

ФГБОУ ВО Московский государственный  
университет имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи

**Прасолов Максим Вячеславович**

**Монотонное упрощение зацеплений и  
лежандровы графы**

Специальность 01.01.04 — Геометрия и топология

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:

**Дынников Иван Алексеевич**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор.

Официальные оппоненты:

**Лексин Владимир Павлович**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (ГАОУ ВПО «Московский государственный  
областной социально-гуманитарный институт»,  
физико-математический факультет, кафедра алгебры,  
геометрии, теории и методики обучения математики),

**Пушкарь Пётр Евгеньевич**,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент (НИУ «Высшая школа экономики», факультет  
математики).

Ведущая организация:

**Институт математики СО РАН**

Защита состоится 29 мая 2015 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, <http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi>.

Автореферат разослан 29 апреля 2015 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета

Д 501.001.84 на базе

ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова,

доктор физико-математических наук,

профессор

**Иванов Александр Олегович**

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы.

Теория узлов — классический раздел топологии, который развивается с конца XIX века. Фундаментальный вопрос этой теории — это классификация узлов и зацеплений в трёхмерном пространстве. Задача распознавания узла и, в частности, тривиального узла алгоритмически решена. Решение предложил Вольфганг Хакен<sup>1 2</sup> в 1961 году. Его идею довели до строгого доказательства усилия многих математиков<sup>3 4 5 6 7 8 9</sup>. Однако этот алгоритм очень медленный. Теоретическая оценка на время его работы — двойная экспонента от сложности узла.

Хотелось бы найти полиномиальный алгоритм или доказать, что его нет. В связи с этим опишем предпочтительную классификацию узлов и зацеплений: функция сложности на множестве представителей, конечный набор канонических представителей и преобразование любого представителя к каноническому, не увеличивающее сложность. Такие преобразования мы будем называть монотонными упрощениями или просто упрощениями. Рассмотрим пример представления узлов плоскими диаграммами. Сложность плоской диаграммы — количество перекрёстков. Теорема Райдемайстера описывает три простых движения, которые переводят плоскую диаграмму узла в любую другую. Однако тривиальный узел обладает бесконечным числом монотонно неупрощаемых плоских диаграмм: например, диаграмма на рисунке 1 и любая её кратная сумма с собой. Это говорит о том, что подход плоских диаграмм не вписывается в предпочтительную классификацию.

Но для прямоугольных диаграмм теорема о монотонном упрощении диаграммы тривиального узла верна, как показал Иван Дынников<sup>10</sup>. На прямоугольных диаграммах определены операции — аналог движений Райде-

---

<sup>1</sup> W.Haken, «Theorie der Normalfächen», *Acta Math.*, **105** (1961), p. 245–375.

<sup>2</sup> W.Haken, «Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten», *I. Math. Z.*, **80** (1962), p. 89–120.

<sup>3</sup> K.Johannson, «Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries», Berlin:Springer-Verlag, 1979. (Lecture Notes in Math. V. 761.)

<sup>4</sup> W.Jaco, P.Shalen, «Seifert fibered spaces in 3-manifolds», *Mem. Amer. Math. Soc.* (1979), **21**, no. 220

<sup>5</sup> G.Hemion, «On the classification of the homeomorphisms of 2-manifolds and on the classification of 3-manifolds», *Acta Math.*, **142** (1979), no. 1-2, p. 123–155

<sup>6</sup> F.Waldhausen, «On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large», *Ann. of Math.* (2), **87** (1968), p.56–88

<sup>7</sup> M.Bestvina, M.Handel, «Train-tracks for surface homeomorphisms», *Topology*, **34** (1995), no. 1, p. 109–140

<sup>8</sup> W.Thurston, «On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces», *Bull. Amer. Math. Soc.*, **19** (1988), no. 2, p. 417–431

<sup>9</sup> С.В.Матвеев, «Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий», - М.: МЦНМО, 2007, 456 с.

