ФГБОУ ВО Московский государственный

университет имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи

Прасолов Максим Вячеславович

Монотонное упрощение зацеплений и лежандровы графы

Специальность 01.01.04 — Геометрия и топология

Диссертация

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д.ф.-м. н., профессор

Дынников Иван Алексеевич

Москва — 2015

Содержание

Введение

Актуальность темы.

Теория узлов — классический раздел топологии, который развивается с конца XIX века. Фундаментальный вопрос этой теории — это классификация узлов и зацеплений в трёхмерном пространстве. Задача распознавания узла и, в частности, тривиального узла алгоритмически решена. Решение предложил Вольфганг Хакен [51, 52] в 1961 году. Его идею довели до строгого доказательства усилия многих математиков [2, 10, 56, 59, 61, 110, 113]. Однако этот алгоритм очень медленный. Теоретическая оценка на время его работы — двойная экспонента от сложности узла.

Хотелось бы найти полиномиальный алгоритм или доказать, что его нет. В связи с этим опишем предпочтительную классификацию узлов и зацеплений: функция сложности на множестве представителей, конечный набор канонических представителей и преобразование любого представителя к каноническому, не увеличивающее сложность. Такие преобразования мы будем называть монотонными упрощениями или просто упрощениями. Рассмотрим, пример представления узлов плоскими диаграммами. Сложность плоской диаграммы — количество перекрёстков. Теорема Райдемайстера описывает три простых движения, которые переводят плоскую диаграмму узла в любую другую. Однако тривиальный узел обладает бесконечным числом монотонно неупрощаемых плоских диаграмм: например, диаграмма на рисунке 1 и любая её кратная сумма с собой. Это говорит о том, что подход плоских диаграмм не вписывается в предпочтительную классификацию.

Но для прямоугольных диаграмм теорема о монотонном упрощении

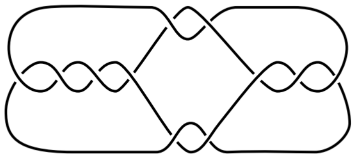


Рис. 1. Диаграмма тривиального узла, Гёритц, 1934

диаграммы тривиального узла верна, как показал Иван Дынников в [30]. На прямоугольных диаграммах определены операции — аналог движений Райдемайстера, — из которых одни не меняет сложности диаграммы — числа вертикальных рёбер, — другие увеличивают сложность и называются стабилизациями, а обратные им — дестабилизациями. В [69] Марк Лакенбай улучшил результат Дынникова и показал, что диаграмму тривиального узла можно монотонно упростить, применив небольшое число операций — ограниченное некоторым многочленом от сложности диаграммы. Это, в частности, означает, что проблема распознавания тривиального узла принадлежит классу NP, хотя это было показано ранее в [53] без построения движений, приводящих к тривиальной диаграмме. Отметим также, что теорема Лакенбая даёт полиномиальную оценку на количество движений Райдемайстера, необходимых для приведёния плоской диаграммы тривиального узла к тривиальной. Это следует из того, что от прямоугольной диаграммы можно перейти к плоской и обратно очень быстро, за время, ограниченное квадратом сложности.

Однако для сравнения узлов нет таких теорем, даже о принадлежности классу NP. Первым шагом на пути решения этой проблемы может быть ответ на вопрос, когда прямоугольная диаграмма зацепления допускает упрощение. В этой работе мы формулируем критерий о том, что упрощаемость прямоугольной диаграммы эквивалентна дестабилизируемости некоторого лежандрова зацепления. Это не решает трудный вопрос, но связывает между собой два трудных вопроса и позволяет решать вопрос методами как прямоугольных диаграмм, так и контактной топологии.

Краткое содержание работы.

Во **Введении** изложена краткая история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач. Сформулированы цель работы и основные результаты.

В **Главе 1** изложены необходимые понятия и предварительные сведения о них.

Определение. *Прямоугольной диаграммой зацепления* называется конечное объединение замкнутых ломаных на плоскости, составленных лишь из горизонтальных и вертикальных звеньев (называемых *рёбрами* диаграммы), никакие два из которых не лежат на одной прямой. Каждая такая диаграмма интерпретируется как плоская диаграмма зацепления, в которой во всех пересечениях рёбер вертикальное ребро считается проходящим сверху. Концы рёбер прямоугольной диаграммы называются её *вершинами.* Число вертикальных рёбер прямоугольной диаграммы R называется её *сложностью* и обозначается через $c(R)$.

В параграфе 1.2 введены такие *элементарные преобразования*, что две прямоугольные диаграммы представляют эквивалентные зацепления тогда и только тогда, когда они связаны конечной последовательностью этих элементарных преобразований[28, 30]. Циклическая перестановка и рокировка – это преобразования, не меняющие сложность диаграммы, а стабилизация и дестабилизация соответственно увеличивают и уменьшают сложность на 1. Мы различаем два типа стабилизаций и дестабилизаций: тип I и тип II. Преобразованиями типа I (типа II) мы называем преобразования, не меняющие сложность, а также стабилизацию и дестабилизацию типа I (типа II). Упрощением типа I (типа II) мы называем последовательность преобразований типа I (типа II), которая не содержит стабилизаций и содержит хотя бы одну дестабилизацию.

В параграфе 1.5 мы даём комбинаторное описание классов Бирман-Менаско — классов эквивалентности кос с точностью до операции обмена — с помощью прямоугольных диаграмм.

В параграфе 1.8 каждой диаграмме R сопоставляется два лежандровых зацепления L_R и $L_{R^\curvearrowright}$ таким образом[93], что две прямоугольные диаграммы R_1 и R_2 связаны последовательностью преобразований типа I (типа II), если и только если лежандровы зацепления L_{R_1} и L_{R_2} ($L_{R_1^\curvearrowright}$ и $L_{R_2^\curvearrowright}$) лежандрово изотопны.

Глава 2 посвящена ключевому понятию — понятию шунта — и основному техническому результату данной работы — Ключевой лемме.

Определение (2.2.1)**.** Пусть L — лежандрово зацепление. Пару (α, β), состоящую из гладкой простой лежандровой (т.е. всюду касающейся стандартной контактной структуры) дуги $\alpha \in \mathbb{R}^3$ с концами на L и дуги $\beta \subset L$ с теми же концами, мы будем называть *шунтом для* L, если в $\mathbb{R}^3$ найдется вложенный двумерный диск D со следующими свойствами:

(A0) D является образом при гладком вложении полудиска $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \leqslant 0\}$ в $\mathbb{R}^3$;

(A1) край диска ∂D совпадает с $\alpha \cup \beta$;

(A2) пересечение $D \cap L$ совпадает с β;

(A3) диск D всюду вдоль α касается стандартной контактной структуры.

В параграфе 2.3 мы даём комбинаторное определение шунта в терминах прямоугольных диаграмм.

Ключевая Лемма. *Пусть R — прямоугольная диаграмма зацепления и (α, β) — шунт меньшего веса, чем число вертикальных рёбер той компоненты зацепления R, на рёбрах которой находятся концы шунта α.*

Тогда найдётся прямоугольная диаграмма R', лежандрово эквивалентная $(R \setminus \beta) \cup \alpha$, которая из R может быть получена b последовательными элементарными упрощениями типа II, где b — вес шунта (α, β).

В параграфе 2.5 приведён план доказательства Ключевой леммы. Чтобы упростить диаграмму с помощью шунта мы действуем, как при доказательстве теоремы о монотонном упрощении тривиального узла[30]. А именно, прямоугольной диаграмме с шунтом мы сопоставляем их книжное представление (см. параграф 1.4), при этом на диске возникает слоение, высекаемое страницами книги. Упрощая слоение на диске, мы добиваемся упрощения зацепления.

Глава 3 посвящена следствиям из Ключевой леммы. Мы получаем геометрический критерий упрощаемости прямоугольной диаграммы, что является целью данной работы:

Теорема (Следствие 3.2.2)**.** *Прямоугольная диаграмма R допускает упрощение типа II (типа I), то есть последовательность циклических перестановок, рокировок и хотя бы одной дестабилизации типа II (типа I), если и только если лежандрово зацепление L_R ($L_{R^\frown}$) дестабилизируемо.*

В параграфе 3.2 мы приводим более простое (по сравнению с оригинальным) доказательство о монотонном упрощении тривиального узла:

Следствие (3.2.3)**.** *Любая нетривиальная диаграмма тривиального узла допускает последовательность элементарных упрощений, заканчивающихся тривиальной диаграммой.*

В том же параграфе мы приводим ещё четыре следствия Ключевой леммы:

Теорема (3.2.4)**.** *Пусть прямоугольная диаграмма* R *допускает* k *последовательных элементарных упрощений* $R \mapsto R_1' \mapsto R_2' \mapsto \ldots \mapsto R_k'$ *типа I, а также* ℓ *последовательных элементарных упрощений* $R \mapsto R_1'' \mapsto \ldots \mapsto R_\ell''$ *типа II.*

Тогда диаграмма R_k' *допускает* ℓ *последовательных упрощений типа II, причем полученная в результате диаграмма связана с диаграммой* R_ℓ'' *последовательностью циклических перестановок, рокировок и (де)стабилизаций типа I.*

Аналогично, диаграмма R_ℓ'' *допускает* k *последовательных упрощений типа I, причем полученная в результате диаграмма связана с диаграммой* R_k' *последовательностью циклических перестановок, рокировок и стабилизаций/дестабилизаций типа II.*

Теорема (3.2.5)**.** *Пусть* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *— два лежандровых типа лежандровых зацеплений, имеющих зеркально симметричные топологические типы. Тогда найдётся прямоугольная диаграмма* R *такая, что лежандровы зацепления* L_R *и* $L_{R^\frown}$ *имеют типы* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *соответственно.*

Следствие (3.2.6)**.** *Если* R *— минимальная диаграмма, то* L_R *и* $L_{R^\frown}$ *максимизируют число Торстона–Беннекена.*

В предложении 3.2.7 мы приводим (ранее неизвестные) максимальные числа Торстона–Беннекена для узлов $12n_{41}$, $12n_{119}$, $12n_{120}$, $12n_{121}$,

$12n_{145}$, $12n_{153}$, $12n_{199}$, $12n_{200}$, $12n_{243}$, $12n_{260}$, $12n_{282}$, $12n_{310}$, $12n_{322}$, $12n_{351}$, $12n_{362}$, $12n_{368}$, $12n_{377}$, $12n_{403}$, $12n_{414}$, $12n_{425}$, $12n_{475}$, $12n_{523}$, $12n_{549}$.

В параграфе 3.3 мы приводим усиление Ключевой леммы:

Теорема (3.3.1). *Пусть R — прямоугольная диаграмма зацепления, $K \subset R$ — одна из её связных компонент, $\mathcal{L}$ — некоторый лежандров тип. Следующие условия равносильны:*

(C1) диаграмма R допускает $b > 0$ последовательных элементарных упрощений типа II на компоненте K, приводящих к диаграмме, имеющий лежандров тип $\mathcal{L}$;

(C2) для диаграммы R найдётся шунт α веса b с концами на рёбрах компоненты K, и при замене им шунтируемого пути получается диаграмма, имеющая лежандров тип $\mathcal{L}$.

В параграфе 3.5 мы доказываем гипотезу Джонса:

Теорема (3.5.1). *Обозначим за $\mathrm{w}(\beta)$ — алгебраическое число перекрёстков косы β. Пусть косы $\beta_1 \in B_m$ и $\beta_2 \in B_n$ представляют один и тот же класс ориентированных зацеплений, причем коса β_1 имеет наименьшее возможное для этого класса число нитей. Тогда*

$$|\,\mathrm{w}(\beta_2) - \mathrm{w}(\beta_1)| \leqslant n - m.$$

В частности, при $n = m$ мы имеем $\mathrm{w}(\beta_1) = \mathrm{w}(\beta_2)$.

Гипотеза Джонса вытекает из следующей теоремы, которая также доказана в другой работе[70], где использован другой подход:

Теорема (3.4.1). *Пусть классы сопряжённости кос $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ задают эквивалентные ориентированные зацепления. Тогда найдется класс со-*

пряжённости $\mathcal{B}$, который может быть получен из $\mathcal{B}_1$ последовательностью только положительных, а из $\mathcal{B}_2$ только отрицательных стабилизаций и дестабилизаций Маркова.

Глава 4 посвящена комбинаторному описанию лежандровых графов с помощью обобщённых прямоугольных диаграмм.

В параграфе 4.2 мы даём предварительные сведения о лежандровых графах.

В параграфе 4.3 мы обобщаем понятие прямоугольной диаграммы (определение 4.3.1) и вводим элементарные движения для обобщённых прямоугольных диаграмм.

В параграфе 4.5 каждой обобщённой прямоугольной диаграмме R мы сопоставляем лежандров граф G_R таким образом, что верна следующая теорема:

Теорема (4.5.2)**.** *Соответствие $R \mapsto G_R$ определяет биекцию между обобщёнными прямоугольными диаграммами с точностью до элементарных движений типа I и лежандровыми графами с точностью до лежандровой изотопии и раздутия или стягивания ребра.*

В параграфе 4.7 мы вводим понятие заборных диаграмм и их движений. Эти понятия ввёл Ли Рудольф[101, 102] для классификации квазиположительных поверхностей. Оказалось, что классы заборных диаграмм по модулю заборных движений описывают лежандровы графы. Баадер и Ишикава[7] построили естественное отображение из лежандровых графов в классы заборных диаграмм. Мы показываем, что это отображение превращается в биекцию, если рассматривать лежандровы графы с точностью до раздутия и стягивания рёбер:

Теорема (4.7.3)**.** *Обозначим за 3-LG множество лежандровых графов* *с точностью до лежандровой изотопии, валентности вершин которых равны 2 или 3, за FD — заборные диаграммы с точностью до заборных движений, за LR — лежандровы графы с точностью до лежандровой изотопии и раздутий, за GRD_I — обобщённые прямоугольные диаграммы с точностью до элементарных движений типа I.*

Пусть 3-$LG \to FD$ — отображение, определённое Баадером и Ишикавой, 3-$LG \to LR$ — естественное отображение, $GRD_I \to LR$ — отображение $R \mapsto G_R$, определённое в 4.5.1. Тогда существует биекция $FD \to GRD_I$ такая, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} 3\text{-}LG & \to & FD \\ \downarrow & & \downarrow \\ LR & \leftarrow & GRD_I \end{array}$$

Разработанность темы.

Зацеплением мы будем называть объединение замкнутых кусочно-гладких простых кривых в $\mathbb{R}^3$. Эти кривые могут быть ориентированны или раскрашены (натуральными числами), в этом случае мы будем говорить об ориентированном или крашенном зацеплении. Связное зацепление называется узлом.

Зацепления L_0 и L_1 называются эквивалентными, если существует изотопный тождественному кусочно-гладкий гомеоморфизм $\mathbb{R}^3$ в себя такой, что $h(L_0) = L_1$ (с учётом ориентации и раскраски в случае ориентированных или крашенных зацеплений).

Хорошо известно [54, 66], что в определении зацеплений и их эквивалентности кусочно-гладкость можно заменить на кусочно-линейность или гладкость, при этом получится эквивалентная теория. Также в определении эквивалентности гомеоморфизм можно заменить непрерывным семейством зацеплений, соединяющим L_0 и L_1, причём классы эквивалентности не изменятся.

Начало классификации узлов было положено до того, как появились первые математические методы их сравнения. А именно, через несколько лет после работы [109] 1867-го года Уильяма Томсона, в которой узел предлагался в качестве модели атома, появились таблицы узлов малой сложности. Таблицы составлялись физиком Питером Тейтом и математиком Чарльзом Литтлом [74, 106–108]. Предположительно, различность двух узлов — а именно, тривиального узла и трилистника, — впервые показал Вильгельм Виртингер [114] с помощью фундаментальной группы [95] (см. также работу Генриха Титце [111]) уже после появления таблиц.

Закончили работу над таблицами Тейта и Литтла — а именно, вычеркнули все повторяющиеся узлы и доказали, что все оставшиеся различны — лишь к 1974 году, что говорит о сложности задачи. Последнюю точку поставил Кеннет Перко [94]: он нашёл пару диаграмм в таблице — пару Перко, — которые соответствуют одному узлу. Пара Перко — это контрпример к утверждению Литтла [74], который предположил, что минимальные диаграммы фиксированного узла должны обладать одинаковым алгебраическим числом перекрёстков.

Для сравнения узлов использовались инварианты, перечислим наиболее важные из них. Первые гомологии конечнолистной разветвлённой накрывающей (для двулистной накрывающей над трилистником и тривиальным узлом подсчитаны Поулом Хегором [55]), первые гомологии конечнолистной накрывающей, полином Александера [6], сигнатура узла [84, 112] — все эти инварианты быстро вычисляются по диаграмме в отличие от фундаментальной группы, алгебраическим упрощением которой являются эти инварианты. По диаграмме можно быстро вычислить лишь представление (presentation) Виртингера [114] фундаментальной группы, а представления сравнивать трудно.

Теоретически задача классификации узлов решена. Алгоритм распознавания узлов с помощью нормальных поверхностей был предложен Вольфгангом Хакеном [51, 52], а доработан многими авторами [2, 10, 56, 59, 61, 110, 113]. Однако на практике алгоритм Хакена неприменим. Он работает слишком долго: все узлы, которые можно различить с его помощью на компьютере, давно уже различены другими более быстрыми методами. А нормальные поверхности сами по себе полезны для компьютерных подсчётов [98]. Также с помощью нормальных поверхностей доказано [53], что задача о распознавании тривиального узла принадлежит классу NP. А в недавней работе [69] доказано ещё больше, что для упрощения тривиального узла до простейшей его диаграммы достаточно полиномиально зависящего количества движений от сложности диаграммы. Отметим, что аналогичных результатов о количестве движений, необходимых для сравнения двух диаграмм узла или для упрощения диаграммы узла, пока нет.

Упомянем о двух алгоритмах распознавания тривиального узла: вычисление гомологий Хованова и гомологий Хегора-Флоера.

Гомологии узла были определены Михаилом Ховановым в его работе [65] чисто комбинаторно. Используя вариацию гомологий Хованова [71, 72] Яков Расмуссен [96] ввёл свой инвариант, с помощью которого удалось получить элементарное доказательство [104] неравенства Торстона-Беннекена для четырёхмерного рода узла, которое изначально было доказано методами более близкими к дифференциальной геометрии и функциональному анализу [67, 102], чем к теории узлов.

Как уже упоминалось, подсчитав гомологии Хованова, можно наверняка определить тривиален ли узел [68]. Это даёт алгоритм распознавания тривиального узла, но подсчёт гомологий Хованова слишком сложен — даже для не очень больших узлов подсчёт на компьютере может никогда не закончиться. Есть программы для вычисления гомологий Хованова, написанные Александром Шумаковичем [4] и Дрором Бар-Натаном [8].

Гомологии Хегора-Флоера были введены Питером Ожватом и Золтаном Сабо в работе [92]. Эти гомологии обобщают полином Александера и определяют несколько характеристик узла. Например, род [91] (а, значит, и распознают тривиальный узел) или расслоенность [47, 88]. Также у гомологий Хегора-Флоера есть комбинаторное описание с помощью прямоугольных диаграмм [79, 80]. Поэтому полезно иметь прямоугольную диаграмму попроще, чтобы вычислять гомологии Хегора-Флоера быстрее. На странице Натана Данфилда [29] собрано несколько ссылок на программы, вычисляющие эти гомологии, а также на довольно быструю программу Дынникова для распознавания тривиального узла.

Опишем алгебраический подход к сравнению двух ориентированных зацеплений. Он основан на теореме Александера [5] о том, что любое ориентированное зацепление представляется в виде замыкания косы, и теореме Маркова [81] о том, что замыкания двух кос представляют одно ориентированное зацепление, если и только если они связаны последовательности сопряжений и (де)стабилизаций. Таким способом можно попытаться свести вопрос о сравнении ориентированных зацеплений к вопросу сопряжённости в группе кос. Один из алгебраических подходов к проблеме сопряжённости в группе кос начинается с работы Гарсайда [44] и развивается в работах [12–15, 36, 37, 42, 45, 46, 110]. Авторы предлагают алгоритм, который вычисляет некоторое специальное подмножество класса сопряжённости по любому представителю класса. Однако это не даёт быстрого решения проблемы сопряжённости, потому что размер специального подмножества может экспоненциально расти с увеличением числа нитей [3] или длины слова [21]. Компьютерную реализацию этого алгоритма можно найти на странице Хуана Гонсалеса-Менезеса.

Другой подход, связанный с косами, восходит к работе Беннекена [9]. Замкнутые косы суть объединения кривых, которые трансверсальны страницам книги — полуплоскостям, которые имеют общую прямую — переплёт, — и заметают всё пространство. На поверхности, которая ограничивает замкнутую косу, возникает слоение, которое высекают страницы. Несколько типов локальных фрагментов слоения позволяют его упростить, произотопировав поверхность и замкнутую косу. Но сохраняется лишь ориентированное зацепление, соответствующее косе; сама коса может претерпевать изотопию замкнутых кос, дестабилизацию или операцию обмена (exchange move). Последнее показали Бирман и Менаско. В [17] (см. также [14]) они показали, что косу, замыкание которой является тривиальным узлом, можно превратить в косу на одной нити дестабилизациями и операциями, не меняющими число нитей: сопряжением (изотопией замкнутых кос) и операциями обмена. Эта теорема о монотонном упрощении, — где роль сложности играет число нитей, — имеет небольшой изъян: количество замкнутых кос фиксированной сложности с точностью до операции обмена хоть и конечно, но его очень тяжело ограничить сверху, см. [18]. Мы рассмотрим подход, основанный на другом расположении зацепления относительно страниц книги, но в котором также верна теорема о монотонном упрощении.

Зацепление в книжном представлении состоит из нескольких дуг, которые содержатся целиком в разных страницах, а их концы которых лежат на переплёте. Книжные представления изучал ещё Брунн [20]. Книжные представления с комбинаторной точки зрения эквивалентны прямоугольным диаграммам. Любое зацепление можно представить прямоугольной диаграммой [28, 30]. На множестве диаграмм, представляющих зацепление, определены несколько элементарных преобразований — аналог движений Райдемайстера, — которые позволяют перейти от одной диаграммы к любой другой. Преобразования, которые увеличивают сложность, — число вертикальных рёбер диаграммы, — называются стабилизациями, а обратные к ним — дестабилизациями. Используя метод Беннекена, Дынников [30] доказал теорему о монотонном упрощении: прямоугольная диаграмма тривиального узла всегда приводится к минимальной диаграмме с помощью дестабилизаций и движений, не меняющих сложность. Как мы уже говорили, количество классов кос трудно оценить сверху, а количество прямоугольных диаграмм оценить легко: количество диаграмм сложности n равно $(n!)^2$. Отправной точкой настоящей работы был вопрос о том, когда прямоугольная диаграмма произвольного зацепления допускает упрощение, т.е. уменьшение сложности хотя бы на единицу. Как мы уже говорили раньше, мы формулируем критерий упрощаемости зацепления в терминах контактной геометрии.

В конце XIX века Софус Ли [73] опубликовал работу о контактных трансформациях. А во второй половине XX века стала развиваться контактная топология. Чжень [25, 26] поставил вопрос: на каких трёхмерных многообразиях существует контактная структура? Контактной структурой на ориентированном 3-многообразии называется двумерное распределение плоскостей, заданное 1-формой α, удовлетворяющей условию неинтегрируемости:

$$\alpha \wedge d\alpha > 0. \tag{1}$$

Фундаментальная задача контактной топологии заключается в классификации контактных структур, где две контактные структуры считаются эквивалентными, если существует диффеоморфизм, изотопный тождественному, переводящий одну контактную структуру в другую. Ясно, что если две контактные структуры задают негомотопные распределения плоскостей, то они различны. Беннекен [9] первым построил пример пары различных контактных структур из одного гомотопического класса распределений. Его работа лежит в основе дихотомии контактных структур. Если в контактном многообразии найдётся диск, касающийся контактной структуры вдоль своей границы, то контактная структура называется перекрученной. Если такого диска нет, то — тугой. Беннекен доказал (см. также [38]), что стандартная контактная структура в $\mathbb{R}^3$, заданная 1-формой $dz + xdy$, тугая. На замкнутом ориентированном 3-многообразии в каждом гомотопическом классе распределений плоскостей существует единственная перекрученная контактная структура [31, 75, 76, 82], а число тугих контактных структур конечно [27]. Тем самым классификация контактных структур сводится к классификации тугих контактных структур. Это сделано для некоторых многообразий: трёхмерная сфера [32] (единственная тугая контактная структура), линзовые пространства [49, 58], полнотория [49, 58, 77], произведение тора на отрезок [49, 58], сфера Пуанкаре $\Sigma(2, 3, 5)$ с обращённой ориентацией [41] (тугих контактных структур нет).

Работа Беннекена [9] вызвала интерес к лежандровым зацеплениям. Некоторые сведения о лежандровых зацеплениях были уже даны в разделе о содержании работы. Здесь мы ещё упоняем работу [23], в которой приведёна частичная классификация лежандровых типов с помощью перебора всех прямоугольных диаграмм малой сложности. Первый пример пары различных лежандровых узлов с одинаковыми классическими инвариантами был предложен Юрием Чекановым [22]. Для сравнения этих узлов Чеканов предложил комбинаторный способ вычисления гомологий градуированной алгебры, у которой образующие являются траекториями потока Риба, а дифференциал определяется с помощью J-голоморфных кривых [35, 57]. Если лежандров узел допускает дестабилизацию, то его гомологии Чеканова равны нулю. Ленард Нг [85] предположил, что верно и обратное: если гомологии Чеканова равны нулю, то лежандров узел допускает дестабилизацию. Учитывая основной результат настоящей работы, эта гипотеза превращается в (ещё один) возможный критерий упрощаемости прямоугольных диаграмм.

Цель работы

Сформулировать геометрический критерий того, что прямоугольная диаграмма допускает дестабилизацию после нескольких рокировок и циклических перестановок.

Научная новизна

Основные результаты диссертации следующие:

- Сформулирован и доказан критерий упрощаемости прямоугольной диаграммы в терминах лежандровых зацеплений.
- Доказана независимость (в некотором смысле) двух типов дестабилизаций прямоугольной диаграммы.

- Доказана гипотеза Джонса об инвариантности алгебраического числа пересечений минимальной косы, представляющей данное зацепление.

- Получено комбинаторное описание лежандровых графов с помощью обобщённых прямоугольных диаграмм.

Методы исследования

Для доказательства основного результата применяется техника, разработанная Дж.Бирман и У.Менаско в серии работ, где они изучали зацепления, представленные замкнутыми косами [16, 17]. Важнейшие элементы этой техники появлялись уже в работе Д.Беннекена [9]. П.Кромвель в [28] заметил, что метод Бирман–Менаско переносится на книжные представления зацеплений (которые с комбинаторной точки зрения суть прямоугольные диаграммы).

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Ивану Алексеевичу Дынникову за постановку задач и внимание к работе. Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Левану Анзоровичу Алании за внимание к работе и ценные замечания. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ за тёплую атмосферу. Автор выражает благодарность всем сотрудникам лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета за внимание к работе. Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ 14.Z50.31.0020).

Глава 1

Прямоугольные диаграммы топологических и лежандровых зацеплений, кос

1.1. Введение

В этой главе мы даём предварительные сведения.

Для доказательства основного результата в главе **??** требуются только параграфы 1.2, 1.3, 1.4. В параграфе 1.2 мы определим прямоугольные диаграммы, их движения и докажем две технические леммы. В параграфе 1.3 мы определим прямоугольные пути, а в параграфе 1.4 — книжные представления.

В параграфах 1.7, 1.8, 1.9 мы расскажем о лежандровых зацеплениях в $\mathbb{R}^3$ со стандартной контактной структурой и об их связи с прямоугольными диаграммами.

В параграфе 1.5 будет рассказано о необходимых понятиях, чтобы вывести из результатов главы **??** гипотезу Джонса в параграфе 3.5, то есть о классах Бирман-Менаско и об их описании с помощью прямоугольных диаграмм.

Параграф 1.6 посвящён трансверсальным зацеплениям и их описанию с помощью кос. Эти понятия будут использованы в параграфе 3.6.

Соглашение 1.1.1. Всюду в настоящей работе, кроме параграфов 1.5, 3.4, 3.5, 3.6 под зацеплением мы понимаем зацепление в $\mathbb{R}^3$ (т.е. компактное 1-мерное подмногообразие), снабженное выборочной ориентацией и раскраской компонент. Это значит, что каждая компонента может быть, а может не быть, ориентирована, и каждой компоненте приписан цвет

— натуральное число. В частности, зацепление может быть неориентировано, а цвет всех компонент одинаковым и равным 1, или, в противоположность этому, зацепление может быть ориентировано, а компоненты занумерованы различными числами.

Говоря об изотопности зацеплений, мы подразумеваем, что при изотопии ориентация и цвета компонент сохраняются. Очевидным образом эта дополнительная структура — выборочная ориентация и раскраска — переносится на рассматриваемые ниже диаграммы зацеплений (прямоугольные диаграммы и фронтальные проекции), и мы не оговариваем это особо, чтобы не усложнять изложение.

Исключение из этих правил в параграфах 1.5, 3.4, 3.5, 3.6 относится только к ориентации — там рассматриваются только ориентированные зацепления.

Раскраска компонент не играет никакой практической роли в тексте, мы лишь отмечаем, что наши утверждения сохраняют свою силу для раскрашенных зацеплений.

1.2. Прямоугольные диаграммы

Определение 1.2.1. *Прямоугольной диаграммой зацепления* называется конечное объединение замкнутых ломаных на плоскости, составленных лишь из горизонтальных и вертикальных звеньев (называемых *рёбрами* диаграммы), никакие два из которых не лежат на одной прямой. Каждая такая диаграмма интерпретируется как плоская диаграмма зацепления, в которой во всех пересечениях рёбер вертикальное ребро считается проходящим сверху. Концы рёбер прямоугольной диаграммы называются её *вершинами*. Число вертикальных рёбер прямоугольной диаграммы R называется её *сложностью* и обозначается через $c(R)$.

Пример прямоугольной диаграммы приведён на рис. 1.1.

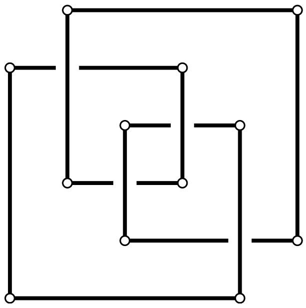


Рис. 1.1. Прямоугольная диаграмма узла «восьмёрка»

Как показано в [28, 30], две прямоугольные диаграммы представляют эквивалентные зацепления тогда и только тогда, когда они связаны конечной последовательностью следующих *элементарных преобразований*:

(i) *циклическая перестановка* вертикальных или горизонтальных рёбер состоит в перемещении одного из крайних (верхнего, нижнего, правого или левого) рёбер в противоположное крайнее положение с соответствующей заменой двух смежных с ним рёбер, см. рис. 1.2;

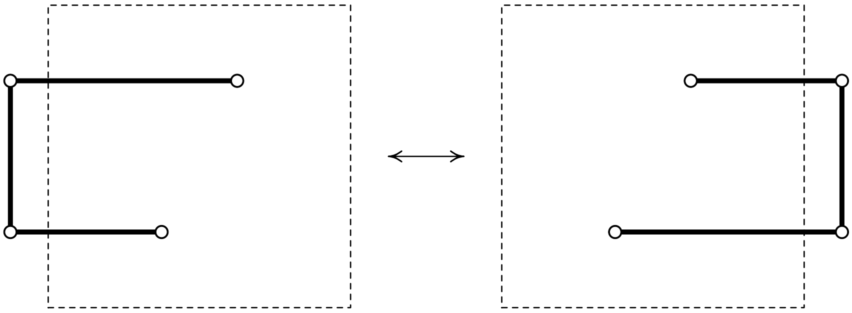


Рис. 1.2. Циклическая перестановка

(ii) *рокировка* вертикальных или горизонтальных рёбер состоит в перестановке двух соседних параллельных рёбер при условии, что пары

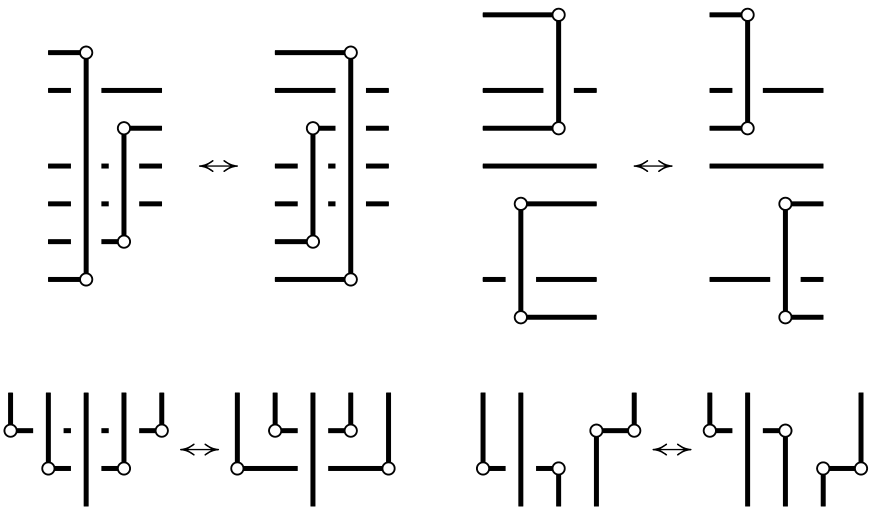


Рис. 1.3. Рокировки

концов этих рёбер после проекции на прямую соответствующего направления не имеют общих точек и не перемежаются. Соседними считаются такие параллельные рёбра, что в полосе между содержащими их прямыми нет вершин диаграммы, см. рис. 1.3;

(iii) *стабилизация* состоит в замене одной из вершин на три новых, которые вместе с ней образуют набор вершин маленького квадрата, добавлении двух коротких рёбер, являющихся сторонами этого квадрата, и соответствующее удлинение или укорачивание рёбер, входивших в удаленную вершину; обратная операция называется *дестабилизацией* (рис. 1.4).

Мы будем различать два типа стабилизаций и дестабилизаций.

