных в окрестности компланарных положений равновесия, можно показать, что если левая часть (11.6) положительна, т.е. если компланарное равновесие находится внутри тупых углов, образованных осями Cz и Cy_2, то оно неустойчиво.

Отметим, что для треугольных положений равновесия

$$\frac{d^2T_0}{d\varphi^2} = -\xi^2\sin^2\vartheta, \tag{11.7}$$

откуда следует, что все "закрепленные" треугольные положения равновесия устойчивы.

11.3 “Треугольные” равновесия материальной точки на леере в условиях ООКЗЗТ

Изучим теперь множества возможных положений равновесия материальной точки на леере во вращающейся вокруг оси прецессии плоскости Cxy_2 в случае, если гравитационный потенциал твердого тела аппроксимируется композицией гравитационных потенциалов двух точечных масс, то есть в условиях ООКЗЗТ.

Как следует из (10.7,10.8) координаты треугольных положений равновесия определяются равенствами

$$\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\zeta} + 2\lambda d - (1+2\lambda)\,\zeta = 0, \qquad \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\rho} - \left(1 + \frac{2\lambda}{1-e^2}\right)\rho = 0 \tag{11.8}$$

Считая, что Π в (11.8) определяется соотношением (10.4), условие нахождения на связи $\lambda \leq 0$ после некоторых упрощений можно записать в виде

$$\frac{2\zeta - ke\,(1+2\mu)}{e\zeta + d\,(1-e^2)} \leq 0 \tag{11.9}$$

Исключив λ из (11.8) и используя (10.3,10.4), получим уравнение для определения координаты ζ треугольного равновесия, не зависящее от ρ, φ, ϑ. Будем рассматривать это уравнение как зависимость между ζ и e при фиксированных значениях μ, d, k, α. Такой подход позволяет строить множества треугольных равновесий для каждого конкретного твердого тела (т.е. для фиксированных значений параметров μ, d, k, α, ϑ) при всевозможных допустимых длинах троса (то есть при всех допустимых значениях e). Здесь можно выделить пять качественно различных случаев.

В качестве первого из этих случаев рассмотрим ситуацию "полной симметрии"$d = 0$, $\mu = 1/2$. Как следует из (11.9), треугольные положения равновесия для такого твердого тела могут находиться только на оси

Cx. Можно показать, что если $\alpha \leq 1/8$, то все точки прямой Cx являются треугольными положениями равновесиями. Если же $\alpha > 1/8$, то множество треугольных равновесий состоит из двух лучей $|x| \geq ke\sqrt{\alpha^{2/3} - 1/4}$, начинающихся в ТТЛ. Анализ уравнений первого приближения в окрестности каждого из равновесий, лежащих на Cx, показывает, что все они неустойчивы.

Гравитационное поле астероида может быть аппроксимировано полем двух точек равной массы ($\mu = 1/2$), но $d \neq 0$ во втором случае. Без ограничения общности будем считать, что $d > 0$. Возможные множества треугольных равновесий для $\alpha > 1/8$ изображены на рис. 11.1. Для $0 < \vartheta < \pi/2$ множество треугольных равновесий представлено кривой β с концами в ТТЛ L_1 и L_2. Если $\vartheta \to \pi/2$, то кривая β стремится к некоторой предельной кривой ω. Если $\vartheta = 0$, то треугольные равновесия образуют круг α, целиком состоящий из точек либрации ООКЗЗТ. Если же $\alpha \leq 1/8$, то ТТЛ не существуют [13, 24], поэтому β и ω становятся замкнутыми кривыми, проходящими через C, а окружность α исчезает.

В третьем случае, когда $\mu < 1/2$, $d = 0$, множества треугольных равновесий становятся неограниченными (см. рис. 11.2). При этом для $\vartheta = 0$ треугольные равновесия не существуют. Если же угол нутации острый, то для $\alpha \geq 1/8$ при сравнительно малых ϑ треугольные равновесия образуют односвязную кривую β. При сравнительно больших ϑ это же множество состоит из двух кривых γ, начинающихся в ТТЛ L_1 и L_2. $\gamma \to \omega$ если $\vartheta \to \pi/2$. Если же $\alpha < 1/8$, то существуют только кривые типа β.

$\mu < 1/2$, $d < 0$ для четвертого случая, когда треугольные равновесия существуют только если $\vartheta \geq \vartheta_{\min}$, где $\vartheta_{\min}$ зависит от α, d, μ, k. (см. рис. 11.3). На этом рисунке через S_m обозначено единственное треугольное положение равновесия, существующее при $\vartheta = \vartheta_{min}$. Остальные кривые и точки имеют такой же смысл, как и в третьем случае.

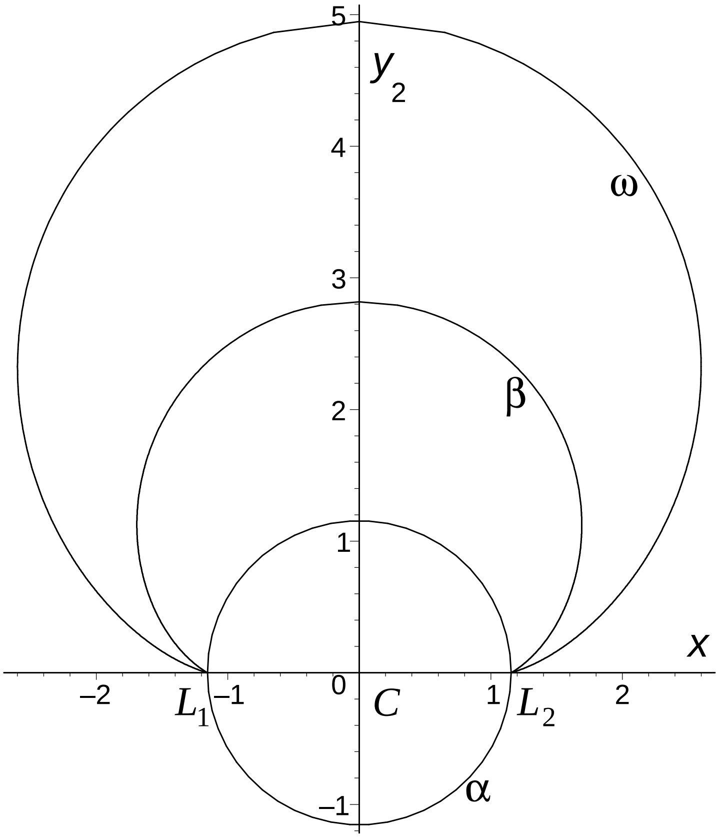


Рисунок 11.1 –

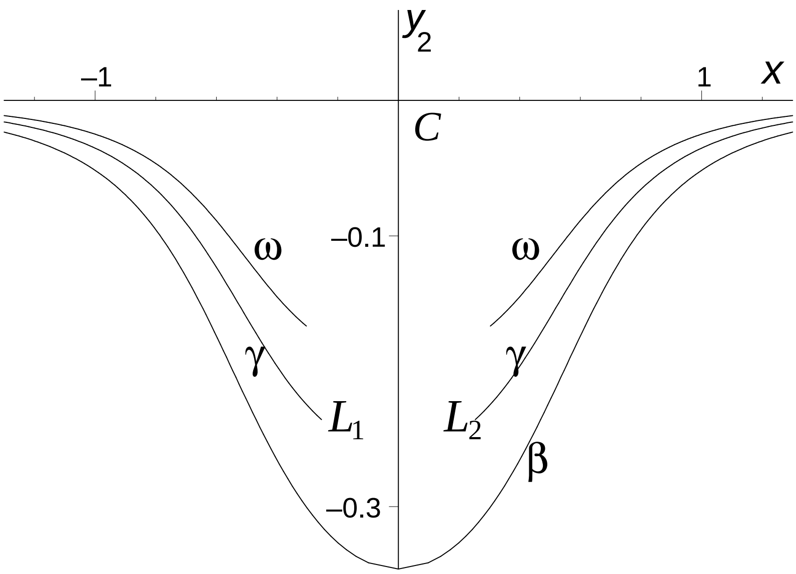


Рисунок 11.2 –

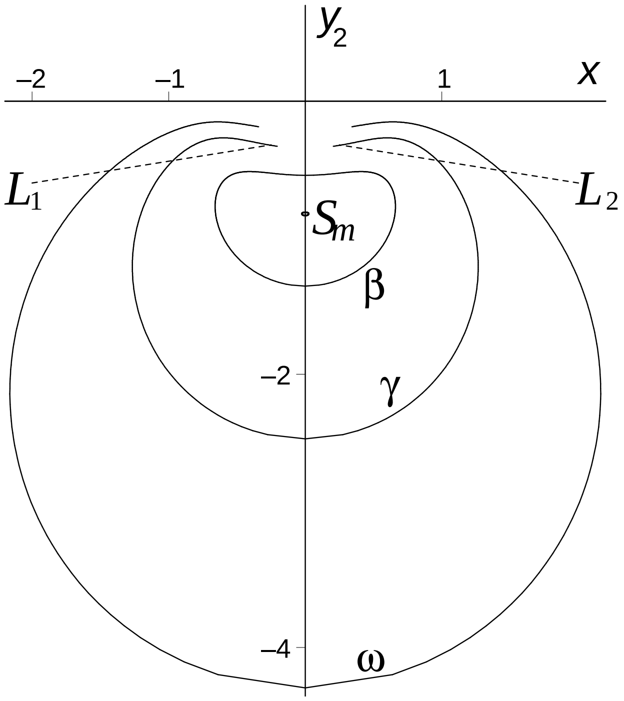


Рисунок 11.3 –

$\mu < 1/2$, $d > 0$ для пятого случая, когда треугольные равновесия образуют кривые, охватывающие C (см. рис. 11.4). Обозначения на этом рисунке имеют тот же смысл, что и в первом и четвертом случаях.

Отметим, что при фиксированном значении e в первом, втором и третьем случаях существует не более двух треугольных равновесий, в то время как в четвертом и пятом случаях число этих равновесий может быть 4.

Отметим также, что как следует из предыдущего раздела, справедлив следующий критерий. Если треугольное положение равновесия реализуется при ненулевой силе реакции троса и остром угле нутации, то оно становится устойчивым, как только точка S фиксируется на леере. Иными словами, запретив материальной точке двигаться вдоль троса, можно стабилизировать практически любое треугольное равновесие.