<sup>10</sup> I.Dynnikov, «Arc-presentations of links: Monotonic simplification», *Fund.Math.*, **190** (2006), p. 29–76

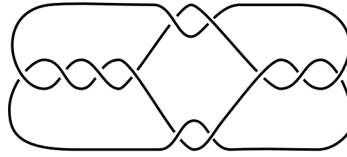


Рис. 1. Диаграмма тривиального узла, Гёритц, 1934

майлера, — из которых одни не меняют сложности диаграммы — числа вертикальных рёбер, — другие увеличивают сложность и называются стабилизациями, а обратные им — дестабилизациями. Марк Лакенбай<sup>11</sup> улучшил результат Дынникова и показал, что диаграмму тривиального узла можно монотонно упростить, применив небольшое число операций — ограниченное некоторым многочленом от сложности диаграммы. Это, в частности, означает, что проблема распознавания тривиального узла принадлежит классу NP, хотя это было показано ранее<sup>12</sup> без построения движений, приводящих к тривиальной диаграмме. Отметим также, что теорема Лакенбая даёт полиномиальную оценку на количество движений Райдемайстера, необходимых для приведения плоской диаграммы тривиального узла к тривиальной. Это следует из того, что от прямоугольной диаграммы можно перейти к плоской и обратно очень быстро, за время, ограниченное квадратом сложности.

Однако для сравнения узлов нет таких теорем, даже о принадлежности классу NP. Первым шагом на пути решения этой проблемы может быть ответ на вопрос, когда прямоугольная диаграмма зацепления допускает упрощение. В этой работе мы формулируем критерий о том, что упрощаемость прямоугольной диаграммы эквивалентна дестабилизируемости некоторого лежандрова зацепления. Это не решает трудный вопрос, но связывает между собой два трудных вопроса и позволяет решать вопрос методами как прямоугольных диаграмм, так и контактной топологии.

## Цель работы

Сформулировать геометрический критерий того, что прямоугольная диаграмма допускает дестабилизацию после нескольких рокировок и циклических перестановок.

## Научная новизна

Все результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно. В диссертации получены следующие основные результаты:

<sup>11</sup> M.Lackenby, «A polynomial upper bound on Reidemeister moves», *preprint*, arxiv:1302.0180

<sup>12</sup> J.Hass, J.Lagarias, N.Pippenger, «The computational complexity of knot and link problems», *J. ACM*, **46** (1999), p. 185–211

- Сформулирован и доказан критерий упрощаемости прямоугольной диаграммы в терминах лежандровых зацеплений.
- Доказана независимость (в некотором смысле) двух типов дестабилизаций прямоугольной диаграммы.
- Доказана гипотеза Джонса об инвариантности алгебраического числа пересечений минимальной косы, представляющей данное зацепление.
- Получено комбинаторное описание лежандровых графов с помощью обобщённых прямоугольных диаграмм.

## Методы исследования

Для доказательства основного результата применяется техника, разработанная Дж.Бирман и У.Менаско в серии работ, где они изучали зацепления, представленные замкнутыми косами<sup>13 14</sup>. Важнейшие элементы этой техники появлялись уже в работе Д.Беннекена<sup>15</sup>. П.Кромвель<sup>16</sup> заметил, что метод Бирман–Менаско переносится на книжные представления зацеплений (которые с комбинаторной точки зрения суть прямоугольные диаграммы).

## Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных задачах теории узлов и контактной топологии.

## Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и общеуниверситетских, всероссийских и международных конференциях.

- Семинар «Алгебраическая топология и приложения» под руководством чл.-корр. В.М. Бухштабера, проф. А.В. Чернавского, проф. И.А. Дынникова, проф. Т.Е. Панова, доц. Л.А. Алании, механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, неоднократно в 2012 – 2014 гг.