Определение 1.2.2. Если два коротких ребра, образующихся в результате стабилизации, направлены из их общего конца вниз и влево или вверх и вправо, эта стабилизация имеет *тип I*, а если вниз и вправо или вверх и влево — *тип II*, см. рис. 1.5. При этом не имеет значения,

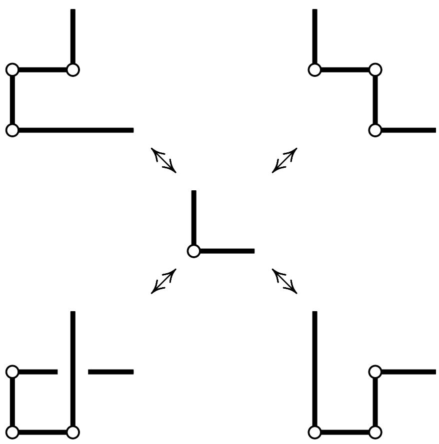


Рис. 1.4. Стабилизации и дестабилизации («длинные» рёбра могут быть направлены и в другие стороны, что дает еще 12 аналогичных картинок)

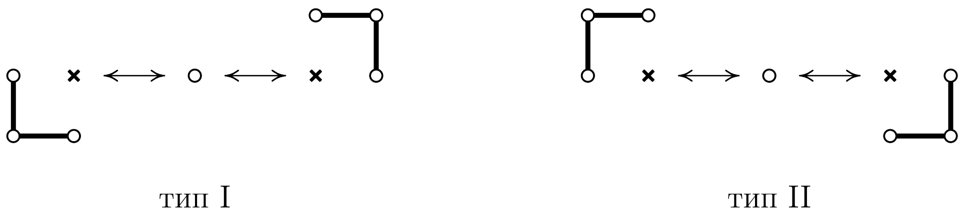


Рис. 1.5. Типы стабилизаций и дестабилизаций

куда направлены рёбра, выходящие из вершины, в которой происходит стабилизация.

Тип дестабилизации определяется типом обратной к ней стабилизации.

Элементарным упрощением прямоугольной диаграммы называется последовательность элементарных преобразований, в которой последнее является дестабилизацией, а все предшествующие — циклическими перестановками и рокировками. *Тип элементарного упрощения* определяется типом входящей в него дестабилизации.

Центральный результат данной работы в комбинаторных терминах звучит следующим образом.

Теорема (3.2.4). *Пусть прямоугольная диаграмма R допускает k последовательных элементарных упрощений $R \mapsto R'_1 \mapsto R'_2 \mapsto \ldots \mapsto R'_k$ типа I, а также ℓ последовательных элементарных упрощений $R \mapsto R''_1 \mapsto \ldots \mapsto R''_\ell$ типа II.*

Тогда диаграмма R'_k допускает ℓ последовательных упрощений типа II, причем полученная в результате диаграмма связана с диаграммой R''_ℓ последовательностью циклических перестановок, рокировок и стабилизаций/дестабилизаций типа I.

Аналогично, диаграмма R''_ℓ допускает k последовательных упрощений типа I, причем полученная в результате диаграмма связана с диаграммой R'_k последовательностью циклических перестановок, рокировок и стабилизаций/дестабилизаций типа II.

Это утверждение будет доказано в главе **??** и параграфе 3.2.

А сейчас докажем следующие две леммы, которые пригодятся нам в главе 3.

Лемма 1.2.3. *Пусть $R_0 \mapsto R_1 \mapsto \ldots \mapsto R_m$ — произвольная последовательность элементарных преобразований, в которой всего имеется k стабилизаций и ℓ дестабилизаций. Тогда существует другая последовательность элементарных преобразований $R_0 \mapsto R'_1 \mapsto \ldots \mapsto R'_n = R_m$, в которой первые k операций — стабилизации, последние ℓ операций — дестабилизации, а между первыми k и последними ℓ операциями нет стабилизаций и дестабилизаций. При этом в новой последовательности количество стабилизаций и дестабилизаций каждого фиксированного типа то же, что и в исходной.*

Доказательство. Это утверждение доказывается индукцией по набору

(k, ℓ, p, s), где k — число стабилизаций, ℓ — число дестабилизаций, $(p + 1)$ — номер первой стабилизации (если такой нет, полагаем $p = 0$), а $(m - s)$ — номер последней дестабилизации (если такой нет, полагаем $s = 0$). Четверки чисел (k, ℓ, p, s) упорядочиваются лексикографически.

База индукции $k = \ell = 0$ очевидна. Для индукционного перехода достаточно доказать наше утверждение при $m = 2$. Действительно, если первая операция стабилизация, то, убирая её, мы получаем последовательность с меньшим k и тем же ℓ, справедливость утверждения для которой влечет его для исходной последовательности. Аналогично, если последняя операция дестабилизация, то убирая её, получаем то же k, но меньшее ℓ. Если ни то, ни другое не имеет место, но $k > 0$, то, применяя утверждение для подпоследовательности, состоящей из p-й и $(p + 1)$-й операций, получаем последовательность с теми же k, ℓ, но меньшим p. Наконец, если $k = 0$, $\ell > 0$, аналогично применяем утверждение к подпоследовательности из $(m - s)$-й и $(m - s + 1)$-й операций.

Таким образом, остается проверить наше утверждение для последовательности из двух операций в двух случаях: 1) вторая операция стабилизация, а первая — не стабилизация; 2) первая операция дестабилизация, а вторая — не дестабилизация. Эти случаи получаются друг из друга обращением всей последовательности, поэтому достаточно рассмотреть один из них. Рис. 1.6 демонстрирует, как переставить стабилизацию в начало последовательности, если перед ней происходит циклическая перестановка, рокировка или дестабилизация, в некоторых из тех случаев, когда эти две операции нельзя просто переставить. Остальные случаи аналогичны и мы оставляем их разбор читателю. $\square$

Лемма 1.2.4. *Пусть $R \mapsto R'$ — стабилизация, P — любая вершина той же компоненты диаграммы R, на которой происходит эта стабилиза-*

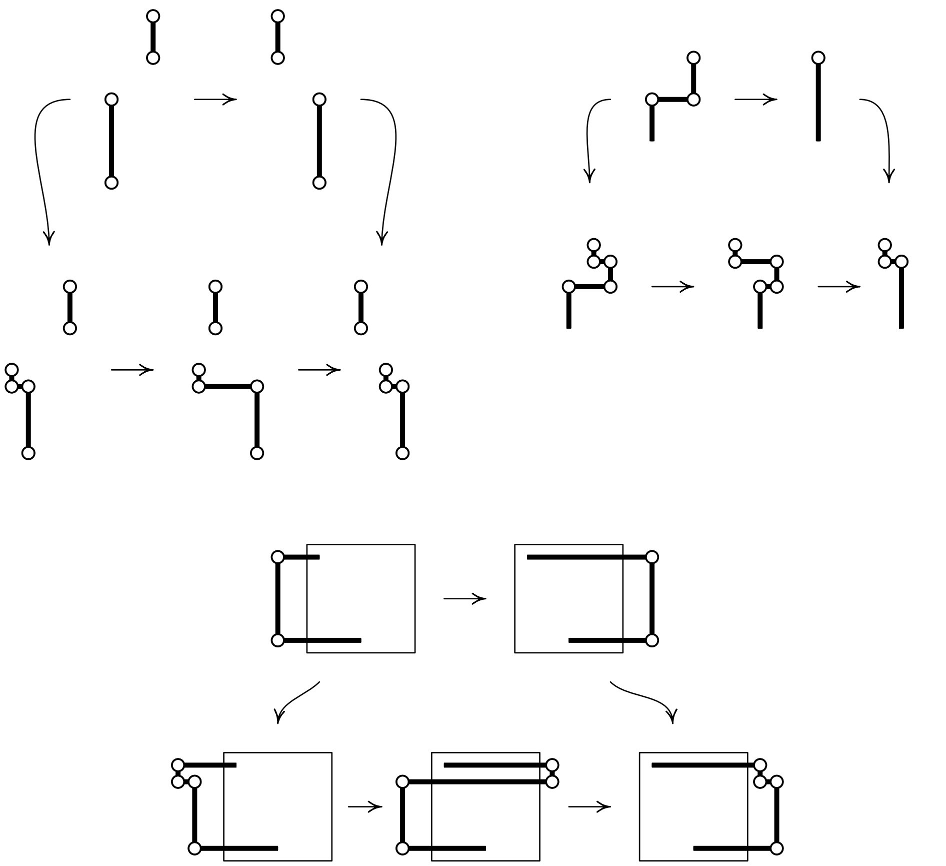


Рис. 1.6. Перемещение стабилизации в начало последовательности

ция. Тогда можно сделать стабилизацию $R \mapsto R''$ того же типа, что и $R \mapsto R'$ в окрестности вершины P так, что диаграммы R' и R'' будут связаны последовательностью рокировок и циклических перестановок.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда вершина P соединена ребром с той, в окрестности которой происходит стабилизация $R \mapsto R'$. Пусть это ребро e. В результате стабилизации $R \mapsto R'$ образуются два коротких рёбра. То из них, которое перпендикулярно e, можно рокировками и, возможно, одной циклической перестановкой, переместить к вершине P. Для полученной таким образом диаграммы R'' преобразование $R \mapsto R''$ будет стабилизацией, см. рис. 1.7. $\square$

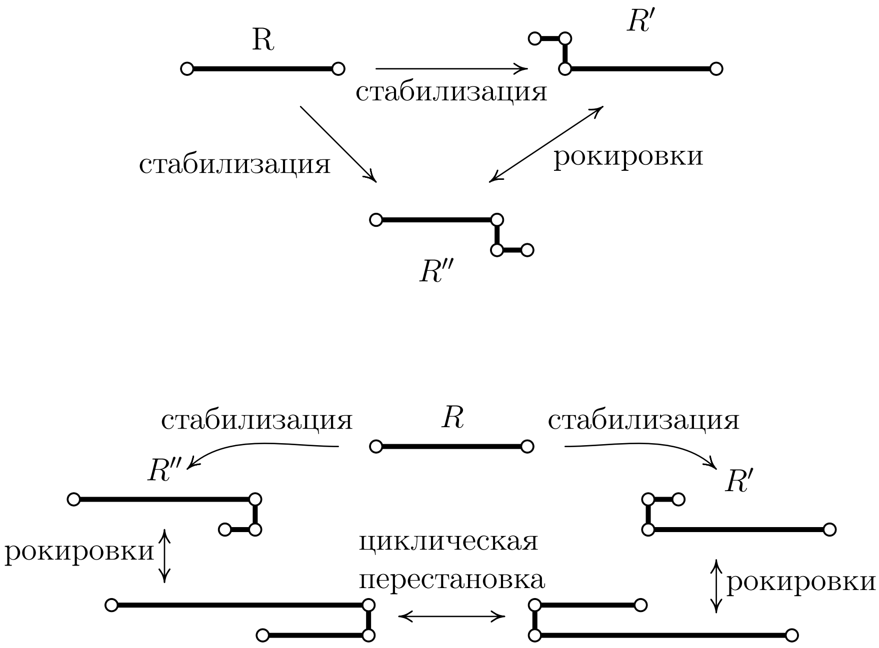


Рис. 1.7. Перемещение места стабилизации в окрестность другой вершины

1.3. Прямоугольные пути

Соглашение 1.3.1. Поскольку прямоугольная диаграмма однозначно определяется набором своих вершин, далее мы не различаем саму диаграмму и множество её вершин, используя для них одно и то же обозначение. Таким образом, конечное множество точек на плоскости рассматривается как прямоугольная диаграмма, если каждая вертикальная или горизонтальная прямая либо не содержит точек из этого множества, либо содержит ровно две.

Определение 1.3.2. *Прямоугольным путем* мы назовем множество точек на плоскости, которое можно превратить в прямоугольную диаграмму узла добавлением одной точки или двух точек, расположенных на одной вертикальной или горизонтальной прямой. Дополнительно, одна-единственная точка также будет называться прямоугольным путем.

Горизонтальные и вертикальные отрезки, соединяющие точки прямоугольного пути, будут называться *рёбрами*, а сами точки — *вершинами* прямоугольного пути. Горизонтальные и вертикальные прямые, на которых оказалось по одной вершине прямоугольного пути, мы будем называть его *концами*, а сами вершины — *конечными*. Прочие вершины прямоугольного пути называются *внутренними*.

Примеры прямоугольных путей показаны на рис. 1.8, где для наглядности нарисованы также рёбра и концы этих путей.

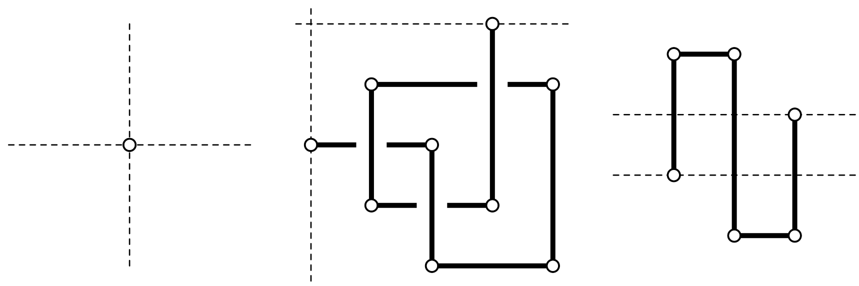


Рис. 1.8. Примеры прямоугольных путей. Сплошными линиями показаны рёбра, пунктирными — концы путей

Соглашение 1.3.3. При обсуждении совокупности из нескольких прямоугольных диаграмм зацеплений или прямоугольных путей мы будем предполагать, что они находятся в общем положении, а именно, что никакие две вершины не лежат на одной вертикальной или горизонтальной прямой, если наложенные на конструкцию ограничения не обязывают их к этому.

Например, в этих соглашениях верно следующее высказывание: два различных прямоугольных пути с общими концами образуют прямоугольную диаграмму узла.

Тот факт, что ребро прямоугольной диаграммы или прямоугольного пути попало на конец прямоугольного пути, будем выражать противоположным (но лингвистически более привычным) образом, т.е. будем говорить, что конец пути лежит на ребре. При этом соответствующая конечная вершина пути вовсе не обязана лежать на этом ребре, а может лежать на его продолжении, см. рис. 1.9. Наша терминология оправды-

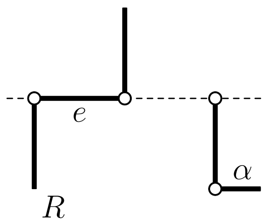


Рис. 1.9. Конец пути α лежит на ребре e диаграммы R

вается также следующей конструкцией.

Для конечного подмножества $X \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $\widetilde{X}$ следующее объединение отрезков в $\mathbb{R}^3$:

$$\widetilde{X} = \bigcup_{(i,j)\in X} [(2i, 0, 1), (0, 2j, -1)].$$

Ломаная $\widetilde{X}$ характеризуется тем, что состоит из всех отрезков с концами на прямых $\ell_1 = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{1\}$ и $\ell_2 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{-1\}$, прокалывающих плоскость $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ в точках из X, см. рис. 1.10.

Нетрудно видеть, что, если R — прямоугольная диаграмма, то $\widetilde{R}$ является зацеплением в $\mathbb{R}^3$, изотопным тому, которое определяет диаграмма R. Действительно, пересечение ломаной $\widetilde{R}$ с верхним полупространством $\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$ состоит из кусочно линейных дуг вида $[(i, j_1, 0), (2i, 0, 1)] \cup [(2i, 0, 1), (i, j_2, 0)]$, для которых $[(i, j_1), (i, j_2)]$ является вертикальным ребром диаграммы R. Это семейство дуг изотопно в $\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$ объедине-

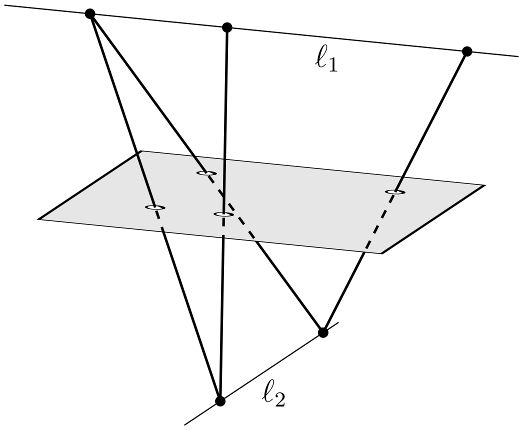


Рис. 1.10. Прямоугольный путь X и его трехмерная реализация $\widetilde{X}$ ломаной линией

нию вертикальных рёбер диаграммы R с условием фиксирования концов дуг при изотопии.

Аналогично, пересечение ломаной $\widetilde{R}$ с нижним полупространством $\mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0]$ состоит из дуг, изотопных в этом полупространстве объединению горизонтальных рёбер диаграммы R.

Для прямоугольного пути α, концы которого лежат на рёбрах прямоугольной диаграммы R, концы ломаной $\widetilde{\alpha}$ лежат на $\widetilde{R}$. Кроме того, при действии соглашения 1.3.3 внутренность ломаной дуги $\widetilde{\alpha}$ не пересекается с $\widetilde{R}$. Если два прямоугольных пути α и β имеют общие концы, то ломаные $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ имеют общие конечные точки.

1.4. Книжные представления

Зафиксируем в пространстве $\mathbb{R}^3$ стандартную цилиндрическую систему координат (ρ, θ, z), ось этой системы будем обозначать через ℓ и называть *переплетом*, а полуплоскости вида $\{\theta = \mathrm{const}\}$ — *страницами*.

Страница $\{\theta = \theta_0\}$ будет обозначаться через $\mathcal{P}_{\theta_0}$.

Определение 1.4.1. *Книжным представлением* топологического типа зацеплений $\mathcal{L}$ называется зацепление $L \in \mathcal{L}$, составленное из конечного числа гладких дуг с концами на прямой ℓ, каждая из которых целиком лежит в отдельной странице и не пересекает переплета в своих внутренних точках. Точки пересечения $L \cap \ell$ называются *вершинами* книжного представления L.

Как отмечалось в [30], книжные представления с комбинаторной точки зрения суть то же самое, что и прямоугольные диаграммы. А именно, книжному представлению L отвечает прямоугольная диаграмма R, вершины которой — это все точки вида $(\theta_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, для которых зацепление L имеет дугу в странице $\mathcal{P}_{\theta_0}$ с концом $z = z_0$, см. рис. 1.11.

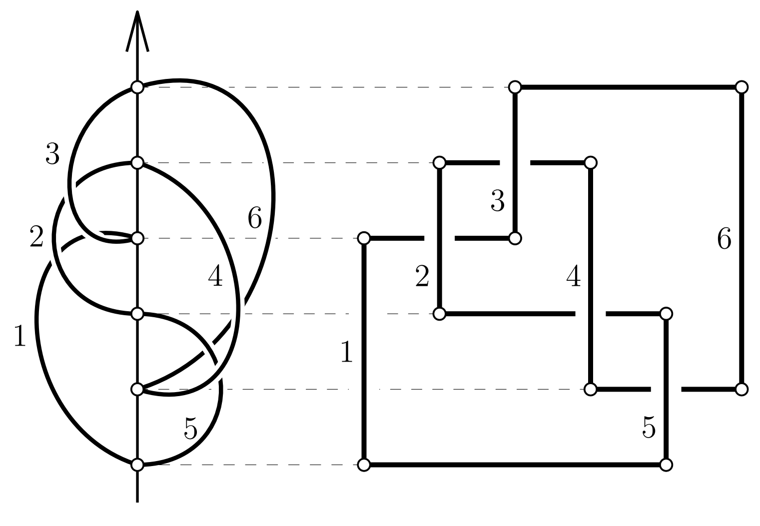


Рис. 1.11. Книжное представление и соответствующая прямоугольная диаграмма

Обратное построение — по прямоугольной диаграмме книжного представления — очевидно с одной оговоркой: прямоугольная диаграмма должна находиться в полосе $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, что не является ограничением для её комбинаторики, и мы предполагаем это в дальнейшем. Книжное представление зацепления, соответствующее прямоугольной диграмме R, будем обозначать через $\widehat{R}$.

Для прямоугольного пути γ соответствующий *книжный путь* $\widehat{\gamma}$ определяется аналогично при условии, что концы пути горизонтальны. А именно, каждому вертикальному ребру $[(\theta_0, z_1), (\theta_0, z_2)]$ сопоставляется дуга в странице $\mathcal{P}_{\theta_0}$ с концами $z = z_1$ и $z = z_2$, см. рис. 1.12. Только

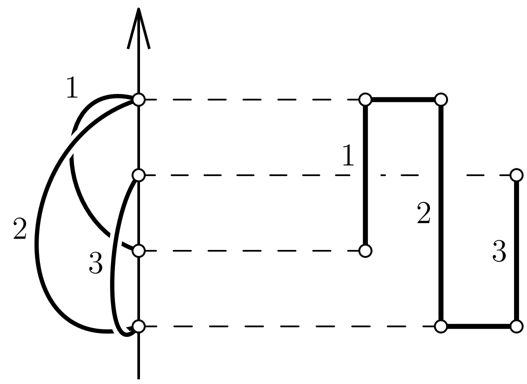


Рис. 1.12. Книжный путь и соответствующий прямоугольный путь

такие прямоугольные пути мы и рассматриваем в дальнейшем. При этом *длиной* пути γ будем называть число вертикальных рёбер в нем, что совпадает с числом страниц, которые занимает путь $\widehat{\gamma}$.

Заметим, что геометрическая реализация $\widehat{X}$ прямоугольной диаграммы или прямоугольного пути X несущественно отличается от конструкции $\widetilde{X}$ из параграфа 1.3. Чтобы получить $\widehat{X}$ из $\widetilde{X}$ нужно только назначить прямую ℓ_2 переплетом, сгладить дуги и повернуть вокруг переплета, сохраняя их циклический порядок.

1.5. Классы Бирман-Менаско

По известной теореме Дж.Александера [5] любое ориентированное зацепление можно представить замкнутой косой, см. пример на рис. 1.13. Другая известная теорема, принадлежащая А.Маркову [11, 81], утвер-

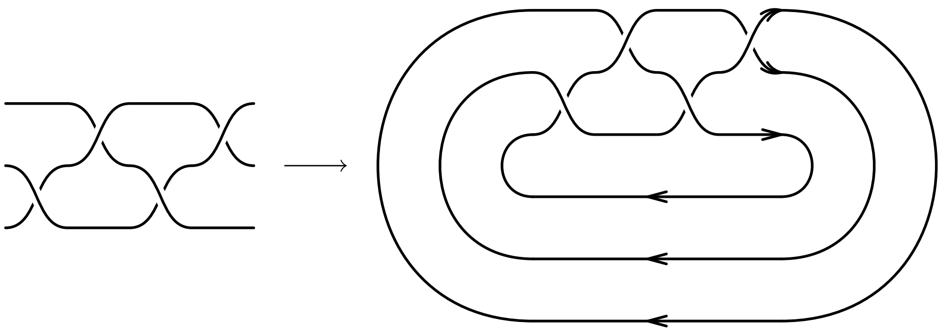


Рис. 1.13. Замыкание косы $(\sigma_1\sigma_2^{-1})^2$

ждает, что замыкания двух кос эквивалентны как ориентированные зацепления тогда и только тогда, когда они могут быть получены друг из друга преобразованиями, называемыми теперь *движениями Маркова*. Эти преобразования включают обычное групповое сопряжение, *стабилизации* и *дестабилизации* (см. рис. 1.14), которые на алгебраическом языке описываются следующим образом.

Мы обозначим группу кос на n нитях через B_n, а стандартные артиновские образующие через $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$. Вложение $\iota_n : B_n \to B_{n+1}$ состоит в добавлении свободной $(n+1)$-й нити и в терминах образующих выглядит тождественно: $\sigma_i \mapsto \sigma_i$, $i = 1, \ldots, n-1$.

В этих обозначениях стабилизация косы $\beta \in B_n$ определяется как преобразование

$$\beta \mapsto \iota_n(\beta)\sigma_n^{\pm 1},$$

причем стабилизация *положительна* или *отрицательна* в зависимости

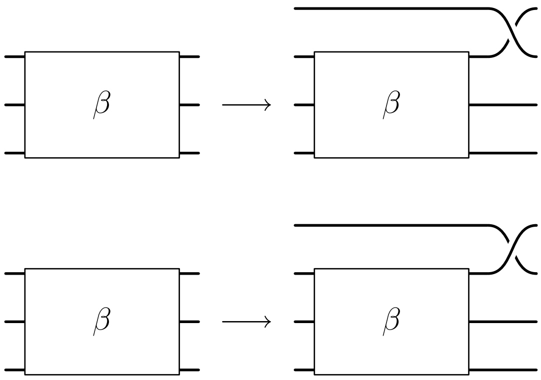


Рис. 1.14. Стабилизации косы β

от того, какая степень образующей σ_n используется. Дестабилизация (положительная или отрицательная) определяется как обратная операция.

В работе [17] для кос доказана «теорема о монотонном упрощении», утверждающая, что из косы, замыкание которой представляет собой тривиальный узел, можно получить тривиальную косу на одной нити с помощью операций, которые включают в себя сопряжения, дестабилизации и введенные Дж.Бирман и У.Менаско *преобразования обмена* (exchange moves), которые на алгебраическом языке выглядят следующим образом:

$$\beta_1\sigma_n\beta_2\sigma_n^{-1} \mapsto \beta_1\sigma_n^{-1}\beta_2\sigma_n, \quad \text{где} \quad \beta_1, \beta_2 \in \iota_n(B_n),$$

см. рис. 1.15. Обратная операция очевидным образом раскладывается

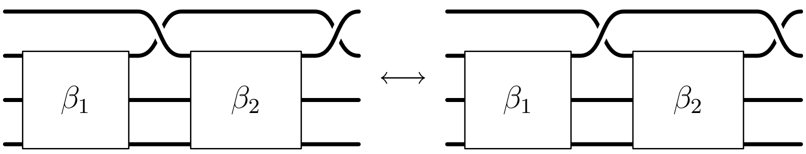


Рис. 1.15. Преобразование обмена

в композицию сопряжений и операции обмена. (Строго говоря, в работе [17] использовался больший набор преобразований, которые легко сводятся к указанным, но это сведение было замечено авторами работы [17] позднее.)

Определение 1.5.1. Для косы $\beta \in B_n$ её *классом Бирман–Менаско* мы будем называть множество всех кос $\beta' \in B_n$, которые могут быть получены из β последовательностью сопряжений и операций обмена. Этот класс будет обозначаться через $[\beta]_{\mathrm{BM}}$, а множество всех классов Бирман–Менаско в группе B_n через BM_n.

Будем говорить, что класс $\mathcal{B} \in \mathrm{BM}_n$ *допускает положительную (отрицательную) дестабилизацию* $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$, если найдётся положительная (соответственно, отрицательная) дестабилизация $\beta \mapsto \beta'$ с $\beta \in \mathcal{B}$, $\beta' \in \mathcal{B}'$. В этом случае мы говорим также, что $\mathcal{B}$ получается из $\mathcal{B}'$ положительной (соответственно, отрицательной) *стабилизацией*.

Теорема (3.4.1)**.** *Пусть классы Бирман–Менаско $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ задают эквивалентные ориентированные зацепления. Тогда найдётся класс Бирман–Менаско $\mathcal{B}$, который может быть получен из $\mathcal{B}_1$ последовательностью только положительных, а из $\mathcal{B}_2$ только отрицательных стабилизаций и дестабилизаций.*

То же верно, если классы Бирман–Менаско заменить на классы сопряженности кос.

Доказательство мы приведём в главе 3. Теперь напомним связь между прямоугольными диаграммами и косами.

Всюду в этом параграфе, а также в параграфах 3.4, 3.5, 3.6 мы будем иметь дело с *ориентированными* прямоугольными диаграммами зацеплений. Это означает, что их рёбра наделены согласованной ориентацией, а именно, так, чтобы получилась диаграмма ориентированного зацепления. Ориентацию удобно указывать с помощью раскраски вершин в два цвета — вертикальные рёбра направлены от черной вершины к белой, а горизонтальные наоборот. Прямоугольные диаграммы с такой раскраской вершин называются в литературе также *решётчатыми диаграммами* (grid diagrams).

Для ориентированных прямоугольных диаграмм имеет смысл различать не два вида стабилизаций, а четыре, которые мы будем называть *ориентированными типами*. Каждый из типов I и II разбивается на два ориентированных типа: $\overrightarrow{\mathrm{I}}$, $\overleftarrow{\mathrm{I}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{II}}$, $\overleftarrow{\mathrm{II}}$ соответственно, где стрелка указывает направление короткого горизонтального ребра, которое образуется в результате стабилизации. В терминах раскрашенных вершин все четыре типа проиллюстрированы на рис. 1.16.

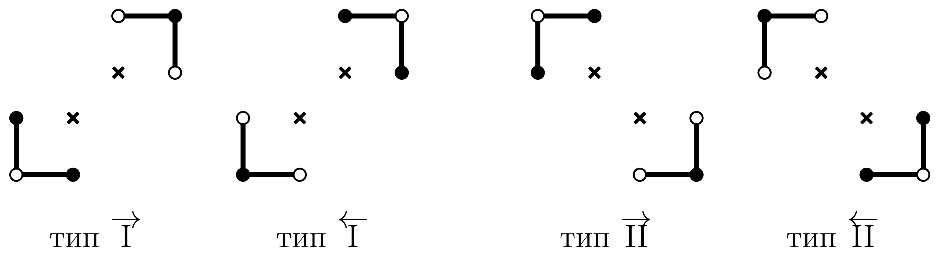


Рис. 1.16. Ориентированные типы (де)стабилизаций

Каждой ориентированной прямоугольной диаграмме R сопоставим косу β_R по следующему правилу (см. [28, 30, 87]). Пусть все вершины R находятся внутри области $[0,1]\times\mathbb{R}$. Каждое горизонтальное ребро $[x_1,x_2]\times y_0$, направленное справа налево, заменим на пару отрезков $[0,x_1]\times y_0$, $[x_2,1]\times y_0$. Во всех местах пересечения горизонтальных и вертикальных отрезков вертикальные будем считать проходящими сверху. Теперь наклоним вертикальные рёбра, сгладим углы и получим диаграмму косы β_R, см. рис. 1.17.

Предложение 1.5.2. *Любую косу можно представить в виде β_R для некоторой ориентированной прямоугольной диаграммы R.*

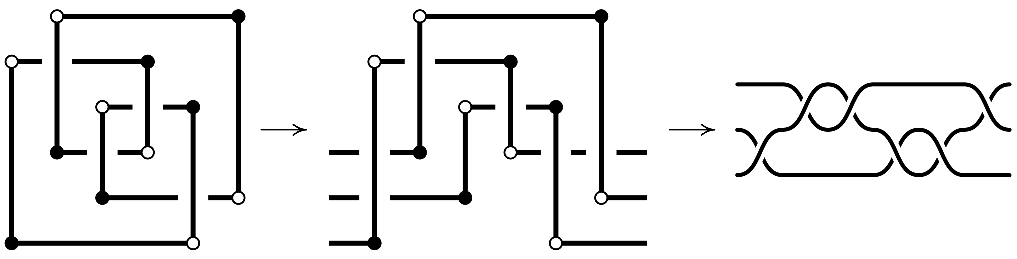


Рис. 1.17. Коса, сопоставленная прямоугольной диаграмме

Для любой ориентированной прямоугольной диаграммы R ориентированное зацепление, задаваемые этой диаграммой, эквивалентно замыканию косы β_R.

Пусть R и R' — ориентированные прямоугольные диаграммы. Тогда классы Бирман–Менаско кос β_R и $\beta_{R'}$ совпадают тогда и только тогда, когда диаграммы R и R' получаются друг из друга последовательностью элементарных преобразований, не включающих стабилизации и дестабилизации типов $\overleftarrow{\mathrm{I}}$ и $\overleftarrow{\mathrm{II}}$.

Доказательство этого утверждения см. в [87].

Нетрудно видеть, что $\overleftarrow{\mathrm{I}}$-стабилизации диаграммы R соответствует положительная стабилизация класса $[\beta_R]_{\mathrm{BM}}$, а $\overleftarrow{\mathrm{II}}$-стабилизации — отрицательная. Поскольку $\overrightarrow{\mathrm{I}}$- и $\overrightarrow{\mathrm{II}}$-стабилизации не меняют класса $[\beta_R]_{\mathrm{BM}}$, мы видим, что диаграммы, полученные из ориентированной прямоугольной диаграммой R стабилизациями разных ориентированных типов не могут быть получены друг из друга рокировками и циклическими перестановками.

1.6. Трансверсальные зацепления

Определение 1.6.1. *Трансверсальным зацеплением* называется ориентированное зацепление, ограничение на которое стандартной контактной формы $\omega = x\,dy + dz$ всюду принимает положительное значение на касательном векторе, задающем ориентацию зацепления.

Трансверсальные зацепления называются *трансверсально эквивалентными*, если они переводятся друг в друга изотопией в классе трансверсальных зацеплений.

Каждой косе $\beta \in B_n$ каноническим образом сопоставляется некоторое трансверсальное зацепление с точностью до трансверсальной эквивалентности следующим образом. Замыкание L косы β нужно расположить в пространстве так, чтобы оно пересекало каждую страницу $\mathcal{P}_t$ (см. параграф 1.4) трансверсально n раз, причем ориентация зацепления L соответствовала направлению возрастания угловой координаты θ. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ форма $\varphi_\varepsilon^*\omega$, где φ_ε —диффеоморфизм $(x, y, z) \mapsto (2x, y, \varepsilon z - xy)$, является малым возмущением формы $\rho\,d\theta = x\,dy - y\,dx$, поэтому зацепление $\varphi_\varepsilon(L)$ будет трансверсальным. Построенное таким образом трансверсальное зацепление будем обозначать через T_β.

Теорема 1.6.2. *Каждое трансверсальное зацепление трансверсально эквивалентно некоторму зацеплению вида T_β.*

Для двух кос β_1 и β_2 зацепления T_{β_1} и T_{β_2} трансверсально эквивалентны тогда и только тогда, когда косы β_1 и β_2 получаются друг из друга последовательностью сопряжений и положительных стабилизаций и дестабилизаций.

Первая часть этой теоремы доказана Д.Беннекеном [9], а вторая С.Оревковым совместно с В.Шевчишиным [90] и независимо Н.Ринкл [115].