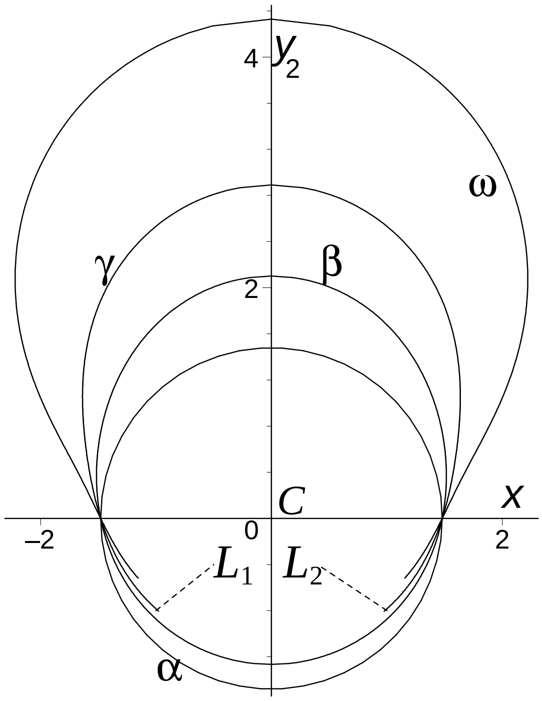


Рисунок 11.4 –

11.4 "Компланарные" равновесия материальной точки на леере в условиях ООКЗЗТ в случае полной симметрии

В заключение изучим множества возможных положений равновесия материальной точки на леере во вращающейся вокруг оси прецессии плоскости Cyz (совпадающей с Cy_2z_1), как и выше, то есть в условиях ООКЗЗТ, ограничившись случаем, когда гравитационный потенциал твердого тела аппроксимируется композицией гравитационных потенциалов двух равных точечных масс ($\mu = 1/2$), а полюса твердого тела находятся на равных расстояниях от его центра масс C ($d = 0$), то есть ситуацией, названной раньше "случаем полной симметрии".

Из (10.9,10.10,10.11,10.15) следует, что уравнения движения точки S, помещенной на леер, можно записать в виде

$$\xi'' + 2\eta' \cos\vartheta - 2\zeta' \sin\vartheta - \xi + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \rho}\frac{\xi}{\rho} = \frac{2\lambda\xi}{1-e^2} \tag{11.10}$$

$$\eta'' - 2\xi' \cos\vartheta - (\eta\cos\vartheta - \zeta\sin\vartheta)\cos\vartheta + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \rho}\frac{\eta}{\rho} = \frac{2\lambda\eta}{1-e^2} \tag{11.11}$$

$$\zeta'' + 2\xi' \sin\vartheta + (\eta\cos\vartheta - \zeta\sin\vartheta)\sin\vartheta + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \zeta} = 2\lambda(\zeta - ed), \tag{11.12}$$

Очевидно, физический смысл имеют только неположительные значения множителя Лагранжа λ.

Предположим, что, как и выше, выполнены предположения ООКЗТТ В.В.Белецкого [13, 24], когда гравитационный потенциал астероида совпадает с гравитационным потенциалом двух материальных точек, помещенных в точки M_1 и M_2 оси динамической симметрии твердого тела. Ограничиваясь случаем "полной симметрии", безразмерный потенциал твердого тела можно записать как

$$\tilde{\Pi} = -\frac{\alpha k^3 e^3}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right), \tag{11.13}$$

где $\rho_1 = |SF_1|/a$ и $\rho_2 = |SF_2|/a$. (см. рис. 10.1)

Будем искать равновесия точки S на леере во вращающейся плоскости $\xi = 0$, положив в (11.10,11.11,11.12) $\xi = \xi' = \xi'' = \eta' = \eta'' = \zeta' = \zeta'' = 0$. Исключая λ из (11.11,11.12), и используя (11.13), получим алгебраическое уравнение для определения множеств компланарных положений равновесия в виде

$$\alpha = f(\gamma, e; \vartheta, k) =$$

$$\frac{4\sin\gamma\sin^2\vartheta\left(1 + \sqrt{1-e^2}\,\mathrm{ctg}\,\gamma\cot\vartheta\right)\left(\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{ctg}\,\vartheta - \mathrm{ctg}\,\gamma\right)}{k^3e^4\left(k\left(\rho_1^{-3} - \rho_2^{-3}\right) - 2e\cos\gamma\left(\rho_1^{-3} + \rho_2^{-3}\right)\right)} \tag{11.14}$$

Условие нахождения на связи точки S, т.е. неположительности λ, может быть записано как

$$\frac{1}{e\sin\gamma}\cdot\frac{1+\sqrt{1-e^2}\cot\gamma\cot\vartheta}{\sqrt{1-e^2}\cot\vartheta-\cot\gamma}\cdot\frac{2P(1-e^2)-ke\cos\gamma}{k-2P\cos\gamma}\leq 1, \qquad (11.15)$$

где $P=(\rho_1^3+\rho_2^3)/(\rho_2^3-\rho_1^3)$. Очевидно, равенство в (11.15) достигается в случае нулевого натяжения троса, то есть соответствующие компланарные положения равновесия являются КТЛ.

Опишем множества компланарных положений равновесия, определяемых равенством (11.14), для которых (11.15) - строгое неравенство, при этом будем считать, что трос может иметь любую длину, не меньшую расстояния между полюсами F_1 и F_2 твердого тела, то есть эксцентриситет e может принимать любые значения из отрезка $[0,1]$ (значению $e=0$ соответствует трос бесконечной длины,а значению $e=1$ - положения равновесия, лежащие на отрезке F_1F_2). Фактически, в этой ситуации e и γ можно рассматривать как систему криволинейных координат в плоскости Cyz.

Анализируя (11.14), нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае компланарные положения равновесия не могут лежать на осях Cy_1 и Cz_1 (за исключением "центральной" КТЛ, совпадающей с центром масс C) и не могут находиться внутри острых углов, образованных осями Cz и Cz_1. Поэтому, следуя классификации, предложенной для КТЛ в [28], будем называть компланарные положения равновесия, лежащие внутри острых углов, образованных осями Cy_1 и Cz, "внешними", а компланарные положения равновесия, лежащие в первом и третьем квадрантах, образуемых осями Cy_1 и Cz_1, "внутренними". Как следует из (11.6), внешние компланарные положения равновесия, отличные от КТЛ, становятся устойчивыми, если закрепить станцию на леере, в то время как внутренние компланарные положения равновесия, отличные от КТЛ, всегда неустойчивы. (Выше было показано, что внешние КТЛ всегда неустойчивы, в то время как внутренние КТЛ могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми).

Отметим также, что при выполнении условия

$$\alpha < g(\vartheta, k) = \frac{\left(4 - k^2\right)^2 \sin^2 \vartheta}{4k^3 \left(4 + k^2\right)} \tag{11.16}$$

на оси Cz, кроме центральной КТЛ, существуют ровно два компланарных положения равновесия K_1 и K_2, принадлежащих отрезкам M_1F_1 и M_2F_2 соответственно, в противном случае на Cz нет компланарных положений равновесия, отличных от C. Очевидно, что при выполнении неравенства (11.16) внешние компланарные положения равновесия существуют в как угодно малых окрестностях точек F_1, K_1, F_2, K_2.

Учитывая, что на множества точек, определяемых равенством (11.14), наложено ограничение (11.15), можно установить, что множество внутренних компланарных положений равновесия, отличных от КТЛ, в зависимости от значений параметров α, k и ϑ представляется одной или двумя кривыми, соединяющими внутренние КТЛ, или же такие равновесия не существуют. Количество кривых, очевидно, определяется диаграммой количества КТЛ (см.рис. 8.5). Множества внешних компланарных положений равновесия состоят из двух или четырех кривых, которые, в зависимости от значений параметров рассматриваемой системы, могут соединять между собой в разных комбинациях внешнюю КТЛ, бесконечно удаленную точку, а также полюсы F_1 и F_2 с точками K_1 и K_2 в случае существования последних. Эти кривые в некоторых случаях могут пересекаться.

В целом можно выделить 12 качественно различных типов множеств компланарных положений равновесия (рис.11.6-11.17), определяемых диаграммой, изображенной на рис. 11.5, представляющей собой сечение плоскостью $k = const$ пространства параметров α, k и ϑ. Фактически эта диаграмма есть диаграмма количества КТЛ из восьмой главы (для случая

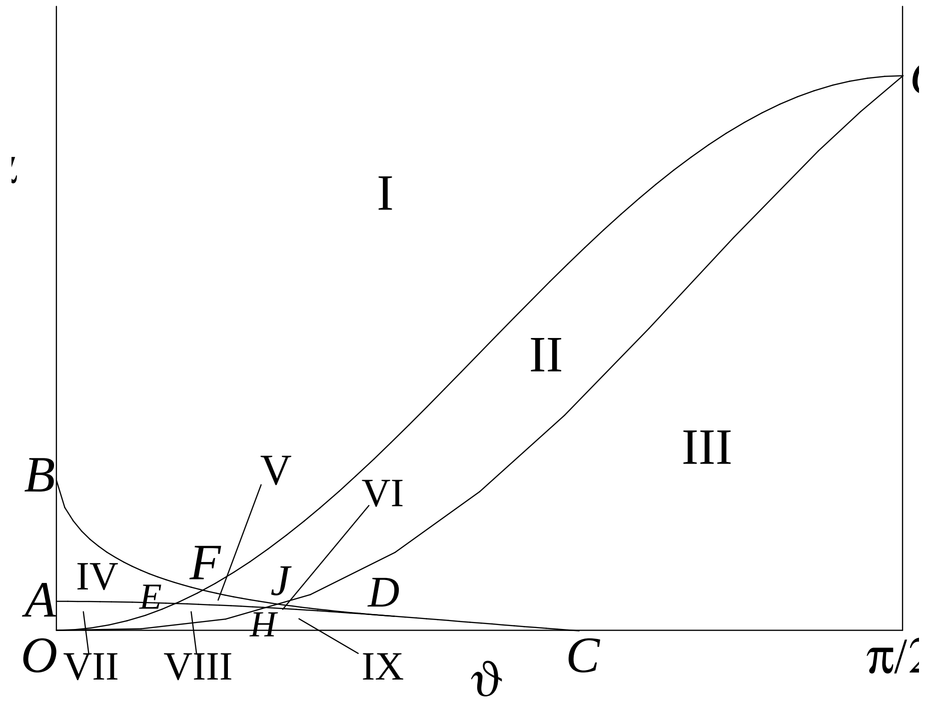


Рисунок 11.5 –

$\mu = 1/2$), к которой добавлены кривая $OEFG$ с уравнением $\alpha = g(\vartheta, k)$ (см. (11.16)) и определяемая численно кривая $OHJG$, соответствующая седловым точкам графика функции $f(e, \gamma)$ (см. (11.14)). Напомним, что количество внешних КТЛ равно двум при любых допустимых значениях α и ϑ, в то время как количество внутренних КТЛ, отличных от C, для области $OAEHCO$ равно 2, а для области $ABFJDHEA$ - 4, кривая $AEHC$ имеет уравнение $\alpha = 1/8 - 3/16 \cdot \sin^2 \vartheta$, кривая $BFJD$ определяется численно, ордината точки B равна $3\sqrt{3}/8$.