---

<sup>13</sup> J.Birman, W.Menasco, «Studying links via closed braids IV: Composite links and split links», *Invent. Math.*, **102** (1990), p. 115–139

<sup>14</sup> J.Birman, W.Menasco, «Studying links via closed braids V: Closed braid representatives of the unlink», *Trans. AMS*, **329** (1992), no.2, p. 585–606

<sup>15</sup> D.Bennequin, «Entrelacements et equations de Pfaff», *Asterisque*, **107–108** (1983), p. 87–161

<sup>16</sup> P.Cromwell, «Embedding knots and links in an open book I: Basic properties», *Topology and its Applications*, **64** (1995), p. 37–58

- Семинар «Дискретная геометрия и геометрия чисел» под руководством проф. Н.Г. Мощевитина, проф. М.Д. Ковалёва, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014 г.
- Семинар по топологии, университет Индианы, 2014 г.
- Ломоносовские чтения (Москва, 14.11 – 23.11, 2011);
- Александровские чтения (Москва, 21.05 – 25.05, 2012);
- Геометрия и анализ на метрических структурах (Новосибирск, 4.12 – 6.12, 2013);
- Ломоносов (Москва, 7.04 – 11.04, 2014);
- Квантовая и классическая топология трёхмерных многообразий (Магнитогорск, 4.07 – 17.07, 2014);
- Комбинаторные теории гомологий зацеплений, Косы и Контактная геометрия (Провиденс, 4.08 – 8.08, 2014);
- Дни геометрии в Новосибирске (Новосибирск, 24.09 – 27.09, 2014).

## Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в шести работах, список которых приводится в конце автореферата [1–6].

## Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, дополнительной главы, посвящённой дальнейшему исследованию темы диссертации, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объём работы составляет 166 страниц. Список литературы включает 120 наименований.

## Краткое содержание работы.

Во **Введении** изложена краткая история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач. Сформулированы цель работы и основные результаты.

В **Главе 1** изложены необходимые понятия и предварительные сведения о них.

**Определение.** *Прямоугольной диаграммой зацепления* называется конечное объединение замкнутых ломаных на плоскости, составленных лишь из горизонтальных и вертикальных звеньев (называемых *рёбрами* диаграммы), никакие два из которых не лежат на одной прямой. Каждая такая диаграмма интерпретируется как плоская диаграмма зацепления, в которой во всех пересечениях рёбер вертикальное ребро считается проходящим сверху. Концы рёбер прямоугольной диаграммы называются её *вершинами*. Число вертикальных рёбер прямоугольной диаграммы  $R$  называется её *сложностью* и обозначается через  $s(R)$ .

В параграфе 1.2 введены такие *элементарные преобразования*, что две прямоугольные диаграммы представляют эквивалентные зацепления тогда и только тогда, когда они связаны конечной последовательностью этих элементарных преобразований<sup>17 18</sup>. Циклическая перестановка и рокировка — это преобразования, не меняющие сложность диаграммы, а стабилизация и дестабилизация соответственно увеличивают и уменьшают сложность на 1. Мы различаем два типа стабилизаций и дестабилизаций: тип I и тип II. Преобразованиями типа I (типа II) мы называем преобразования, не меняющие сложность, а также стабилизацию и дестабилизацию типа I (типа II). Упрощением типа I (типа II) мы называем последовательность преобразований типа I (типа II), которая не содержит стабилизаций и содержит хотя бы одну дестабилизацию.

В параграфе 1.5 мы даём комбинаторное описание классов Бирман-Менаско — классов эквивалентности кос с точностью до операции обмена — с помощью прямоугольных диаграмм.

В параграфе 1.8 каждой диаграмме  $R$  сопоставляется два лежандровых зацепления  $L_R$  и  $L_{R^\sim}$  таким образом<sup>19</sup>, что две прямоугольные диаграммы  $R_1$  и  $R_2$  связаны последовательностью преобразований типа I (типа II), если и только если лежандровы зацепления  $L_{R_1}$  и  $L_{R_2}$  ( $L_{R_1^\sim}$  и  $L_{R_2^\sim}$ ) лежандрово изотопны.

**Глава 2** посвящена ключевому понятию — понятию шунта — и основному техническому результату данной работы — Ключевой лемме.