Коэффициентом самозацепления $\mathrm{sl}(L)$ трансверсального зацепления L называется число $\mathrm{w}(\beta) - n$, где $\beta \in B_n$ — произвольная коса, для которой L трансверсально эквивалентно T_β. Как видно из теоремы 1.6.2, это число определено корректно, так как оно не меняется при положительных стабилизациях.

Для каждой косы β будем обозначать через $[\beta]_{\mathrm{t}}$ множество всех кос β', для которых зацепления $T_{\beta'}$ и T_β трансверсально эквивалентны. Мы будем называть $[\beta]_{\mathrm{t}}$ *трансверсальным классом* косы β. Как следует из (3.1), каждый класс Бирман–Менаско является подмножеством некоторого трансверсального класса.

В главе 3 будут доказаны два следующих утверждения.

Теорема (3.6.1)**.** *Пусть классы Бирман–Менаско $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ содержатся в одном трансверсальном классе и $\mathcal{B}_1$ допускает отрицательную дестабилизацию $\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_1'$. Тогда $\mathcal{B}_2$ также допускает отрицательную дестабилизацию $\mathcal{B}_2 \mapsto \mathcal{B}_2'$, причем такую, что $\mathcal{B}_1'$ и $\mathcal{B}_2'$ также содержатся в одном трансверсальном классе.*

Следствие (3.6.2)**.** *Пусть коса β имеет наименьшее число нитей среди всех кос, представляющих данный топологический тип ориентированных зацеплений. Тогда трансверсальное зацепление T_β имеет наибольший возможный коэффициент самозацепления среди всех трансверсальных зацеплений, имеющих тот же топологический тип.*

1.7. Фронтальные проекции лежандровых зацеплений

Определение 1.7.1. Зацепление L в $\mathbb{R}^3$ называется *лежандровым*, если оно представляет собой гладкую кривую, которая всюду касается распределения плоскостей, задаваемого 1-формой

$$\omega = x\,dy + dz$$

и называемого *стандартной контактной структурой.* Лежандровы зацепления считаются эквивалентными, если они переводятся друг в друга изотопией в классе лежандровых зацеплений.

Для изображения лежандровых зацеплений удобнее всего пользоваться их проекциями на плоскость Oyz, называемых *фронтальными.* Фронтальная проекция представляет собой кусочно гладкую кривую, особенности которой имеют вид точек возврата и которая нигде не имеет вертикального направления (см. рис. 1.18). Для удобства читателя мы

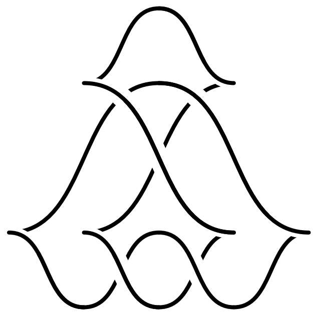


Рис. 1.18. Фронтальная проекция лежандрова зацепления

помечаем на самопересечениях и в точках возврата фронтальной проекции, какая ветвь проходит выше (т.е. координата x больше), а какая ниже. По фронтальной проекции общего положения соответствующая лежандрова кривая в $\mathbb{R}^3$ определяется однозначно, так как координата x каждой точки кривой находится из условия $x = -dz/dy$.

На рисунке 1.19 схематически показано (с точностью до центральной симметрии), какие преобразования фронтальных проекций порождают эквивалентность лежандровых зацеплений, см. [105].

Некоторые преобразования фронтальных проекций, сохраняющие топологический тип соответствующего зацепления, запрещены в теории лежандровых узлов, так как меняют лежандров тип. Примеры таких

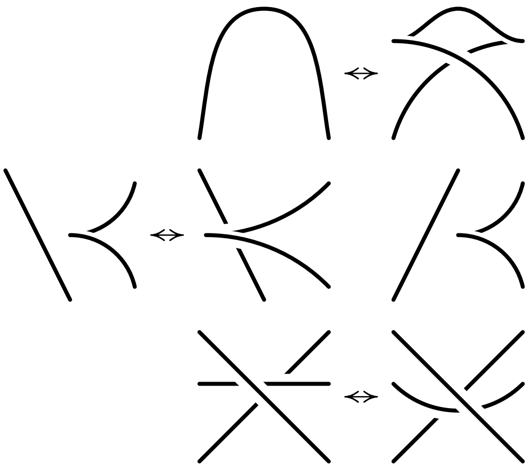


Рис. 1.19. Преобразования фронтальной проекции

преобразований показаны на рис. 1.20.

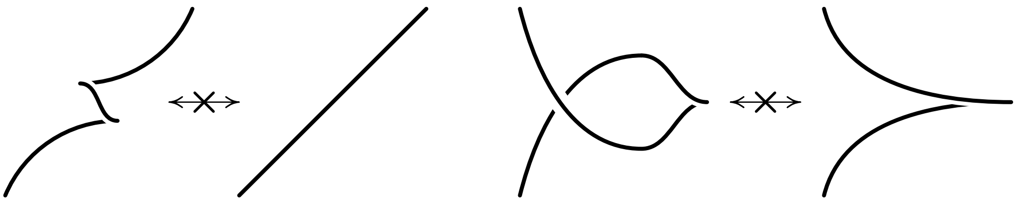


Рис. 1.20. Запрещённые преобразования фронтальной проекции

Кусочно гладкое зацепление, составленное из конечного числа дуг, которые всюду касаются контактной структуры, можно сгладить в точках излома так, что комбинаторика его проекции на плоскость Oyz (включающая информацию о точках возврата) не изменится. Поэтому такие кусочно гладкие зацепления также однозначно задают некоторый лежандров тип, и о них самих можно говорить как о лежандровых зацеплениях.

1.8. Задание лежандровых зацеплений прямоугольными диаграммами

Упомянутая во Введении к работе связь между лежандровыми зацеплениями и прямоугольными диаграммами состоит в следующем.

Пусть R — прямоугольная диаграмма. Повернем её на угол $\pi/4$ против часовой стрелки, сгладим углы, торчащие вверх и вниз, а углы, торчащие вправо и влево, заменим точками возврата. Пример показан на рис. 1.21.

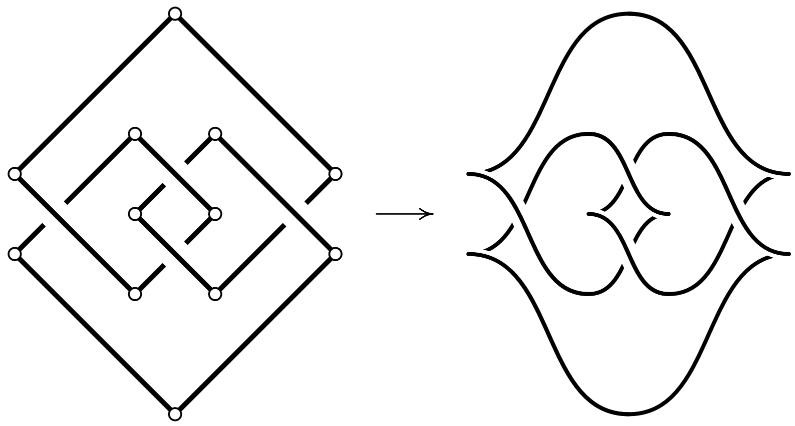


Рис. 1.21. Фронтальная проекция лежандрова зацепления, соответствующая прямоугольной диаграмме

Задаваемое полученной фронтальной проекцией лежандрово зацепление будем обозначать через L_R.

Теорема 1.8.1 ([93], раздел 4)**.** *Любое лежандрово зацепление лежандрово эквивалентно некоторому зацеплению вида* L_R*.*

Лежандровы зацепления L_R *и* $L_{R'}$ *лежандрово эквивалентны тогда и только тогда, когда диаграммы* R *и* R' *связаны последовательностью элементарных преобразований, не включающих стабилизации и дестабилизации типа II.*

Под *лежандровым типом* прямоугольной диаграммы мы будем понимать лежандров тип соответствующего лежандрова зацепления L_R. Из теоремы 1.8.1 следует, что лежандров тип прямоугольной диаграммы — это её класс эквивалентности относительно циклических перестановок, рокировок и стабилизаций/дестабилизаций типа I.

1.9. Число Торстона–Беннекена

Заметим, что вектор $\mathbf{e}_z = (0,0,1)$ нигде не касается контактной структуры, поэтому достаточно малый сдвиг любого лежандрова зацепления L вдоль этого вектора даст зацепление L^+, которое не пересекается с L. Зацепление, полученное малым сдвигом в противоположную сторону, будем обозначать через L^-.

Число Торстона–Беннекена лежандрова зацепления L, обозначаемое через $\operatorname{tb}(L)$, определяется как коэффициент зацепления $\operatorname{lk}(L, L^+) = \operatorname{lk}(L, L^-)$. Это определение подразумевает, что зацепление L ориентировано, при этом одновременное обращение ориентации всех компонент не меняет числа $\operatorname{tb}(L)$. В частности, если L — узел, то от его ориентации это число не зависит.

Число Торстона–Беннекена является инвариантом лежандровой изотопии и вычисляется по следующей простой формуле

$$\operatorname{tb}(L) = w(F) - \frac{1}{2}c(F), \tag{1.1}$$

где $w(F)$ — алгебраическое число самопересечений (writhe number), а $c(F)$ — число точек возврата фронтальной проекции F, представляющей зацепление L.

Прямоугольную диаграмму, полученную поворотом прямоугольной диаграммы R на угол $\pi/2$ по часовой стрелке (и одновременным обращением прохождений сверху и снизу во всех перекрёстках), будем обозначать через $R^{\curvearrowright}$.

Заметим, что если $R_1 \mapsto R_2$ — стабилизация типа I, то $R_1^{\curvearrowright} \mapsto R_2^{\curvearrowright}$ — стабилизация типа II, и наоборот.

Для фронтальных проекций F и $F^{\curvearrowright}$, соответствующих прямоугольным диаграммам R и $R^{\curvearrowright}$, выполнено $w(F) = -w(F^{\curvearrowright})$, а общее число точек возврата на этих фронтальных проекциях равно числу вершин диаграммы R. Отсюда вытекает следующее равенство:

$$-c(R) = \mathrm{tb}(L_R) + \mathrm{tb}(L_{R^{\curvearrowright}}). \tag{1.2}$$

Из формулы (1.1) видно, что запрещенные операции, показанные на рис. 1.20, изменяют число Торстона–Беннекена на единицу. Эти операции для фронтальных проекций лежандровых зацеплений также называются *стабилизациями* и *дестабилизациями*, где первые уменьшают число Торстона–Беннекена, а вторые увеличивают.

Стабилизации, в отличие от дестабилизаций, применимы к любой фронтальной проекции. Если в классе лежандровой эквивалентности данного лежандрова зацепления L имеется представитель, фронтальная проекция которого допускает дестабилизацию, то мы будем говорить, что допускает дестабилизацию соответствующее лежандрово зацепление L.

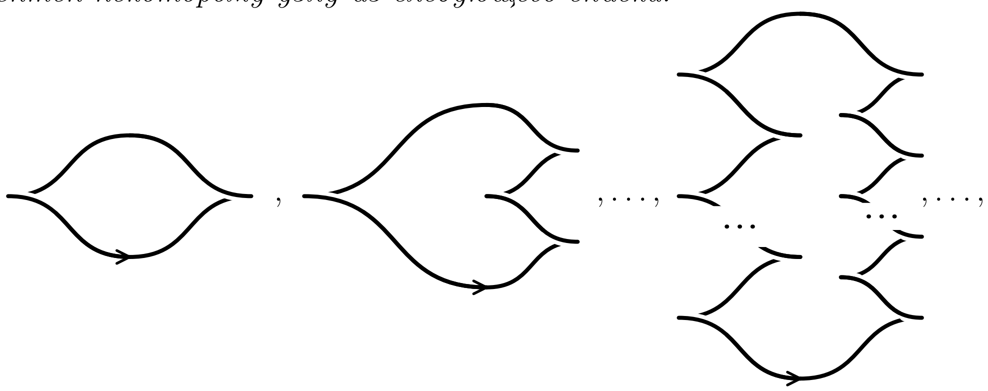
Очевидно, что стабилизациям и дестабилизациям типа II прямоугольной диаграммы R соответствуют стабилизации и дестабилизации фронтальной проекции соответствующего лежандрова зацепления L_R.

Следующий результат принадлежит Т. Эрландссону [38] (см. также теорему 2 в [9]).

Теорема 1.9.1. *Число Торстона–Беннекена лежандрова узла, имеющего тривиальный топологический тип, всегда отрицательно.*

Я.Элиашберг и М.Фрейзер [33, 34] показали, что имеет место более сильное утверждение, частный случай которого может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1.9.2. *Пусть K — ориентированный лежандров узел, имеющий тривиальный топологический тип. Тогда он лежандрово эквивалентен некоторому узлу из следующего списка:*



в котором число левых и число правых «зигзагов» независимо пробегают множество всех целых неотрицательных чисел.

Глава 2

Шунт и ключевая лемма

2.1. Введение

Как уже говорилось во Введении, отправной точкой настоящей работы был вопрос о том, когда прямоугольная диаграмма произвольного зацепления допускает упрощение, т.е. уменьшение сложности хотя бы на единицу.

Оказалось, что ответ на поставленный вопрос даётся крайне естественным образом в терминах соответствующих лежандровых зацеплений. А именно, любую лежандрову дестабилизацию $L_R \mapsto L'$ можно реализовать монотонным упрощением диаграммы R с сохранением лежандрова типа зацепления $L_{R^\frown}$, и возможность лежандровой дестабилизации для L_R или $L_{R^\frown}$ является критерием для упрощаемости диаграммы R.

Ключевую роль в доказательстве этого и других утверждений играет введенное ниже понятие шунта. Мы определяем его как на языке прямоугольных диаграмм в параграфе 2.3, так и на лежандровом языке в параграфе 2.2. Это понятие в том или ином виде встречается под тем же именем «bypass» в работах [39, 40, 58].

Идея состоит в том, чтобы представить лежандрову дестабилизацию как замену некоторой дуги, входящей в зацепление, на другую дугу, которая и называется шунтом. При переходе на комбинаторный язык такая замена перестает быть просто дестабилизацией, и даже не обязательно уменьшает сложность диаграммы, но прямоугольную диаграмму вместе с шунтом всегда можно преобразовать так, чтобы сложность самой диаграммы сохранилась, а шунт стал коротким. В этом состоит основное техническое утверждение данной главы и работы в целом. Его доказательству посвящена вторая половина главы, начиная с его плана в параграфе 2.5.

В параграфе 2.4 мы показываем, как сохранить шунт, если диаграмма зацепления претерпевает лежандровы движения.

2.2. Лежандрово описание шунтов

Для доказательства основных результатов нам будет нужна только комбинаторная версия шунтов. Но для того, чтобы определение не выглядело искусственно, мы сначала опишем тот геометрический образ, который за ней стоит.

Определение 2.2.1. Пусть L — лежандрово зацепление. Пару (α, β), состоящую из гладкой простой лежандровой (т.е. всюду касающейся стандартной контактной структуры) дуги $\alpha \in \mathbb{R}^3$ с концами на L и дуги $\beta \subset L$ с теми же концами, мы будем называть *шунтом для* L, если в $\mathbb{R}^3$ найдётся вложенный двумерный диск D со следующими свойствами:

(A0) D является образом при гладком вложении полудиска $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \leqslant 0\}$ в $\mathbb{R}^3$;

(A1) край диска ∂D совпадает с $\alpha \cup \beta$;

(A2) пересечение $D \cap L$ совпадает с β;

(A3) диск D всюду вдоль α касается стандартной контактной структуры.

Обсудим подробнее условие (A3), так как далее нам понадобится заменить его другим, формулируемым в комбинаторных терминах. Предположим, что мы имеем пару (α, β) и диск D, которые удовлетворяют условиям (A0–A2).

Так как дуги α и β лежандровы, диск D касается стандартной контактной структуры в их концах $\partial\alpha = \partial\beta$, но необязательно вдоль всей дуги α. Поэтому при движении от одного конца дуги α до другого касательная плоскость к D делает целое или полуцелое алгебраическое число оборотов вокруг касательного вектора к α относительно стандартной контактной структуры. Обозначим это число оборотов через r. Если $r = 0$, то D можно продеформировать возле α так, чтобы выполнялось условие (A3), а значит, (α, β) является шунтом.

Обозначим зацепление $(L \setminus \beta) \cup \alpha$ через $L_{\beta\to\alpha}$. Нетрудно видеть, что пары коэффициентов зацепления

$$\{\mathrm{lk}(L_{\beta\to\alpha}, (\alpha\cup\beta)^+), \mathrm{lk}(L_{\beta\to\alpha}, (\alpha\cup\beta)^-)\} \text{ и } \{\mathrm{lk}(L^+_{\beta\to\alpha}, \alpha\cup\beta), \mathrm{lk}(L^-_{\beta\to\alpha}, \alpha\cup\beta)\}$$

при подходящем выборе ориентаций зацеплений совпадают с $\{[r], [r + 1/2]\}$, где $[x]$ обозначает целую часть x. Если все эти коэффициенты равны нулю, то узел $\alpha \cup \beta$, сдвинутый в ту или другую сторону, будет на самом деле не зацеплен с $L_{\beta\to\alpha}$, т.е. отделен от $L_{\beta\to\alpha}$ некоторой вложенной двумерной сферой. Таким образом, условие (A3) в определении шунта можно заменить на любое из следующих трех:

(A3′) $L_{\beta\to\alpha}$ не зацеплено с $(\alpha \cup \beta)^+ \cup (\alpha \cup \beta)^-$;

(A3″) $L^+_{\beta\to\alpha} \cup L^-_{\beta\to\alpha}$ не зацеплено с $\alpha \cup \beta$;

(A3‴) мы имеем $\mathrm{lk}(L_{\beta\to\alpha}, (\alpha \cup \beta)^+) = \mathrm{lk}(L_{\beta\to\alpha}, (\alpha \cup \beta)^-) = 0$.

Заметим также, что при таком определении условие (A0) становится ненужным.

После замены условия (A3) на (A3′), (A3″) или (A3‴) проверять, является ли данная дуга шунтом, удобно с помощью фронтальных проекций. Например, на рис. 2.1 видно, что слева пунктирная кривая не является шунтом, а справа — является.

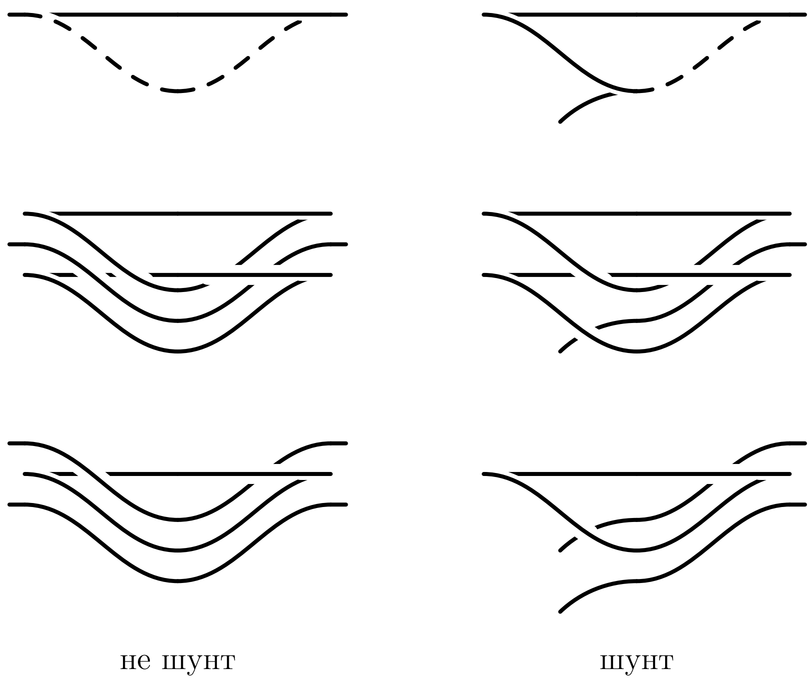


Рис. 2.1. Шунт на фронтальной проекции

Из условия (A3‴) и теоремы 1.9.1 следует, что зацепление $L_{\beta\to\alpha}$ топологически эквивалентно зацеплению L, но имеет большее число Торстона–Беннекена, а именно

$$\mathrm{tb}(L_{\beta\to\alpha}) = \mathrm{tb}(L) - \mathrm{tb}(\alpha\cup\beta).$$

Как мы увидим ниже (в кобинаторных терминах), зацепление $L_{\beta\to\alpha}$ можно получить из L последовательностью из $(-\,\mathrm{tb}(\alpha\cup\beta))$ дестабилизаций.

2.3. Описание шунтов на языке прямоугольных диаграмм

Теперь мы переведём сказанное на комбинаторный язык. Для удобства изложения введем следующие соглашения о терминологии.

Определение 2.3.1. *Числом Торстона–Беннекена* $\mathrm{tb}(R)$ *прямоугольной диаграммы узла* R мы будем называть число Торстона–Беннекена соответствующего лежандрова узла:

$$\mathrm{tb}(R) = \mathrm{tb}(L_R).$$

Для прямоугольной диаграммы R мы обозначаем через $R^{\nearrow}$ диаграмму, полученную из R малым положительным сдвигом вдоль вектора $(1,1)$, где малость сдвига будет ясна из контекста. Аналогично, $R^{\swarrow}$ будет обозначать результат сдвига в противоположную сторону.

Если R — прямоугольная диаграмма узла, то $\mathrm{tb}(R)$ по построению равно коэффициенту зацепления $\mathrm{lk}(R, R^{\nearrow})$ в предположении, что компоненты зацепления, задаваемого $R \cup R^{\nearrow}$, ориентированы одинаково (вместо $\mathrm{lk}(R, R^{\nearrow})$ можно с равным успехом брать $\mathrm{lk}(R, R^{\swarrow})$ или $\mathrm{lk}(R^{\swarrow}, R^{\nearrow})$).

Мы готовы дать определение нашего ключевого объекта.

Определение 2.3.2. *Шунтом для прямоугольной диаграммы* R называется пара (α, β) прямоугольных путей с одинаковыми концами, в которой β является подмножеством в R, если найдётся вложенный двумерный диск $D \subset \mathbb{R}^3$ и выполнено следующее:

(B1) край диска ∂D совпадает с $\widetilde{\alpha} \cup \widetilde{\beta}$;

(B2) пересечение $D \cap \widetilde{R}$ совпадает с $\widetilde{\beta}$;

(B3) в зацеплении, заданном прямоугольной диаграммой $(R\setminus\beta)\cup\alpha\cup(\alpha\cup\beta)^{\nearrow}\cup(\alpha\cup\beta)^{\swarrow}$, компоненты, представленные диаграммой $(R\setminus\beta)\cup\alpha$, не зацеплены с двумя остальными.

Шунт (α,β) называется *элементарным*, если $\mathrm{tb}(\alpha\cup\beta)=-1$. Величина $-\mathrm{tb}(\alpha\cup\beta)$ будет называться *весом* шунта α, а путь β — *шунтируемым путем*.

В большинстве случаев путь β однозначно восстанавливается по α. Например, это верно всякий раз, когда компонента зацепления $\widetilde{R}$, содержащая концы пути $\widetilde{\alpha}$, заузлена или зацеплена с другими компонентами зацепления. В любом случае, если известен путь α, то для β имеется не более двух возможностей. Поэтому мы часто будем называть шунтом сам путь α, помня, однако, что в случае, когда для β имеется две возможности, одна из них выбрана и фиксирована.

Нетрудно видеть, что любой шунт для прямоугольной диаграммы R превращается в шунт для лежандрова зацепления L_R по тому же правилу, которое превращает прямоугольную диаграмму во фронтальную проекцию. А именно, нужно добавить рёбра (если конечная вершина шунта находится вне ребра диаграммы R, но лежит с ним на одной прямой, нужно также соединить эту вершину с ближайшим концом этого ребра), получив таким образом проекцию заузленного графа, изотопного $\widetilde{R}\cup\widetilde{\alpha}$ (в пересечениях вертикальные отрезки считаются проходящими сверху). Затем нужно повернуть всю конфигурацию против часовой стрелки, одни углы сгладить, а другие превратить в точки возврата в соответствии с общими принципами, см. рис. 2.2.

Нетрудно показать и то, что любой шунт для зацепления L_R с точностью до лежандровой изотопии можно получить указанным способом.

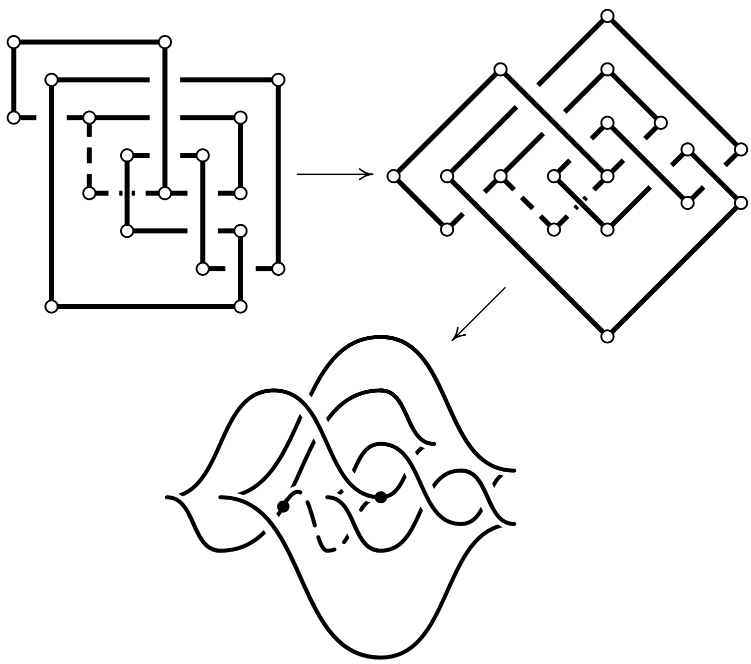


Рис. 2.2. Шунт на прямоугольной диаграмме и на фронтальной проекции

Мы не будем этим формально пользоваться и оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

2.4. Θ-диаграммы

Рассмотрим подробнее объект, который образует прямоугольная диаграмма, снабженная шунтом.

Определение 2.4.1. *Прямоугольной* Θ*-диаграммой* назовем объединение $\alpha\cup\beta\cup\gamma\cup\delta$ трех прямоугольных путей α, β, γ с общими парами концов и прямоугольной диаграммы зацепления δ. Мы различаем эти пути, так что формально Θ-диаграмма — это четверка $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, в которой α, β и γ — прямоугольные пути с общими парами концов, а δ — прямоугольная диаграмма. В соответствии с соглашением 1.3.3 мы по умолчанию считаем, что все их рёбра расположены на различных прямых, отличных от

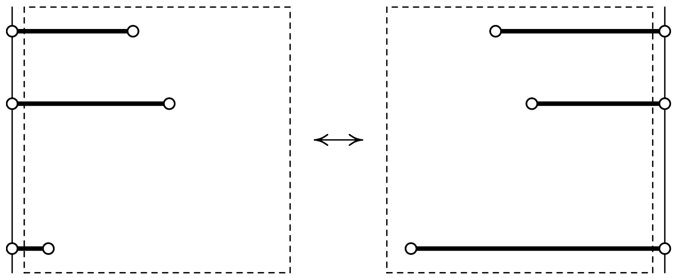


Рис. 2.3. Циклическая перестановка с участием концов

концов путей α, β и γ.

Две прямоугольные Θ-диаграммы назовем *лежандрово эквивалентными*, если одну из другой можно получить конечной последовательностью *разрешенных операций*, которые включают циклические перестановки, рокировки, стабилизации/дестабилизации типа I и перемещение конца, определённые ниже. Соответствующий класс эквивалентности прямоугольной Θ-диаграммы будет называться её *лежандровым типом.*

Циклические перестановки, *рокировки* и (*де*)*стабилизации* для прямоугольных Θ-диаграмм определяются по аналогии с прямоугольными диаграммами зацеплений. Остановимся только на отличиях.

В крайнем левом, правом, верхнем или нижнем положении прямоугольнгой Θ-диаграммы может оказаться как ребро, так и конец трех входящих в неё прямоугольных путей. Перенос его на противоположную сторону также считается циклической перестановкой (см. рис. 2.3).

Рокировки для рёбер прямоугольных Θ-диаграмм определяются ровно так же, как для прямоугольных диаграмм зацеплений: можно переставить любые два соседних параллельных ребра, входящих в состав α, β, γ или δ, при условии, что их концы не перемежаются. Общие концы путей α, β, γ также можно переставлять с параллельными им рёбрами и

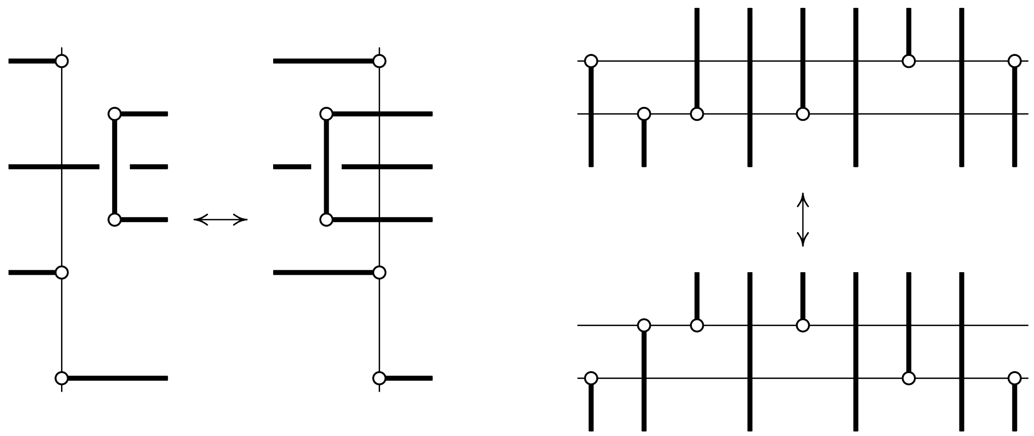


Рис. 2.4. Рокировка с участием концов

друг с другом при условии, что никакая пара конечных вершин на общем конце не перемежается с вершинами переставляемого с ним ребра или какой-либо парой конечных вершин на другом конце, соответственно, см. рис. 2.4.

Стабилизации и дестабилизации типа I можно выполнять в любых вершинах прямоугольной Θ-диаграммы, включая конечные вершины путей α, β или γ.

Наконец, нам понадобится еще один вид преобразований — *перемещение конца*, который состоит в следующем. Пусть P_1, P_2, P_3 — три конечных вершины прямоугольных путей α, β, γ (не обязательно в этом порядке) лежащие на одной горизонтальной прямой, перечисленные слева направо. Обозначим через P_i' и P_i'' точки, полученные сдвигом P_i на вектор $(0, \varepsilon)$ или $(0, -\varepsilon)$ соответственно, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число (меньше расстояния по вертикали между любыми двумя вершинами диаграммы, не лежащими на одной горизонтальной прямой). Перемещение конца состоит в одной из следующих шести замен в путях α, β,

γ:

$$
\begin{array}{lll}
P_1 \mapsto \{P_1', P_2'\}, & P_2 \mapsto \varnothing, & P_3 \mapsto \{P_2, P_3\}; \\
P_1 \mapsto \{P_1'', P_3''\}, & P_2 \mapsto \{P_2, P_3\}, & P_3 \mapsto \varnothing; \\
P_1 \mapsto \{P_1, P_3\}, & P_2 \mapsto \{P_2', P_3'\}, & P_3 \mapsto \varnothing; \\
P_1 \mapsto \varnothing, & P_2 \mapsto \{P_2'', P_1''\}, & P_3 \mapsto \{P_1, P_3\}; \\
P_1 \mapsto \varnothing, & P_2 \mapsto \{P_1, P_2\}, & P_3 \mapsto \{P_3', P_1'\}, \\
P_1 \mapsto \{P_1, P_2\}, & P_2 \mapsto \varnothing, & P_3 \mapsto \{P_3'', P_2''\},
\end{array}
$$

при условии, что снова получится прямоугольная Θ-диаграмма. А именно, первую и шестую замену можно делать, если вершина P_2 не является единственной вершиной соответствующего прямоугольной пути, вторую и третью, если таковой не является P_3, а четвертую и пятую — если таковой не является P_1.

Заметим, что с комбинаторной точки зрения среди указанных шести операций на самом деле три пары совпадающих.

Аналогичная операция определяется для трех конечных вершин прямоугольных путей, входящих в прямоугольную Θ-диаграмму, если они оказались на одной вертикальной прямой, см. рис. 2.5. А именно, предыдущую конструкцию нужно симметрично отразить относительно диагонального направления (любого из двух).

Таким образом, перемещение конца в каждом из случаев состоит в удалении одной из вершин P_1, P_2, P_3 и добавлении двух вершин, близких к оставшимся. Если удаляемая вершина является конечной для прямоугольного пути α прямоугольной Θ-диаграммы $\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta$, то в результате перемещения конца прямоугольная диаграмма $\beta \cup \gamma \cup \delta$ не изменяется, путь α удлиняется на одно ребро, а один из его концов смещается по $\beta \cup \gamma$ на смежное ребро. При этом один из путей β и γ отдает другому одну из своих вершин.

