

Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу Акулова Ярослава Викторовича “О классах булевых функций, выразимых относительно расширенной суперпозиции”, представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

В диссертации рассматриваются вопросы, связанные с теорией функциональных систем, являющейся одним из основных направлений исследования в дискретной математике и математической кибернетике. Фундаментальным вопросом данной теории является описание структуры классов, замкнутых относительно операций, определенных на функциональных системах. Особое место среди функциональных систем занимают системы функций многозначной логики, позволяющие описывать функционирование сложных дискретных структур. Взаимосвязь между функциями многозначной логики естественным образом выражается посредством определенной на этих функциях операции суперпозиции. Таким образом, описание решетки классов многозначной логики, замкнутых относительно операции суперпозиции, является принципиально важной задачей математической кибернетики.

Классическим результатом в решении данной задачи является описание Э. Постом (1920 г.) решетки всех классов функций двузначной логики (булевых функций), замкнутых относительно операции суперпозиции. Дальнейшие продвижения в решении рассматриваемой задачи для функций k -значной логики при $k \geq 3$ оказалось проблематичным в связи с результатами Ю. Янова и А. Мучника (1959 г.), показавших существование при $k \geq 3$ замкнутых классов функций k -значной логики, не имеющих базиса, и континуальных семейств замкнутых классов функций k -значной логики. Данные результаты демонстрируют, что для функций k -значной логики операция суперпозиции является достаточно слабой в плане выразимости. Одной из причин такого эффекта представляется невозможность использования в качестве тривиальных формул при применении операции суперпозиции некоторого исходного множества функциональных символов имеющих изначально в наличии функций. Поэтому рассмотрение обобщенного варианта операции, предполагающего наличие такого множества функциональных символов, представляет большой научный интерес.

В диссертации Я.В. Акулова исследуются вопросы полноты и выразимости для операции обобщенной суперпозиции над множеством булевых функций. Для этого вводятся понятия инвариантного класса функций и пополнения множества A функций относительно инвариантного класса F , где под пополнением понимается множество всех функций, реализуемых формулами над A , в которых в качестве тривиальных подформул могут

содержаться функциональные символы, реализующие функции из F . В работе изучаются пополнения множеств булевых функций относительно инвариантных классов и получены следующие основные результаты.

1. Получен критерий выразимости булевой функции посредством операции обобщенной суперпозиции над заданным множеством булевых функций относительно заданного инвариантного класса. Этот критерий позволяет эффективным образом устанавливать принадлежность булевых функций пополнению заданного множества булевых функций относительно заданного инвариантного класса.

2. Изучены теоретико-множественные взаимосвязи между пополнениями замкнутых классов булевых функций. Для этого введены понятия разложимого и универсально разложимого замкнутого класса булевых функций. Показано, что любой замкнутый класс булевых функций за исключением класса MU монотонных функций от одной переменной является универсально разложимым тогда и только тогда, когда он является разложимым.

3. Описаны все пополнения замкнутых классов булевых функций относительно других замкнутых классов. Для удобства описания выделен сравнительно узкий класс пополнений, называемых базовыми \mathcal{P} -пополнениями. Показано, что множество всех базовых \mathcal{P} -пополнений представляет объединение шести явным образом описанных классов пополнений. Показано также, все остальные пополнения замкнутых классов булевых функций относительно других замкнутых классов могут быть получены из базовых \mathcal{P} -пополнений при помощи операций пересечения, добавления констант и двойственности.

4. Для каждой пары A, B замкнутых классов булевых функций таких, что $A \subset B$ и B — либо класс P_2 всех булевых функций, либо один из пяти предполных в P_2 , описано семейство всех инвариантных классов F таких, что B является пополнением A относительно F . Описание каждого семейства инвариантных классов дано посредством явного критерия вхождения инвариантного класса в данное семейство.

Таким образом, в представленной работе получено полное решение задачи о выразимости для операции обобщенной суперпозиции над булевыми функциями относительно замкнутых классов булевых функций. Автором решена также задача полноты для рассматриваемой операции обобщенной суперпозиции в классе всех булевых функций и во всех предполных классах булевых функций.

К недостаткам работы можно отнести недостаточную структурированность доказательств и обозначений, приводящую к многократному повторению однотипных рассуждений, однако этот недостаток не является существенным.

Все основные результаты диссертации являются новыми и интересными, все основные утверждения строго доказаны. Для получения результатов диссертации автору удалось преодолеть ряд существенных затруднений. В частности, автором придуманы оригинальные доказательства раз-