Наиболее простая ситуация возникает в области I (с границей BFG, которую также надо отнести к этой области), где внутренние компланарные положения равновесия отсутствуют, а внешние представляются двумя симметричными относительно C кривыми, соединяющими каждую из внешних КТЛ L_1 и L_2 с бесконечностью (рис. 11.6). (На этом и следующих рис. внешние КТЛ обозначены символом $\square$)

В области II (с границей $FGJF$, причем только FJ следует отнести

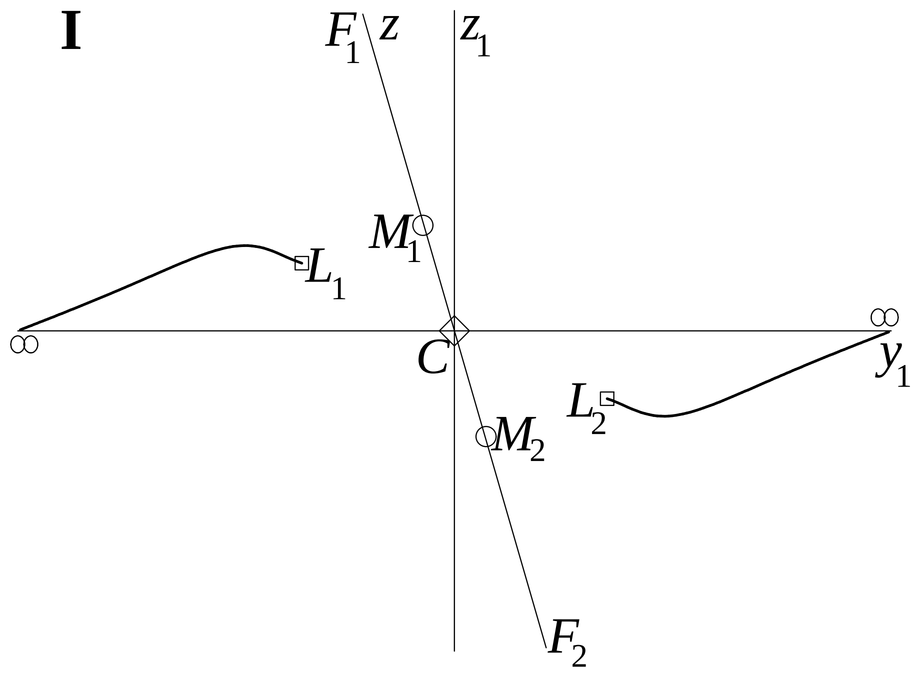


Рисунок 11.6 –

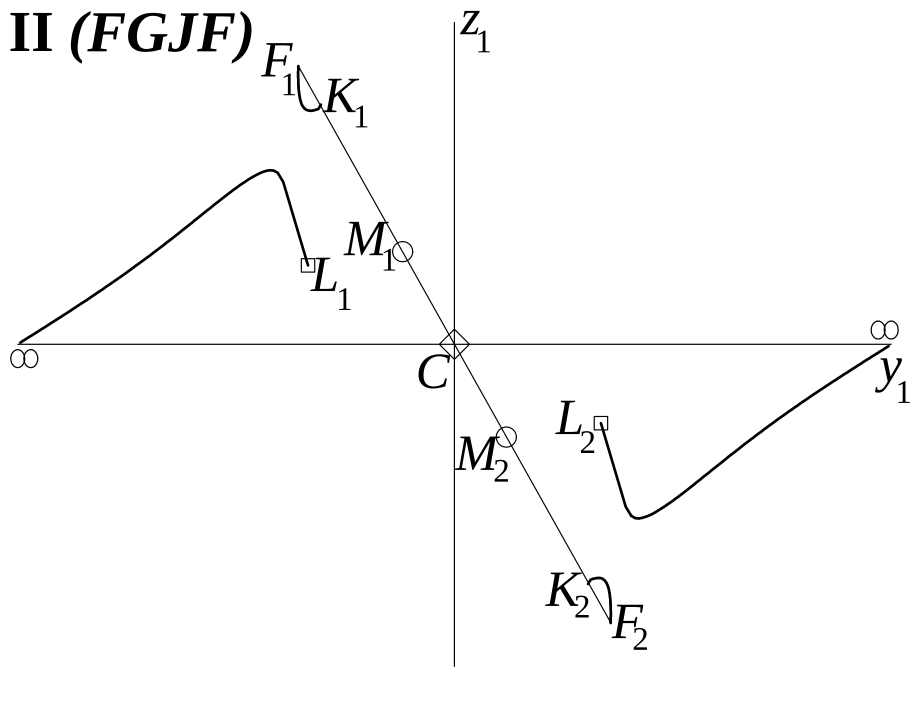


Рисунок 11.7 –

к этой области) к этим двум кривым добавляются также симметричные относительно C кривые, соединяющие F_1, K_1 и F_2, K_2 соответственно (рис. 11.7).

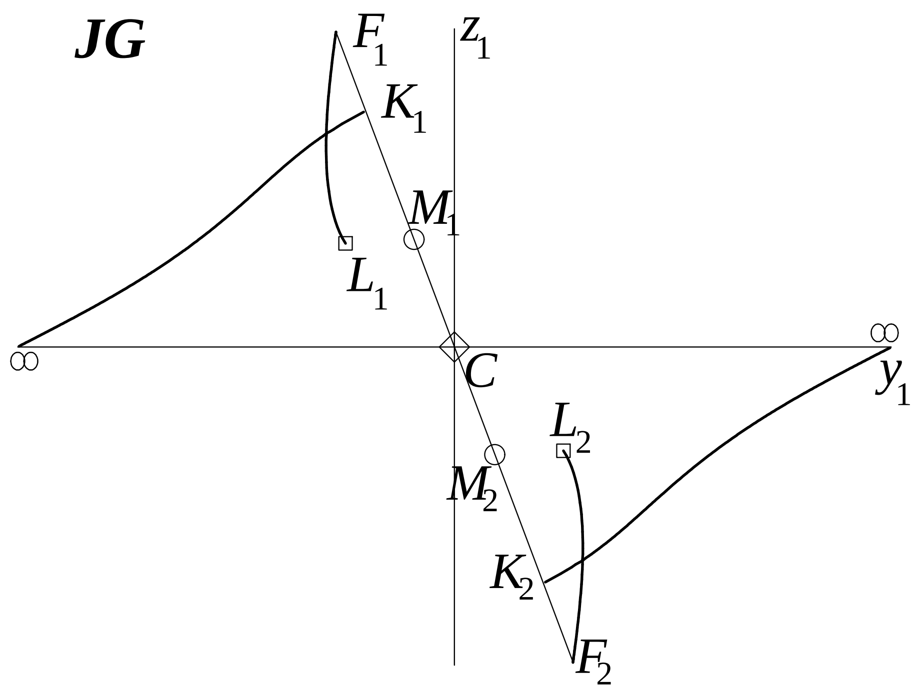


Рисунок 11.8 –

На кривой GJ, являющейся границей областей II и III, также отсутствуют внутренние компланарные положения равновесия, а внешние компланарные положения равновесия представляются четырьмя попарно пересекающимися кривыми, соединяющими равновесия K_1 и K_2 с бесконечностью, и полюсы F_1 и F_2 с внешними КТЛ (рис. 11.8). Точки пересечения кривых при этом соответствуют седловой точке функции $f(e, \gamma)$.

В области III (с границей $GJDC$, причем JDC следует отнести к этой области) также отсутствуют внутренние компланарные положения равновесия, а внешние компланарные положения равновесия представляются четырьмя попарно симметричными относительно C непересекающимися кривыми, соединяющими полюсы F_1 и F_2 с бесконечностью, и внешние КТЛ L_1 и L_2 с полюсами F_1 и F_2 (рис. 11.9).