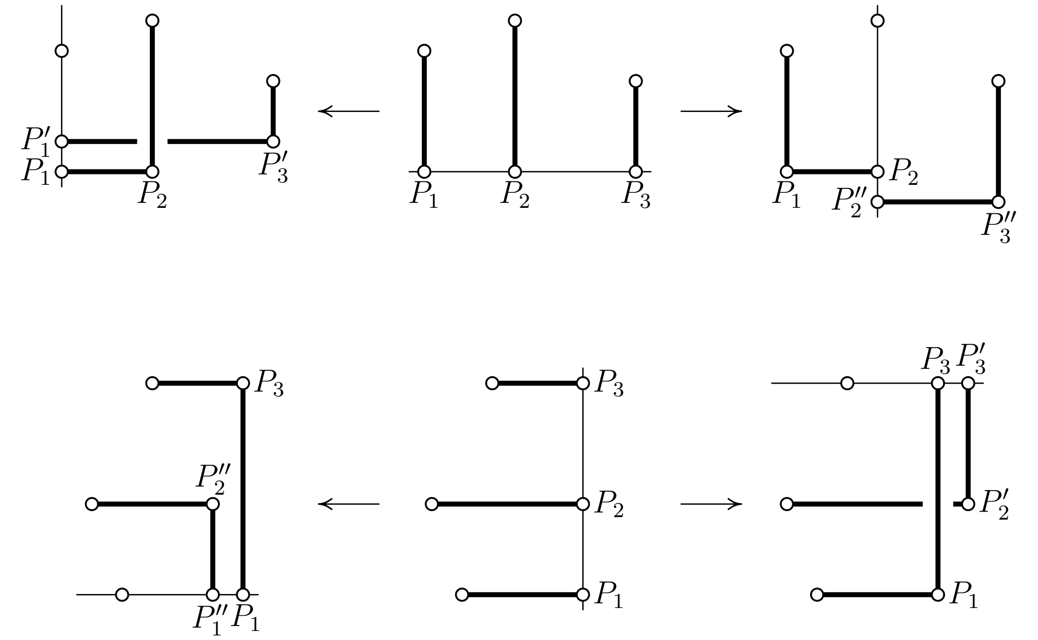


Рис. 2.5. Перемещение конца

Операцию, обратную к перемещению конца, мы намеренно не определяем, так как вернуться обратно можно, переместив тот же конец в противоположную сторону, а затем выполнив несколько рокировок и дестабилизацию типа I (см. рис. 2.6).

Предложение 2.4.2. *Пусть* $\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta$ *и* $\alpha' \cup \beta' \cup \gamma' \cup \delta'$ *— лежандрово эквивалентные прямоугольные* Θ*-диаграммы, причем* (α, β) *является шунтом веса* b *для* $\beta \cup \gamma \cup \delta$*. Тогда:* (i) (α', β') *является шунтом веса* b *для* $\beta' \cup \gamma' \cup \delta'$*;* (ii) *прямоугольные диаграммы* $\alpha \cup \gamma \cup \delta$ *и* $\alpha' \cup \gamma' \cup \delta'$ *лежандрово эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение в случае, когда $\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta \mapsto \alpha' \cup \beta' \cup \gamma' \cup \delta'$ есть одна разрешенная операция. Это сводится к непосредственной проверке того, что сохраняются классы изотопии $\widetilde{\alpha} \cup \widetilde{\beta} \cup \widetilde{\gamma} \cup \widetilde{\delta}$ и $\widetilde{D}$, где $D = (\alpha \cup \beta)^{\nearrow} \cup (\alpha \cup \beta)^{\swarrow} \cup \alpha \cup \gamma \cup \delta$, и лежандров тип

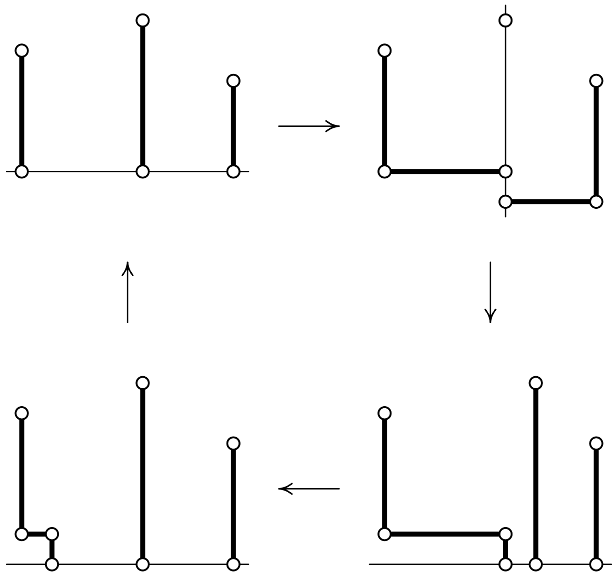


Рис. 2.6. Обращение перемещения конца

зацепления $\alpha \cup \gamma \cup \delta$. Случаи, когда рассматриваемая операция является рокировкой, разрешенной (де)стабилизацией или циклической перестановкой, тривиальны и оставляются читателю.

Наименее очевидным здесь является сохранение класса изотопии зацепления $\widetilde{D}$ при перемещении конца. Это проиллюстрировано на рис. 2.7 для одного из возможных случаев взаимного расположения конечных вершин путей α, β, γ. Поскольку для циклических перестановок наше утверждение верно, имеет значение только циклический порядок конечных вершин, который, в свою очередь, можно обратить с помощью центральной симметрии.

Случай, когда перемещаемый конец горизонтален, получается отражением относительно диагонального направления.

Заметим, что искомые лежандровы эквивалентности прямоугольных диаграмм устанавливаются несколькими рокировками и стабилизациями, которые можно выполнить, перемещая только вершины из малой

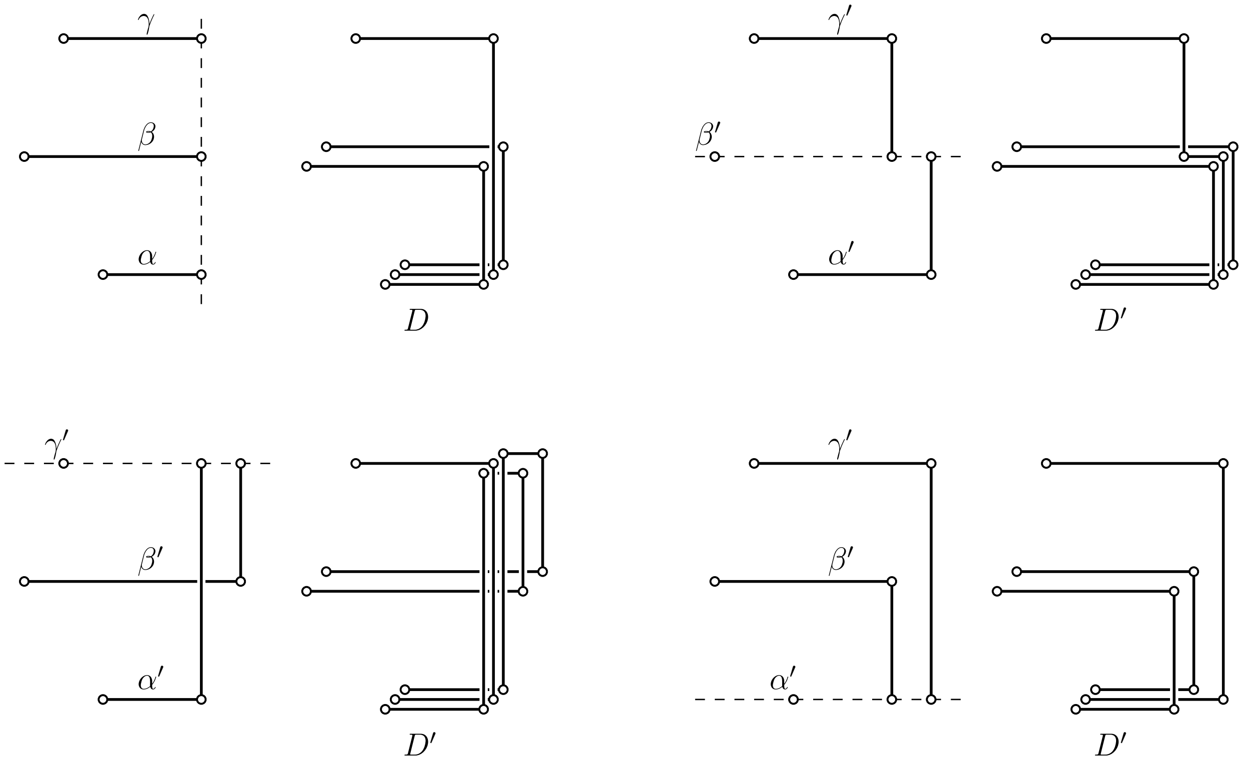


Рис. 2.7. Во всех случаях диаграмма $D' = (\alpha' \cup \beta')^{\nearrow} \cup (\alpha' \cup \beta')^{\swarrow} \cup \alpha' \cup \gamma' \cup \delta'$ эквивалентна $D = (\alpha \cup \beta)^{\nearrow} \cup (\alpha \cup \beta)^{\swarrow} \cup \alpha \cup \gamma \cup \delta$, а диаграмма $\alpha \cup \gamma \cup \delta$ лежандрово эквивалентна $\alpha' \cup \gamma' \cup \delta'$

окрестности общего конца путей α, β, γ, поэтому расположение других вершин, соединенных рёбрами с вовлеченными в эти преобразования конечными вершинами, не играет никакой роли. Не имеет также никакого значения, все ли три пути α, β и γ содержат более одной вершины. Таким образом, все прочие случаи сводятся к тому, что показан на рис. 2.7.

$\square$

Разумеется (хотя мы формально это не используем), лежандрову типу прямоугольной Θ-диаграммы соответствует лежандров тип одномерного комплекса в $\mathbb{R}^3$, состоящего из нескольких окружностей и одной

Θ-компоненты — графа из двух вершин, соединенных тремя рёбрами, причем кривые, из которых состоит комплекс, лежандровы. Для полноты картины приведем кратко набор дополнительных преобразований фронтальных диаграмм таких графов, задействующих трехвалентную вершину, которые на языке фронтальных диаграмм наряду с преобразованиями на рис. 1.19 задают эквивалентность интересующих нас лежандровых графов. Эти преобразования указаны на рис. 2.8 (следует также

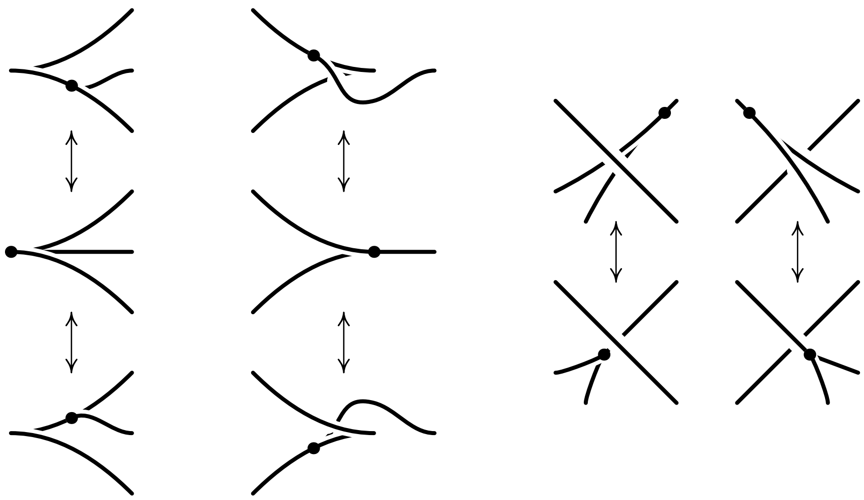


Рис. 2.8. Преобразования лежандрова графа, задействующие тройную вершину

брать симметричные к ним).

Предложение 2.4.3. *Пусть R и R' — прямоугольные диаграммы зацеплений одного лежандрова типа, и пусть α — прямоугольный путь с концами на рёбрах диаграммы R. Тогда существует прямоугольный путь α' с концами на рёбрах диаграммы R' такой, что прямоугольные Θ-диаграммы $R \cup \alpha$ и $R' \cup \alpha'$ лежандрово эквивалентны.*

Доказательство. Утверждение достаточно доказать для случая, когда R' получается из R одним элементарным преобразованием, сохраняющим лежандров тип. Для стабилизации это очевидно, можно просто взять $\alpha' = \alpha$ (мы считаем, что новые рёбра, возникшие при стабилизации, достаточно короткие).

Пусть $R \mapsto R'$ — циклическая перестановка. Для определенности будем считать, что крайнее левое ребро переносится вправо. Остальные случаи полностью аналогичны.

Если левее R находятся какие-то рёбра пути α, то мы сначала перенесем их вправо с помощью циклической перестановки, а потом беспрепятственно осуществим желаемую циклическую перестановку, вне зависимости от того, лежит на перемещаемом ребре один из концов пути α или нет.

Пусть $R \mapsto R'$ — рокировка. В силу имеющейся симметрии конструкций достаточно рассмотреть рокировку горизонтальных рёбер. Более того, так как для циклических перестановок искомое утверждение уже доказано, можно считать, что горизонтальные проекции переставляемых рёбер не перекрываются, а нижнее из переставляемых рёбер диаграммы R левым концом упирается в левый край Θ-диаграммы $R \cup \alpha$, т.е. левее этого конца уже нет вершин ни диграммы R, ни пути α.

Непосредственно осуществить рокировку в присутствии пути α могут помешать только две вещи: 1) расположение концов пути α на переставляемых рёбрах или на смежных с ними вертикальных; 2) расположение рёбер пути α в горизонтальной полосе между переставляемыми рёбрами.

В первом случае нужно передвинуть концы пути α на другие горизонтальные рёбра диаграммы R, что можно сделать с помощью нескольких операций пермещения конца. Рассмотрим теперь второй вид препятствия.

Обозначим левое из рокируемых рёбер диаграммы R через e, а правое через e'. Правую вершину ребра e обозначим через P. Желаемую рокировку в отсутствии пути α можно было бы совершить, сдвинув ребро e вверх. Мешают этому только рёбра пути α, расположенные над вершиной P но ниже уровня ребра e', см. рис. 2.9 а).

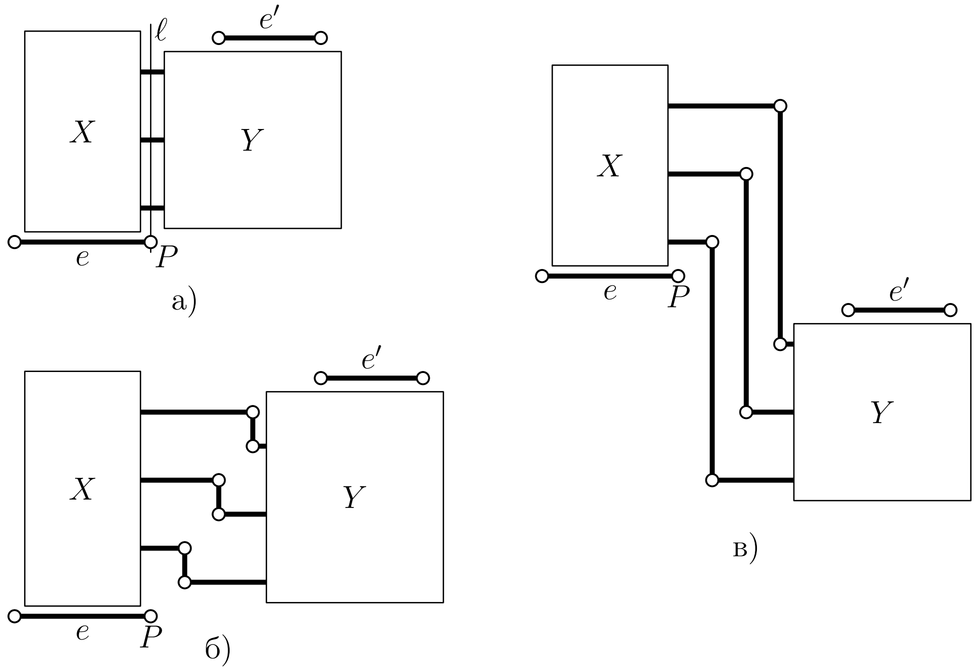


Рис. 2.9. Рокировка в присутствии пути. Из блоков X и Y могут выходить и вертикальные рёбра пути α, которые не изображены

Пусть ℓ — вертикальная прямая, проходящая через P. «Переломим» каждое из мешающих рёбер пути α в районе пересечения с прямой ℓ. А именно, применим подходящую разрешенную стабилизацию в окрестности одной из вершин каждого мешающего ребра и сдвинем образовавшееся короткое вертикальное ребро с помощью рокировок к прямой ℓ. При этом сделаем так, чтобы новые короткие вертикальные рёбра располагались справа от ℓ и тем ближе к ℓ, чем они ниже, см. рис. 2.9 б).

Теперь мы можем беспрепятственно сдвинуть вверх все рёбра, располагающиеся над e, но ниже уровня ребра e', так, чтобы устранить препятствие к желаемой рокировке и выполнить её, см. рис. 2.9 в).

Остается разобрать случай, когда $R \mapsto R'$ — разрешенная дестабилизация. Таких дестабилизаций есть два вида, но они симметричны, поэтому разберем один из них, когда сокращаемые рёбра выходят из их общей вершины вверх и вправо. Используя циклические перестановки и перемещение концов пути α, добьемся того, чтобы общая вершина сокращаемых рёбер оказалась самой нижней и самой левой вершиной диаграммы $R \cup \alpha$, а конечные вершины пути α не лежали на сокращаемых или смежных с ними рёбрах.

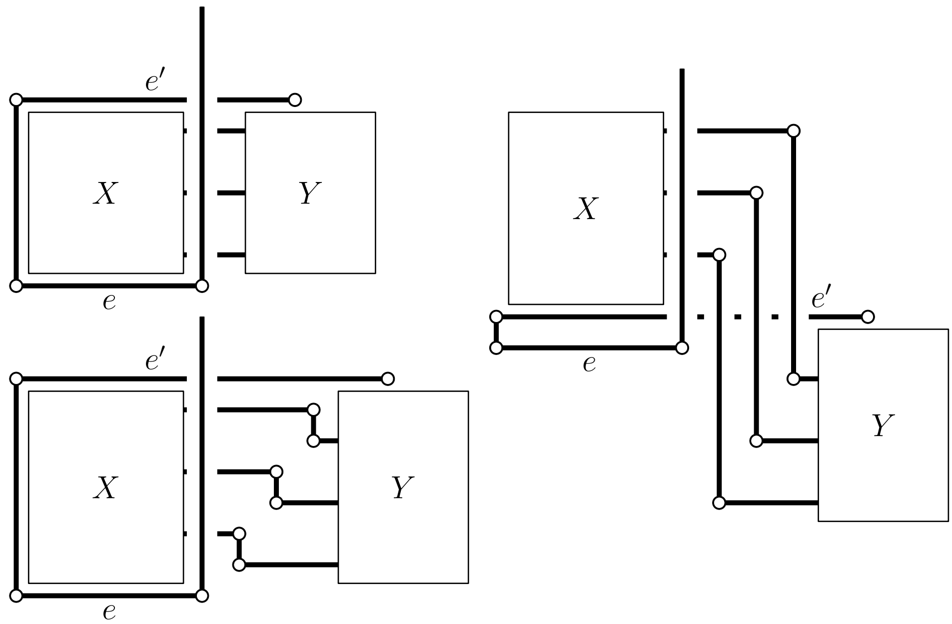


Рис. 2.10. Дестабилизация в присутствии пути. Из блоков X и Y могут выходить и вертикальные рёбра пути α, которые не изображены

Горизонтальное сокращаемое ребро обозначим через e, а расположенное непосредственно над ним горизонтальное ребро диаграммы R

через e'. Сместить ребро e вверх так, чтобы оно стало соседним с e' в диаграмме $R \cup \alpha$, мешают рёбра пути α, расположенные над правой вершиной ребра e, но ниже уровня ребра e'. Мы поступаем с ними в точности так же, как в случае рокировки, см. рис. 2.10.

Теперь сначала двигаем e вверх вплотную к e', затем сокращаемое вертикальное ребро можно беспрепятственно сдвинуть вправо и осуществить желаемую дестабилизацию. $\square$

2.5. План доказательства Ключевой Леммы

Связной компонентой прямоугольной диаграммы R зацепления мы будем называть любое подмножество $K \subset R$, являющееся прямоугольной диаграммой узла.

Ключевая Лемма. *Пусть R — прямоугольная диаграмма зацепления и (α, β) — шунт меньшего веса, чем число вертикальных рёбер той компоненты зацепления R, на рёбрах которой находятся концы шунта α.*

Тогда найдётся прямоугольная диаграмма R', лежандрово эквивалентная $(R \setminus \beta) \cup \alpha$, которая из R может быть получена b последовательными элементарными упрощениями типа II, где b — вес шунта (α, β).

Схема доказательства будет состоять в следующем.

- Сначала мы сопоставим прямоугольной диаграмме R и путям α, β геометрические образы $\widehat{R}$, $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ в $\mathbb{R}^3$, называемые книжными представлениями.
- Мы затянем тривиальный узел $\widehat{\alpha \cup \beta}$ диском D, удовлетворяющим некоторым ограничениям. С помощью «книжного» слоения определяется специальная комбинаторная структура на этом диске.

- Далее мы проводим индукцию. Для индукционного перехода нужны определённые манипуляции с $\widehat{R} \cup D$, которые упрощают диск D. Они будут вести к дестабилизациям типа II на пути β и типа I на пути α, а также рокировкам и циклическим перестановкам для Θ-диаграммы $R \cup \alpha$.

- Перекомбинирование сёдел в одних случаях непосредственно укорачивает α или β, а в других позволяет прийти к ситуации, в которой можно устранить складку внутри диска D.

- Устранение складки упрощает диск D. Если складка устраняется у края, укорачивается α или β.

- Если дальнейшее упрощение диска D невозможно, диск имеет простой стандартный вид, а переход от R к $(R \setminus \beta) \cup \alpha$ представляет собой элементарное упрощение типа II. Это — база индукции.

По условию Ключевой Леммы для прямоугольной диаграммы R мы имеем шунт α веса b, причем компонента диаграммы, содержащая $\partial\alpha$, имеет сложность больше b. Про расположение концов шунта в условии леммы ничего не сказано, но с помощью операции перемещения конца мы можем переместить их на любые рёбра в пределах одной связной компоненты, поэтому без ограничения общности мы можем предполагать, что выполнено следующее условие.

Соглашение 2.5.1. Всюду ниже предполагается, что концы шунта α располагаются на горизонтальных рёбрах диаграммы R, а длина шунтируемого пути β равна в точности b.

2.6. Правильный диск D

Теперь мы построим вложенный коориентированный двумерный диск $D \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, удовлетворяющий следующим условиям:

(D1) край ∂D совпадает с $\widehat{\alpha \cup \beta}$, а внутренность диска D не пересекает $\widehat{R} \cup \widehat{\alpha}$;

(D2) D является образом $(a+b)$-угольника при регулярном гладком отображении, переводящем вершины многоугольника в вершины узла $\widehat{\alpha \cup \beta}$, где a — длина пути α;

(D3) внутренность диска D пересекает переплет ℓ трансверсально конечное число раз;

(D4) в точках $\partial D \cap \ell$ диск D перпендикулярен переплету ℓ, причем в малой окрестности U любого из концов путей $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$ дуга из $\widehat{R}$, не принадлежащая $\widehat{\beta}$, находится вне θ-интервала, занимаемого $D \cap U$ (см. рис. 2.11);

(D5) слоение с особенностями $\mathcal{F}$, заданное на $D \setminus \ell$ ограничением формы $d\theta$, внутри D имеет лишь особенности типа простого седла и не имеет регулярных замкнутых слоев;

(D6) в точках $D \cap \ell$ коориентация диска D совпадает с положительным направлением переплета ℓ;

(D7) на каждой дуге вида $\alpha \cap \mathcal{P}_t$ (или $\beta \cap \mathcal{P}_t$), слоение $\mathcal{F}$ имеет ровно одно положительное (соответственно, отрицательное) полуседло (см. определения ниже);

(D8) все седла и полуседла слоения $\mathcal{F}$ лежат в разных страницах.

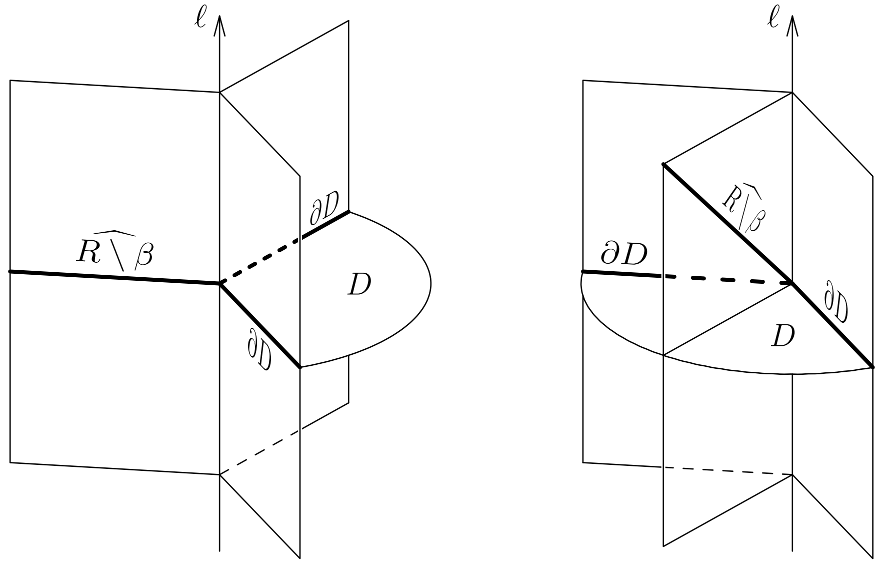


Рис. 2.11. Расположение правильного диска относительно зацепления в концах путей $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$

Большинство этих условий достаточно стандартны для техники, которую мы собираемся применить, см. [16, 17, 28, 30] и мы остановимся на них лишь кратко. Нашим главным наблюдением является возможность обеспечить условие (D7) как при начальном построении диска D, так и при дальнейшем его упрощении.

Диск D, удовлетворяющий всем условиям (D1–D8), будем называть *правильным.* Перейдем к его построению.

Напомним, что по определению шунта в зацеплении, заданном диаграммой $(R\setminus\beta)\cup\alpha\cup(\alpha\cup\beta)^{\nearrow}\cup(\alpha\cup\beta)^{\swarrow}$, компоненты, представленные объединением $(\alpha\cup\beta)^{\nearrow}\cup(\alpha\cup\beta)^{\swarrow}$, по отдельности не заузлены, не зацеплены с оставшейся частью зацепления, а их коэффициент зацепления равен $-b$. Здесь $X^{\nearrow}$ обозначает сдвиг множества X на вектор $(\varepsilon,\varepsilon)$, а $X^{\swarrow}$ — на вектор $(-\varepsilon,-\varepsilon)$ при некотором достаточно малом ε.

Введем также обозначения $X^{\nwarrow}$ и $X^{\searrow}$ для сдвигов X на векторы $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и $(\varepsilon, -\varepsilon)$ соответственно, $X^{\swarrow\!\!\!\nearrow}$ для $X^{\nearrow} \cup X^{\swarrow}$ и $X^{\nwarrow\!\!\!\searrow}$ для $X^{\searrow} \cup X^{\nwarrow}$.

Мы утверждаем, что в зацеплении $(R \setminus \beta) \cup \alpha \cup \alpha^{\swarrow\!\!\!\nearrow} \cup \beta^{\nwarrow\!\!\!\searrow}$ две компоненты, представленные подмножеством вершин $\alpha^{\swarrow\!\!\!\nearrow} \cup \beta^{\nwarrow\!\!\!\searrow}$, не зацеплены как с оставшейся частью зацепления, так и между собой.

Действительно, $\alpha^{\swarrow\!\!\!\nearrow} \cup \beta^{\nwarrow\!\!\!\searrow}$ получается из $\alpha^{\swarrow\!\!\!\nearrow} \cup \beta^{\swarrow\!\!\!\nearrow}$, запрещенными перестановками b пар вертикальных рёбер, происходящих из рёбер пути β, каждая из которых увеличивает коэффициент зацепления на единицу, рис. 2.12.

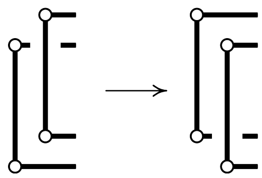


Рис. 2.12. При «запрещенной рокировке» коэффициент зацепления увеличивается на единицу

Эти изменения не переставляют рёбер изменяемых компонент с рёбрами диаграммы $(R \setminus \beta) \cup \alpha$, поэтому каждая из изменяемых компонент остается не зацеплена с $(R \setminus \beta) \cup \alpha$.

Теперь перейдем от прямоугольных диаграмм к книжным представлениям. Путь $\widehat{\alpha^{\nearrow}}$ получается из $\widehat{\alpha}$ поворотом вокруг переплета ℓ в положительном направлении (направлении возрастания θ) и сдвигом вверх, рис. 2.13.

Аналогично, $\nwarrow$, $\swarrow$ и $\searrow$ отвечают повороту в отрицательную сторону со сдвигом вверх, повороту в отрицательную сторону со сдвигом вниз и повороту в положительную сторону со сдвигом вниз.

Обозначим через S узкую ленту, края которой образуют зацепление $\widehat{\alpha^{\swarrow\!\!\!\nearrow}} \cup \widehat{\beta^{\nwarrow\!\!\!\searrow}}$, а средняя линия идет по тривиальному узлу $\widehat{\alpha \cup \beta}$. Лента S

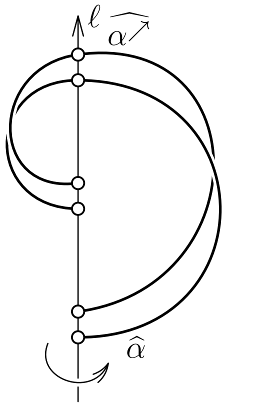


Рис. 2.13. Пути $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\alpha\nearrow}$

состоит из полосок, каждая из которых крепится в концах на переплете и при этом перекручена на пол-оборота, как показано на рис. 2.14.

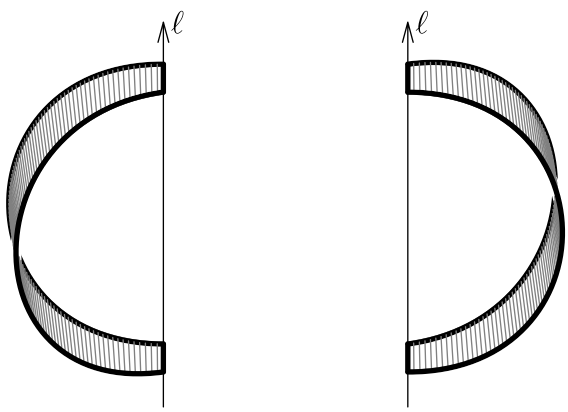


Рис. 2.14. Полоски, из которых состоит лента S

По построению края ленты S образуют тривиальное зацепление из двух компонент, которые к тому же не зацеплены — по отдельности, но мы сейчас увидим, что и в совокупности тоже — с $(\widehat{R \setminus \beta}) \cup \widehat{\alpha}$, а её средняя линия $\widehat{\alpha \cup \beta}$ затягивается диском, внутренность которого не пересекает $\widehat{R}$. Т.е. топологически мы имеем ситуацию, изображенную на рис. 2.15.

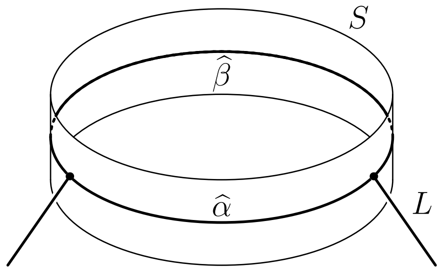


Рис. 2.15. Лента S с топологической точки зрения

Это значит, что мы можем заклеить узел $\widehat{\alpha \cup \beta}$ вложенным диском D, внутренность которого по-прежнему не пересекается с $\widehat{R}$ и который перпендикулярен ленте S вдоль своего края, причем так, чтобы в концах пути $\widehat{\alpha}$ диск D и концы кривой $\widehat{R \setminus \beta}$ примыкали к ленте S с противоположных сторон. При этом можно обеспечить выполнение условий общего положения (D2) и (D3). Условия (D1) и (D4) выполнены по построению.

На диске D мы будем рассматривать слоение с особенностями $\mathcal{F}$, заданное 1-формой $d\theta$. Это слоение не определено в точках пересечения D с переплетом ℓ и имеет особенности в точках касания диска D со страницами $\mathcal{P}_t$. Приведя диск в общее положение, мы можем считать эти особенностями морсовскими.

Ортогональность полосе S вдоль края ∂D влечет наличие особенностей слоения $\mathcal{F}$ и на ∂D. А именно, так как каждая полоска с концами на переплете, входящая в состав S, перекручена на пол-оборота, на соответствующем участке края ∂D окажется *полуседло*, см. рис. 2.16.

Каждому седлу и полуседлу мы приписываем знак «+» или «−» в зависимости от того, возрастает или убывает θ в направлении коориентации диска D в данном (полу)седле.

Точки пересечения D с переплетом будут называться *вершинами* диска D, причем мы будем различать *граничные* и *внутренние* вершины

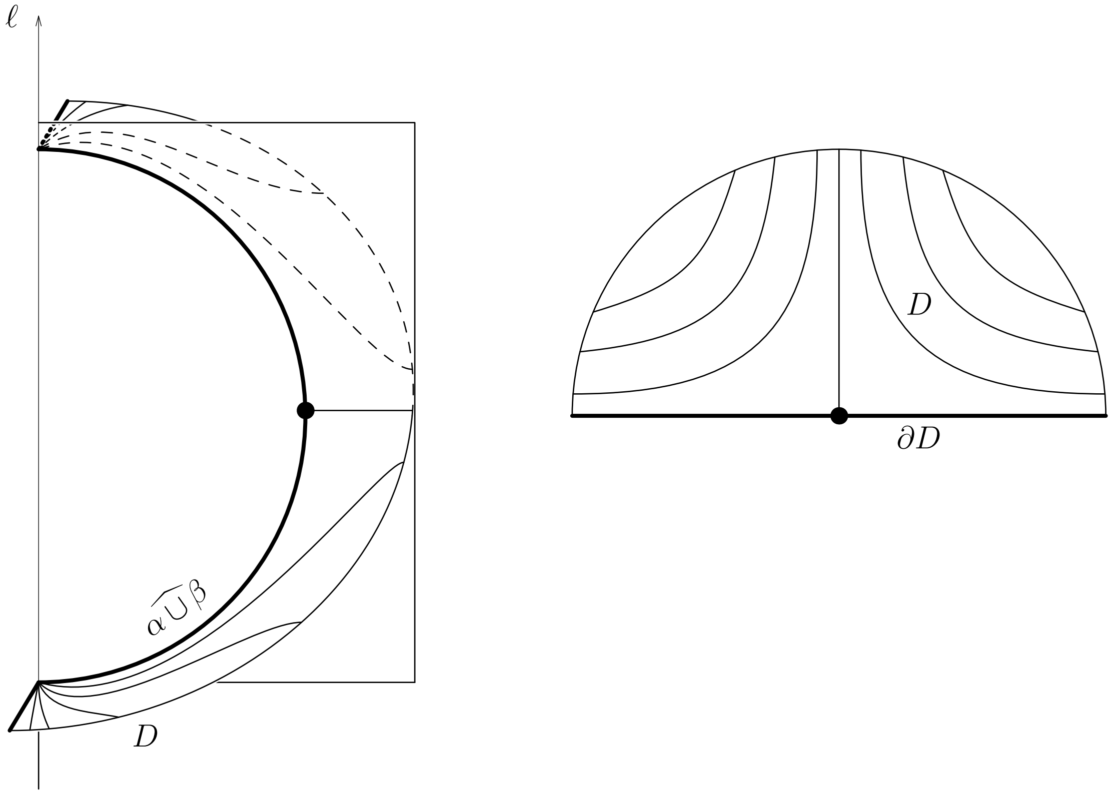


Рис. 2.16. Полуседло

в зависимости от того, лежат или не лежат они на ∂D. Каждой вершине также приписывается знак «+» или «−», который указывает, совпадает в этой вершине коориентация диска D с направлением переплета ℓ или нет.