**Определение (2.2.1).** Пусть  $L$  — лежандрово зацепление. Пару  $(\alpha, \beta)$ , состоящую из гладкой простой лежандровой (т.е. всюду касающейся стандартной контактной структуры) дуги  $\alpha \in \mathbb{R}^3$  с концами на  $L$  и дуги  $\beta \subset L$  с теми же концами, мы будем называть *шунтом для  $L$* , если в  $\mathbb{R}^3$  найдется вложенный двумерный диск  $D$  со следующими свойствами:

<sup>17</sup> P.Cromwell, «Embedding knots and links in an open book I: Basic properties», *Topology and its Applications*, **64** (1995), p. 37–58

<sup>18</sup> I.Dynnikov, «Arc-presentations of links: Monotonic simplification», *Fund.Math.*, **190** (2006), p. 29–76

<sup>19</sup> P.Ozsváth, Z.Szabó, D.Thurston, «Legendrian knots, transverse knots and combinatorial Floer homology», *Geometry and Topology*, **12** (2008), p. 941–980

- (A0)  $D$  является образом при гладком вложении полудиска  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0\}$  в  $\mathbb{R}^3$ ;
- (A1) край диска  $\partial D$  совпадает с  $\alpha \cup \beta$ ;
- (A2) пересечение  $D \cap L$  совпадает с  $\beta$ ;
- (A3) диск  $D$  всюду вдоль  $\alpha$  касается стандартной контактной структуры.

В параграфе 2.3 мы даём комбинаторное определение шунта в терминах прямоугольных диаграмм.

**Ключевая Лемма.** Пусть  $R$  — прямоугольная диаграмма зацепления и  $(\alpha, \beta)$  — шунт меньшего веса, чем число вертикальных рёбер той компоненты зацепления  $R$ , на рёбрах которой находятся концы шунта  $\alpha$ .

Тогда найдётся прямоугольная диаграмма  $R'$ , лежандрово эквивалентная  $(R \setminus \beta) \cup \alpha$ , которая из  $R$  может быть получена в последовательными элементарными упрощениями типа II, где  $b$  — вес шунта  $(\alpha, \beta)$ .

В параграфе 2.5 приведён план доказательства Ключевой леммы. Чтобы упростить диаграмму с помощью шунта мы действуем, как при доказательстве теоремы о монотонном упрощении тривиального узла<sup>20</sup>. А именно, прямоугольной диаграмме с шунтом мы сопоставляем их книжное представление (см. параграф 1.4), при этом на диске возникает слоение, высекаемое страницами книги. Упрощая слоение на диске, мы добиваемся упрощения зацепления.

**Глава 3** посвящена следствиям из Ключевой леммы. Мы получаем геометрический критерий упрощаемости прямоугольной диаграммы, что является целью данной работы:

**Теорема** (Следствие 3.2.2). *Прямоугольная диаграмма  $R$  допускает упрощение типа II (типа I), то есть последовательность циклических перестановок, рокировок и хотя бы одной дестабилизации типа II (типа I), если и только если лежандрово зацепление  $L_R$  ( $L_{R^{\sim}}$ ) дестабилизируемо.*

В параграфе 3.2 мы приводим более простое (по сравнению с оригинальным) доказательство о монотонном упрощении тривиального узла:

**Следствие** (3.2.3). *Любая нетривиальная диаграмма тривиального узла допускает последовательность элементарных упрощений, заканчивающихся тривиальной диаграммой.*

В том же параграфе мы приводим ещё четыре следствия Ключевой леммы:

---

<sup>20</sup> I.Dynnikov, «Arc-presentations of links: Monotonic simplification», *Fund.Math.*, **190** (2006), p. 29–76



**Теорема (3.2.4).** Пусть прямоугольная диаграмма  $R$  допускает  $k$  последовательных элементарных упрощений  $R \mapsto R'_1 \mapsto R'_2 \mapsto \dots \mapsto R'_k$  типа  $I$ , а также  $\ell$  последовательных элементарных упрощений  $R \mapsto R''_1 \mapsto \dots \mapsto R''_\ell$  типа  $II$ .

Тогда диаграмма  $R'_k$  допускает  $\ell$  последовательных упрощений типа  $II$ , причем полученная в результате диаграмма связана с диаграммой  $R''_\ell$  последовательностью циклических перестановок, рокировок и (де)стабилизаций типа  $I$ .

Аналогично, диаграмма  $R''_\ell$  допускает  $k$  последовательных упрощений типа  $I$ , причем полученная в результате диаграмма связана с диаграммой  $R'_k$  последовательностью циклических перестановок, рокировок и стабилизаций/дестабилизаций типа  $II$ .