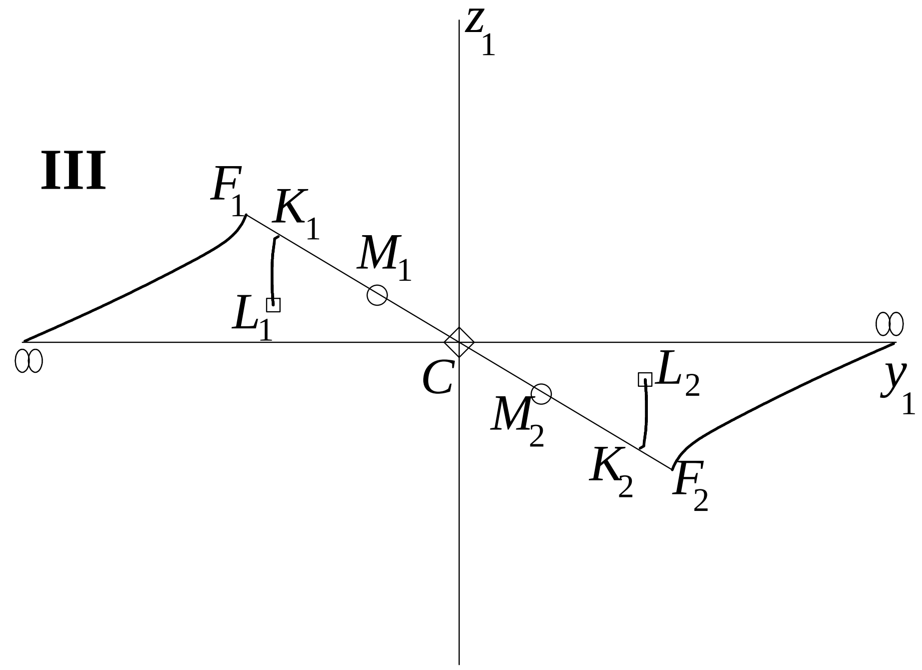


Рисунок 11.9 –

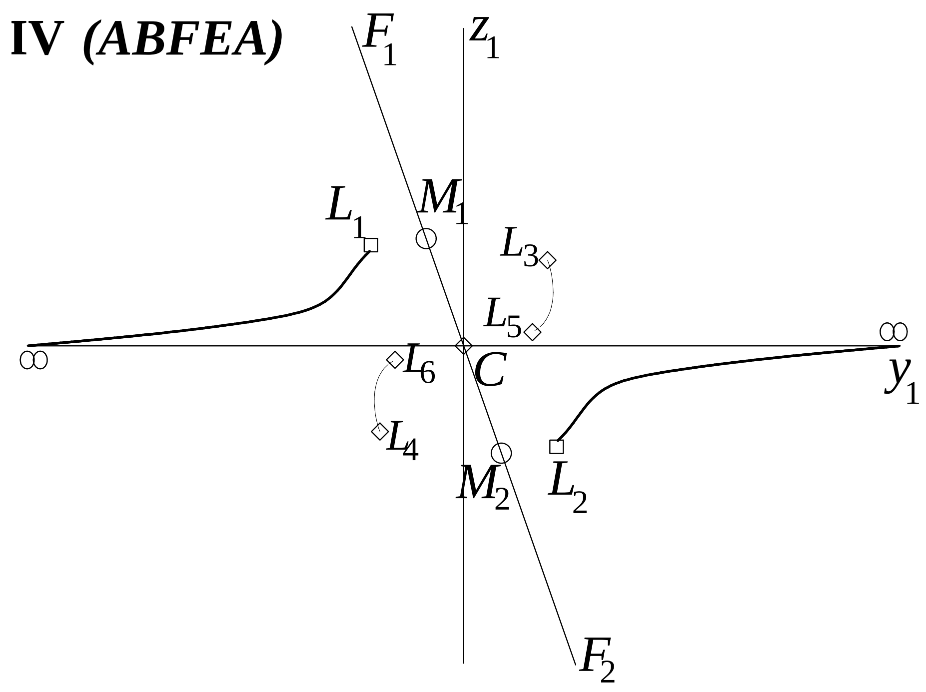


Рисунок 11.10 –

В области IV (с границей $BFEA$, причем только участок EF следует отнести к этой области) множество внешних компланарных положений равновесия качественно такое же, как в области I, но появляются две симметричные относительно C кривые, соединяющие внутренние КТЛ L_3, L_5 и L_4, L_6, представляющие множество внутренних компланарных положений равновесия (рис. 11.10). (На этом и следующих рис. внутренние КТЛ обозначены символом $\Diamond$).

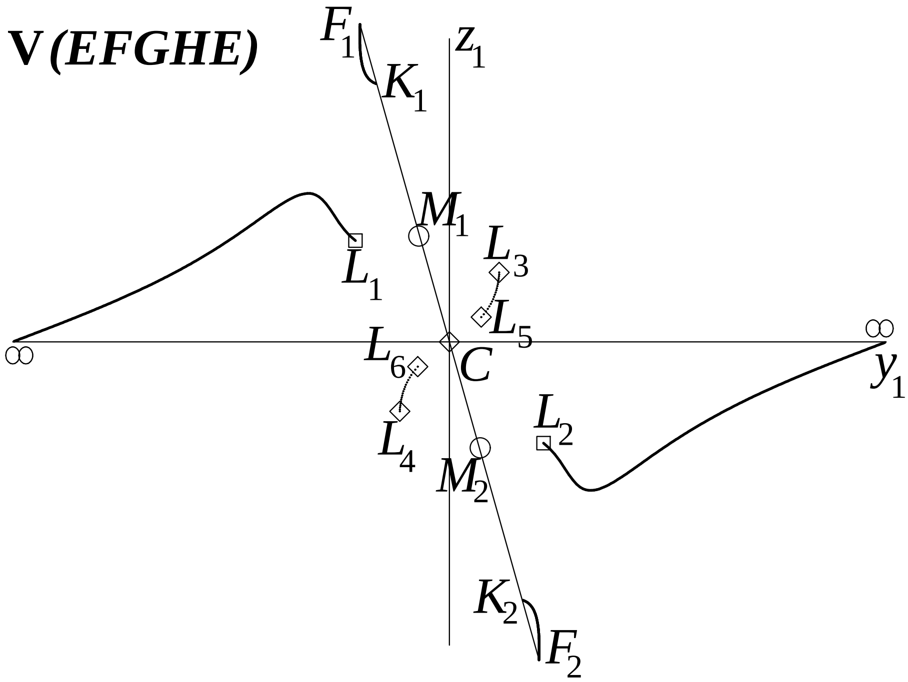


Рисунок 11.11 –

В области V (с границей $EFJHF$ не принадлежащей этой области) множество внешних компланарных положений равновесия качественно такое же, как в области II, а множество внутренних компланарных положений равновесия – как в IV (рис. 11.11).

На границе JH между областями V и VI для внешних компланарных положений равновесия ситуация такая же как на GJ, а для внутренних компланарных положений равновесия - как в IV (рис. 11.12).

В области VI с границей $DHJD$, не входящей в эту область, множе-

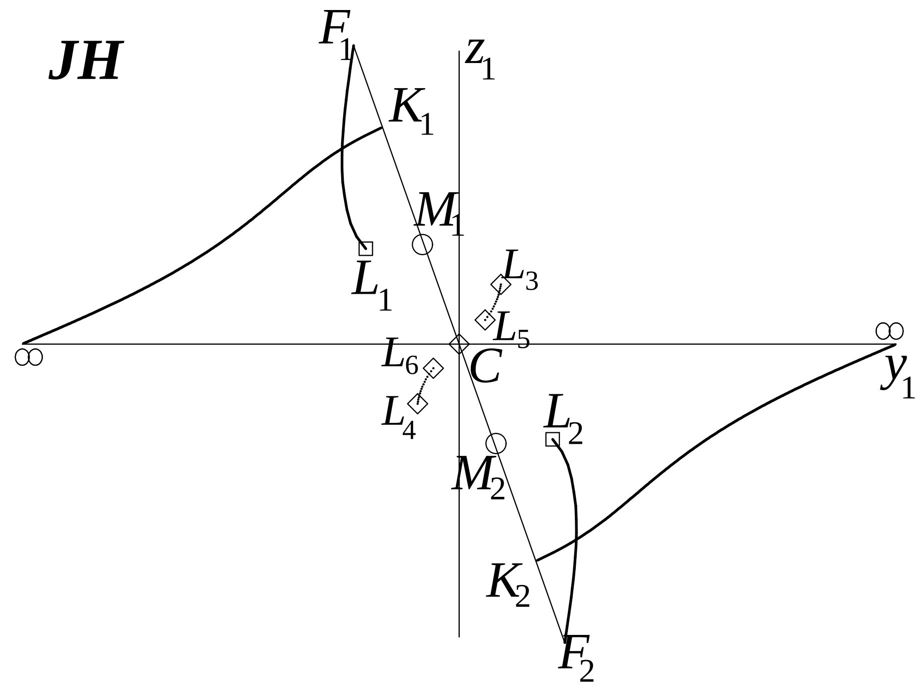


Рисунок 11.12 –

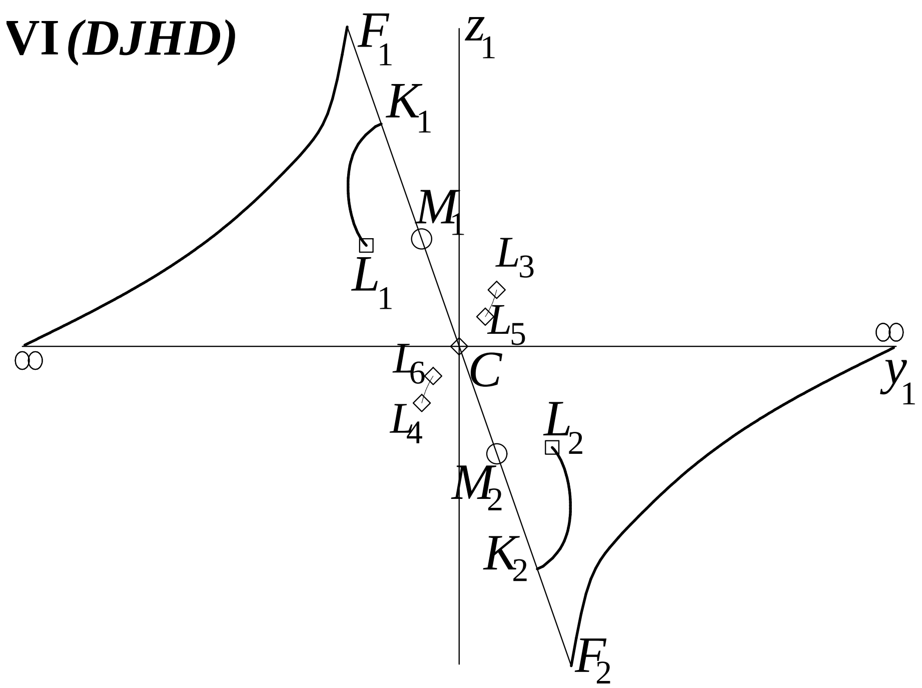


Рисунок 11.13 –

ство внешних компланарных равновесий качественно такое же как в III, а внутренних - как в IV (рис. 11.13).