Так как край диска перекручивается на пол-оборота между каждыми двумя граничными вершинами, нетрудно видеть, что все граничные вершины будут иметь одинаковый знак. Мы выбираем коориентацию диска D так, чтобы все они были положительными. Тем самым выполнено условие (D6).

Кроме того, из построений выше нетрудно видеть, что при таком выборе коориентации автоматически выполнено и условие (D7).

Выполнение условия (D8) достигается при необходимости малым шевелением диска D. Остается только обеспечить выполнение условия (D5), которое означает отсутствие особенностей типа полюс и замкнутых слоев у слоения $\mathcal{F}$. Это делается стандартным образом.

А именно, из D удаляется объединение всех дисков, ограничиваемых закнутыми слоями слоения $\mathcal{F}$. В D образуются дыры, вокруг каждой из которой слоение имеет вид, показанный на рис. 2.17.

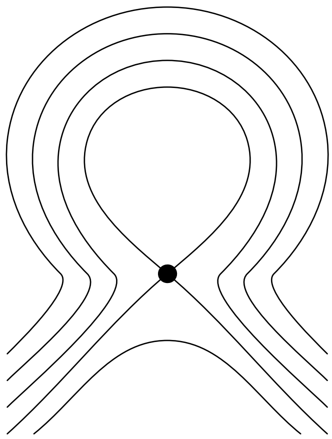


Рис. 2.17. Слоение вокруг дыры

Граница каждой дыры состоит из одной сепаратрисы, образующей петлю. Она целиком лежит в некоторой странице и ограничивает там диск. Заклеивая дыру этим диском и шевеля полученную поверхность, мы устраняем эту особенность. После этого единственный вид особенности, который слоение $\mathcal{F}$ может иметь внутри диска D, — простое седло, и ни одна сепаратриса не образует петлю.

Каждый регулярный слой слоения $\mathcal{F}$ имеет вид дуги, идущей из вершины в вершину, причем эти вершины должны иметь противоположный знак. Из каждого седла (полуседла) выходят четыре (соответственно, три) *сепаратрисы*, другими концами упирающиеся в вершины. Таким образом, все слоение $\mathcal{F}$ можно по регулярным слоям разрезать на куски, показанные на рис. 2.18.

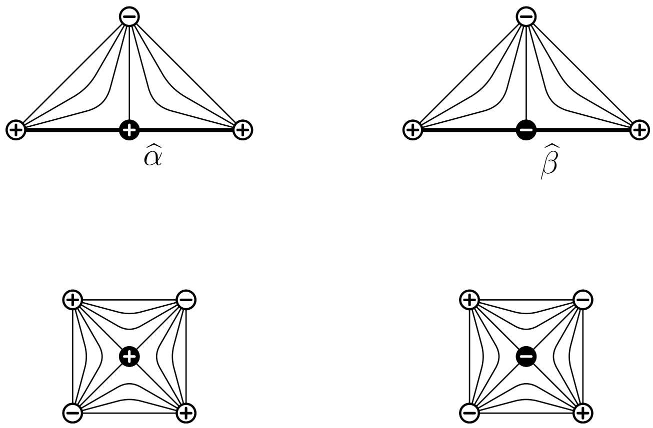


Рис. 2.18. Элементы, из которых составлено слоение $\mathcal{F}$

Части, на которые все сепаратрисы слоения $\mathcal{F}$ разрезают диск D, мы будем называть *ячейками* слоения $\mathcal{F}$. Каждая ячейка заполнена регулярными слоями и имеет на крае две вершины противоположного знака и два (полу)седла, знаки которых могут быть произвольны, см. рис. 2.19.

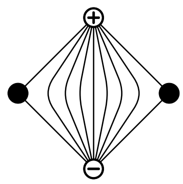


Рис. 2.19. Ячейка слоения $\mathcal{F}$

2.7. Индукция

Ниже нам будет удобнее обобщенно называть седла и полуседла просто седлами, а когда речь будет идти только о седлах внутри диска D, они будут называться *внутренними*.

Итак, мы имеем набор объектов (R, α, β, D), в котором α — шунт веса b и длины a с концами на горизонтальных рёбрах прямоугольной диаграммы R, β — шунтируемый путь длины b, а D — правильный диск для $(\widehat{R}, \widehat{\alpha})$. Наша цель — доказать, что к R можно применить последовательно b элементарных упрощений и получить диаграмму, лежандрово эквивалентную $(R \setminus \beta) \cup \alpha$. Мы сделаем это индукцией по набору $(a+b, c, d)$, где c — число внутренних вершин диска D, а d — число внутренних сёдел, не лежащих на перемычках (см. ниже). Тройки $(a+b, c, d)$ при этом упорядочиваются лексикографически.

Перемычкой называется дуга в D, соединяющая пару граничных вершин и состоящая из двух сепаратрис, рис. 2.20.

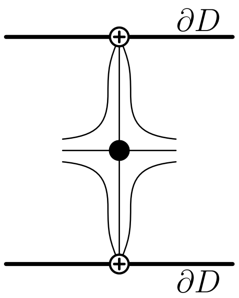


Рис. 2.20. Перемычка

База индукции соответствует случаю $a = b = c = 1$, $d = 0$. Для индукционного перехода во всех остальных случаях мы производим манипуляции с набором (R, α, β, D), получая новый набор $(R', \alpha', \beta', D')$ с теми же свойствами (для которого длины путей α' и β', число внутренних вершин диска D' и число внутренних сёдел вне перемычек обозначены, соответственно, через a', b', c' и d') так, что имеет место одна из следующих ситуаций:

(E1) $R \mapsto R'$ — элементарное упрощение типа II, преобразование $(R \setminus$

$\beta) \cup \alpha \mapsto (R' \setminus \beta') \cup \alpha'$ сохраняет лежандров тип диаграммы, $a' = a$, $b' = b - 1$;

(E2) R' получается из R рокировками и циклическими перестановками, $(R \setminus \beta) \cup \alpha \mapsto (R' \setminus \beta') \cup \alpha'$ — элементарное упрощение типа I, $a' = a - 1$, $b' = b$;

(E3) $R' \cup \alpha'$ получается из $R \cup \alpha$ рокировками и циклическими перестановками, $a' = a$, $b' = b$, и либо $c' = c - 2$, либо $c' = c$, $d' = d - 1$.

Возможность применить ту или иную манипуляцию определяется исключительно по наличию определенных фрагментов в слоении $\mathcal{F}$ (с учетом знаков вершин и сёдел). Почему это так и что происходит с R, β, α, обсуждается в следующих параграфах, а здесь мы только покажем, как отражаются соответствующие манипуляции на слоении $\mathcal{F}$ и докажем, что хотя бы один из фрагментов, обеспечивающих возможность применить индукционный переход, обязательно присутствует.

Звездой вершины (внутренней или граничной) диска D называется замыкание объединения всех регулярных слоев, выходящих из этой вершины. *Валентностью* вершины называется число сепаратрис, выходящих из неё.

Перекомбинирование сёдел, которые могут быть обычными, внутренними, седлами или полуседлами на крае ∂D, возможно всякий раз, когда седла одного знака оказались на границе одной ячейки. Изменение слоения $\mathcal{F}$ показано на рис. 2.21, 2.22, 2.23.

Если оба перекомбинируемых седла оказались отрицательными полуседлами, мы будем иметь случай (E1), если положительными — случай (E2). Если хотя бы одно из перекомбинируемых сёдел внутреннее, то с диаграммой $R \cup \alpha$ произойдут рокировки и циклические перестановки, а

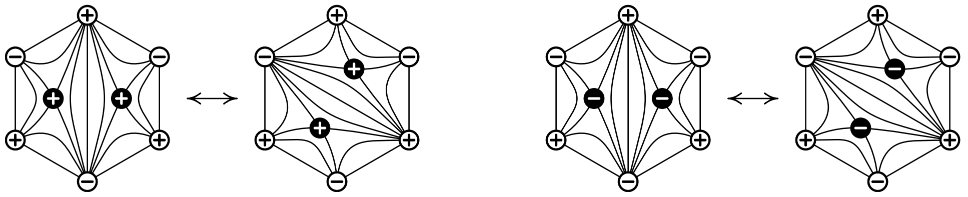


Рис. 2.21. Перекомбинирование внутренних сёдел

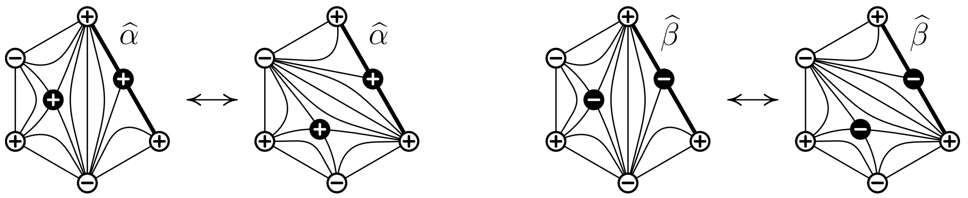


Рис. 2.22. Перекомбинирование внутреннего седла и полуседла

числа a, b, c не изменятся. Мы будем применять этот прием в специальной ситуации, приходя к случаю (E3).

Разглаживание складки возможно всякий раз, когда имеется внутренняя двухвалентная вершина и выполнено одно из двух условий:
(i) двухвалентная вершина соединена регулярным слоем с внутренней вершиной (рис. 2.24), и тогда мы имеем случай (E3);
(ii) двухвалентная вершина содержит в своей звезде ровно одно полуседло (рис. 2.25), и тогда мы имеем случай (E1) для отрицательного полуседла и (E2) для положительного.

Теперь покажем, что при $a + b > 2$ всегда возможен один из индукционных переходов (E1), (E2) или (E3).

Если в диске D нет перемычек, положим $D_0 = D$. Если перемычки есть, то среди частей, на которые они разрезают диск D, найдутся хотя бы два диска, на крае которых лежит только одна перемычка. Такие диски мы назовем *конечными*. Отметим концы перемычек и дуги $\widehat{\alpha}$. Хотя бы один из конечных дисков будет иметь не более трех отмеченных вершин

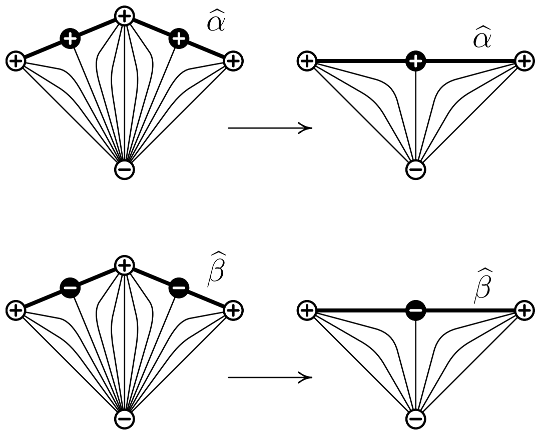


Рис. 2.23. Перекомбинирование двух полусёдел

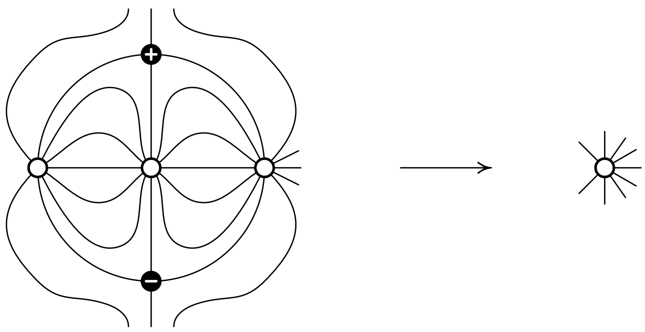
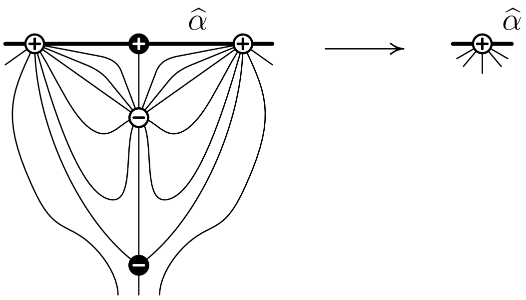


Рис. 2.24. Разглаживание складки внутри диска D

на крае. Возьмем этот диск за D_0 и рассмотрим ограничение слоения $\mathcal{F}$ на него.

Обозначим через V_k число внутренних вершин в D_0 валентности k, через B_k — число k-валентных вершин на крае ∂D_0 (валентность считается по отношению к D_0). По построению вершины на крае ∂D_0 чередуются с полуседлами (седло на перемычке, отрезающей D_0, считается полуседлом для D_0). Отсюда на крае ∂D_0 имеется $\sum_k B_k$ полуседел, а число сёдел внутри диска на единицу меньше числа вершин, т.е. равно $\sum_k V_k - 1$, исходя из эйлеровой характеристики. Заметим также, что вершин валентности < 2 нет ни на крае, ни внутри диска D_0.



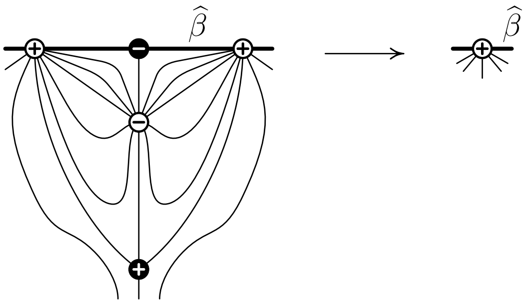


Рис. 2.25. Разглаживание складки на крае ∂D

Теперь посчитаем число сепаратрис двумя способами — по седлам и по вершинам. Из каждого полуседла выходит три сепаратрисы, а из внутреннего седла — четыре. Отсюда

$$3\sum_k B_k + 4\Big(\sum_k V_k - 1\Big) = \sum_k kB_k + \sum_k kV_k.$$

Перегруппируя слагаемые, получаем

$$B_2 + 2V_2 + V_3 = 4 + \sum_{k\geqslant 3}(k-3)B_k + \sum_{k\geqslant 4}(k-4)V_k \geqslant 4. \qquad (2.1)$$

Если $V_2 > 0$, мы имеем двухвалентную вершину внутри D_0. Если хотя бы одна из других вершин в её звезде внутренняя, можно разгладить складку внутри D. Если обе вершины в её звезде лежат на крае ∂D, то D_0 и есть эта звезда. Если $D_0 \neq D$, можно разгладить складку на крае. Если же $D_0 = D$, мы имеем $a = b = c = 1$, $d = 0$, т.е. базу индукции.

Пусть теперь $V_2 = 0$, $V_3 > 0$, т.е. мы имеем трехвалентную внутреннюю вершину P в D_0. В её звезде имеются два седла одного знака, к которым мы применяем перекомбинирование. Если они оба лежат на крае ∂D, в результате перекомбинирования удаляется одна граничная вершина. Если же нет, то a, b и c сохраняются, но P превращается в двухвалентную вершину.

При этом в последней ситуации может оказаться, что обе вершины, оставшиеся в звезде вершины P, лежат на крае ∂D. Это означает, что в результате перекомбинирования возникла новая перемычка, и $d' = d - 1$. Если же это не произошло, можно удалить складку внутри диска D. Оба варианта дают переход (E3).

Если $V_2 = V_3 = 0$, из формулы (2.1) следует $B_2 \geqslant 4$. На крае диска D_0 по построению имеется не более трех вершин, являющихся концами некоторой перемычки или пути $\widehat{\alpha}$, значит, среди оставшихся найдётся хотя бы одна двухвалентная. Она является внутренней либо для $\widehat{\alpha}$, либо для $\widehat{\beta}$ и имеет валентность 2 по отношению к D, а не только к D_0. Перекомбинирование сёдел в звезде этой вершины приводит к её удалению.

Теперь мы перейдем к подробному описанию манипуляций, позволяющих делать индукционный переход во всех указанных выше случаях.

2.8. Перекомбинирование сёдел

Этот прием можно применить всегда, когда в D найдётся ячейка Δ с двумя седлами одного знака на крае. Обозначим эти седла через S_1 и S_2, и пусть они лежат в страницах $\mathcal{P}_{\theta_1}$, $\mathcal{P}_{\theta_2}$ соответственно, причем $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, а сам диск Δ лежит в секторе $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ (мы всегда можем этого добиться вращением всей конструкции вокруг переплета, отчего соответствующая диаграмма $R \cup \alpha$ может претерпеть лишь циклические перестановки), см. рис. 2.26.

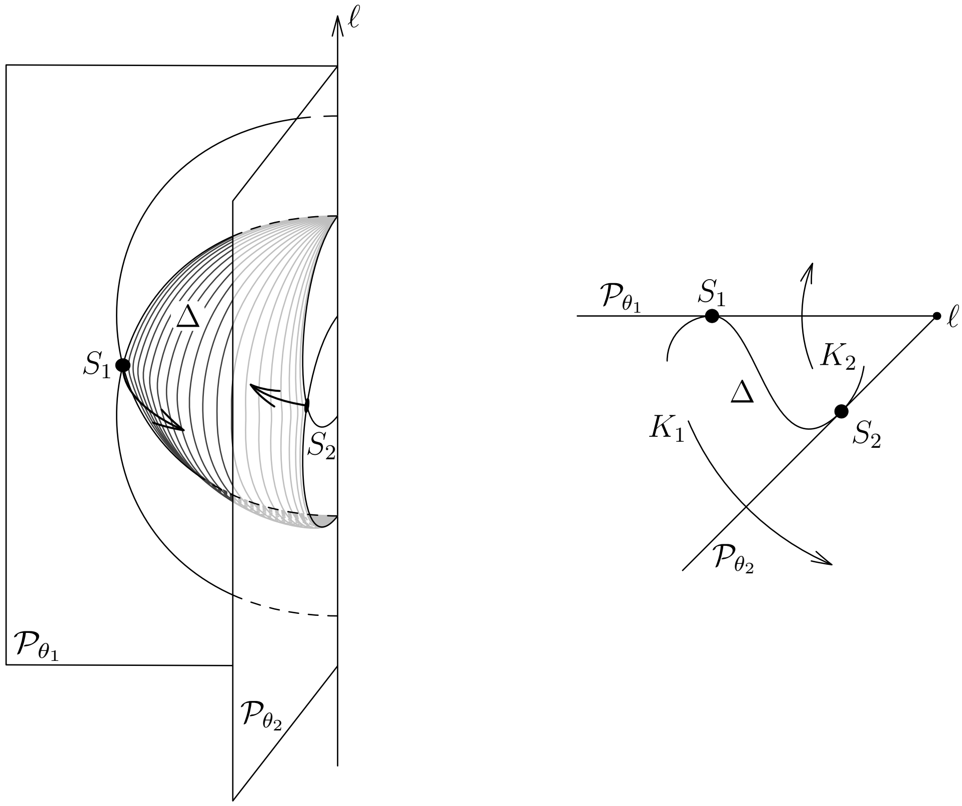


Рис. 2.26. Притягивание сёдел одного знака друг к другу

Обозначим этот сектор через K. Диск Δ разрезает его на две части, которые мы обозначим через K_1 и K_2. Совпадение знаков сёдел S_1 и S_2 означает, что сепаратрисы, выходящие из этих сёдел и не лежащие на крае диска Δ, лежат в K по разные стороны от Δ. При подходящей нумерации частей K_1, K_2 сепаратрисы, выходящие из седла S_i, лежат на границе ∂K_i, $i = 1, 2$, что мы далее и предполагаем.

Если внутри K_1 имеются дуги, принадлежащие $\widehat{R} \cup \widehat{\alpha}$, или седла слоения $\mathcal{F}$, вращением этих дуг вокруг переплета в положительную сторону и деформацией диска D их все можно вытолкнуть из сектора K в область $\theta_2 < \theta < \theta_2 + \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Аналогично, дуги и седла, попавшие внутрь K_2 можно вращением в отрицательную сторону и деформацией диска D вытолкнуть в сектор $\theta_1 - \varepsilon < \theta < \theta_1$. При этом с соответствующей Θ-диаграммой $R \cup \alpha$ могут произойти лишь рокировки вертикальных рёбер, а комбинаторная структура слоения $\mathcal{F}$ остается неизменной.

Тем самым устраняются топологические препятствия к тому, чтобы притянуть седла S_1 и S_2 друг к другу. Если оба седла внутренние, то деформацией диска D ячейку Δ можно полностью схлопнуть, и получится «обезьянье седло», которое можно разрешить в два простых седла тремя различными способами. На рис. 2.27 показаны последовательные сечения изменяющейся части диска D страницами, попавшими в сектор K для всех трех способов.

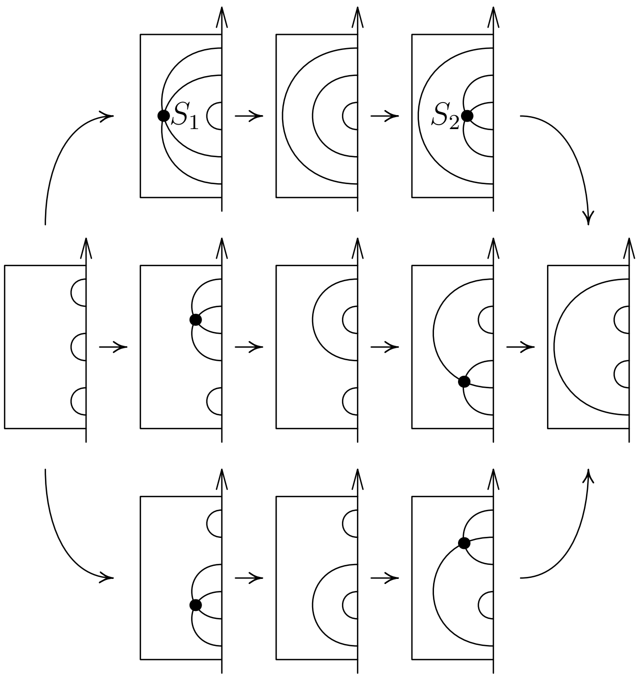


Рис. 2.27. Три варианта разрешения «обезьяньего седла»

Если ровно одно из сёдел S_1, S_2 является полуседлом, например,

S_2, то из трех способов разрешения «обезьяньего седла» остается только два, см. рис. 2.28.

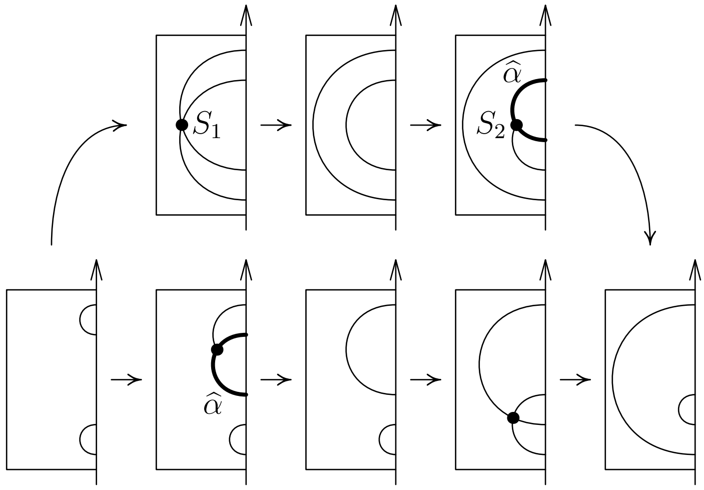


Рис. 2.28. Два варианта разрешения «обезьяньего седла» на крае

Если же и S_1, и S_2 — полуседла, после описанной выше процедуры выталкивания из K дуг и сёдел, в K останутся ровно две дуги из $\widehat{\alpha \cup \beta}$, на которых и находятся полуседла S_1 и S_2. Соответствующие этим дугам вертикальные рёбра Θ-диаграммы $R \cup \alpha$ окажутся соседними, и после нескольких рокировок к диаграмме можно будет применить дестабилизацию, см. рис. 2.29, где показан один из четырех возможных расположений ячейки Δ в пространстве. Другие варианты получаются из указанного симметриями относительно плоскости, перпендикулярной ℓ, и биссекторной плоскости между $\mathcal{P}_{\theta_1}$ и $\mathcal{P}_{\theta_2}$.

При этом, так как знаки полуседел S_1 и S_2 совпадают, они оба лежат либо на $\widehat{\alpha}$, либо на $\widehat{\beta}$. Нетрудно непосредственно убедиться, что в первом случае на α происходит дестабилизация типа I, а во втором — на β происходит дестабилизация типа II. Как изменяется последовательность сечений диска D страницами в секторе K, показано на рис. 2.30.

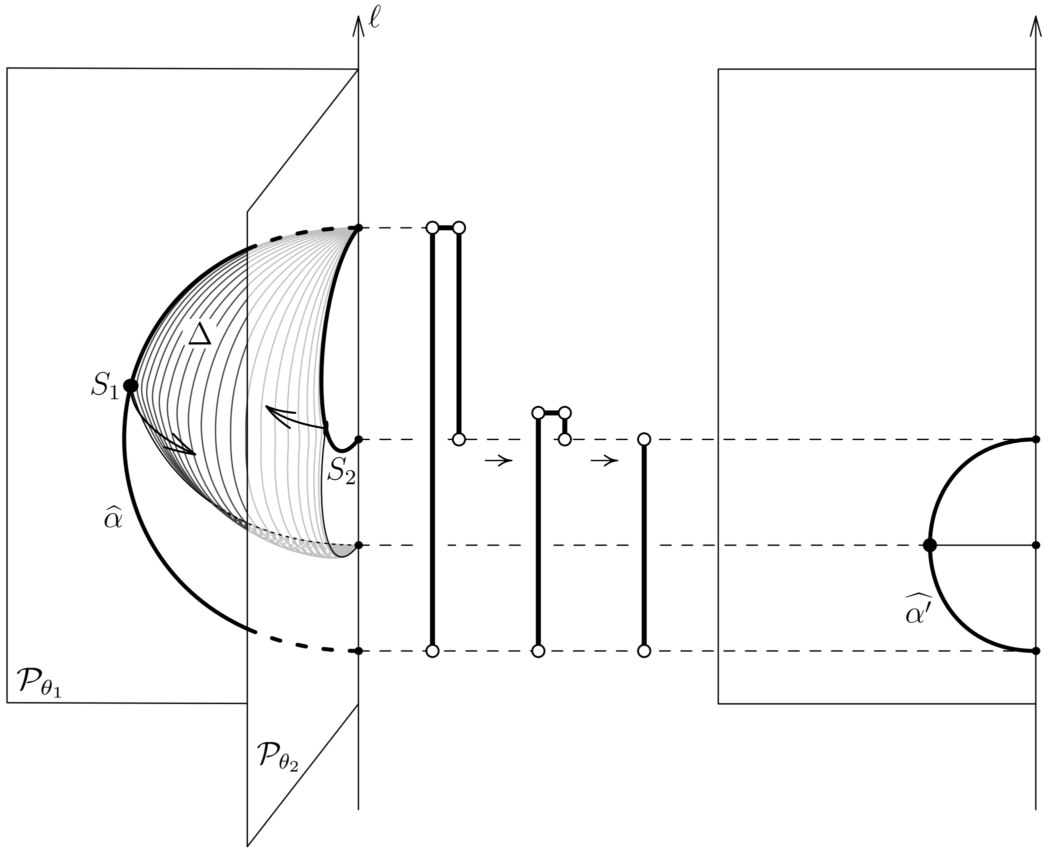


Рис. 2.29. Притягивание двух полусёдел и дестабилизация

Вверху изображена исходная последовательность сечений, внизу — после перекомбинирования полуседел.

В каждом из случаев перекомбинирования можно убедиться непосредственно, что знаки сёдел сохраняются, а изменение комбинаторики слоения $\mathcal{F}$ соответствует рис. 2.21, 2.22, 2.23. Каждый раз для перекомбинирования к диаграмме $R \cup \alpha$ применялись только циклические перестановки, рокировки и, в случае перекомбинирования двух сёдел на крае, одна дестабилизация. Тем самым выполнены требуемые условия соответствующего индукционного перехода (E1), (E2) или (E3).

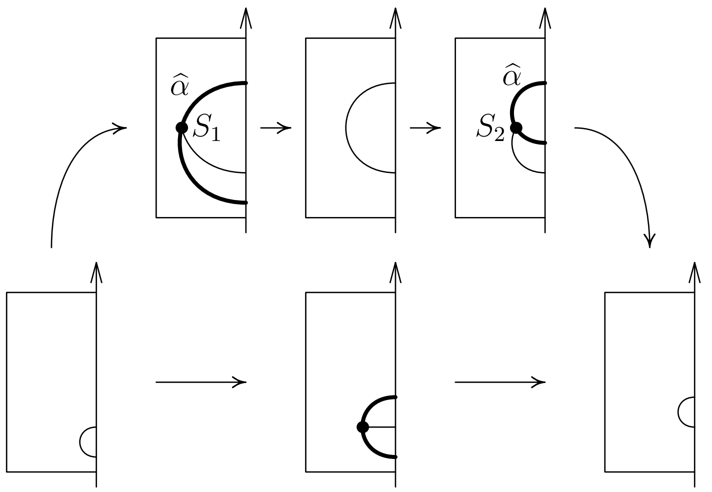


Рис. 2.30. Изменение сечений при перекомбинировании двух сёдел на крае

2.9. Разглаживание складки

Пусть P_0 — внутренняя двухвалентная вершина диска D. Пока мы не оговариваем, являются ли другие две вершины в её звезде — обозначим их через P_1 и P_2 — внутренними или граничными. Звезда вершины P_0 состоит из двух ячеек, которые мы обозначим через Δ_1, Δ_2 в соответствии с расположением вершин P_1 и P_2. Пусть вершины P_0, P_1, P_2 имеют на переплете координаты $z = z_0, z_1, z_2$ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что эти точки расположены в таком порядке: $z_1 < z_0 < z_2$. Действительно, если z_0 не лежит между z_1 и z_2, то можно добавить к $\mathbb{R}^3$ (и к переплету) точку ∞, получив трехмерную сферу, а затем выколоть взамен произвольную точку из интервала между z_1 и z_2, не лежащую на $D \cup \widehat{R}$. Для соответствующей Θ-диаграммы $\widehat{R} \cup \widehat{\alpha}$ эта операция приведет к циклической перестановке горизонтальных рёбер и, возможно, концов пути α.

Если мы имеем $z_2 < z_0 < z_1$, просто поменяем нумерацию вершин P_1, P_2.

Также без ограничения общности можно считать, что ячейка Δ_1 содержится в полупространстве $\theta \in [0, \pi]$, а ячейка Δ_2 — в полупространстве $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Действительно, этого всегда можно добиться, применяя отображение $(\rho, \theta, z) \mapsto (\rho, f(\theta), z)$, где f — подходящий диффеоморфизм окружности в себя степени 1. Такое отображение изотопно тождественному. На соответствующей диаграмме $R \cup \alpha$ при этом могут произойти лишь циклические перестановки вертикальных рёбер.

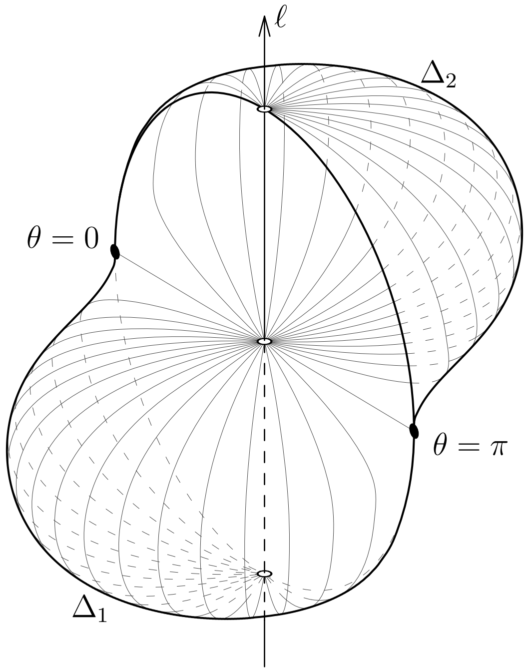


Рис. 2.31. Расположение складки в пространстве

Расположение ячеек Δ_1, Δ_2 в пространстве показано на рис. 2.31. Каждая из ячеек Δ_1, Δ_2 отрезает от своего полупространства трехмерный полушар, который мы обозначим через K_1 или K_2 соответственно.