**Теорема (3.2.5).** Пусть  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  — два лежандровых типа лежандровых зацеплений, имеющих зеркально симметричные топологические типы. Тогда найдётся прямоугольная диаграмма  $R$  такая, что лежандровы зацепления  $L_R$  и  $L_{R^\sim}$  имеют типы  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  соответственно.

**Следствие (3.2.6).** Если  $R$  — минимальная диаграмма, то  $L_R$  и  $L_{R^\sim}$  максимизируют число Торстона–Беннеке.

В предложении 3.2.7 мы приводим (ранее неизвестные) максимальные числа Торстона–Беннеке для узлов  $12n_{41}$ ,  $12n_{119}$ ,  $12n_{120}$ ,  $12n_{121}$ ,  $12n_{145}$ ,  $12n_{153}$ ,  $12n_{199}$ ,  $12n_{200}$ ,  $12n_{243}$ ,  $12n_{260}$ ,  $12n_{282}$ ,  $12n_{310}$ ,  $12n_{322}$ ,  $12n_{351}$ ,  $12n_{362}$ ,  $12n_{368}$ ,  $12n_{377}$ ,  $12n_{403}$ ,  $12n_{414}$ ,  $12n_{425}$ ,  $12n_{475}$ ,  $12n_{523}$ ,  $12n_{549}$ .

В параграфе 3.3 мы приводим усиление Ключевой леммы:

**Теорема (3.3.1).** Пусть  $R$  — прямоугольная диаграмма зацепления,  $K \subset R$  — одна из её связных компонент,  $\mathcal{L}$  — некоторый лежандров тип. Следующие условия равносильны:

- (C1) диаграмма  $R$  допускает  $b > 0$  последовательных элементарных упрощений типа  $II$  на компоненте  $K$ , приводящих к диаграмме, имеющей лежандров тип  $\mathcal{L}$ ;
- (C2) для диаграммы  $R$  найдётся шунт  $\alpha$  веса  $b$  с концами на рёбрах компоненты  $K$ , и при замене им шунтируемого пути получается диаграмма, имеющая лежандров тип  $\mathcal{L}$ .

В параграфе 3.5 мы доказываем гипотезу Джонса:

**Теорема (3.5.1).** Обозначим за  $w(\beta)$  — алгебраическое число перекрёстков косы  $\beta$ . Пусть косы  $\beta_1 \in B_m$  и  $\beta_2 \in B_n$  представляют один и тот же класс

ориентированных зацеплений, причем коса  $\beta_1$  имеет наименьшее возможное для этого класса число нитей. Тогда

$$|w(\beta_2) - w(\beta_1)| \leq n - m.$$

В частности, при  $n = m$  мы имеем  $w(\beta_1) = w(\beta_2)$ .

Гипотеза Джонса вытекает из следующей теоремы, которая также доказана в другой работе<sup>21</sup>, где использован другой подход:

**Теорема (3.4.1).** Пусть классы сопряжённости кос  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$  задают эквивалентные ориентированные зацепления. Тогда найдется класс сопряжённости  $\mathcal{B}$ , который может быть получен из  $\mathcal{B}_1$  последовательностью только положительных, а из  $\mathcal{B}_2$  только отрицательных стабилизаций и дестабилизаций Маркова.

**Глава 4** посвящена комбинаторному описанию лежандровых графов с помощью обобщённых прямоугольных диаграмм.

В параграфе 4.2 мы даём предварительные сведения о лежандровых графах.

В параграфе 4.3 мы обобщаем понятие прямоугольной диаграммы (определение 4.3.1) и вводим элементарные движения для обобщённых прямоугольных диаграмм.

В параграфе 4.5 каждой обобщённой прямоугольной диаграмме  $R$  мы сопоставляем лежандров граф  $G_R$  таким образом, что верна следующая теорема:

**Теорема (4.5.2).** Соответствие  $R \mapsto G_R$  определяет биекцию между обобщёнными прямоугольными диаграммами с точностью до элементарных движений типа I и лежандровыми графами с точностью до лежандровой изотопии и раздутия или стягивания ребра.

