

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Института  
Прикладной Математики  
им. М. В. Келдыша РАН,  
академик Б. Н. Четверушкин

12 мая 2015 г.



Отзыв ведущей организации  
на диссертацию Я. В. Акулова «О классах булевых функций,  
выразимых относительно расширенной суперпозиции» на соискание  
ученой степени кандидата физико-математических наук по  
специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая  
кибернетика

Диссертация посвящена исследованию классов функций с точки зрения выразимости посредством специальной операции суперпозиции, называемой в работе *расширенной*. Подобная тематика является традиционной для теории функциональных систем: вопросы выразимости и соответствующая классификация функций представляли первоочередной интерес, как для двузначной, так и для многозначных логик. Вместе с тем, структура классов, замкнутых по суперпозиции, полученная Э. Постом для двузначной логики, при обобщении на многозначные логики оказалась чрезвычайно сложной, что заставило исследователей искать другие подходы к этим задачам. Один из возможных вариантов — обобщение операции суперпозиции — исследуется в данной работе, что обуславливает ее актуальность.

Обычная операция суперпозиции предполагает выражение функций формулами над некоторым заданным множеством функций  $A$ , причем в качестве элементарных формул выступают переменные. Операция *расширенной суперпозиции* допускает использование в качестве элементарных формул функции из заданного множества  $F$ . Полученное таким образом множество функций называется *пополнением*  $A$  относительно  $F$  и обозначается  $[A]_F$ . В работе исследуются свойства пополнения  $[A]_F$  для различных множеств  $A$  и  $F$ . Хотя изначально задача мотивирована сложностями исследования замкнутых классов в многозначных логиках, исследуются пополнения для классов булевых функций. Эта задача представляет самостоятельный интерес, а кроме того может рассматриваться как первый шаг в исследовании операции расширенной суперпозиции в многозначных логиках.

Диссертация состоит из введения и пяти глав. В первой главе диссертации приводятся основные определения, необходимые для дальнейших построений, и вводится понятие пополнения. В диссертации рассматриваются пополнения замкнутых классов  $A$  относительно классов  $F$ , называемых *инвариантными*, содержащими вместе с каждой функцией все функции, получающиеся из нее добавлением/изъятием несущественных переменных, а также переименованием переменных (возможно, с отождествлением).

Во второй главе вводится понятие *декомпозиции* функции относительно класса  $F$ . Эта операция, в определенном смысле обратная к расширенной суперпозиции, позволяет свести вопрос выразимости функций расширенной суперпозицией к вопросу о принадлежности частичной функции некоторому классу. Этот критерий выразимости относительно операции расширенной суперпозиции сформулирован в виде теоремы (теорема 2.1.1 в работе), которая является одним из основных инструментов в дальнейших исследованиях. В этой же главе приведен ряд утверждений, описывающих свойства пополнений различных замкнутых (относительно обычной суперпозиции) классов, вытекающих из доказанной теоремы.

Третья глава посвящена вопросам представления пополнений замкнутых классов в виде пересечений пополнений других замкнутых классов. Класс  $A$  называется *универсально разложимым*, если найдутся такие замкнутые классы  $C_1, \dots, C_m$ , отличные от  $A$ , что для любого инвариантного класса  $F$  выполнено

$$[A]_F = [C_1]_F \cap \dots \cap [C_m]_F.$$

Основным результатом главы является теорема (теорема 3.2.1 в тексте), утверждающая, что за исключением класса  $MU$ , любой замкнутый класс булевых функций  $A$  универсально разложим тогда и только тогда, когда он представляется в виде пересечения замкнутых классов, отличных от  $A$ .

Четвертая глава диссертации посвящена исследованию пополнений замкнутых классов  $A$  относительно замкнутых (а не просто инвариантных) классов  $F$ . Такие пополнения называются  $\mathcal{P}$ -пополнениями. Многочисленные результаты четвертой главы сведены в теоремы (теорема 4.8.1 и теорема 4.9.15 в тексте), а также в таблицу на стр. 71. Совокупность этих сведений дает представление о структуре множества  $\mathcal{P}$ -пополнений, некоторые из которых, в частности, не являются замкнутыми классами (относительно обычной суперпозиции).

В пятой главе рассматриваются вопросы полноты систем функций относительно расширенной суперпозиции в классе  $P_2$  и предполных клас-