Деформируя диск D и вращая дуги, составляющие $\widehat{R} \cup \widehat{\alpha}$, вокруг переплета, мы можем вытолкнуть из K_1 и K_2 все седла слоения $\mathcal{F}$ и все дуги. При этом в соответствующей диаграмме $R \cup \alpha$ могут произойти лишь рокировки и циклические перестановки вертикальных рёбер. В результате окажутся свободными от вершин диаграммы $R \cup \alpha$ следующие прямоугольники:

$$[0, \pi] \times [z_1, z_0] \quad \text{и} \quad [\pi, 2\pi] \times [z_0, z_2].$$

Теперь нет топологических препятствий к тому, чтобы переместить все вершины диска D, зацепления $\widehat{R}$ и пути $\widehat{\alpha}$ из интервала (z_1, z_0) в интервал $(z_2, z_2 + \varepsilon)$, а из интервала (z_0, z_2) в интервал $(z_1 - \varepsilon, z_1)$ при достаточно малом ε, рис. 2.32. В каждой из двух порций перемещаемых

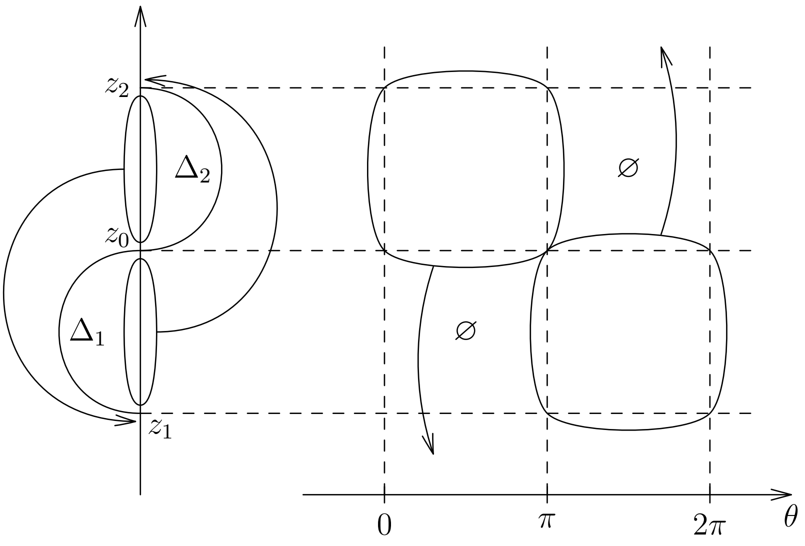


Рис. 2.32. Перемещение вершин при разглаживании складки

вершин при этом сохраняется порядок следования на переплете.

Отметим, что ни в одном сечении вида $\mathcal{P}_t \cap (D \cup \widehat{R})$ из вершин диска D или зацепления $\widehat{R}$ не выходит более одной дуги. В данном случае нам важно это знать для вершин P_0, P_1, P_2, так как в противном случае к указанной выше перестаноке вершин могли бы возникнуть препятствия. Отсутствие в страницах $\mathcal{P}_t$ дуг с общими концами обеспечивается условиями (D3) и (D4) в определении правильного диска.

Теперь между вершинами P_1 и P_2 нет вершин диска D и зацепления $\widehat{R}$, за исключением вершины P_0. Дальнейшие действия зависят от того, в каком месте по отношению к краю диска D оказался фрагмент $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

Если одна из вершин P_1 или P_2 является внутренней, деформацией диска можно удалить две вершины, см. рис. 2.33, где предполагается, что внутренней является вершина P_1. Такую деформацию можно выбрать реализующей изменение слоения $\mathcal{F}$, показанное на рис. 2.24.

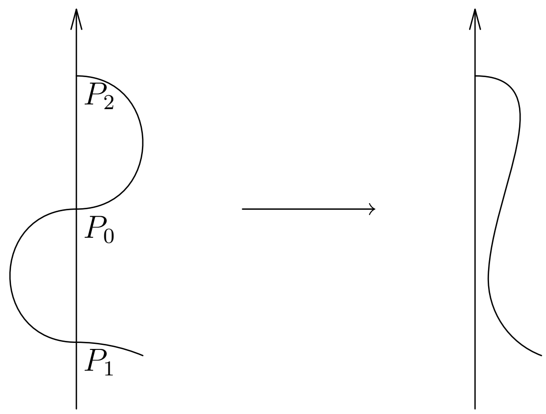


Рис. 2.33. Удаление складки

При этом край диска D не затрагивается, поэтому диск остается правильным.

Пусть теперь обе вершины P_1 и P_2 лежат на крае диска D. В параграфе 2.7 нам не требовалось разглаживание складки в случае, когда звезда $\Delta_1 \cup \Delta_2$ вершины P_0 ограничена двумя перемычками. Мы исключили этот случай, потребовав, чтобы диск D_0 был конечным.

Таким образом, если $P_1, P_2 \in \partial D$, то хотя бы одна из дуг с концами P_1, P_2, ограничивающая $\Delta_1 \cup \Delta_2$, принадлежит $\widehat{\alpha \cup \beta}$. Рассмотрим случай, когда такая дуга ровно одна и принадлежит $\widehat{\alpha}$, т.е. содержит положительное полуседло. Исходя из расположения ячеек Δ_1 и Δ_2, которое мы рассматриваем, положительным является полуседло в странице $\mathcal{P}_\pi$, см. рис. 2.34.

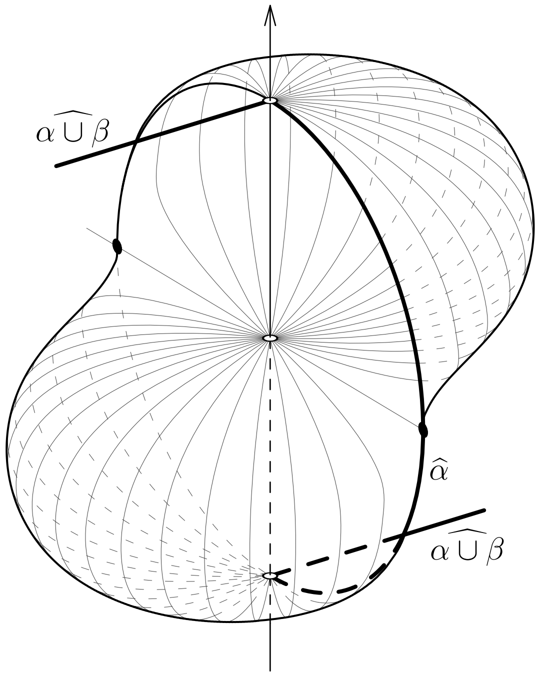


Рис. 2.34. Взаимное расположение складки и дуг $\widehat{\alpha \cup \beta}$

Разглаживание складки в этом случае состоит в следующем. Сначала мы удаляем внутренность диска $\Delta_1 \cup \Delta_2$ вместе с частью края, лежащей в $\widehat{\alpha}$. Затем мы стягиваем отрезок $[P_1, P_2]$ переплета в точку, одновременно стягивая в отрезок диск, отрезаемый от $\mathcal{P}_0$ сепаратрисами, лежащими на крае $\partial(\Delta_1 \cup \Delta_2)$, см. рис. 2.35.

На соответствующей прямоугольной диаграмме при этом схлопывается вертикальное ребро $\pi \times [z_1, z_2]$, входящее в α, см. рис. 2.36. В полосе $\mathbb{R} \times [z_1, z_2]$ нет других вершин диаграммы $R \cup \alpha$, поэтому данную операцию можно представить как композицию нескольких рокировок вертикальных рёбер и дестабилизации, если только путь α содержит хотя бы два ребра. А именно, если ребро $z = z_1$ принадлежит α, то короткое вертикальное ребро $\pi \times [z_1, z_2]$ следует рокировками двигать вправо, по-

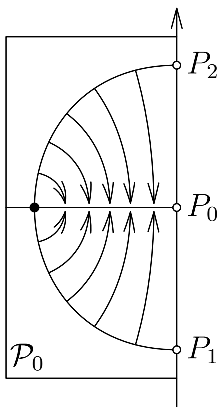


Рис. 2.35. Стягивание диска в странице $\mathcal{P}_0$

ка ребро $z = z_1$ не станет коротким, и затем применить дестабилизацию. Если это ребро не входит в α, то короткое вертикальное ребро следует аналогичным образом двигать влево.

Исходя из расположения сокращаемых рёбер нетрудно видеть, что дестабилизация имеет тип I. Нетрудно также видеть, что изменение слоения $\mathcal{F}$ при этом соответствует тому, что показано на рис. 2.25.

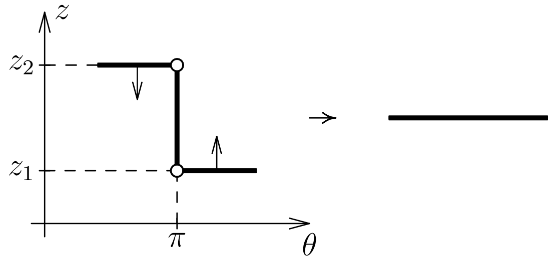


Рис. 2.36. Изменение прямоугольной диаграммы $\alpha \cup \beta$ при разглаживании складки на крае

Если же ребро $\pi \times [z_1, z_2]$ является единственным ребром пути α, то дестабилизация невозможна. Предположим, что это так и есть. Диаграмма $\alpha \cup \beta$ все равно допускает упрощение типа I, в результате чего получается диаграмма тривиального узла, имеющая сложность, равную её же числу Торстона–Беннекена. Ввиду равенства (1.2), это противоречит теореме 1.9.1.

Таким образом, ситуация, в которой ребро $\pi \times [z_1, z_2]$ окажется единственным ребром пути α и создаст препятствие к разглаживанию складки, не может иметь места.

Если на крае диска $\Delta_1 \cup \Delta_2$ лежит ровно одна дуга из $\widehat{\alpha \cup \beta}$, и эта дуга принадлежит $\widehat{\beta}$, то аналогичная процедура позволяет упростить путь β. Его длина и по совместительству вес шунта α уменьшаются на единицу. Из соображений симметрии в этом случае на пути β произойдет упрощение типа II.

В этом случае для разглаживания складки требуется, чтобы путь β имел более одного ребра, и это снова доказывается от противного. А именно, если β состоит из одного ребра, то $\mathrm{tb}(\alpha \cup \beta) = -1$, а $\alpha \cup \beta$ допускает дестабилизацию типа II, при которой образуется диаграмма тривиального узла с $\mathrm{tb} = 0$, что противоречит теореме 1.9.1.

Во всех случаях разглаживания складки диаграмма $R \cup \alpha$ претерпевает только циклические перестановки, рокировки и в случае складки на крае одну дестабилизацию, поэтому условия соответствующего индукционного перехода — (E1), (E2) или (E3) — выполнены.

Наконец, край диска $\Delta_1 \cup \Delta_2$ может совпадать с $\widehat{\alpha \cup \beta}$. Это значит, что каждый из путей $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$ состоит из одной дуги, а диск $\Delta_1 \cup \Delta_2$ совпадает с D. Эта ситуация обсуждается ниже.

2.10. База индукции

Мы продолжаем рассуждение из предыдущего пункта. В результате описанных там манипуляций мы приходим к ситуации, в которой α и β имеют ровно по одному ребру, которые суть $\pi \times [z_1, z_2]$ и $0 \times [z_1, z_2]$ соответственно, а концы пути $R \setminus \beta$ расположены внутри отрезков $[0, \pi] \times z_2$ и $[\pi, 2\pi] \times z_1$, рис. 2.37.

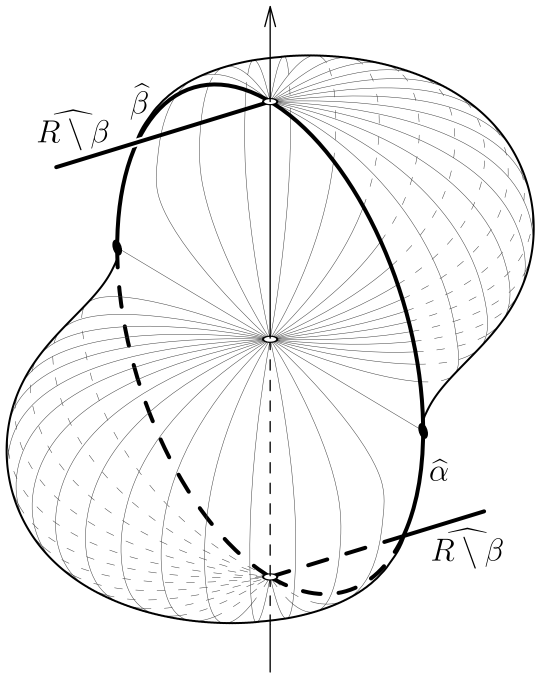


Рис. 2.37. Взаимное расположение складки и дуг $\widehat{R} \cup \widehat{\alpha}$ для максимально упрощенного диска

При этом внутри полосы $\mathbb{R} \times [z_1, z_2]$ вершин диаграммы $R \cup \alpha$ нет, см. рис. 2.38. Очевидно, что к R можно применить упрощение типа II, в результате чего получится диаграмма, которую можно также получить упрощением типа I из $(R \setminus \beta) \cup \alpha$, т.е. лежандрово эквивалентная $(R \setminus \beta) \cup \alpha$.

Ключевая Лемма доказана.

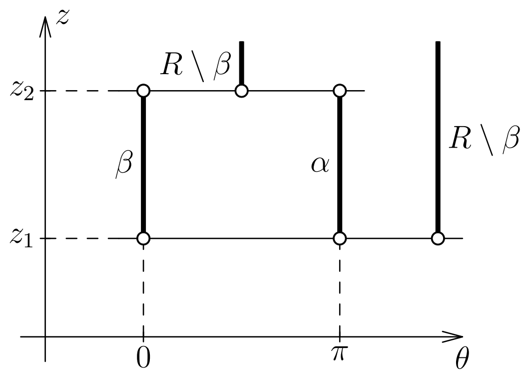


Рис. 2.38. Упрощение диаграммы $R \cup \alpha$ для шунта веса 1 и длины 1

Глава 3

Следствия из Ключевой леммы

3.1. Введение

Эта глава полностью посвящена следствиям Ключевой Леммы, доказанной в прошлой главе. Напомним её формулировку.

Ключевая Лемма. *Пусть R — прямоугольная диаграмма зацепления и (α, β) — шунт меньшего веса, чем число вертикальных рёбер той компоненты зацепления R, на рёбрах которой находятся концы шунта α.*

Тогда найдётся прямоугольная диаграмма R', лежандрово эквивалентная $(R \setminus \beta) \cup \alpha$, которая из R может быть получена b последовательными элементарными упрощениями типа II, где b — вес шунта (α, β).

В параграфе 3.2 собраны следствия, касающиеся независимости дестабилизаций разных типов, переформулировки Ключевой Леммы в терминах лежандровых зацеплений или вычисления максимального числа Торстона–Беннекена. В частности, доказательство теоремы о монотонном упрощении [30] можно несколько упростить, если использовать связь с лежандровыми узлами. В параграфе 3.2 мы покажем, как свести теорему о монотонном упрощении к теореме Элиашберга–Фрейзер [33, 34] о классификации лежандровых узлов, имеющих тривиальный топологический тип, или теореме Эрландссона [38] об отрицательности числа Торстона–Беннекена тривиального узла.

В параграфе 3.3 мы докажем усиление Ключевой Леммы: критерий упрощаемости прямоугольных диаграмм в терминах существования шунта. В параграфах 3.4 и 3.6 мы докажем анонсированные в 1.5 и 1.6 соответственно теоремы о классах Бирман-Менаско и трансверсальных зацеплениях. Параграф 3.5 посвящён доказательству обобщённой гипотезы Джонса.

3.2. Независимость упрощений разных типов

Теорема 3.2.1. *Пусть прямоугольные диаграммы R_1 и R_2 лежандрово эквивалентны и диаграмма R_1 допускает элементарное упрощение $R_1 \mapsto R_1'$ типа II. Тогда диаграмма R_2 допускает такое элементарное упрощение $R_2 \mapsto R_2'$ типа II, что полученная при этом диаграмма R_2' лежандрово эквивалентна диаграмме R_1'.*

Доказательство. Поскольку рокировки и циклические перестановки рёбер сохраняют лежандров тип прямоугольной диаграммы, достаточно рассмотреть случай, когда $R_1 \mapsto R_1'$ — дестабилизация типа II. В этом случае, как видно из рис. 3.1, для R_1 существует элементарный шунт α_1,

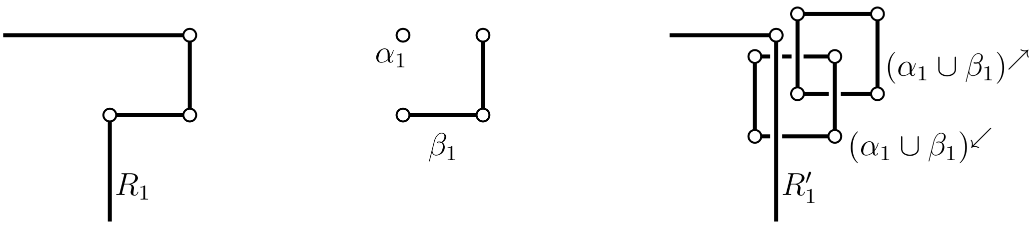


Рис. 3.1. Элементарный шунт из одной вершины

состоящий всего из одной вершины, причем R_1' получается из R_1 заменой соответствующего шунтируемого пути β_1 (из трех вершин) на α_1.

Из предложения 2.4.3 следует, что для диаграммы R_2 также существует прямоугольный путь α_2 такой, что прямоугольные Θ-диаграммы $R_1 \cup \alpha_1$ и $R_2 \cup \alpha_2$ лежандрово эквивалентны. Согласно предложению 2.4.2

это означает, в частности, что α_2 является для R_2 элементарным шунтом. Пусть β_2 — соответствующий шунтируемый путь. Тогда диаграмма $(R_2 \setminus \beta_2) \cup \alpha_2$ лежандрово эквивалентна диаграмме $(R_1 \setminus \beta_1) \cup \alpha_1 = R_1'$.

Так как шунт α_2 элементарный, для него выполнены условия Ключевой Леммы. Ее применение завершает доказательство. $\square$

Из теорем 1.8.1 и 3.2.1 немедленно вытекает

Следствие 3.2.2. *Пусть R — прямоугольная диаграмма зацепления такая, что соответствующее лежандрово зацепление L_R ($L_{R^\frown}$) допускает дестабилизацию $L_R \mapsto L'$ (соответственно, $L_{R^\frown} \mapsto L'$). Тогда диаграмма R допускает элементарное упрощение $R \mapsto R'$ типа II (соответственно, типа I), для которого зацепления L' и $L_{R'}$ (соответственно, L' и $L_{R'^\frown}$) лежандрово эквивалентны.*

Кроме того, мы получаем основной результат работы [30]:

Следствие 3.2.3 (Теорема о монотонном упрощении тривиального узла)**.** *Любая нетривиальная диаграмма тривиального узла допускает последовательность элементарных упрощений, заканчивающихся тривиальной диаграммой.*

Доказательство. Нетривиальность прямоугольной диаграммы R означает, что её сложность больше 2. Вместе с формулой (1.2) это означает, что хотя бы один лежандровых узлов L_R и $L_{R^\frown}$ имеет число Торстона–Беннекена меньше (-1). Из теоремы Элиашберга–Фрейзер о классификации топологически тривиальных лежандровых узлов (теорема 1.9.2 выше) этот узел допускает дестабилизацию. Значит, R допускает элементарное упрощение. Утверждение теоремы получается теперь очевидной индукцией по сложности диаграммы R.

В этом доказательстве мы использовали классификационную теорему Элиашберга–Фрейзер, которая утверждает значительно больше, чем будет нужно, если мы не воспользуемся Ключевой Леммой как есть, а проведем заново её доказательство с небольшими модификациями (в сторону упрощения).

Пусть K — прямоугольная диаграмма тривиального узла. Обозначим через a и b числа $(-\operatorname{tb}(K^{\frown}))$ и $(-\operatorname{tb}(K))$ соответственно. Согласно теореме 1.9.1 мы имеем $a, b > 0$. Напомним, что согласно равенству (1.2) общее число вертикальных рёбер в K равно $a+b$. Поэтому диаграмму K можно представить как объединение двух прямоугольных путей α и β, включающих соответственно a и b вертикальных рёбер.

А теперь следует просто вернуться к началу параграфа 2.6 и повторить процедуру построения и упрощения диска D, игнорируя присутствие прямоугольного пути $R \setminus \beta$ и всего, что с ним связано. $\square$

Следующее утверждение, анонсированное в самом начале, является еще одним следствием теоремы 3.2.1.

Теорема 3.2.4. *Пусть прямоугольная диаграмма R допускает k последовательных элементарных упрощений $R \mapsto R'_1 \mapsto R'_2 \mapsto \ldots \mapsto R'_k$ типа I, а также ℓ последовательных элементарных упрощений $R \mapsto R''_1 \mapsto \ldots \mapsto R''_\ell$ типа II.*

Тогда диаграмма R'_k допускает ℓ последовательных упрощений типа II, причем полученная в результате диаграмма связана с диаграммой R''_ℓ последовательностью циклических перестановок, рокировок и стабилизаций/дестабилизаций типа I.

Аналогично, диаграмма R''_ℓ допускает k последовательных упрощений типа I, причем полученная в результате диаграмма связана с диа-

граммой R'_k последовательностью циклических перестановок, рокировок и стабилизаций/дестабилизаций типа II.

Доказательство. Диаграммы R и R'_k по условию лежандрово эквивалентны. Отсюда, применяя ℓ раз теорему 3.2.1, получаем, что существует последовательность $R'_k \mapsto R'''_1 \mapsto R'''_2 \mapsto \ldots \mapsto R'''_\ell$, элементарных упрощений, в которой диаграмма R'''_i лежандрово эквивалентна R''_i при всех $i = 1, \ldots, \ell$, а это и есть переформулировка первого утверждения теоремы. Второе утверждение ему симметрично. $\square$

Теорема 3.2.5. *Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — два лежандровых типа лежандровых зацеплений, имеющих зеркально симметричные топологические типы. Тогда найдётся прямоугольная диаграмма R такая, что лежандровы зацепления L_R и $L_{R^\curvearrowright}$ имеют типы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно.*

Доказательство. Пусть R_1 и R_2 — прямоугольные диаграммы, для которых лежандровы зацепления L_{R_1} и $L_{R_2^\curvearrowright}$ имеют типы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно. Тогда топологические типы зацеплений, задаваемых этими диаграммами, одинаковы, и от одной к другой можно перейти последовательностью элементарных преобразований.

По лемме 1.2.3 можно считать, что в этой последовательности сначала происходят все стабилизации, потом идут рокировки и циклические перестановки, а завершают процесс дестабилизации. Из леммы 1.2.4 вытекает, что можно при этом добиться того, чтобы стабилизации разных типов происходили далеко друг от друга, т.е. в окрестностях разных вершин. В этом случае они перестановочны, и без ограничения общности можно считать, что сначала происходят все стабилизации типа I, а потом все стабилизации типа II. Но стабилизации типа I не меняют лежандров тип зацепления L_{R_1}, поэтому можно считать, что их вообще нет.

Аналогично, без ограничения общности можно считать, что в нашей последовательности элементарных преобразований нет дестабилизаций типа II.

Стартуя с диаграммы R_1 и сделав все стабилизации (типа II), мы получаем диаграмму R' такую, что R_1 получается из неё элементарными упрощениями типа II, а R_2 — элементарными упрощениями типа I. Из теоремы 3.2.4 теперь следует, что существует диаграмма R, которая получается из R_2 элементарными упрощениями типа II и лежандрово эквивалентна диаграмме R_1. Эта диаграмма R и является искомой. $\square$

Из теоремы 3.2.5 и равенства (1.2) вытекает положительный ответ на вопрос, поставленный Дж.Грином, см. [86], Question 1:

Следствие 3.2.6. *Если R — самая простая прямоугольная диаграмма, представляющая данный топологический тип зацеплений, то L_R имеет наибольшее число Торстона–Беннекена среди всех лежандровых зацеплений того же топологического типа.*

Следствие 3.2.6 даёт способ вычисления максимального числа Торстона–Беннекена по минимальной диаграмме. Опираясь на работу [60], где закончено вычисление минимальных прямоугольных диаграмм для всех узлов с минимальным числом перекрёстков не более 12, мы закрываем оставшиеся неизвестные значения максимального числа Торстона–Беннекена на сайте KnotInfo [24].

Предложение 3.2.7. *Обозначим зеркальный образ узла K за $m(K)$, а за $\overline{\mathrm{tb}}(K)$ — максимальное число Торстона–Беннекена узла K. В следу-*

ющей таблице использованы обозначения Рольфсена [99].

K	$\overline{\text{tb}}(K)$	$\overline{\text{tb}}(m(K))$
$12n_{41}$	-6	-5
$12n_{119}$	-1	-10
$12n_{120}$	-12	1
$12n_{121}$	-10	0
$12n_{145}$	-9	-2
$12n_{153}$	7	-18
$12n_{199}$	-12	1
$12n_{200}$	-10	-1
$12n_{243}$	7	-17
$12n_{260}$	-10	-1
$12n_{282}$	-9	-2
$12n_{310}$	-3	-8
$12n_{322}$	-5	-6
$12n_{351}$	-5	-6
$12n_{362}$	-7	-4
$12n_{368}$	3	-14
$12n_{377}$	-7	-4
$12n_{403}$	-9	-1
$12n_{414}$	-8	-3
$12n_{425}$	-11	0
$12n_{475}$	-4	-6
$12n_{523}$	-10	-1
$12n_{549}$	1	-12

3.3. Эквивалентность существований упрощения и шунта

Теперь мы установим в более общем виде связь между шунтами и упрощениями.

Теорема 3.3.1. *Пусть R — прямоугольная диаграмма зацепления, $K \subset R$ — одна из её связных компонент, $\mathcal{L}$ — некоторый лежандров тип. Следующие условия равносильны:*

(C1) диаграмма R допускает $b > 0$ последовательных элементарных упрощений типа II на компоненте K, приводящих к диаграмме, имеющий лежандров тип $\mathcal{L}$;

(C2) для диаграммы R найдётся шунт α веса b с концами на рёбрах компоненты K, и при замене им шунтируемого пути получается диаграмма, имеющая лежандров тип $\mathcal{L}$.

Доказательство. (C2) $\Rightarrow$ (C1) Применим к диаграмме R достаточное число стабилизаций типа I на компоненте K вне шунтируемого пути с тем, чтобы число вертикальных рёбер этой компоненты стало больше b. Полученную диаграмму обозначим через $\check{R}$.

Согласно Ключевой Лемме найдётся последовательность элементарных упрощений $\check{R} \mapsto \check{R}_1 \mapsto \check{R}_2 \mapsto \ldots \mapsto \check{R}_b$ такая, что последняя диаграмма лежандрово эквивалентна $(\check{R} \setminus \beta) \cup \alpha$, которая, в свою очередь, лежандрово эквивалентна $(R \setminus \beta) \cup \alpha$, где β — шунтируемый путь.

Применяя теперь b раз теорему 3.2.1, получаем, что имеется последовательность элементарных упрощений $R \mapsto R_1 \mapsto R_2 \mapsto \ldots \mapsto R_b$, в которой каждая диаграмма R_i лежандрово эквивалентна соответствующей диаграмме $\check{R}_i$.

(C1) $\Rightarrow$ (C2)

Пусть $R = R_0 \mapsto R_1 \mapsto \ldots \mapsto R_b$ последовательность элементарных упрощений. Из леммы 1.2.3 следует, что R_b можно получить из R последовательностью элементарных преобразований, в которой последние b являются дестабилизациями, а все предыдущие — циклическими перестановками и рокировками. При этом согласно лемме 1.2.4 можно считать, что все b дестабилизаций происходят в окрестности одной и той же вершины P диаграммы R_b.

Таким образом, мы можем найти последовательность сохраняющих сложность преобразований от диаграммы R к некоторой диаграмме R' такой, что R_b получается из R' последовательностью из b дестабилизаций типа II, которые все происходят в малой окрестности некоторой вершины P диаграммы R_b. Нетрудно видеть, что эта вершина P является тогда шунтом веса b, а переход от R' к R_b является заменой шунтируемого пути на P, см. рис. 3.2. Из предложений 2.4.3 и 2.4.2 теперь следует, что для R

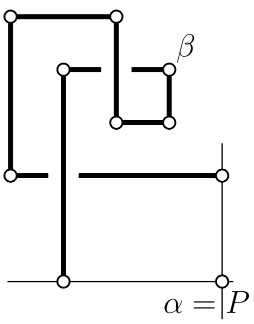


Рис. 3.2. Шунт α веса $b = 3$

существует шунт веса b, замена которым шунтируемого пути приводит к диаграмме, лежандрово эквивалентной R_b. $\square$

Замечание 3.3.2. Из теоремы 3.3.1 следует, что ограничение на шунт в условии Ключевой Леммы является фактически лишним — вес шунта всегда меньше числа вертикальных рёбер компоненты, к которой прикреплены его концы.

Замечание 3.3.3. Теорему 3.3.1 можно усилить, разрешив упрощениям происходить на разных компонентах и введя соответствующее понятие независимых шунтов. А именно, шунты независимы, если соответствующие им диски, указанные в определении шунта, не пересекаются. Если имеется набор независимых шунтов, то каждый из них независимо обеспечивает столько элементарных упрощений компоненты, к которой он прикреплен, каков его вес. Доказательство этого утверждения не содержит никаких новых трудностей по сравнению с доказательством теоремы 3.3.1, но в целях ясности изложения мы предпочли ограничиться случаем одного шунта.

3.4. Классы Бирман–Менаско

Здесь мы приводим доказательство теоремы о классах Бирман-Менаско, которая была сформулирована в параграфе 1.5. Напомним, что в этом и следующих двух параграфах прямоугольные диаграммы предполагаются ориентированными.

Теорема 3.4.1. *Пусть классы Бирман–Менаско $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ задают эквивалентные ориентированные зацепления. Тогда найдётся класс Бирман–Менаско $\mathcal{B}$, который может быть получен из $\mathcal{B}_1$ последовательностью только положительных, а из $\mathcal{B}_2$ только отрицательных стабилизаций и дестабилизаций.*

То же верно, если классы Бирман–Менаско заменить на классы сопряженности кос.

Доказательство. Пусть R_1 и R_2 — такие ориентированные прямоугольные диаграммы, что $\beta_{R_1} \in \mathcal{B}_1$ и $\beta_{R_2} \in \mathcal{B}_2$. По условию замыкания кос β_1, β_2 эквивалентны, отсюда согласно предложению 1.5.2 диаграммы R_1 и R_2 задают эквивалентные ориентированные зацепления.

По теореме 3.2.5 найдётся диаграмма R, лежандрово эквивалентная R_1 и такая, что $R^{\curvearrowright}$ лежандрово эквивалентна $R_2^{\curvearrowright}$. Класс $[\beta_R]_{\mathrm{BM}}$ и является тогда искомым.

Действительно, диаграмма R получается из R_1 последовательностью циклических перестановок, рокировок и стабилизаций дестабилизаций типов $\overrightarrow{\mathrm{I}}$ и $\overleftarrow{\mathrm{I}}$. Из этих операций только стабилизации и дестабилизации типа $\overleftarrow{\mathrm{I}}$ меняют класс Бирман–Менаско соответствующей косы, причем им соответствуют положительные стабилизации и дестабилизации.

В случае с R_2 рассуждение отличается лишь заменой типов стабилизаций и дестабилизаций на $\overrightarrow{\mathrm{II}}$ и $\overleftarrow{\mathrm{II}}$ для прямоугольных диаграмм и на отрицательный для соответствующих кос.

Второе утверждение теоремы, касающееся классов сопряженности кос, следует из первого и наблюдения Дж.Бирман и Н.Ринкл [19], что операцию обмена можно представить как последовательность сопряжений, стабилизации и дестабилизации, в которой стабилизация и дестабилизация одного *наперед заданного* знака. Для положительных стабилизации и дестабилизации это разложение выглядит следующим образом:

$$
\begin{array}{rcl}
\beta_1\sigma_n\beta_2\sigma_n^{-1} & & \\
\text{сопряжение}\downarrow & & \\
\sigma_n\beta_1\sigma_n\beta_2\sigma_n^{-2} & & \beta_1\sigma_n^{-1}\beta_2\sigma_n \\
\text{стабилизация}\downarrow & & \uparrow\text{сопряжение} \\
\sigma_n\beta_1\sigma_n\beta_2\sigma_n^{-2}\sigma_{n+1} & & \sigma_n^{-2}\beta_2\sigma_n\beta_1\sigma_n \\
\text{сопряжение}\downarrow & & \uparrow\text{дестабилизация} \\
\sigma_n^{-2}\sigma_{n+1}^{-1}\beta_2\sigma_n^{-2}\sigma_{n+1}\sigma_n\beta_1\sigma_n\sigma_{n+1}\sigma_n^2 & = & \sigma_n^{-2}\beta_2\sigma_n\beta_1\sigma_n\sigma_{n+1}
\end{array}
\tag{3.1}
$$

Чтобы получить аналогичное разложение для отрицательных стабилизации и дестабилизации, в этой цепочке следует обратить все σ_n и σ_{n+1}, а также всю последовательность. $\square$

3.5. Гипотеза Джонса

Для любого $n \geqslant 2$ будем обозначим через w гомоморфизм из B_n в $\mathbb{Z}$, определенный условием $\mathrm{w}(\sigma_1) = 1$. Иначе говоря, $\mathrm{w}(\beta)$ — алгебраическое число пересечений на диаграмме, представляющей косу β.

В работе [62] В.Джонс задал следующий вопрос: верно ли, что $\mathrm{w}(\beta)$ для минимальной косы является инвариантом соответствующего зацепления? Под минимальной имеется в виду коса, имеющая наименьшее возможное число нитей среди кос, задающих то же ориентированное зацепление.

Положительный ответ на этот вопрос, который стало принято называть гипотезой Джонса, был дан для нескольких бесконечных серий узлов, см. [64] и ссылки там. Следующее, более сильное утверждение было высказано в качестве гипотезы в [64] и [78] и получило название обобщенной гипотезы Джонса.

Теорема 3.5.1. *Пусть косы $\beta_1 \in B_m$ и $\beta_2 \in B_n$ представляют один и тот же класс ориентированных зацеплений, причем коса β_1 имеет наименьшее возможное для этого класса число нитей. Тогда*

$$|\,\mathrm{w}(\beta_2) - \mathrm{w}(\beta_1)| \leqslant n - m.$$

В частности, при $n = m$ мы имеем $\mathrm{w}(\beta_1) = \mathrm{w}(\beta_2)$.

Доказательство. По теореме 3.4.1 найдётся натуральное p и коса $\beta \in B_p$ такая, что классы $[\beta]_{\mathrm{BM}}$ и $[\beta_1]_{\mathrm{BM}}$ могут быть связаны последовательностью положительных стабилизаций и дестабилизаций, а классы $[\beta]_{\mathrm{BM}}$ и $[\beta_2]_{\mathrm{BM}}$ — последовательностью отрицательных.