В параграфе 4.7 мы вводим понятие заборных диаграмм и их движений. Эти понятия ввёл Ли Рудольф<sup>22 23</sup> для классификации квазиположительных поверхностей. Оказалось, что классы заборных диаграмм по модулю заборных движений описывают лежандровы графы. Баадер и Ишикава<sup>24</sup> построили естественное отображение из лежандровых графов в классы заборных

<sup>21</sup> D.LaFountain, W.Menasco «Embedded annuli and Jones' conjecture», *preprint*, arxiv:1302.1247

<sup>22</sup> L.Rudolph, «Quasipositive annuli (Constructions of quasipositive knots and links, IV)», *J. Knot Theory Ramif.*, **1** (1993), p.451-466

<sup>23</sup> L.Rudolph, «Quasipositivity as an obstruction to sliceness», *Bull Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **29** (1993), no. 1, p. 51–59

<sup>24</sup> S.Baader, M.Ishikawa, «Legendrian graphs and quasipositive diagrams», *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques*, **18** (2009), no. 2, p. 285-305

диаграмм. Мы показываем, что это отображение превращается в биекцию, если рассматривать лежандровы графы с точностью до раздутия и стягивания рёбер:

**Теорема (4.7.3).** *Обозначим за  $3-LG$  множество лежандровых графов с точностью до лежандровой изотопии, валентности вершин которых равны 2 или 3, за  $FD$  — заборные диаграммы с точностью до заборных движений, за  $LR$  — лежандровы графы с точностью до лежандровой изотопии и раздутий, за  $GRD_I$  — обобщённые прямоугольные диаграммы с точностью до элементарных движений типа  $I$ .*

*Пусть  $3-LG \rightarrow FD$  — отображение, определённое Баадером и Ишикавой,  $3-LG \rightarrow LR$  — естественное отображение,  $GRD_I \rightarrow LR$  — отображение  $R \mapsto G_R$ , определённое в 4.5.1. Тогда существует биекция  $FD \rightarrow GRD_I$  такая, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} 3-LG & \rightarrow & FD \\ \downarrow & & \downarrow \\ LR & \leftarrow & GRD_I \end{array}$$

## Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Ивану Алексеевичу Дынникову за постановку задач и внимание к работе. Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Левану Анзоровичу Алании за внимание к работе и ценные замечания. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ за тёплую атмосферу. Автор выражает благодарность всем сотрудникам лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета за внимание к работе. Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ 14.Z50.31.0020).

## Список публикаций

1. И.А.Дынников, М.В.Прасолов, «Шунты для прямоугольных диаграмм. Доказательство гипотезы Джонса и связанные вопросы», *Труды ММО*, **74:1** (2013), с. 115-173 (И. А. Дынникову принадлежат результаты раздела 3: теоремы 5, 6, 7 и следствия 1, 2, 3; М. В. Прасолову принадлежит формулировка частного случая Ключевой леммы и результаты раздела 5: теоремы 8,9,10,12 и следствие 4).

2. M. Prasolov, «Rectangular Diagrams of Legendrian Graphs», *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, V. **23** (2014), no. 13, 1450074.
3. Прасолов М.В., «Прямоугольные диаграммы лежандровых графов», *Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014»*, Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — М.: МАКС Пресс, 2014, электронное издание: [http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2014/2592/2200\\_72493\\_23bf5c.pdf](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2014/2592/2200_72493_23bf5c.pdf)
4. M. Prasolov, «Bypasses for Rectangular diagrams of a link and Jones' conjecture», *Abstracts of the International Conference "Geometry and Analysis on Metric Structures"*, Novosibirsk. — 2013, электронное издание: <http://gct.math.nsc.ru/wordpress/wp-content/uploads/2013/07/Prasolov.pdf>
5. M. Prasolov, «Rectangular Diagrams and Jones' Conjecture II- Legendrian graphs, bypasses and simplifying disks», *Supporting materials for conference «Combinatorial Link Homology Theories, Braids, and Contact Geometry»*, электронное издание: <http://icerm.brown.edu/tw14-6-clht/>
6. Prasolov M. V., «Rectangular diagrams of Legendrian graphs», *ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ – 2014: Тезисы Международной конференции, посвященной 85-летию академика Ю. Г. Решетняка*, Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2014, 126 с.