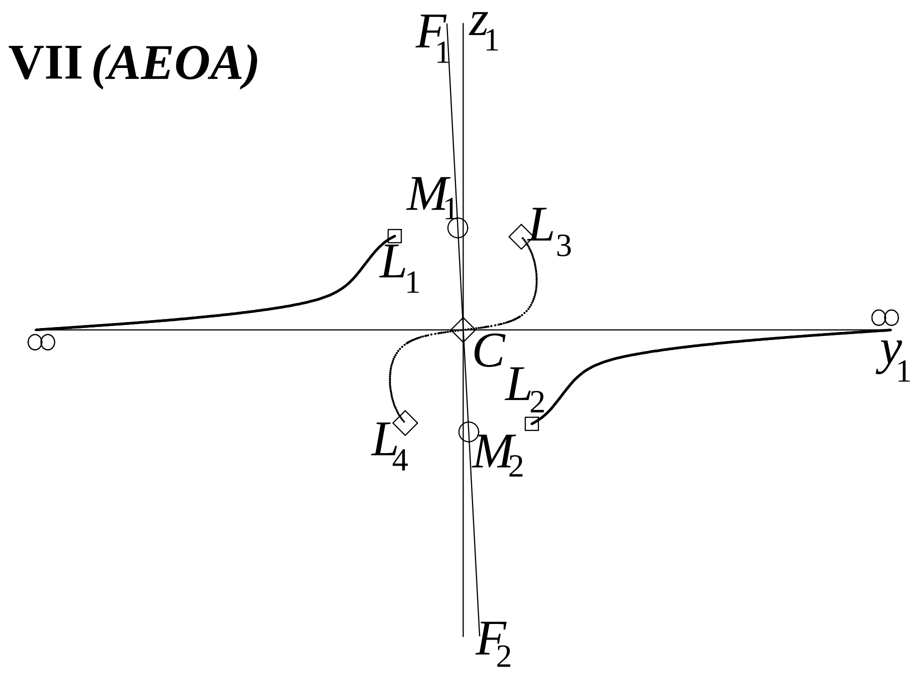


Рисунок 11.14 –

В области VII, также как и на ее границе AEO, внутренние компланарные положения равновесия образуют симметричную относительно C и проходящую через эту точку кривую, соединяющую внутренние КТЛ L_3 и L_4, в то время как множество внешних компланарных положений равновесия качественно такое же, как в области I (рис. 11.14).

В области VIII, ограниченной кривой $OEHO$, вместе с участком этой границы EH, множество внутренних компланарных положений равновесия качественно такое же как в VII, а множество внешних компланарных положений равновесия – как в II (рис. 11.15).

Границе OH между областями VIII и IX отвечает ситуация, когда, как и на GJH, внешние компланарные положения равновесия представляются пересекающимися кривыми, а внутренние компланарные положения равновесия – кривой, качественно такой же, как в области VII (рис. 11.16).

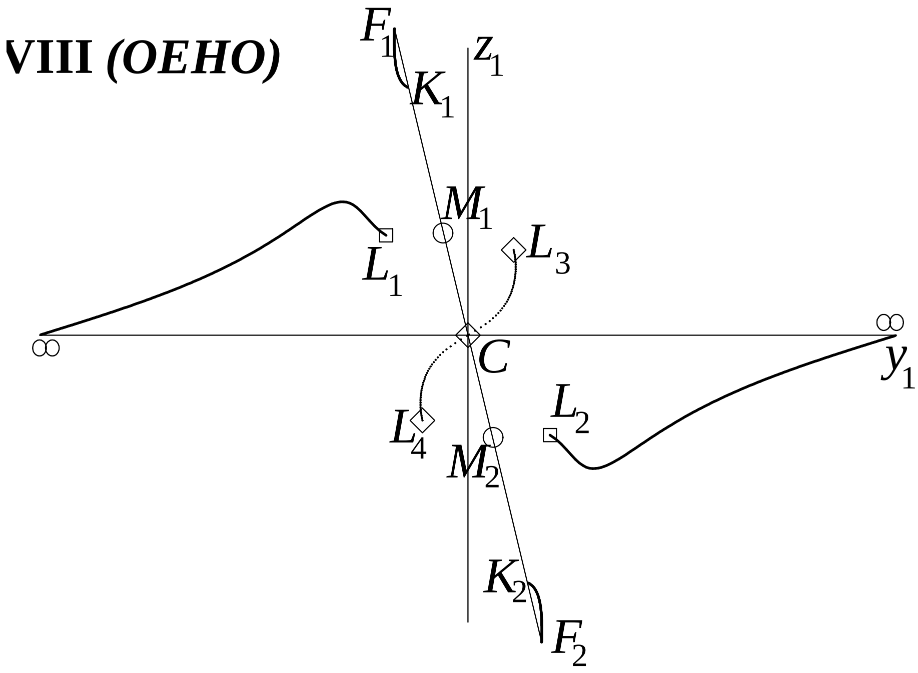


Рисунок 11.15 –

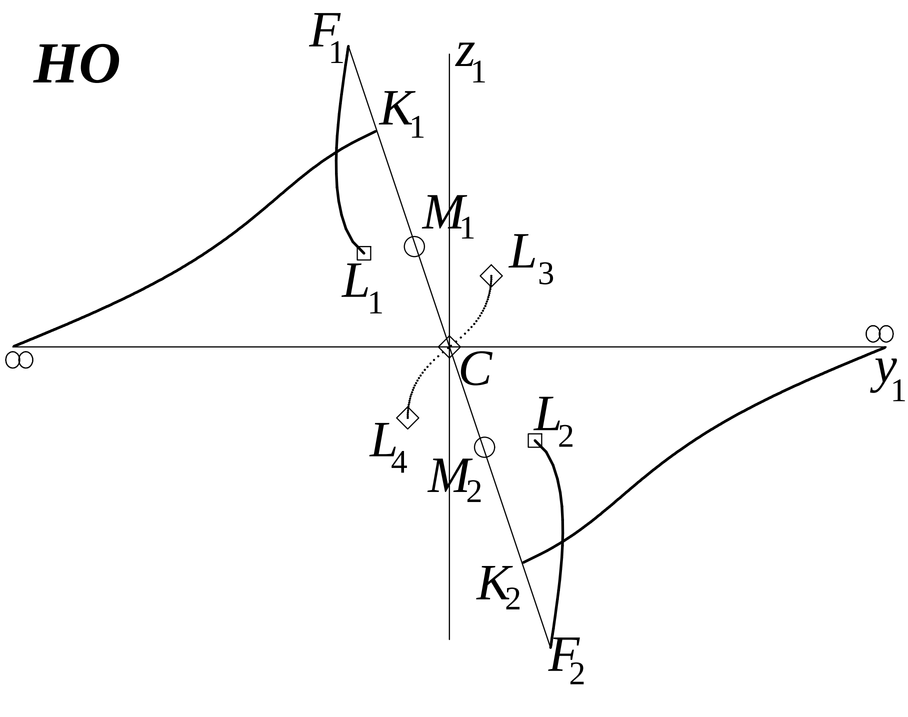


Рисунок 11.16 –

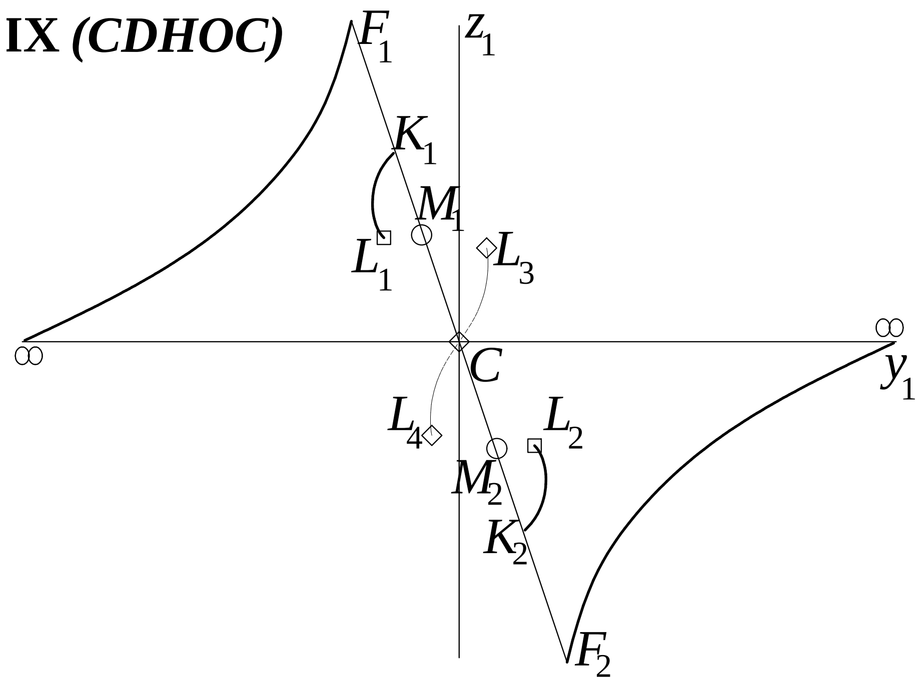


Рисунок 11.17 –

Наконец, в области IX, ограниченной ломаной $OHDC$, как и на HD для внешних компланарных положений равновесия ситуация качественно такая же, как в области III, а для внутренних компланарных положений равновесия - как в VII (рис. 11.17).

На всех рис. 11.6-11.17 компланарные равновесия, лежащие на жирных линиях, могут быть стабилизированы, остальные КР расположены на более тонких линиях.

Заключение

В диссертации впервые поставлена задача об относительном движении механической системы, состоящей из твердого тела и материальной точки, связанных между собой леером, то есть тросом, концы которого закреплены на твердом теле, причем материальная точка может перемещаться вдоль леера. Рассмотрены два варианта этой задачи: когда система движется во внешнем силовом поле и когда материальная точка движется в поле прецессирующего твердого тела. Первый вариант задачи можно рассматривать как модель протяженной орбитальной станции, снабженной зондом, способным перемещаться вдоль леера, второй вариант - как модель естественно-искуственной космической системы, состоящей из астероида и соединенной с ним тросом космической станции. Задача в целом представлена как набор частных задач, определяемых характером гравитационного поля, конкретным способом соединения материальной точки с твердым телом и целями исследования. В этот набор включены также ряд смежных задач, которые также можно рассматривать как частные случаи общей проблемы, описываемой общими уравнениями движения, в том числе относительные равновесия материальной точки в окрестности гравитирующего твердого тела, являющиеся фактически равновесиями на леере при нулевой силе натяжения ветвей леера, а также задача о движении материальной точки, соединенной с твердым телом одним или двумя тросами.