При положительных (де)стабилизациях сохраняется разность алгебраического числа пересечений косы и числа нитей. Отсюда

$$\mathrm{w}(\beta_1) - m = \mathrm{w}(\beta) - p.$$

Аналогично, при отрицательных (де)стабилизациях, сохраняется сумма алгебраического числа пересечений и числа нитей, следовательно

$$\mathrm{w}(\beta_2) + n = \mathrm{w}(\beta) + p.$$

Отсюда

$$p = \frac{1}{2}(m + n + \mathrm{w}(\beta_2) - \mathrm{w}(\beta_1)).$$

Из условия $p \geqslant m$ получаем

$$\mathrm{w}(\beta_2) - \mathrm{w}(\beta_1) \geqslant m - n.$$

Аналогичным образом, взяв косу β так, чтобы класс $[\beta]_{\mathrm{BM}}$ был связан последовательностью отрицательных стабилизаций и дестабилизаций с $[\beta_1]_{\mathrm{BM}}$, а положительных — с $[\beta_2]_{\mathrm{BM}}$, мы получим

$$\mathrm{w}(\beta_2) - \mathrm{w}(\beta_1) \leqslant n - m.$$

□

В работе [78] замечено, что усиленная гипотеза Джонса, которую мы только что доказали, равносильна следующему утверждению.

Теорема 3.5.2. *Пусть плоские диаграммы D_1 и D_2 представляют эквивалентные ориентированные зацепления и имеют соответственно m и n окружностей Зейферта, причем m — минимально возможное число окружностей Зейферта для диаграмм, задающих зацепления того же топологического типа. Тогда*

$$|w(D_2) - w(D_1)| \leqslant n - m,$$

где $w(D)$ обозначает алгебраическое число пересечений диаграммы D.

Замечание 3.5.3. Наш метод доказательства обобщенной гипотезы Дожнса частично повторяет подход, предложенный в 2008 г. К.Кавамуро, а именно в том, что это утверждение сводится к «принципу коммутативности», однако в формулировке принципа тогда использовались классы сопряженности кос, а не классы Бирман–Менаско, что делало её неверной.

3.6. Трансверсальные зацепления

Теорема 3.4.1 на языке трансверсальных зацеплений означает, что для любых двух кос β_1, β_2, задающих эквивалентные ориентированные зацепления, найдётся коса β такая, что $[\beta]_{\mathrm{t}} = [\beta_1]_{\mathrm{t}}$, $[\beta^{-1}]_{\mathrm{t}} = [\beta_2^{-1}]_{\mathrm{t}}$.

Теорема 3.6.1. *Пусть классы Бирман–Менаско $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ содержатся в одном трансверсальном классе и $\mathcal{B}_1$ допускает отрицательную дестабилизацию $\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_1'$. Тогда $\mathcal{B}_2$ также допускает отрицательную дестабилизацию $\mathcal{B}_2 \mapsto \mathcal{B}_2'$, причем такую, что $\mathcal{B}_1'$ и $\mathcal{B}_2'$ также содержатся в одном трансверсальном классе.*

Доказательство. Пусть R_2 и R_1' — ориентированные прямоугольные диаграммы, для которых $\beta_{R_2} \in \mathcal{B}_2$, $\beta_{R_1'} \in \mathcal{B}_1'$. Тогда от R_2 к R_1' можно перейти последовательностью элементарных преобразований, включающих ровно одну $\overleftarrow{\mathrm{II}}$-дестабилизацию и не включающей $\overleftarrow{\mathrm{II}}$-стабилизаций.

Используя леммы 1.2.3 и 1.2.4, получаем, что от R_2 к R_1' можно перейти последовательностью преобразований, в которой сначала идут все $\overrightarrow{\mathrm{II}}$-стабилизации, а в конце — все $\overrightarrow{\mathrm{II}}$-дестабилизации. Но стабилизации и дестабилизации типа $\overrightarrow{\mathrm{II}}$ не меняют соответствующей косы, поэтому без ограничения общности можно считать, что их нет.

Снова применяя леммы 1.2.3 и 1.2.4, можно переставить единственную $\overleftarrow{\mathrm{II}}$-дестабилизацию в конец последовательности. Полученная последовательность элементарных преобразований, не включающая последнюю дестабилизацию, будет содержать стабилизации и дестабилизации только типа I. Обозначим через R последнюю диаграмму в ней. По построению она лежандрово эквивалентна R_2, а $R \mapsto R_1'$ — дестабилизация типа $\overleftarrow{\mathrm{II}}$.

Из теоремы 3.2.1 следует, что диаграмма R_2 допускает упрощение $R_2 \mapsto R_2'$ типа $\overleftarrow{\mathrm{II}}$, причем диаграммы R_2' и R_1' лежандрово эквивалентны. Нетрудно видеть, что отсюда следует $[\beta_{R_2'}]_{\mathrm{t}} = [\beta_{R_1'}]_{\mathrm{t}}$, а $[R_2]_{\mathrm{BM}} \mapsto [R_2']_{\mathrm{BM}}$ — отрицательная дестабилизация. $\square$

Наконец, заметим, что теорема 3.5.1 дает положительный ответ на Вопрос 2 из работы [86]:

Следствие 3.6.2. *Пусть коса β имеет наименьшее число нитей среди всех кос, представляющих данный топологический тип ориентированных зацеплений. Тогда трансверсальное зацепление T_β имеет наибольший возможный коэффициент самозацепления среди всех трансверсальных зацеплений, имеющих тот же топологический тип.*

Доказательство. Пусть $\beta \in B_m$, а $\beta' \in B_n$ — любая другая коса, представляющая тот же ориентированный топологический тип. По теореме 3.5.1 имеем

$$\mathrm{sl}(T_{\beta'}) = \mathrm{w}(\beta') - n \leqslant \mathrm{w}(\beta) - m = \mathrm{sl}(T_\beta).$$

$\square$

Глава 4

Прямоугольные диаграммы лежандровых графов

4.1. Введение

Лежандров граф в $\mathbb{R}^3$ со стандартной контактной структурой $\xi_{\mathrm{st}} = \ker(dz + xdy)$ — это заузленный граф, рёбра которого суть лежандровы дуги, то есть касающиеся ξ_{st}. В этой главе лежандровы графы рассматриваются с точностью до непрерывной деформации в классе лежандровых графов (лежандровой изотопии) и операции стягивания ребра. Более подробно мы остановимся на них в параграфе 4.2.

Наш интерес к лежандровым графом вызван тем, что лежандрово зацепление вместе с шунтом образует лежандров $\Theta-$граф. В параграфе 2.4 мы определили движения прямоугольных $\Theta-$диаграмм и доказали, что ассоциированные лежандровы зацепления сохраняются при этих движениях. В этой главе мы докажем больше: что сохраняется лежандров тип всей $\Theta-$диаграммы. Мы обобщим прямоугольные диаграммы в параграфе 4.3, и с их помощью в параграфах 4.5 и 4.6 получим полный аналог взаимнооднозначного соответствия между прямоугольными диаграммами и лежандровыми зацеплениями, описанного в параграфе 1.8.

Лежандровы графы появлялись в работе Элиашберга-Фрейзер [33, 34] о классификации топологически тривиальных лежандровых узлов, в работе Эммануэля Жиру [48] о соответствии между контактными структурами и книжными представлениями. Также лежандровы графы — это основной объект изучения в работе [89].

В параграфе 4.7 обсуждается соответствие между лежандровыми графами и заборными диаграммами, введёнными Рудольфом [101, 103]. Это соответствие было установлено Баадером и Ишикавой [7]. Наша идея состоит в том, что введение дополнительной операции стягивания ребра превращает это соответствие в биекцию (следствие 4.7.8). В доказательстве используются обобщённые прямоугольные диаграммы. Мы также покажем, что классы заборных диаграмм биективно естественным образом соответствуют обобщённым прямоугольным диаграммам с точностью до лежандровых движений (теорема 4.7.3).

В последнем параграфе 4.8 этой главы мы также сформулируем комбинаторное описание произвольных заузленных графов в пространстве с помощью обобщённых прямоугольных диаграмм.

4.2. Лежандровы графы

Определение 4.2.1. *Заузленным графом* мы называем конечный одномерный CW-комплекс, гладко вложенный в $\mathbb{R}^3$.

Из определения следует, что рёбра заузленного графа — это непересекающиеся гладкие простые дуги, и в каждой вершине касательные полупрямые к рёбрам различны.

Определение 4.2.2. *Лежандров граф* — это заузленный граф, рёбра которого касаются распределения плоскостей, заданных ядром 1-формы

$$\alpha_{\mathrm{st}} = dz + x dy,$$

которое называется *стандартной контактной структурой*. Мы ориентируем это распределение с помощью векторного поля $\frac{\partial}{\partial z}$, которое трансверсально его плоскостям. Два лежандровых графа называются *лежан-*

дрово изотопными (или просто изотопными), если они соединены путём в пространстве лежандровых графов.

Определение топологии пространства лежандровых графов стандартно, но мы, всё же, приведём его здесь подробно.

Во-первых, для фиксированного 1-комплекса G с конечным числом вершин и рёбер пространство $\mathfrak{LE}(G)$ лежандровых вложений $G \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ наделено компактно-открытой топологией.

Во-вторых, назовём два вложения конечных 1-комплексов $\iota_k : G_k \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, $k = 1, 2$ эквивалентными, если существует *комбинаторная эквивалентность* (гомеоморфизм, переводящий биективно вершины одного 1-комплекса в вершины другого) $\varphi : G_1 \xrightarrow{\approx} G_2$ такая, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} & \mathbb{R}^3 \\ {}^{\varphi}\!\downarrow & & \| \\ G_2 & \overset{\iota_2}{\hookrightarrow} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Наконец, в-третьих, определим пространство лежандровых графов как

$$\mathfrak{LG} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{LE}(G_k)/\sim,$$

где для каждого комбинаторного класса графов найдётся представитель G_k и отношение эквивалентности $\sim$ определено выше. Таким образом, два лежандрвых графа лежандровы изотопны, если и только если они лежат в одной компоненте пространства $\mathfrak{LG}$.

Заметим, что для двух лежандрово изотопных лежандровых графов не обязательно найдётся изотопия объемлющего пространства, переводящая один граф в другой. Причина в том, что диффеоморфизмы сохраняют линейные соотношения на касательные вектора к рёбрам в

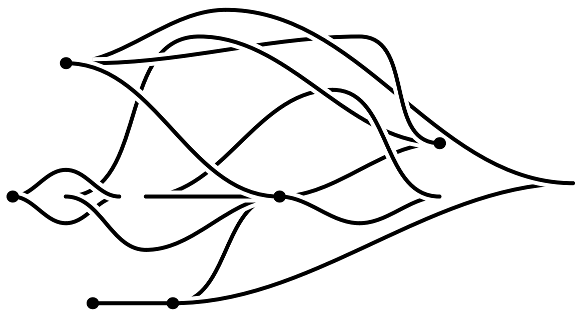


Рис. 4.1. Фронт лежандрова графа. Информация о перекрётсках излишняя, потому что ветвь с меньшим наклоном всегда выше ветви с большим наклоном.

каждой вершине.

Заметим, что в каждой вершине лежандрова графа касательные к выходящим из этой вершины рёбрам лежат в ориентированной контактной плоскости. Это даёт циклический порядок рёбер в каждой вершине графа. Таким образом, лежандровы графы являются ленточными графами.

Удобно определять лежандровы графы с помощью их проекций на yz-плоскость, которые называются *фронтальными проекциями* или просто *фронтами*. Фронт состоит из нескольких кусочно-гладких кривых с особенностями — точками возварата, — причём касательная к кривой не может быть вертикальной (см. рис. 4.1). В точках самопересечения фронта и точках возврата мы указываем какая ветвь лежит выше, а какая — ниже. Общая фронтальная проекция однозначно определяет соответствующую лежандрову кривую в пространстве, так как x-координата любой точки кривой восстанавливается из соотношения $x = -dz/dy$. Таким образом, информация о том, какая ветвь выше, а какая ниже, — излишняя.

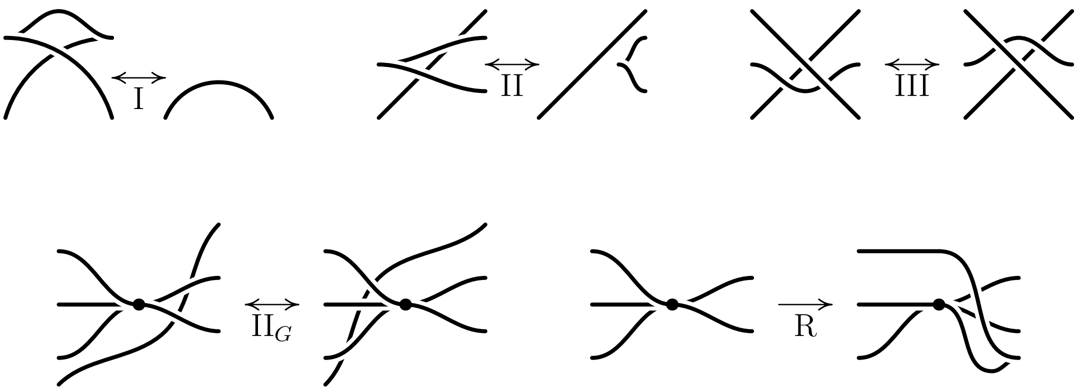


Рис. 4.2. Движения фронтов. Для полного списка движений необходимо добавить движения, полученные отражением относительно горизотнальной и вертикальной осей (с заменой порядка по высоте ветвей в перекрёстке) и вращением на угол π. В движениях II_G и R количество рёбер выходящих налево или направо может быть произвольным.

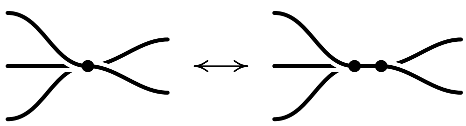


Рис. 4.3. Раздутие и стягивание ребра

Теорема 4.2.3 ([7]). *Два общих фронта представляют лежандрово изотопные лежандровы графы, если и только один из другого можно получить с помощью движений фронтов, указанных на рисунке 4.2.*

Движения I, II и III порождают эквивалентность лежандровых зацеплений с точностью до лежандровой изотопии (см. доказательство в [105]), а остальные движения задействуют вершины графа.

Определение 4.2.4. Рассмотрим ещё одно движение фронтов: *стягивание ребра* (см. рис. 4.3). Предположим две вершины соединены коротким горизонтальным отрезком на фронтальной проекции, так что остальные

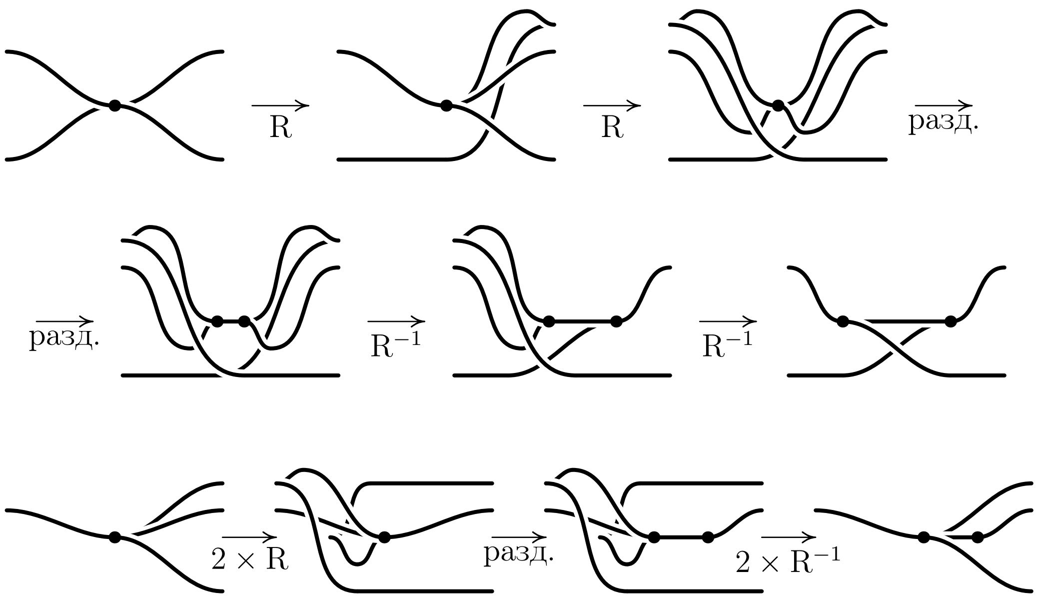


Рис. 4.4. Раздутие, определённое геометрически, можно получить, комбинируя раздутие, определённое с помощью фронтов, движение R и обратное к нему

рёбра в левой вершине выходят налево, а остальные рёбра в правой вершине выходят направо. Стягивание ребра заключается в стягивании короткого ребра в вершину, так что порядок и направление выхода остальных рёбер сохраняется. Обратное движение называется *раздутием.*

Мы определили раздутие и стягивание ребра с помощью фронтов, но это можно было сделать и геометрически. Выберем какую-нибудь вершину графа и обозначим рёбра, выходящие из неё в циклическом порядке $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$. Пока мы только поделили рёбра на две группы a_i и b_j, которые не перемежаются в циклическом порядке. Чтобы сделать раздутие, нужно вершину заменить коротким (лежандровым) ребром e и немного пошевелить рёбра $a_1, ..., a_n, b_1, ...b_m$, так чтобы к одному концу ребра e подходили в указанном циклическом порядке рёбра $a_1, \dots, a_n, e$, а к другому — $e, b_1, \dots, b_m$.

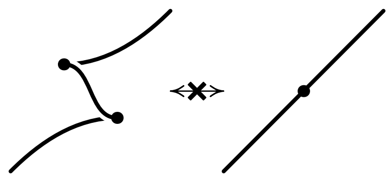


Рис. 4.5. Это движение **не** является стягиванием ребра

Комбинируя движение R, обратное к нему и раздутие можно получить раздутие, определённое геометрически. На рисунке 4.4 каждая из четырёх ветвей, выходящих из вершины, может быть заменены любым числом (даже нулевым) ветвей. На этом рисунке рассмотрены все случаи геометрического раздутия с точностью до вращения на угол π.

Будет ошибкой подумать, что движение на рисунке 4.5 — это раздутие или стягивание ребра. На самом деле, в некоторых случаях это движение приводит к графу, который не может быть получен из исходного с помощью лежандровой изотопии, раздутий или стягиваний ребра. Покажем это с помощью следующего определения.

Определение 4.2.5. Для лежандрова графа рассмотрим поверхность (с границей), вложенную в пространство, которая содержит граф в своей внутренности и касается контактных плоскостей во всех точках графа. Если эта поверхность достаточно достаточно мала, то её класс изотопии определён корректно. Также заметим, что класс поверхности сохраняется при лежандровой изотопии графа и раздутии или стягивании ребра. Назовём такую поверхность *ленточной поверхностью* лежандрова графа.

В случае графа с двумя вершинами, соединёнными двумя рёбрами движение на рисунке 4.5 меняет коэффициент зацепления краёв ленточной поверхности, которая является кольцом. Кстати, в этом случае за-

Рис. 4.6. Слева: 2-валентную вершину можно протащить через точку возврата с помощью движения R. Справа: движение I можно заменить движением R.

узленный граф является узлом, а указанный коэффициент зацепления есть инвариант Торстона–Беннекена лежандрова узла.

Напоследок заметим, что движения на рисунках 4.2 и 4.3 зависимы. Рассмотрим движение I. Ребро, на котором применяется движение, выходит из некоторой вершины. Сделаем раздутие в этой вершине и новую (2-валентную) вершину передвинем (с помощью нескольких движений II_G для прохождения через перекрёсток и нескольких движений R для прохождения через точку возврата, см. рис. 4.6) на то место, где собираемся применить движение I. Затем сделаем движение R в этой вершине, см. рис. 4.6. После этого нам осталось только удалить нашу вершину. Протащим её вдоль фронта обратно (опять же используя движения II_G и R) к соседней вершине и стянем короткое ребро. Таким образом, мы представили движение I как комбинацию движений R, II_G, раздутий и стягиваний ребра. Аналогично движение II является комбинацией остальных движений. Итак, по теореме 4.2.3 мы получаем теорему:

Теорема 4.2.6. *Лежандровы графы с точностью до лежандровой изотопии и стягивания ребра находятся во взаимно однозначном соответствии со своими фронтами с точностью до движений R, II_G, III и стягиваний ребра.*

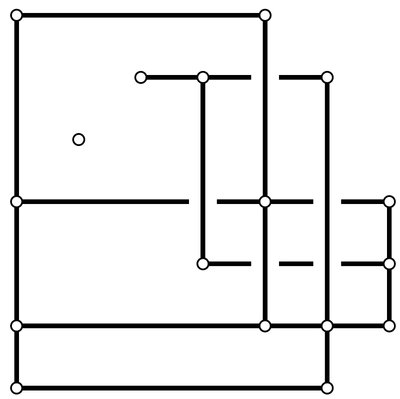


Рис. 4.7. Пример обобщённой прямоугольной диаграммы

4.3. Обобщённые прямоугольные диаграммы

Определение 4.3.1. *Прямоугольная диаграмма* — это любое конечное множество точек на плоскости. Точки мы называем *вершинами* прямоугольной диаграммы. Если некоторые вершины оказались на одной горизонтальной или вертикальной прямой, то мы их соединяем отрезком с концами в крайних вершинах. Такой отрезок мы называем *ребром* прямоугольной диаграммы.

Мы будем считать две диаграммы одинаковыми, если они *комбинаторно эквивалентны*: если существуют две возрастающие функции $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, такие что одна диаграмма переходит в другую при отображении $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$.

Если два ребра пересекаются не по вершине, то в точке пересечения вертикальное ребро выше горизонтального.

Такую диаграмму можно воспринимать, как плоскую диаграмму заузленного графа.

Пример обобщённой прямоугольной диаграммы показан на рисунке 4.7. Мы разрешаем рёбра с одной вершиной.

Теперь введём *элементарные движения* обобщённых прямоугольных диаграмм. Мы определяем каждое движение, указывая лишь расположение новых вершины. Мы не указываем положения рёбер, потому что рёбра однозначно определены по вершинам диаграммы (напомним, что ребро — это отрезок, который соединяет крайние вершины на горизонтальной или вертикальной прямой).

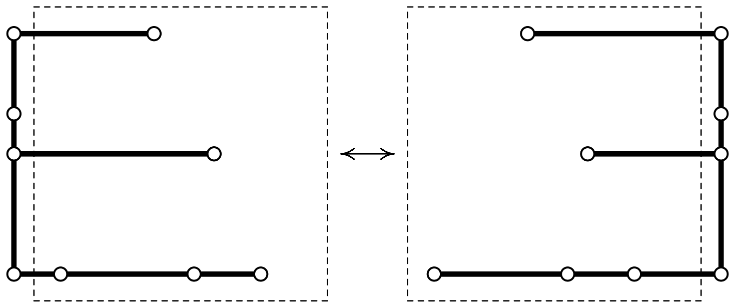


Рис. 4.8. Циклическая перестановка

- *Циклической перестановкой* вертикальных или горизонтальных рёбер мы называем перемещение одного из крайних рёбер (верхнего, нижнего, самого правого или самого левого) на противоположную сторону, см. рис. 4.8. При этом меняется только одна из двух координат вершин на ребре.

- Вертикальной (соответственно, горизонтальной) *рокировкой* мы называем обмен горизонтальными (соответственно, вертикальными) позициями двух соседних вертикальных (соответственно, горизонтальных) рёбер, если они не *перемежаются*, то есть в циклическом порядке $y-$(соответственно, $x-$)координата вершин на одном ребре меньше координаты вершин на другом ребре. Два ребра называются соседними, если между двумя параллельными прямыми, содержащими эти рёбра, нет вершин диаграммы, см. рис. 4.9.

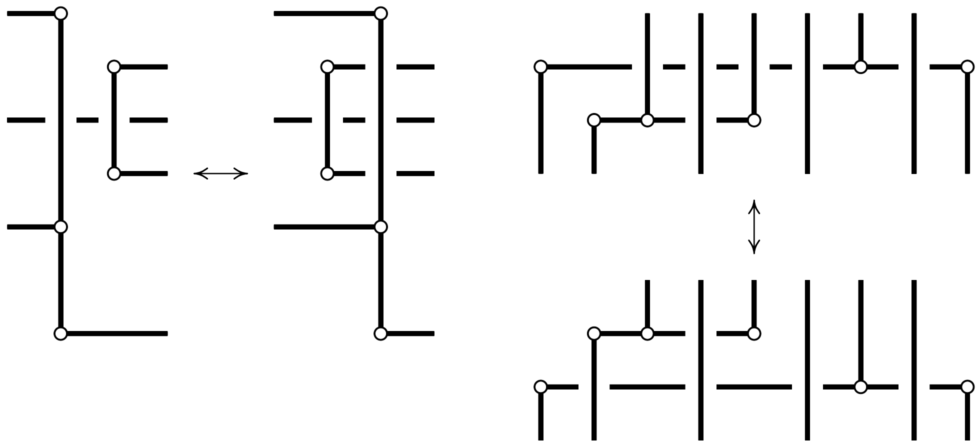


Рис. 4.9. Рокировки

тип I тип II

Рис. 4.10. (Де)стабилизации двух типов

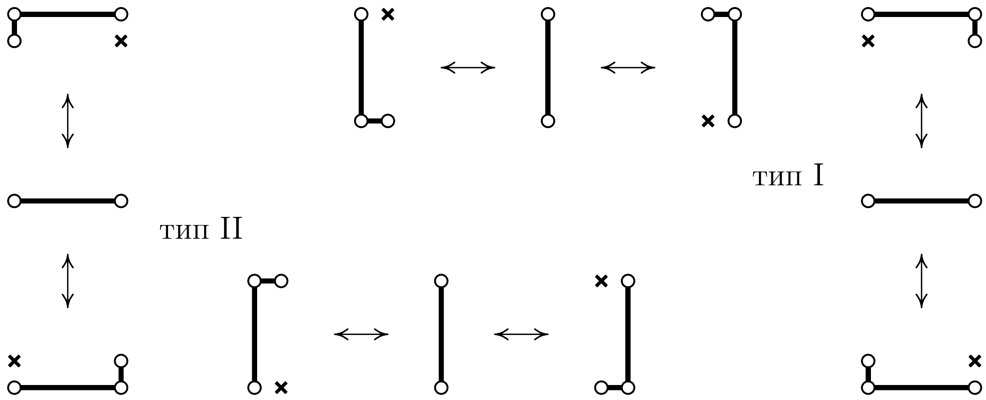


Рис. 4.11. Перемещение конца

- *Стабилизация* заключается в замене вершины тремя другими, которые вместе с удаляемой вершиной образуют вершины маленького квадрата, и добавлении двух коротких рёбер — сторон квадрата; обратная операция называется *дестабилизацией* (см. рис. 4.10). Если два новых ребра выходят из общего конца вниз-влево или вверх-вправо, то стабилизация типа I, а в остальных случаях — типа II.

- Пусть v_1 и v_2 — две соседние вершины на некотором ребре и пусть v_2 имеет большую (соответственно, меньшую) координату, чем v_1. *Перемещение конца типа I (соответственно, типа II)* — это добавление двух вершин, которые получены сдвигом из v_1 и v_2 на $\varepsilon > 0$ в положительном направлении, перпендикулярном ребру, и удаление вершины v_1 (см. рис. 4.11). Или же это добавление двух вершин, полученных сдвигом из v_1 и v_2 на $\varepsilon > 0$ в отрицательном направлении, перпендикулярном ребру, и удаление вершины v_2 (см. рис. 4.11). Число $\varepsilon > 0$ выбрано достаточно маленьким, чтобы между прямой, соединяющей v_1 и v_2, и прямой, соединяющей добавленные вершины, не было вершин диаграммы. Обратную операцию к перемещению конца (типа I) можно представить в виде комбинации перемещения конца (типа I), рокировок и дестабилизации (типа I). См. рис. 4.12.

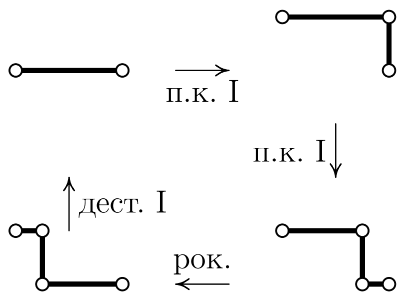


Рис. 4.12. Обращение перемещения конца

- Можно *добавить вершину* на некоторой вертикальной (соответственно, горизонтальной) прямой, содержащей некоторую вершину диаграммы, если добавленная вершина не лежит на одной горизонтальной (соответственно, вертикальной) прямой, содержащей вершину диаграммы.

Циклическая перестановка, рокировка, (де)стабилизация и перемещение конца — это прямое обобщение движений, определённых в параграфе 2.4 для $\Theta-$графов.

Для удобства мы будем называть *элементарными движениями типа I (соответственно, типа II)* циклическую перестановку, рокировки, (де)стабилизации типа I (соответственно, типа II) и добавление вершины.

Элементарные движения зависимы, и, комбинируя их, можно получить другие полезные движения:

- Стабилизация типа I (соответственно, типа II) — это комбинация добавления вершины и перемещения конца типа I (соответственно, типа II): нужно добавить вершину около вершины, в которой мы хотим сделать стабилизацию, а потом сделать перемещение конца для пары из исходной вершины и новой вершины (см. рис. 4.13).

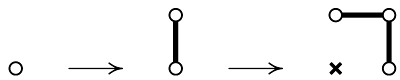


Рис. 4.13. Стабилизация как комбинация добавления вершины и перемещения конца

- Добавление вершины — это комбинация стабилизации, перемещения конца и дестабилизации (см. рис. 4.14)

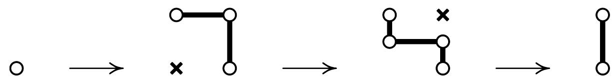


Рис. 4.14. Добавление вершины как комбинация (де)стабилизаций и перемещения конца

- Чтобы *I-сломать (или сделать слом типа I)* горизонтальное (соответственно, вертикальное) ребро, нужно сначала разделить его вершины на две группы g_1 и g_2, которые не перемежаются в циклическом порядке, потом группу вершин g_2 сдвинуть в перпендикулярном ребру положительном направлении, а затем добавить такое короткое ребро, концы e_1 и e_2 которого лежат на одной горизонтальной (соответственно, вертикальной) прямой с вершинами из группы g_1 и g_2 соответственно, что в некотором циклическом порядке v_1 меньше вершин группы g_1, а v_2 больше вершин группы g_2. Чтобы определить слом ребра типа II нужно сдвигать группу g_1, а не g_2 в определении выше. Пример показан на рис. 4.15. Слом типа I (соответственно, типа II) ребра — это комбинация элементарных

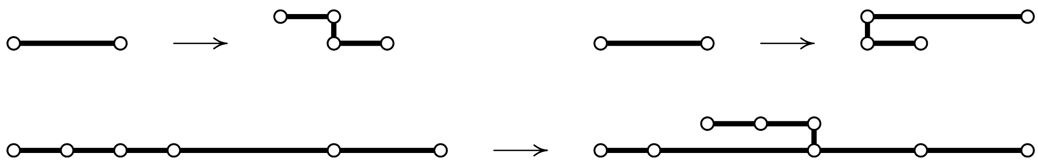


Рис. 4.15. Примеры слома типа I горизонтального ребра. Примеры слома типа I вертикального ребра можно получить, отразив картинку относительно диагонали. Примеры слома типа II можно получить, отразив картинку относительно горизонтальной или вертикальной прямой.

движений типа I (соответственно, типа II). Доказательство показано на рис. 4.16 для типа I. В доказательстве используется операция, обратная перемещению конца типа I, которая представляется комбинацией элементарных движений типа I. Отразив картинку относительно горизонтальной прямой, мы получим доказательство для типа II. Обратная операция к слому ребра называется *стыковкой*. Эта операция также представляется в виде комбинации элементарных движений.

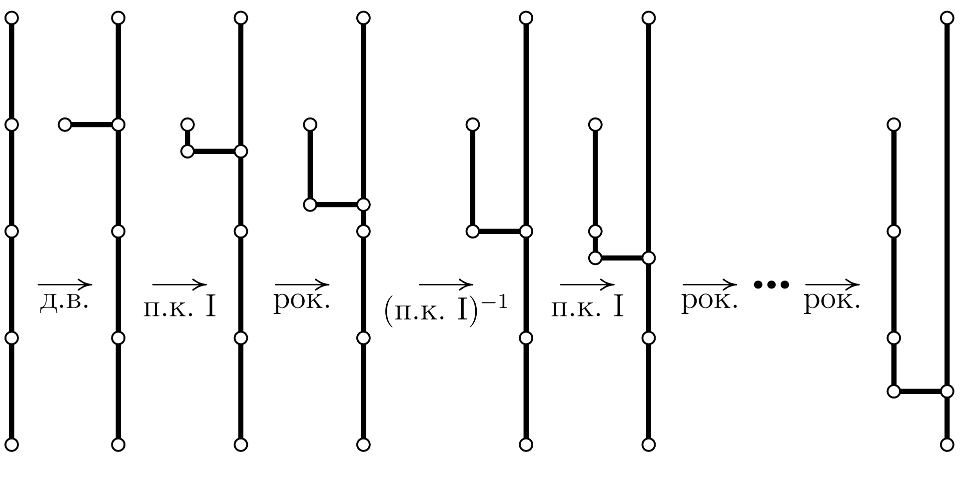


Рис. 4.16. Слом ребра как комбинация элементарных движений

- Циклическая перестановка представляется комбинацией остальных элементарных движений типа I, см. рис. 4.17.

Подытожим замечания выше в следующей теореме:

Теорема 4.3.2. *Отношение эквивалентности на обобщённых прямоугольных диаграммах, порождённое элементарными движениями типа I (соответственно, типа II) порождается рокировками, перемещением конца типа I (соответственно, типа II) и добавлением вершины.*

4.4. Флайпы

В этом параграфе мы обобщаем на случай обобщённых прямоугольных диаграмм понятие *флайпа* — движения, введёного И. Дынниковым в [1] для прямоугольных диаграмм. Мы не будем использовать это движение в последующих параграфах, этот параграф не требуется для понимания основной теоремы этой главы.

