

**Отзыв официального оппонента о диссертации Я.В.Акулова
«О классах булевых функций, выразимых относительно расширенной
суперпозиции»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика**

Диссертация Я.В.Акулова относится к теории функциональных систем. В ней изучаются функциональные связи между некоторыми множествами булевых функций. Трудности с описанием множества всех замкнутых классов функций k -значной логики, обозначившиеся после появления примеров Ю.И. Янова и А.А. Мучника, привели к возникновению направления исследований систем функций k -значной логики ($k \geq 2$), связанному с модификацией определения операции суперпозиции. Усиление оператора суперпозиции — один из возможных способов построения новых классификаций классов функций k -значной логики. Начинать изучение свойств новых операторов суперпозиции удобнее всего со случая булевых функций, так как в этом случае можно сравнить полученную классификацию с известным описанием множества всех замкнутых классов булевых функций, полученным Э.Постом, и оценить выразительную силу нового оператора суперпозиции.

Вместо обычного оператора суперпозиции Я.В.Акулов рассматривает оператор расширенной суперпозиции, отличие которого от обычной суперпозиции состоит в следующем. Зафиксируем множества булевых функций A и F . Формулы над A теперь можно строить, подставляя в качестве элементарных подформул не только символы переменных, но и подформулы вида $f(x_1, \dots, x_n)$, где $f \in F$. На множество F накладывается несколько требований: оно должно содержать все селекторные функции и быть замкнутым относительно операций введения несущественных переменных и переименования переменных (множества, удовлетворяющие этим свойствам, называются инвариантными классами). Множество функций, реализуемых формулами такого вида, называется пополнением A относительно F и обозначается $[A]_F$. Тогда естественным образом встает вопрос описания пополнений A относительно различных инвариантных классов. Важными частными случаями является две следующие задачи. Во-первых, представляет интерес задача описания пополнений A относительно замкнутых классов булевых функций. Сопоставив полученные результаты с решеткой замкнутых классов булевых функций, можно сравнить выразительную силу оператора расширенной суперпозиции. Во-вторых, интересно найти такие инвариантные классы F , пополнение относительно которых позволяет получить некоторый замкнутый класс булевых функций. Эта задача является аналогом задачи о нахождении полных (в некотором классе) систем функций. Решению этих задач и посвящена работа диссертанта.

В главе 1 автор вводит основные определения и обозначения. В частности, определяется операция расширенной суперпозиции и дается соответствующее определение пополнения системы булевых функций относительно произвольного инвариантного класса. Затем автор доказывает простейшие свойства пополнения, которыми он пользуется в следующих главах.

В главе 2 автор сначала отвечает на следующий вопрос: как по булевой функции h , замкнутому классу A и инвариантному классу F определить, принадлежит ли h множеству булевых функций $[A]_F$? Ответ на этот вопрос дается в терминах специального представления булевых функций, называемого декомпозицией функции относительно F : $h \in [A]_F$ если и только если декомпозиция h относительно F , являющаяся частичной булевой функцией, может быть доопределена до функции, принадлежащей классу A (теорема 2.1.1). Затем доказан ряд критериев, в которых для различных замкнутых классов сформулированы функциональные условия на частичные функции, при выполнении которых частичная функция может быть доопределена до функции, принадлежащей этому замкнутому классу. В структуре диссертационного исследования эти результаты носят вспомогательный характер.

В главе 3 вводятся понятия разложимости и универсальной разложимости замкнутого класса булевых функций. Замкнутый класс A называется разложимым, если он может быть представлен в виде пересечения нескольких других различных замкнутых классов. Замкнутый класс A называется универсально разложимым, если для любого инвариантного класса F пополнение A относительно F может быть представлено в виде пересечения пополнений относительно F нескольких других замкнутых классов. Оказывается (теорема 3.2.1), что для всех замкнутых классов булевых функций за исключением одного, а именно за исключением класса всех монотонных функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, свойства разложимости и универсальной разложимости выполняются или не выполняются одновременно. Из описания множества всех замкнутых классов булевых функций известно, какие замкнутые классы булевых функций являются разложимыми. Результаты главы 3 позволяют ограничить поиск различных пополнений замкнутых классов.

Глава 4 содержит, на мой взгляд, основные и самые интересные результаты диссертации. Автор рассматривает пополнения специального вида, а именно пополнения $[A]_F$, в которых A является замкнутым классом булевых функций, содержащим функции, отличные от констант, а F — замкнутым классом булевых функций (такие пополнения называются \mathcal{P} -пополнениями). Выделяются основные замкнутые классы булевых функций:

$$P_2, K_{01}, L, M_{01}, T_0, O^m (m = 2, 3, \dots, \infty), S, U_{01}, SU,$$

для каждого из которых автор находит некоторые \mathcal{P} -пополнения (они называются базовыми). На основе результатов глав 1–3 затем получается описание всех \mathcal{P} -пополнений (теорема 4.9.15). Интересно, что некоторые \mathcal{P} -пополнения являются замкнутыми классами булевых функций, а некоторые — нет. Это подчеркивает содержательное отличие операции пополнения от замыкания относительно стандартной операции суперпозиции.

В главе 5 автор обращается к следующей задаче. Для пары замкнутых классов булевых функций A, B , $A \subseteq B$, ставится вопрос о том, какие инвариантные классы F удовлетворяют соотношению $[A]_F = B$. Теорема 5.2.8 устанавливает решение уравнения $[A]_F = B$ для случая $B = P_2$, теорема 5.3.12 — для случая $B = T_1$, теорема 5.4.11 — для случая $B = S$, теорема 5.5.5 — для случая $B = M$, теорема 5.6.4 — для случая $B = L$. Таким образом, для любого предполного класса булевых функций B

и любого замкнутого класса A найдено множество инвариантных классов, таких, что пополнение A относительно F равно B .

Полученные результаты являются новыми и интересными: построенные классификации множеств булевых функций содержательно отличаются от известных классификаций.

К числу недостатков работы можно отнести осязаемое количество опечаток. Так, в оглавлении нумерация страниц не всюду соответствует действительности; теорема 2.1.1. в дальнейшем на стр.24 называется леммой 2.1.1, и так далее. Нет сомнений, что все эти опечатки могли бы быть легко устранены автором. В любом случае, опечатки нисколько не умаляют качества содержательных результатов диссертации.

Считаю, что кандидатская диссертация Я.В.Акулова «О классах булевых функций, выразимых относительно расширенной суперпозиции» отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Ярослав Викторович Акулов, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

12 мая 2015 г.

Зам. проректора
доцент кафедры высшей математики НИУ ВШЭ
к.ф.-м.н.

Д. А. Дагаев

Адрес НИУ Высшая школа экономики: 101000, г.Москва, ул. Мясницкая, д.20.

Телефон: (495) 771-32-32

e-mail: ddagaev@gmail.com

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ

Управление персонала
Зам. нач. отдела по
работе с НРР
Тихонова Е.Р.

12.05.2015