Решен ряд задач из этого набора, а именно: для гантелевидного твердого тела во внешнем гравитационном поле дано: описание относительного движения леерной связки, находящейся все время в одной плоскости, в однородном силовом поле; исследование существования и устойчивости относительных равновесий леерной связки, двигающейся по круговой орбите в центральном силовом поле; в тех же условиях: описание движения материальной точки в плоскости орбиты вдоль леера относительно твердого тела, стабилизированной в одном из положений равновесия в орбитальной системе отсчета, в том числе, движений, при которых ослабление и натяжение троса происходят безударно; исследование возможности захвата неуправляемой материальной точки леерной связью; аналитическое и численное исследование влияния движения материальной точки малой массы вдоль леера на относительное движение гантели, в том числе аналитическое исследование разрушения неустойчивого относительного положения равновесия гантели. Для динамически симметричного прецессирующего гравитирующего твердого тела: в случае тела, вытянутого вдоль оси динамической симметрии – исследование устойчивости положений относительного равновесия (треугольных точек либрации) материальной точки, не стесненной тросами, в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии; исследование существования и устойчивости положений относительного равновесия (компланарных точек либрации) материальной точки, не стесненной тросами, в плоскости, проходящей через оси прецессии и динамической симметрии; описание движения материальной точки вдоль леера в двух частных случаях интегрируемости уравнений движения; описание множеств положений равновесия материальной точки на леере и вывод критерия возможности их стабилизации; в случае твердого тела, сжатого вдоль оси динамической симметрии - исследование существования и устойчивости треугольных точек либрации и существования компланарных точек либрации с помощью аппроксимации гравитационного поля твердого тела полем двух точечных комплексно-сопряженных масс.

Литература

1. Аксенов Е.П., Гребенников Е.А., Демин В.Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли. *Астрономический журнал*,1963,т.40,№2,сс.363-375

2. Александров А.Ю., Тихонов А.А. Электродинамическая стабилизация ИСЗ на экваториальной орбите. *Космические исследования*, 2012, т. 50, №4, сс. 335-340

3. Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И., Закржевский А.Е., Пироженко А.В., Трогер Г., Хорошилов В.С *Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями.* М.-Ижевск, РХД, 2006

4. Амелькин Н.И. О стационарных движениях спутника с двухстепенным силовым гироскопом в центральном гравитационном поле и их устойчивости. *Прикладная математика и механика*, 2009. т.73, №2. С.236-249.

5. Амелькин Н.И. Об асимптотических свойствах движений спутников в центральном поле, обусловленных внутренней диссипацией. *Прикладная математика и механика*, 2011. т.75. №2, с.204-223

6. Амелькин Н.И. О свойствах стационарных движений твердого тела, несущего систему двухстепенных силовых гироскопов. *Прикладная математика и механика*, 2011. т.75. №3, с. 355-369.

7. Арцутанов. Ю.Н. В космос — на электровозе.*Комсомольская правда (Воскресное приложение).* 31 июля 1960 г.

8. Белецкий В.В. *Движение искуственного спутника Земли относительно центра масс.* М., Наука, 1965

9. Белецкий В.В. Об относительном движении связки двух тел на орбите (II). *Космические исследования.* 1969, т.7, №6, сс.827-840

10. Белецкий В.В. *Движение спутника около центра масс в гравитационном поле.* М., Из-во Московского университета, 1975

11. Белецкий В.В. Некоторые задачи динамики двойных астероидов. *Авдуевский В.С., Колесниченко А.В. (ред.) Современные проблемы механики и физики космоса*, Физматлит, Москва, 2003, сс. 27-40.

12. Белецкий В.В. Модельная задача динамики системы двойного астероида. *Труды IX Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением"*. Т. 1. Пленарные доклады. Иркутск, 2007, с. 33-48.

13. Белецкий В.В. Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов. *Космические исследования*, 2007, т.45,№6, сс. 435-442

14. Белецкий В.В. *Регулярные и хаотические движения твердых тел* М.-Ижевск, РХД, 2007, 132 с.

15. Белецкий В.В. *Очерки о движении космических тел.* Из-е 3-е. М., Издательство ЛКИ, 2009, 432 с.

16. Белецкий В.В., Иванов М.Б., Отставнов Е.И. Модельная задача о космическом лифте. *Космические исследования.*2005, т.43, №2, с.157-160

17. Белецкий В.В., Касаткин, Г.В. Связка двух тел на орбите. Устойчивость однозвенных периодических траекторий. *Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика.* 1996, т. 2, вып. 2, с.17-22

18. Белецкий В.В., Левин Е.М. *Орбитальные тросовые системы.* Препринт ИПМ. 1981. № 13

19. Белецкий В.В., Левин Е.М. *Динамика космических тросовых систем* М., Наука, 1990, 336 с.

20. Белецкий В.В., Новикова Е.Т. Об относительном движении связки двух тел на орбите. *Космические исследования.* 1969, т.7, №3, сс.377-384

21. Белецкий В.В., Панкова Д.В. *Связка двух тел на орбите как динамический биллиард.* 1995, Препринт ИПМ №7

22. Белецкий В.В.,Родников А.В. Устойчивость треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел. *Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXI Академических чтений по космонавтике.Москва,январь 2007.*М.:Комиссия РАН,2007,с.90

23. Белецкий В.В., Родников А.В. Устойчивость стационарных движений в модельной задаче динамики системы двойного астероида. *Труды IX Четаевской конференции Аналитическая механика, устойчивость и управление движением.* Т. 5. (Механика космического полета, колебания и волны, гибридные системы). М., 2007, с. 7-19

24. Белецкий В.В., Родников А.В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел. *Космические исследования*, 2008, т.46,№1, pp. 42-50

25. Белецкий В.В., Родников А.В.*Некоторые проблемы динамики двойных астероидов. Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики Апрель 2008 года. Тезисы докладов.* 2008, М., МГУ, с. 34

26. Белецкий В.В., Родников А.В. Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел: существование, количество, устойчивость, *Тезисы докладов XI Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"*: . М., ИПУ РАН, 2010, с. 44-45

27. Белецкий В.В., Родников А.В. Об устойчивости аналогов Эйлеровых точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел, *Десятая Крымская Международная Математическая школа MFL-2010 Метод функция Ляпунова и его приложения.* Крым, Алушта, 13-18 сентября 2010 г. Тезисы докладов. с. 17.

28. Белецкий В.В., Родников А.В. Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел. *Нелинейная динамика.* 2011. Т. 7. № 3. С. 569–576

29. Белецкий В.В., Родников А.В. Точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае мнимого расстояния между притягивающими центрами.*Нелинейная динамика*,2012, т.8,№5,с.931-940

30. Белецкий В.В., Хентов А.А. *Вращательное движение намагниченного спутника.* М., Наука, 1985

31. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике.* М., ОГИЗ, 1948

32. Буров А.А. О существовании и устойчивости равновесий механических систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами. *Прикладная математика и механика.* 2003. т. 67. №2. сс. 222-230.

33. Буров А.А. О необходимых условиях устойчивости установившихся движений со связями, реализуемыми большими потенциальными силами. *Прикладная математика и механика.* 2004. т.68. №5. с. 870-877.

34. Буров А.А. О колебаниях вибрирующей гантели на эллиптической орбите. *ДАН* 2011, т. 437, № 2. с.186-189.

35. Буров А., Дюган А. О плоских колебаниях вибрирующего гантелеобразного тела в центральном поле сил *Космические исследования*, 2011. т. 49. № 4. с. 363-369.

36. Буров А.А., Косенко И.И. О периодических движениях орбитального лифта. *Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения.* М.: ВЦ РАН. 2009. с.72-85

37. Буров А.А., Косенко И.И. О плоских колебаниях тела с переменным распределением масс на эллиптической орбите. *ДАН*,2011, т.440,6,с.760-764.

38. Буров А.А., Трогер Х. Об относительных равновесиях орбитального маятника. *Прикладная математика и механика.* 2000. т.64. №5.

39. Даль Владимір.*Толковый словарь живаго Великорусскаго языка.* С.-П.,М., Издание М.О.Вольфа, 1881, т.2.

40. Демин В.Г. *Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения.* НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, Ижевский институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2010, 420 сс.

41. Демин В.Г., Косенко И.И., Красильников П.С., Фурта С.Д. *Избранные задачи небесной механики.* Ижевск, 1999, 210 с.

42. Джури Э. *Инноры и устойчивость динамических систем*, М., Наука, 1979

43. Иванов А.П. Об устойчивости в системах с неудерживающими связями. *Прикладная математика и механика*,1984, т.48, №5, сс. 725-732.

44. Иванов А.П. *Динамика систем с механическими соударениями.* М., Международная программа образования, 1997, 336 с.

45. Иванов А.П., Маркеев А.П. Динамика систем с односторонними связями. *Прикладная математика и механика*, 1989, т.53, № 4, с.539-548

46. Иванов В.А., Ситарский Ю.С. *Динамика полета системы гибко связанных космических объектов.* М., Машиностроение, 1986

47. Ивашкин В.В., Стихно К.А. О применении гравитационного воздействия на астероид Apophis для коррекции его орбиты *ДАН* 2009. т. 424, № 5, с. 621-626

48. В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*,М., Изд-во Моск. ун-та, 1991, 168 с.

49. Карапетян А.В. *Устойчивость стационарных движений* М.: Эдиториал УРСС, 1998., 168 с.

50. Косенко И.И. О точках либрации вблизи гравитирующего вращающегося трехосного эллипсоида *Прикладная математика и механика* 1981, т.45, №1, pp. 26-33

51. Косенко И.И. Точки либрации в задаче о трехосном гравитирующем эллипсоиде. Геометрия области устойчивости. *Космические исследования.* 1981, т.19, №2, pp. 200-209

52. Косенко И.И., Степанов С.Я. Устойчивость положений относительного равновесия орбитальной связки с учетом ударных взаимодействий. Неограниченная задача. *Известия РАН. Механика твердого тела.* 2006, №4 , сс. 86-96

53. Красильников П.С. Малые плоские колебания спутника на эллиптической орбите. *Нелинейная динамика*,2013, т. 9, №4, сс. 671-696

54. Маркеев А.П.(1978) *Точки либрации в небесной механике и космодинамике.* Наука, Москва, 1978, 312 сс.

55. Муницына М.А. Движение системы с односторонними связями в центральном гравитационном поле. *Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения.* М., ВЦ РАН, 2006, с. 75-84

56. Муницына М.А. Относительные равновесия системы "гантель-груз"с односторонними связями на круговой кеплеровской орбите. *Автоматика и телемеханика.*№9, 2007, сс. 9-15

57. Нуралиева А.Б. *О динамике троса космического лифта.* Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Москва, 2012. 103 с.

