

## ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертационную работу Акулова Ярослава Викторовича «О классах булевых функций, выразимых относительно расширенной суперпозиции», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

**Актуальность темы диссертации.** Работа Я.В.Акулова относится к математической теории функциональных систем — одному из основных разделов дискретной математики и математической кибернетики. Дискретные функциональные системы естественным образом интерпретируются в виде систем функций многозначной логики, которые таким образом имеют фундаментальное значение в данной области. Изучение функций многозначной логики основывается их классификации согласно различным базовым свойствам, в частности, согласно функциональным свойствам, инвариантным относительно операции суперпозиции. Поэтому особое значение для функций многозначной логики имеет задача описания всех классов этих функций, замкнутых относительно операции суперпозиции. Данная задача была полностью решена Э.Постом для случая функций двухзначной логики. Вместе с тем решение данной задачи для функций  $k$ -значной логики при  $k > 2$  сталкивается с принципиальными сложностями, вытекающими из результатов Ю.А.Янова и А.А.Мучника. В частности, из этих результатов следует существование континуальных семейств замкнутых относительно операции суперпозиции классов функций  $k$ -значной логики при  $k > 2$ . В связи с этим приобрела актуальность задача фрагментарного описания решетки замкнутых классов функций  $k$ -значной логики при  $k > 2$  за счет усиления операции суперпозиции. В многочисленных работах, посвященных данному подходу, рассматривались различные варианты усиления этой операции с целью построения решеток замкнутых классов для этих усилений. Основной проблемой, возникающей при данном подходе, является трудность аккуратного подбора варианта усиления операции суперпозиции, пригодного для достижения поставленных целей: как правило, либо в силу чрезмерности рассматриваемого усиления операции суперпозиции полученная для него фрагментация решетки замкнутых классов оказывается слишком грубой и тем самым малоинформативной, либо, наоборот, в силу недостаточности рассматриваемого усиления операции суперпозиции число классов функций, замкнутых относительно данного усиления, остается континуальным. Чтобы преодолеть трудности, связанные с данной проблемой, представляется интересным рассмотрение широкого семейства усилений операции суперпозиции, из которого можно было бы выбрать усиление, наиболее подходящее для получения требуемой фрагментации решетки замкнутых классов функций многозначной логики. Работа Я.В.Акулова посвящена реализации данной идеи. В ней рассматривается обобщение операции суперпозиции, при котором в формулах, реализующих функции, в качестве исходных тривиальных подформул предполагаются не только символы переменных, но и формулы, реализующие любые функции из некоторого «базового» множества функций (тем самым в данном случае мы имеем семейство обобщенных операций суперпозиции в зависимости от выбора «базового» множества). Отметим, что, для того чтобы операция обобщенной суперпозиции удовлетворяла естественным свойствам, для «базового» множества также должны выполняться определенные условия; множества,

удовлетворяющие данным условиям, называются в работе инвариантными классами. Отметим, также, что замыкание множеств функций относительно операции обобщенной суперпозиции, вообще говоря, не обладает всеми свойствами оператора замыкания, поэтому данное замыкание называется в работе пополнением. Я.В.Акуловым исследуются пополнения множеств функций двузначной логики. В частности, для рассматриваемых пополнений исследуются вопросы выразимости и полноты. Особое внимание уделяется случаю, когда в качестве «базовых» множеств рассматриваются замкнутые относительно операции суперпозиции классы функций.

**Содержание диссертации.** В диссертации Я.В.Акулова описаны все пополнения множеств булевых функций относительно операции обобщенной суперпозиции в случае, когда в качестве «базовых» множеств рассматриваются замкнутые относительно операции суперпозиции классы функций. Описаны также все случаи полноты относительно операции обобщенной суперпозиции множеств булевых функций в классе всех булевых функций и во всех предполных классах булевых функций. Диссертация состоит из введения и пяти глав.

Во введении дано краткое изложение содержания диссертации и приведен обзор результатов, полученных ранее по данной тематике.

В главе 1 приводятся необходимые определения и обозначения, используемые в работе. В частности, вводятся понятия, связанные с операцией расширенной суперпозиции: понятия инвариантного класса, типа, формулы над типом, пополнения относительно инвариантного класса, полного типа. Доказывается также ряд вспомогательных свойств, справедливых для введенных понятий.

В главе 2 доказываются базовые утверждения, используемые в дальнейших главах. Одним из этих базовых утверждений является критерий выразимости функций в терминах расширенной суперпозиции. Для формулировки этого критерия вводятся понятия декомпозиции функции относительно инвариантного класса и частичной функции, согласованной с заданным замкнутым классом булевых функций. Показано, что булева функция принадлежит пополнению множества булевых функций относительно некоторого инвариантного класса тогда и только тогда, когда ее декомпозиция относительно данного инвариантного класса является согласованной с замыканием этого множества. Далее в главе 2 приводятся критерии согласованности частичных функций с различными замкнутыми классами булевых функций.

В главе 3 исследуются теоретико-множественные взаимосвязи между пополнениями различных замкнутых классов булевых функций. Для этого вводятся понятия разложимости и универсальной разложимости замкнутых классов булевых функций. Показано, что, за исключением ровно одного класса, замкнутые классы булевых функций являются универсально разложимыми тогда и только тогда, когда они являются разложимыми. Полученные в данной главе результаты позволяют свести вычисление пополнений множеств булевых функций к вычислению сравнительно небольшого числа пополнений, значительно сократив таким образом объем необходимых вычислений.

В главе 4 дается полное описание пополнений множеств булевых функций относительно всех замкнутых классов булевых функций. Для этого автором сначала определяется некоторое исходное множество пополнений, называемых базовыми  $R$ -пополнениями, и показывается, каким образом все остальные рассматриваемые пополнения могут быть получены из базовых  $R$ -пополнений с помощью теоретико-множественных операций.

В главе 5 решена задача полноты применительно к операции обобщенной суперпозиции для класса всех булевых функций и для всех предполных классов булевых функций. Данная задача состоит в том, чтобы для произвольного подмножества заданного класса функций найти все инвариантные классы, относительно которых рассматриваемое подмножество является полным в заданном классе. Решение задачи полноты получено в терминах легко проверяемых условий, налагаемых на искомые инвариантные классы.

Таким образом, в рамках исследований обобщенной суперпозиции автором решены задача выразимости для булевых функций и задача полноты для класса всех булевых функций и всех предполных классов булевых функций, тем самым достигнуто существенное продвижение в данных исследованиях. Все основные результаты диссертации являются новыми и интересными и получены автором самостоятельно. При их получении автор преодолел ряд серьезных трудностей. Материал изложен в диссертации подробно и аккуратно, все основные результаты снабжены развернутыми доказательствами. В диссертации используются методы дискретного анализа и теории функциональных систем. Результаты диссертации могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории функциональных систем, а также в теории синтеза управляющих систем. Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в работах автора. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа Я.В.Акулова «О классах булевых функций, выразимых относительно расширенной суперпозиции» отвечает современным требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель,  
доктор физико-математических наук

Р.М. Колпаков

10 января 2015 г.

Подпись Р.М. Колпакова удостоверяю

И.о. декана  
механико-математического  
факультета МГУ им. М.В.Ломоносова  
профессор

В.Н.Чубариков