58. Родников А.В. О движении груза по тросу, закрепленному на космической станции.*XXVII академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П.Королева.* Тезисы докладов, М., 2003, с.74-75

59. Родников А.В. Установившиеся движения гантели с противовесом по круговой орбите.*XXVIII академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П.Королева.*Тезисы докладов,М.,2004,с.119

60. Родников А.В. О движении гантели с леерной связью в ньютоновском поле сил. Пятый международный симпозиум по классической и небесной механике. Август 23-28,2004,Великие Луки,Россия. Тезисы докладов,с.167-168

61. Родников А.В. О движении груза по тросу, закрепленному на гантелевидном космическом аппарате. *Космические исследования.* 2004, т.42, №4, сс.444-448

62. Родников А.В. Безударные движения по лееру, закрепленному на массивной орбитальной станции .*XXIX академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П.Королева.* Тезисы докладов, М., 2005, с.89-90

63. Родников А.В.Non-impactive Transformation of the Motion by Leier Constraint in the Newtonian Force Field. *Physical Interpretations of Relativity Theory. Proceedings of International Scientific Meeting PIRT-2005.*Moscow, BMSTU, 2005, с. 216-220

64. Родников А.В. Об алгоритмах захвата "космического мусора" леерной связью. *XXX академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П.Королева.* Тезисы докладов, М., 2006, с.86-87

65. Родников А.В. О положениях равновесия груза на тросе, закрепленном на гантелевидной космической станции, движущейся по круговой геоцентрической орбите. *Космические исследования.* 2006, т.44, №1, сс.62-72

66. Родников А.В.О движении по леерной связи. *IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов.* Т.1, Н.Новгород, 2006 Стр.101-102

67. Родников А.В. О возможности использования леерной связи,закрепленной на массивной орбитальной станции. *Тезисы докладов V международного аэрокосмического конгресса IAC-06.* Москва, 2006, с.325

68. Родников А.В. О переворачивании КА с леерной связью. *Тезисы докладов V международного аэрокосмического конгресса IAC-06.* Москва, 2006, с.325

69. Родников А.В. О существовании безударных движений по леерной связи, закрепленной на протяженном космическом аппарате. *Космические исследования.* 2006, т.44, №6, сс.553-560

70. Родников А.В. О моделировании влияния леерной связи на относительное движение гантелевидной орбитальной станции. *XXXII академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П.Королёва* (тезисы докладов), М., 2008, с. 122-123

71. Родников А.В. Модели относительного движения орбитальной леерной связки. *Шестой международный аэрокосмический конгресс. Тезисы докладов.* М., 2009, сс. 268-269

72. Родников А.В. О влиянии леерной связи на движение гантелевидного тела в центральном ньютоновском силовом поле. *Нелинейная динамика*, 2009, т.5, №4, сс. 519-533

73. Родников А.В О динамике околосепаратрисных вращений гантелевидного спутника с леерной связью, *Актуальные проблемы российской космонавтики.Труды XXXIV Академических чтений по космонавтике.* Москва, январь 2010, с. 135-136

74. Родников А.В. Космический лифт для динамически симметричного астероида. *Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXV Академических чтений по космонавтике.* Москва, январь 2011 г. М.: Комиссия РАН , 2011. С.131-132

75. Родников А.В. О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле. *Нелинейная динамика.* 2011. Т. 7. № 2. С. 295–311.

76. Родников А.В. О компланарных равновесиях космического лифта для прецессирующего астероида. *Тезисы доклада на XXXVI Академических чтениях по космонавтике.* Москва: Комиссия РАН, 2012 . http://www.ihst.ru/ akm/36.htm

77. Родников А.В. On Space Elevators for Precessing Asteroids. *Международная научная конференция по механике Шестые Поляховские Чтения, посвященные 95-летию со дня рождения С.В.Валландера*, С.-Петербург, Россия, 31 января-3 февраля 2012 г., Тезисы докладов. Сп-б ГУ 2012, с. 81.

78. Родников А.В. Об устойчивости равновесий материальной точки на леере, закрепленном на твердом теле. *XII Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (конференция Пятницкого)* 5-8 июня 2012 г., Москва, Россия, Тезисы докладов. М.: ИПУ РАН, с. 278-280.

79. Родников А.В. О компланарных равновесиях космической станции на тросе, закрепленном на прецессирующем астероиде. *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 2. С. 309-322

80. Родников А.В. О равновесии космической станции, соединенной тросом с астероидом. *Международная конференция Моделирование, управление и устойчивость MCS-2012. Крым, Севастополь, 10-14 сентября 2012 г. Тезисы докладов.* Севастополь: ДИАЙПИ. 2012, С.141-142.

81. Родников А.В.Точки либрации сжатого прецессирующего астероида. *Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXVII Академических чтений по космонавтике.*Москва, январь 2013. М.:Комиссия РАН,2013,с.145-146

82. Родников А.В. Компланарные точки либрации обощенной круговой задачи трех тел в случае комплексносопряженных масс притягивающих центров. *Нелинейная динамика.* 2013, т. 9, № 4, с. 697-710

83. Родников А.В. Точки либрации геоподобного астероида.*Актуальные проблемы российской космонавтики:Труды XXXVIII Академических чтений по космонавтике.*Москва,январь 2014,М.:Комиссия РАН,2014,с.99-100

84. Родников А.В. Треугольные точки либрации обощенной круговой задачи трех тел в случае комплексносопряженных масс притягивающих центров. *Нелинейная динамика.* 2014, т. 10, № 2, с. 213-222

85. Родников А.В.Существование и устойчивость равновесий материальной точки в гравитационном поле сжатого прецессирующего твердого тела.*Международная конференция Метод функций Ляпунова и его приложения MFL-2014.Тезисы докладов.*Крым,Алушта,15-20 сент.2014,с.17-18

86. Родников А.В.О классификации задач динамики космической станции в окрестности прецессирующего астероида. *Physical and Mathematical Problems of Advanced Technology Development : Abstracts of International Scientific Conference.* BMSTU, Moscow, 17 – 19 November 2014. – Moscow: BMSTU, 2014, с.21-22

87. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. *Устойчивость стационарных движений.*Ижевск: РХД, 2003. 304 с.

88. Ю.А. Садов, А.В. Чернов. Исследование равновесных форм гибкого нерастяжимого троса с учетом гравитационных и аэродинамических факторов. *Модели и методы обработки информации.* М.: МФТИ, 2009, сс. 4-12

89. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. *О концепции нагруженного секционированного космического лифта.* Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, №39, 2011, 24.с. ISSN 2071-2898

90. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. Нелинейные поперечные колебания троса космического лифта. *Математическое моделирование.* Т. 23, № 12, 2011, с. 3-19

91. Сазонов В.В. *Математическое моделирование развертывания тросовой системы с учетом массы троса.* Препринт ИПМ №58, 2006, 36 с.

92. Сарычев В.А. *Вопросы ориентации искусственных спутников.* М.: ВИНИТИ, 1978. 224 с

93. Тихонов А.А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле. *Космические исследования*,2003, 41, 1, сс.69-80

94. Beletsky V.V. *Reguläre und chaotische Bewegung starrer Körper.* Stuttgart, Teubner, 1995.

95. Beletsky V.V., Kasatkin G.V. and Starostin E.L. The Pendulum as a Dynamical Billiard *Chaos, Solutions & Fractals.* 1996, v. 7, № 8, pp. 1145-1178

96. V.V. Beletsky, Rodnikov A.V. Existence and Stability of a Stationary Motions in the Model Problem of a Binary Asteroids Dynamics. *Sixth International Symposium on Classical and Celestial Mechanics. Velikie Luki, August 01-06, 2007. Book of Abstracts.* pp. 29-30

97. Beletsky V.V., Rodnikov A.V. On the Problem of Binary-Asteroids Dynamics. *Динамика тел Солнечной системы. Международная астрономическая конференция. Сборник материалов* .Томск, 27 июля-1 августа 2008 г. . с. 24

98. Beletsky V.V., Rodnikov A.V. Libration Points Similar to Eulerian in the Model Problem of the Binary-Asteroids Dynamics. *Rare attractors and rare phenomena in nonlinear dynamics. Material of the International Symposium RA08.* Riga-Jurmala, Latvia, 8-12 September, 2008, pp. 6-8

99. Beletsky V.V., Rodnikov A.V. On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics.*Journal of Vibroengineering*, 2008, v.10,i.4, pp. 550-556

100.Beletsky V.V., Rodnikov A.V. On Stability of Coplanar Libration Points in the Generalized Restricted Circular Tree-Bodies Problem. *5th International Scientific Conference on Physics and Control - Physcon 2011.* Leon, Spain. September 5-8, 2011. p.44

101.Beletsky V.V., Rodnikov A.V. On Stability of Coplanar Libraton Points in the Generalized Restricted Circular Three-Bodies Problem. *Proceedings of 5th International Scientific Conference on Physics* *and Control - Physcon 2011.* Leon, Spain. September 5-8, 2011. http://lib.physcon.ru/doc?id=b1c494f0dd45.

102.Buchin V., Burov A. and Troger, H. A dumb-bell satellite with a cabin. Existence and stability of relative equilibria. *Proceedings of 6th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*, http://lib.physcon.ru/?item=1749

103.Burov A.A. On the Routh method for mechanical systems subjected to unilateral constraints. *Progress in Nonlinear Science, Vol. 1 (Nizhny Novgorod, 2001)*, 2002, N.- N.: Inst. Appl. Phys. of RAS, p.196-201

104.Burov A.A. The Existence and Stability of the Equilibria of Mechanical Systems with Constraints Produced by Large Potential Forces. *J. App Maths Mechs*, 2003, v. 67, № 2, p. 93-200

105.Burov A.A., Guerman A.D. Steady Motions of a Tetrahedral Satellite with Tethered Elements. *Proceedings of 6th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*, http://lib.physcon.ru//?item=1753

106.Burov A.A.,Guerman A.D., Sulikashvili R.S. Relative Equilibria of a tetrahedral structure with rigid and tethered elements. *Astrodynamics. Advances in the Astronautical Sciences*. 2007, v. 129. p. 1665-1674. AAS 07-357

107.Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S. Steady motions of a tetrahedral satellite with tethered elements. *Proceedings of Sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference June 30 - July 4, 2008, Saint Petersburg, RUSSIA*, http://lib.physcon.ru/download/p1753.pdf

108.Burov A., Kosenko I. Dumb-Bell of Variable Length in an Elliptic Orbit: Relative Equilibria, Periodicity, and Chaos. *In: Proc. 4 th Chaotic Modeling and Simulation International Conference 31 May - 3 June 2011*, Agios Nikolaos, Crete, Greece.

109.Burov, A., Kosenko I. On planar oscillations of a body with a variable mass distribution in an elliptic orbit. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 2011, v.225, no.10, pp. 2288-2295

110.Burov A.A., Kosenko I.I., Guerman A.D. Dynamics of a moon-anchored tether with variable length. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2012, v. 142, p. 3495-3507

111.Burov A., Stepanov S. Regular and Chaotic Dynamics of Orbital Systems with Pendular Elements *International Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics. Vienna University of Technology.* 2006. P. 23-24

112.Cendra, H. and Marsden, J. E. Geometric mechanics and the dynamics of asteroid pairs.*Dyn.Syst.* 2005, 20, pp.3-21

113.V.G. Demin. On orbits of two fixed centers problem. *Astronomy Reports (Astronomicheskii Zhurnal)*, 37(6):1068-1075,1960

114.Elipe A. and Lara M. A Simple Model for the Chaotic Motion Around (433) Eros1. J.of the Astronautical Sciences, 51(4), 391-404(2003)

115.Fahnestock, E.G. and Scheeres, D.J. Binary asteroid orbit expansion due to continued YORP spin-up of the primary and primary surface particle motion. *Icarus.* 2009, 201, 1, pp.135-152.

116.Gabern, F., Koon, W. S. and Marsden, J. E. Spacecraft dynamics near a binary asteroid. *Discrete Contin. Dynam. Systems*,2005,supplement,pp.297-306

117.Gabern, F., Koon, W. S. and Marsden, J. E. Parking a spacecraft near an asteroid pair. *J.Guid. Control Dyn.* 2006, 29, 3, pp.544-553

118.Gabern, F., Koon, W. S., Marsden, J. E. and Scheeres D. J. Binary asteroid observation orbits from a global dynamical perspective. Dyn. Syst., 5(2), 252–279(2006)

119.Koon, W. S., Marsden, J. E., Ross, S., Lo, M. and Scheeres,D. J. Geometric mechanics and the dynamics of asteroid pairs. *Ann. New York Acad. Sci.* 2004, 1017, pp.11-38

120.Kosenko I.I. Non-linear analysis of the stability of the libration points of a triaxial ellipsoid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1985, т.49, №1, pp. 17-24

121.Krupa M.,Schagerl M.,Steindl A.,Troger H. Stability of Relative Equilibria. Part I:Comparison of Four Methods.*Meccanica,* 2001,35,pp.325-351

122.Krupa M., Steindl A., Troger H. Stability of Relative Equilibria. Part II:Dumbell Satellites.*Meccanica,*2001,35,pp.353-371

123.E.L.-M.Lanoix and A.K.Misra,Near-Earth Asteroid Missions Using Tether Sling Shot Assist, *Journal of Spacecraft and Rockets.* 37(4), 475-480,2000

124.Li-Shengwang, Shyn-Feng Cheng. Dynamics of Two Spring-Connected Masses in Orbit.*Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.*1996,63,pp.289-312

125.Marov M. Ya. and Rickman H. (eds.).:Collision Processes in the Solar Sysem.. : Kluwer Ac. Publ. (2001)

126.A.K. Misra, Dynamics of a Tether Attached to an Asteroid. 7th International Workshop and Advanced School "Spaceflight Dynamics and Control". www.aerospace.ubi.pt/workshop2012/Abstract_ Misra.pdf, 2012

127.Margot J. L., Nolan M. C., Benner L. A. M., Ostro S. J., Jurgens R. F., Giorgini J. D, Slade M. A. and Campbell D. B. Binary asteroids in the near-Earth object population. Science, 296, 1445–1448 (2002)

128.Robinson, W.J. The Restricted Problem of Three Bodies with Rigid Dumb-bell Satellite. *Celestial Mechanics*, 1973, v. 8, pp. 323-330

129.Rodnikov,A.V.Transformation the Motion of a Body by Leier Constraint in the Newtonian force field. *9-th International Cjnference Stability,* *Control and rigid body Dynamics.Book of abstracts.*Donetsk,September 1-6,2005,c.104-105

130.Rodnikov A.V. Influence of the Leier Constraint on the Spacecraft having Dumb-bell Form. *Четвертые Поляховские Чтения. Тезисы докладов.* С.-Петербург, Россия, 2006, с.93

131.Rodnikov, A. V. The Algoritms for Capture of the Space Garbage Using 'Leier Constraint'. *Regular and Chaotic Dynamics*,11,4,2006, pp.483-489.

132.Rodnikov A.V. On Rotation of a Dumbbell Equipped with the Leier Constraint. *Rare attractors and rare phenomena in nonlinear dynamics. Material of the International Symposium RA08.* held in Riga-Jurmala, Latvia, 8-12 September, 2008, pp. 78-81.

133.Rodnikov A.V. Rotations of a dumbbell equipped with 'the leier constraint'. *Journal of Vibroengineering.* v.10, i.4, pp.557-561.

134.Rodnikov A.V. On Systems with 'Leier Constraint' in the Central Newtonian Force Field *Proceedings of 6th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*, http://lib.physcon.ru/doc?id=8ccf6cf7ac50

135.Rodnikov A.V. On dynamics of a dumbbell satellite with a small load on the leier. 4th *International Scientific Conference on Physics and Control PHYSCON 2009. Book of abstracts.* September 1-4 2009. Catania, 2009, p. 133

136.Rodnikov A.V. On Dynamics of a Dumbbell Satellite with a Small Load on the Leier. *4th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2009) . Proceedings*, Catania, Italy, sept.,1-4, 2009, http://lib.physcon.ru/doc?id=ba04a7c9633b

137.Rodnikov A.V. On dynamics of a dumbbell satellite with a cabin on the leier.*CELMEC V – Abstract Book*, San Martino al Cimino (VT), Italy, 6-12 september 2009., p.21

138.Rodnikov A.V. On equilibria of a space station tethered to an asteroid. *7th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2011. Booklet of Abstracts*. July 24-29 Rome. Italy. p.52

139.Rodnikov A.V. On Equilibria of a Space Station Tethered to an Asteroid.*Proceedings of 7th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC2011*. July 24-29 Rome. Italy. 2 pp.

140.Rodnikov A.V. The Leier Elevator for an Asteroid. *5th International Scientific Conference on Physics and Control - Physcon 2011*. Leon, Spain. September 5-8, 2011. Book of Abstracts. p.121

141.Rodnikov A.V. On motion of a space station tethered to an asteroid. *International Symposium on Orbit Propagation and Determination*. 26-28 septembre, Pavillon Saint Sauveur, Lille, France. Book of abstracts, p.21

142.Rodnikov A.V. The Leier as an asteroid space elevator. *7-th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics*. October, 17-28, 2011, Moscow (Russia)- Siedlce (Poland). Book of abstracts, p.75

143.Rodnikov A.V. The Leier Elevator for an Asteroid. Proceedings of 5th International Scientific Conference on Physics and Control-Physcon 2011. Leon, Spain. September 5-8,2011. http://lib.physcon.ru/doc?id=5bd0a6919e9e

144.Rodnikov,A.V.Some dynamical problems for a particle tethered to a rigid body.*Symposium Nonlinear Dynamics Milutin Milankovic.Multi-disciplinary and Interdisciplinary Applications (SNDMIA 2012)* .Belgrade, October 1-5,2012.Booklet of Abstracts.Mathematical Institute SANU,82-83.

145.Rodnikov A.V. Libration Points of an Oblate Asteroid. *Key Topics in Orbit Propagation Applied to Space Situation Awareness KEPASSA-2014: Program and Abstract Book* April 23-25, 2014, Logroño, Spain, p. 72-73

146.Rodnikov A.V. On relative equilibria of a particle near an oblate asteroid. *8th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2011. Booklet of Abstracts*. July 6-11, 2014, Vienna, Austria, p. 360

147.Rodnikov A.V. On relative equilibria of a particle near an oblate asteroid *ENOC 2014 - Proceedings of 8th European Nonlinear Dynamics Conference.* Institute of Mechanics and Mechatronics, Vienna University of Technology, 2014 Vienna, Austria, ISBN: 978-3-200-03433-4, 6 pp.

148.Scheeres,D. J. Stability of Binary Asteroids. *Icarus*,2002,159,pp.271-283

149.Scheeres D. J. Stability in the full two-body problem. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 83, 155- 169(2002).

150.Scheeres, D. J., Bellerose, J. The restricted Hill full 4-body problem: Application to spacecraft motion about binary asteroids. *Dyn. Syst*,2005,20,pp.23-44

151.Scheeres, D.J., Williams,B.G. and Miller, J.K. Evaluation of the Dynamic Environment of an Asteroid: Applications to 433 Eros. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2000, 23, 3, pp.466-475.

152.Scheeres,D. J. and Ostro,S. J. Orbits close to asteroid 4769 Castalia. *Icarus*,1996,121,pp. 67-87

153.Scheeres,D. J., Ostro,S. J., Hudson,R.S., DeJong,E.M. and Suzuki,S. Dynamics of Orbits Close to Asteroid 4179 Toutatis. *Icarus*,1998,132,pp.53-79

154.*Tethers In Space Handbook.* Edited by M.L. Cosmo and E.C. Lorenzini. Smithsonian Astrophysical Observatory for NASA Marshall Space Flight Center Grant NAG8-1160 monitored by C.C. Rupp M.L. Cosmo and E.C. Lorenzini, Principal Investigators. 3rd Edition, 1997.

155.Vasilkova, O.O. Three-dimensional periodic motion in the vicinity of the equilibrium points of an asteroid. *Astron. Astroph.*, 2005, 430, 2, pp.713-723.

156.Vasilkova, O.O. Stability criterion for a light binary attracted by a heavy body *Astronomy Letters*, 2010, v.36, i.3, pp.227-230.

157.Vinti,J.P. A new method of solution for unretarded satellite orbits. *Nat. Bur. Standards. J. Res. Math. and Math. Physics*, 63B,3:105-116,1959

158.Vinti, J.P. Theory of an accurate intermediate orbit for satellite astronomy. *Nat. Bur. Standards. J. Res. Math. and Math. Physics*, 65B, 2:169-201,1961

159.Szebehely V. *Theory of orbits. The Restricted Problem of Three Bodies.* Academic press, New York and London, 1967