Определение 4.4.1. Пусть $x_0 < x_1 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$ и

$$r_{ij} := \{(x, y) \mid x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1}\} \text{ for } i, j = 0, 1.$$

Пусть R — (обобщённая) прямоугольная диаграмма, такая что:

- прямоугольник r_{11} не содержит вершин диаграммы R;
- в каждом прямоугольнике r_{01} и r_{10} любая пара вершин расположена так, что правая вершина выше левой;
- для каждой вершины v диаграммы R, лежащей в прямоугольнике r_{00}, найдётся вершина v_{01} в прямоугольнике r_{01} с такой же x-координатой и найдётся вершина v_{10} в прямоугольнике r_{10} с такой же y-координатой.

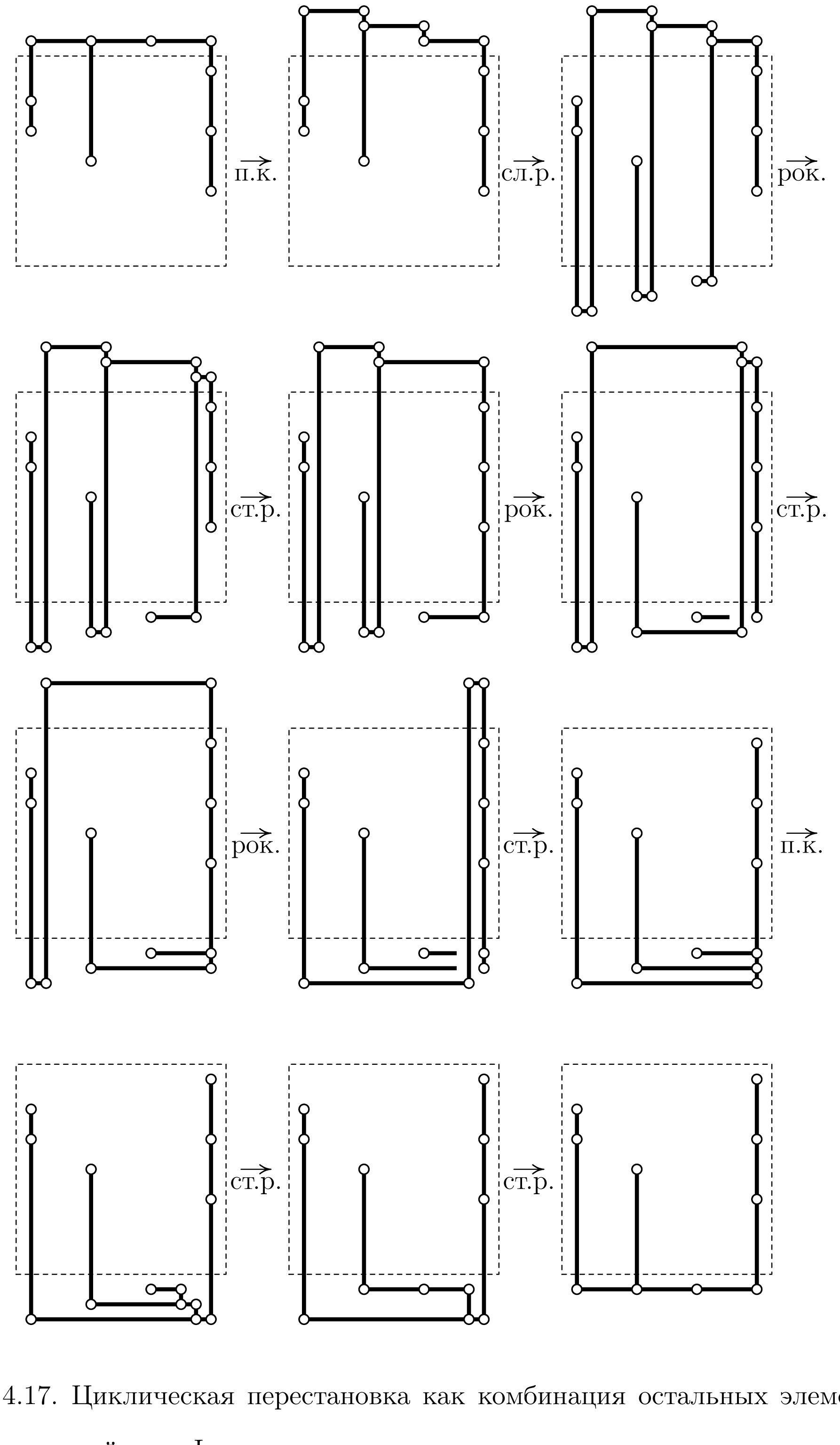


Рис. 4.17. Циклическая перестановка как комбинация остальных элементарных движений типа I

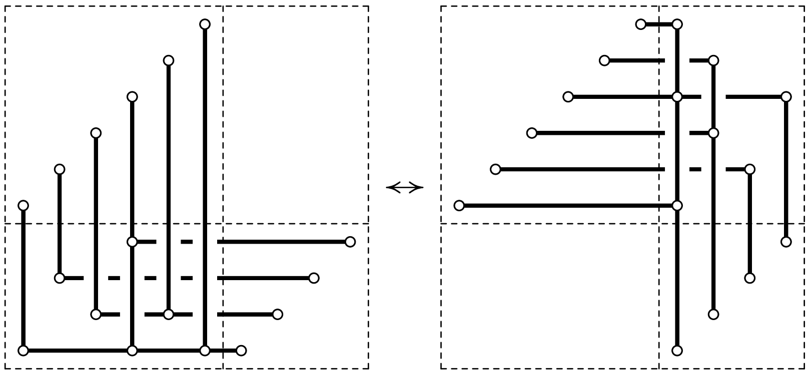


Рис. 4.18. Пример флайпа типа I

Тогда *флайпом* типа I называется перемещение каждой вершины v в прямоугольнике r_{00} на место четвёртого угла прямоугольника с углами в v, v_{01} и v_{10}.

Обратное движение также называется флайпом типа I. Движение, полученное сопряжением горизонтальной симметрией, называется *флайпом типа II*.

Пример показан на рис. 4.18.

Предложение 4.4.2. *Флайп типа I представляется комбинацией элементарных движений типа I.*

Доказательство. Упорядочим вершины диаграммы R, лежащие в прямоугольнике r_{00} сверху вниз и справа налево. Заметим, что вершину v в прямоугольнике r_{00} можно переместить в четвёртый угол прямоугольника с углами в v, v_{01}, v_{10} с помощью одного перемещения конца, рокировок и одной операции, обратной перемещению конца. Применим эти движения для каждой вершины по очереди в порядке возрастания. $\square$

Предложение 4.4.3. *Перемещение конца типа I представляется комбинацией добавления вершины и флайпа типа I. Стабилизация типа*

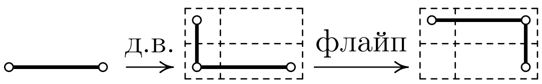


Рис. 4.19. Перемещение конца как комбинация флайпа и добавления вершины

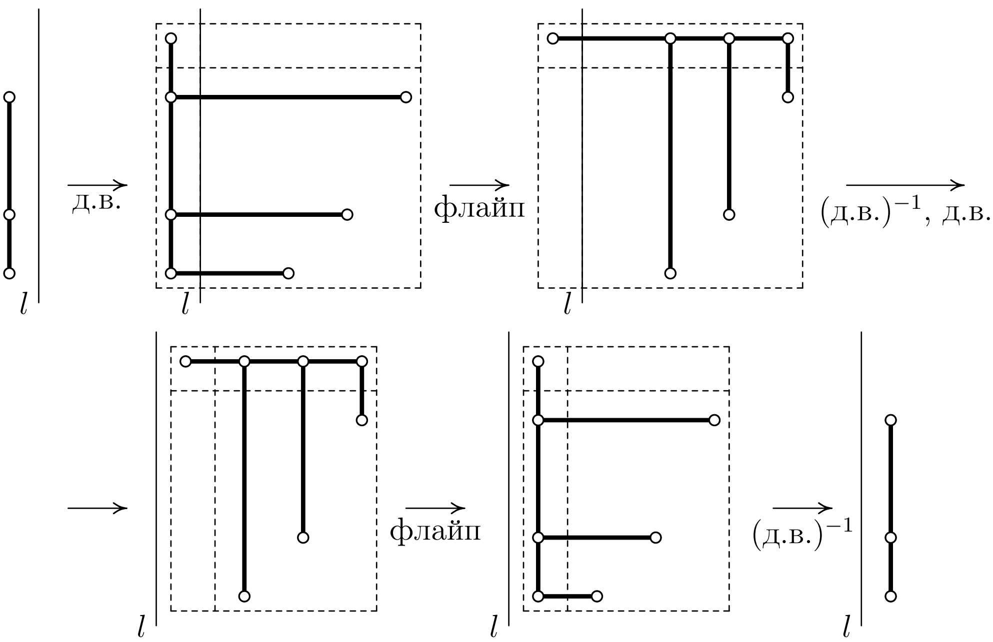


Рис. 4.20. Рокировка как комбинация двух флайпов, добавлений и удалений вершин

I представляется комбинацией добавления двух вершин и флайпа типа I. Рокировка представляется комбинацией двух флайпов типа I и нескольких добавлений и удалений вершин.

Доказательство. Случаи перемещения конца и стабилизации аналогичны и очень просты. См. рис. 4.19.

Перейдём к случаю рокировки. Будем считать, что переставляемые рёбра вертикальны. Случай горизонтальных рёбер получается из этого при помощи отражения относительно прямой $x = y$.

Есть два типа рокировок: когда проекции рёбер на y-ось не пересекаются и когда проекция первого ребра содержит проекцию второго ребра. В последнем случае выберем второе ребро, а в первом случае выберем любое ребро. Обозначим выбранное ребро за e. Обозначим прямую, содержащую другое ребро за l.

Достаточно рассмотреть случай, когда ребро e лежит слева от прямой l, потому что в этом случае рокировка обратна рокировке из другого случая. Выберем прямоугольник r такой, что:

- его стороны параллельны x- и y- осям;
- прямая l пересекает внутренность прямоугольника r;
- прямоугольник r содержит e и любая вершина диаграммы, которая попала в r, лежит на ребре e.

Рассмотрим прямую l' выше ребра e, но пересекающую внутренность прямоугольника r. Тогда прямые l и l' разбивают прямоугольник r на 4 прямоугольника $r_{00}, r_{01}, r_{10}, r_{11}$ (r_{00}, r_{01} — два левых, и r_{00}, r_{10} — два нижних). Добавим по вершине в прямоугольник r_{10} для каждой вершины ребра e и добавим вершину v в r_{01} на горизонтальном уровне ребра e так, что условия в определении 4.4.1 выполнены. Применим флайп и удалим вершину v: теперь все вершины ребра e переместились в прямоугольник r_{11}.

Теперь рассмотрим вертикальную прямую l'', которая пересекает внутренность прямоугольника r_{11}, такую, что в прямоугольниках r_{11} и r_{10} нет вершин слева от прямой l''. Прямая l'' разделяет прямоугольник r_{10} на два. Обозначим левый из них за r'_{00}, а правый — за r'_{10}. Аналогично $r_{11} = r'_{01} \cup r'_{11}$. Добавим вершину в прямоугольник r'_{01} так, чтобы были выполнены условия для выполнения флайпа относительно прямоугольников r'_{ij}, $i, j = 0, 1$. Сделаем флайп. После этого удалим все вершины в прямоугольниках r'_{01} и r'_{10}. Нужная рокировка получена. См. рис. 4.20. $\square$

Следствие 4.4.4. *Отношение эквивалентности на обобщённых прямоугольных диаграммах, порождённое элементарными движениями типа I, порождено флайпами типа I и добавлениями вершин.*

Доказательство. Это следует из предыдущего предложения и теоремы 4.3.2. $\square$

Предложение 4.4.5. *Симметрия прямоугольной диаграммы относительно прямой $x = y$ — это комбинация элементарных движений типа I.*

Доказательство. Выберем прямоугольники $r_{00}, r_{01}, r_{10}, r_{11}$, расположенные относительно друг друга, как в определении 4.4.1 флайпа, так что прямоугольник r_{00} содержит всю прямоугольную диаграмму. Для каждого горизонтального ребра диаграммы добавим вершину в прямоугольник r_{10} и для каждого вертикального ребра диаграммы добавим вершину в прямоугольник r_{01} на прямой, содержащей это ребро, так, что условия в определении 4.4.1 флайпа выполнены. Сделаем флайп, а после этого удалим все вершины в $r_{01} \cup r_{10}$. Полученная диаграмма комбинаторно эквивалентна диаграмме, полученной из исходной симметрией относительно прямой $x = y$. Так как флайп типа I представляется комбинацией элементарных движений типа I, то по предложению 4.4.2 мы доказали требуемое. $\square$

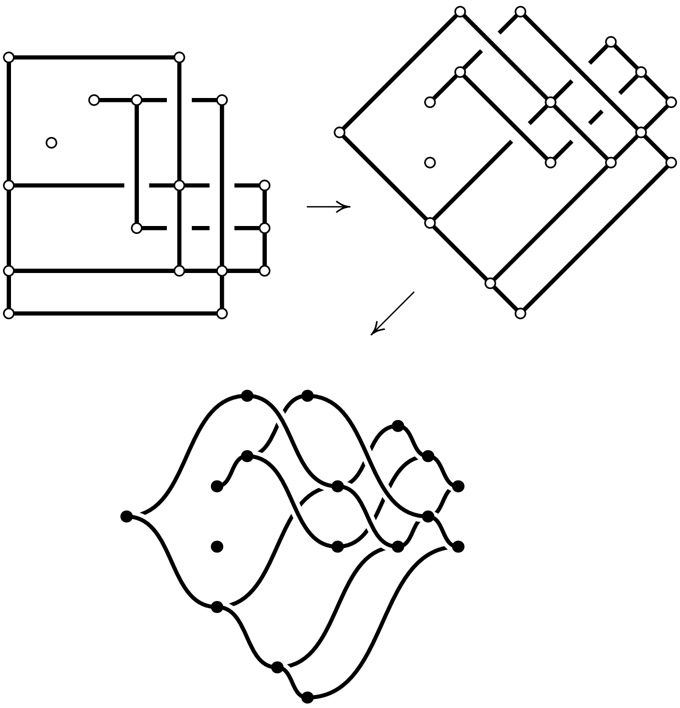


Рис. 4.21. Фронт лежандрова графа, построенный по обобщённой прямоугольной диаграмме

4.5. Задание лежандровых графов обобщёнными прямоугольными диаграммами

Определение 4.5.1. Пусть R — обобщённая прямоугольная диаграмма. Повернём её на угол $\pi/4$ против часовой стрелки, сгладим все углы, указывающие вверх и вниз, и превратим в точки возврата углы, указывающие вправо и влево. Вершины диаграммы станут вершинами лежандрова графа, соответствующего фронту. Обозначим этот граф за G_R. Пример на рис. 4.21.

Теорема 4.5.2. *Соответствие $R \mapsto G_R$ определяет биекцию между обобщёнными прямоугольными диаграммами с точностью до элементарных движений типа I и лежандровыми графами с точностью до лежандровой изотопии и раздутия или стягивания ребра.*

Доказательство этой теоремы состоит из двух частей.

В первой части мы проверим корректность отображения, а во второй части — построим обратное.

Итак, начнём с первой части доказательства. Мы хотим показать, что если диаграмма R' получена из диаграммы R элементарными движениями типа I, то лежандровы графы $G_{R'}$ и G_R эквивалентны с точностью до лежандровой изотопии и раздутия или стягивания ребра.

По теореме 4.3.2 о том, что элементарные движения порождаются рокировками, перемещением конца и добавлением вершины, достаточно рассмотреть случай, когда R' получена из R одной рокировкой, одним перемещением конца или добавлением одной вершины.

Рокировка. Если проекции двух переставляемых рёбер на ось, параллельную рёбрам, не пересекаются, тогда фронты $G_{R'}$ и G_R изотопны. В остальных случаях одно ребро сторого меньше другого. На каждую вер-

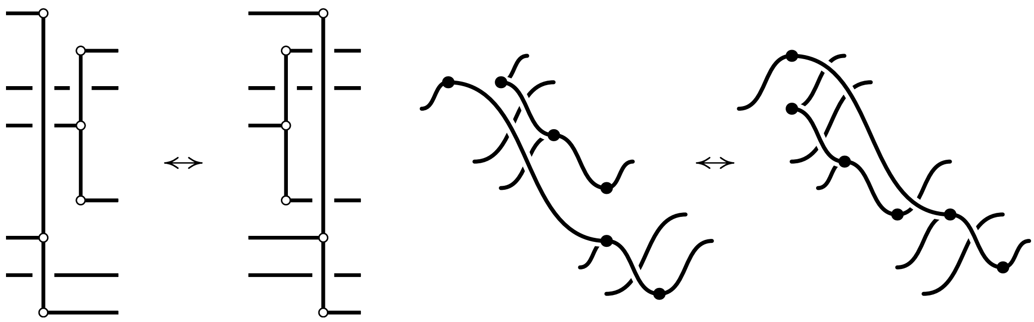


Рис. 4.22. Эквивалентность фронтов в случае рокировки

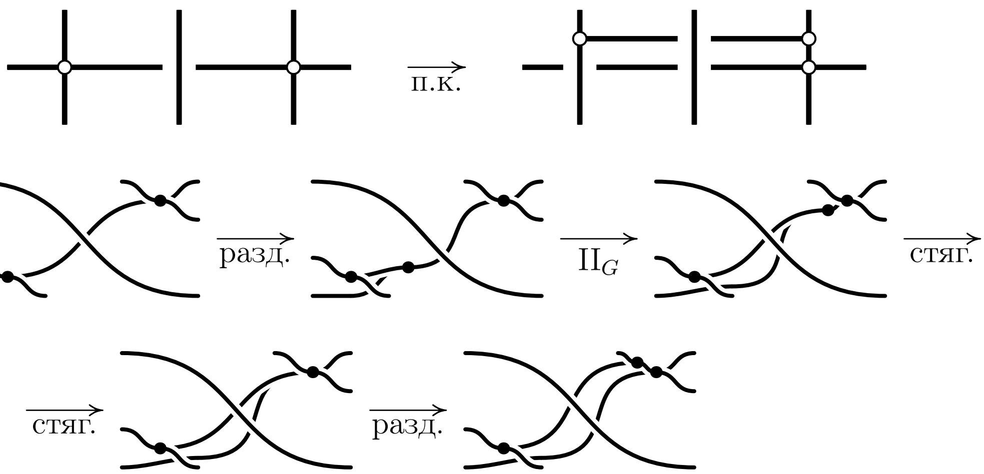


Рис. 4.23. Эквивалентность фронтов в случае перемещения конца типа I

шину, лежащую на меньшем ребре, приходится по движению II_G фронтов, а на каждый перекрёсток на этом ребре — движение III. См. рис. 4.22.

Перемещение конца типа I. В этом случае один фронт получается из другого комбинацией раздутий, стягиваний ребра и движений II_G, см. рис. 4.23.

Добавление вершины. В этом случае очевидно, что один граф получается из другого изотопией и одним раздутием ребра.

4.6. Приближение фронтов прямоугольными диаграммами

Определение 4.6.1 ([7]). Назовём фронт *косым*, если наклон любой его касательной находится в промежутке $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$.

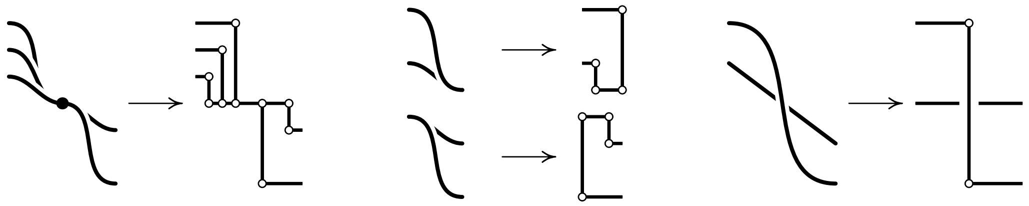


Рис. 4.24. Приближение вершин, перекрёстков и точек возврата косого фронта прямоугольной диаграммой

Определение 4.6.2. Пусть фронт лежандрова графа G косой. Мы будем называть прямоугольную диаграмму R *аппроксимирующей* граф G, если

- для каждой точки возврата, вершины и перекрёстка выбрана прямоугольная окрестность с вертикальными и горизонтальными сторонами такая, что фронт не пересекает горизонтальные стороны её границы; любые две такие окрестности не пересекаются;
- пересечение диаграммы R с любой такой окрестностью имеет вид, указанный на рис. 4.24; этот вид зависит только от типа особенности (перекрёсток, точка возврата или вершина), а в случае вершины зависит только от количества рёбер, выходящих влево и вправо;
- вершины диаграммы R, лежащие в разных окрестностях не лежат на одной вертикальной или горизонтальной прямой;

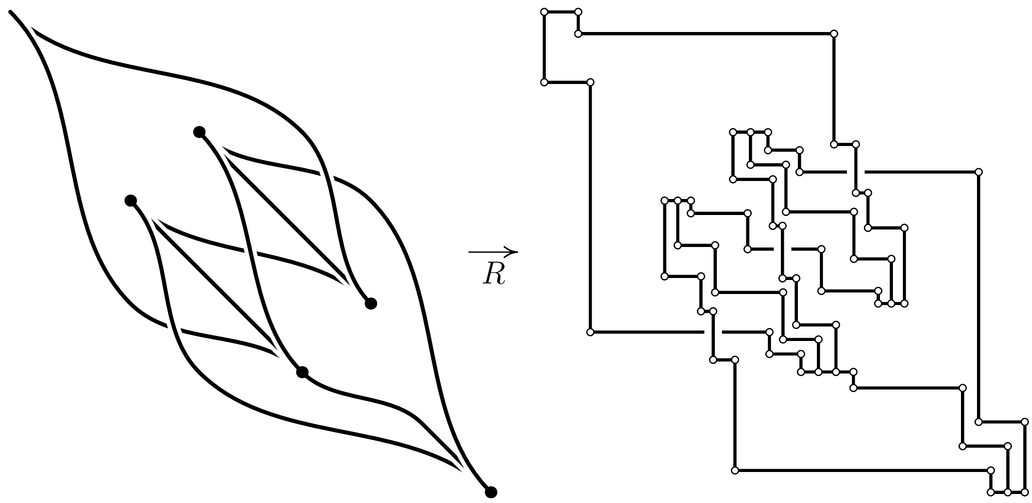


Рис. 4.25. Приближение косого фронта графа G прямоугольной диаграммой из $R(G)$

- дополнение диаграммы R к объединению выбранных окрестностей является набором непересекающихся прямоугольных кривых, углы которых направлены либо вправо-вверх либо влево-вниз, причём для каждой пары выбранных окрестностей имеется биекция между прямоугольными кривыми, соединяющими эти окрестности, и дугами фронта, соединяющими эти окрестности;

Обозначим за $R(G)$ множество прямоугольных диаграмм, апроксимирующих лежандров граф G. Ясно, что $R(G)$ непусто: если выбрать прямоугольные окрестности достаточно маленькими, то хотя бы одна такая прямоугольная диаграмма найдётся. Пример показан на рис. 4.25.

Предложение 4.6.3. *Пусть фронт графа G косой, и $R \in R(G)$. Тогда фронт графа G_R может быть получен из фронта графа G плоской изотопией, раздутиями, движениями R и* II_G.

Доказательство. Фронты графов G и G_R отличаются только двумя вещами:

- G_R имеет дополнительные 2-валентные вершины, которые появились из вершин диаграммы R;
- все вершины G разделились в 2- или 3-валентные вершины графа G_R.

Дополнительную 2-валентную вершину легко добавить, сделав раздутие. Затем её можно переместить на подходящее место, используя движения R и II_G, чтобы преодолеть точки возврата и перекрёстки, см. рис. 4.6.

Разделить вершину на 2- или 3-валентные можно с помощью раздутий. $\square$

Ясно, что любые две диаграммы из $R(G)$ связаны рокировками и (де)стабилизациями типа I. Значит, отображение $G \mapsto R(G)$ будет требуемым обратным отображению $R \mapsto G_R$, рассмотренному в теореме 4.5.2, если мы докажем его корректность и сюрьективность. Для корректности нам нужно показать, что любой лежандров граф после некоторой лежандровой изотопии имеет косой фронт, и что образ отображения $G \mapsto R(G)$ не зависит от выбора косого фронта. Это будет показано в предложениях 4.6.4 и 4.6.5. Сюрьективность будет доказана в предложениях 4.6.6 и 4.6.7.

Предложение 4.6.4 ([7]). *Каждый лежандров граф может быть лежандрово произотопирован так, что его фронт станет косым. Любая лежандрова изотопия между лежандровыми графами с косыми фронтами может быть непрерывно продеформирована в лежандрову изотопию между теми же графами, но через лежандровы графы с косыми фронтами, при этом деформация будет сохранять фронт с точностью до изотопии плоскости в каждый момент времени.*

Доказательство. Определим диффеоморфзим φ yz-плоскости в себя формулой $(y, z) \mapsto (y, \lambda z)$, где $\lambda > 0$ — положительное действительное число, и диффеоморфизм ψ как поворот на угол $-\pi/4$. Для заданной лежандровой изотопии мы можем выбрать λ достаточно маленьким, чтобы диффеоморфизм $\psi \circ \varphi$ отображал все фронты, возникающие в течение изотопии, в косые. Наконец, заметим, что если фронт f косой, то фронт $(\psi \circ \varphi)(f)$ изотопен f через косые фронты. $\square$

Предложение 4.6.5. *Если косые фронты лежандровых графов G' и G связаны одним из движений (косых фронтов) на рис. 4.2 и 4.3, то $R(G')$ и $R(G)$ связаны последовательностью элементарных движений типа I.*

Доказательство. Напомним, что все диаграммы в $R(G)$ связаны рокировками и (де)стабилизациями типа I. Таким образом, нам достаточно показать, что некоторая диаграмма из $R(G)$ получается из некоторой диаграммы из $R(G')$ элементарными движениями типа I.

По теореме 4.2.6 достаточно рассмотреть случай плоской изотопии фронтов, движений R, II_G, III и раздутия.

- *Изотопия фронтов.* Этот случай очевиден. Действительно, если G' получен из G небольшой изотопией фронтов, то по определению $R(\cdot)$ найдётся общая диаграмма у множеств $R(G)$ и $R(G')$. Случай произвольной изотопии фронтов следует из компактности.

- *Движение R.* Предположим, что G' получен из G движением R. Мы рассматриваем случаи, когда левое верхнее или левое нижнее ребро переносится на другую сторону движением R. Остальные случаи отличаются вращением на угол π. На рисунке 4.26 показано, как получить некоторую диаграмму из $R(G')$ из некоторой диаграммы из $R(G)$ элементарными движениями типа I.

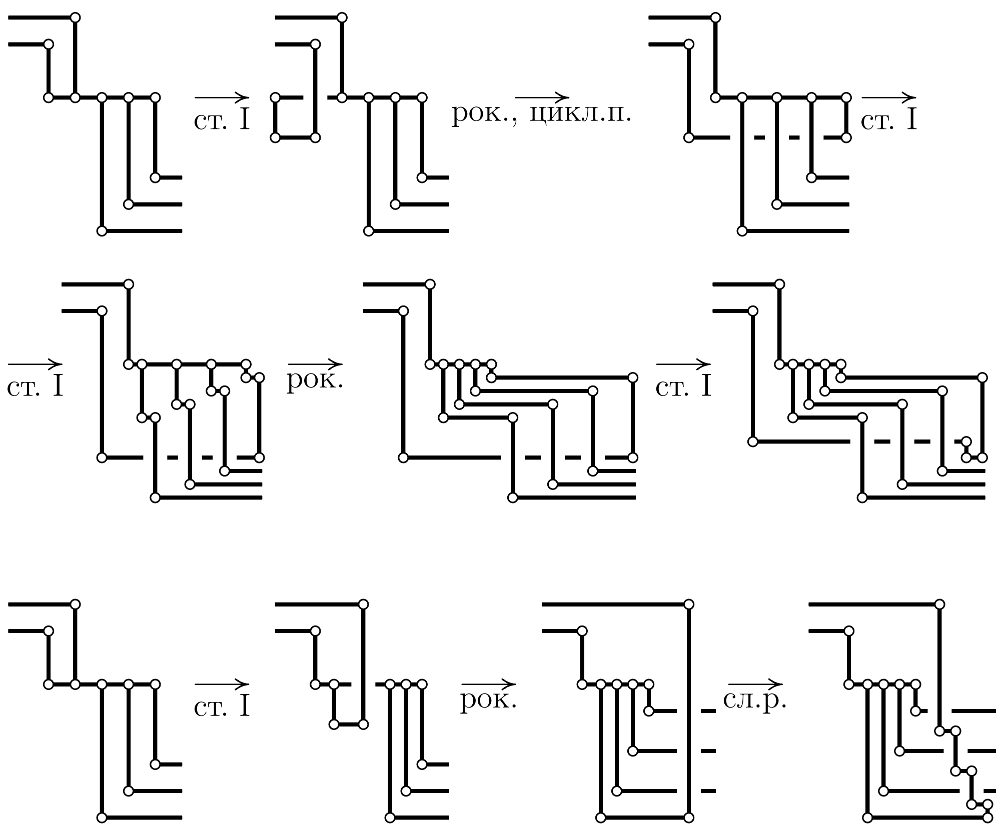


Рис. 4.26. Апроксимация движения R элементарными движениями типа I прямоугольной диаграммы

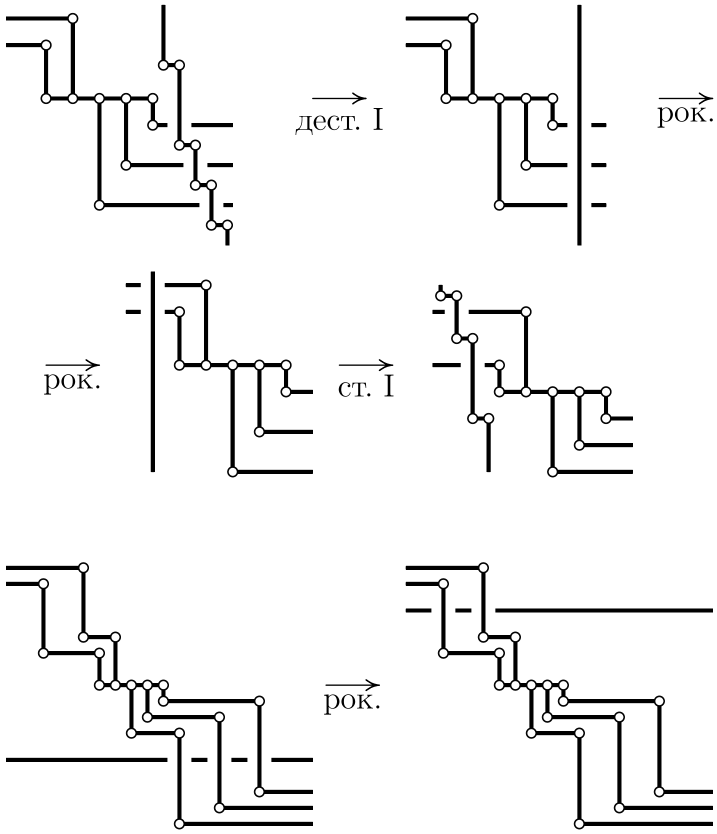


Рис. 4.27. Апроксимация движения II_G элементарными движениями типа I прямоугольной диаграммы

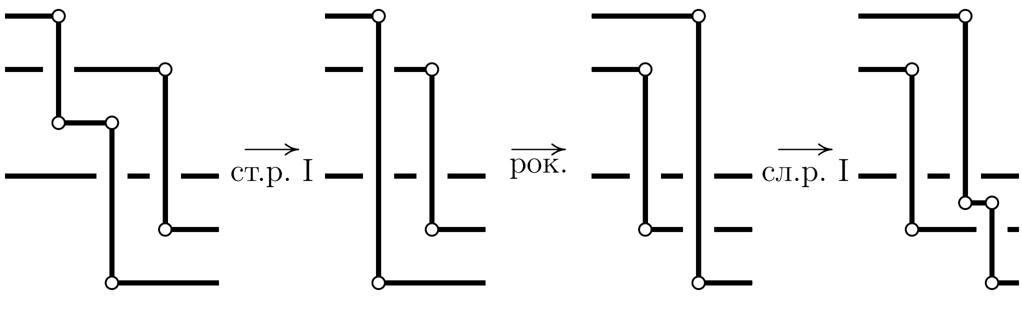


Рис. 4.28. Апроксимация движения III элементарными движениями типа I прямоугольной диаграммы

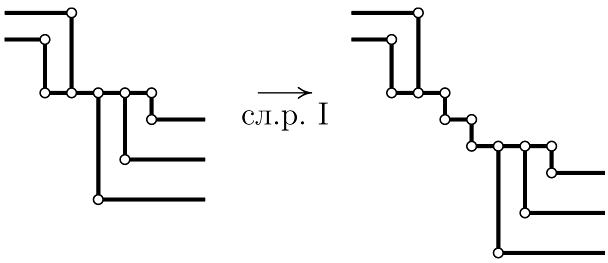


Рис. 4.29. Апроксимация раздутия элементарными движениями типа I прямоугольной диаграммы

- *Движение II_G.* Существует только два принципиально разных случая: прямая, которая перемещается через вершину, имеет меньший или больший угол наклона, чем рёбра, выходящие из вершины, см. рис. 4.27.

- *Движение III.* См. рис. 4.28.

- *Раздутие.* На рис.4.29 показано как получить диаграмму из $R(G')$ из диаграммы из $R(G)$, применив два слома ребра типа I.

$\square$

Доказательство корректности. Предположим, что лежандрово изотопные графы G и G' имеют косые фронты. По предложению 4.6.4 мы можем считать, что они изотопны через лежандровы графы с косыми фронтами. По теореме 4.2.3 эта изотопия распадается на движения косых фронтов. Для каждого такого движения и для раздутия мы доказали в предложении 4.6.5, что образ при отображении $G \mapsto R(G)$ сохраняется. Поэтому $R(G) = R(G')$ с точностью до элементарных движений типа I. $\square$

Предложение 4.6.6. *Любая обобщённая прямоугольная диаграмма R может быть превращена элементарными движениями типа I в диаграмму, у которой каждое вертикальное ребро содержит ровно две вершины.*

Доказательство. Если R имеет вертикальное ребро более, чем с двумя вершинами, то применим перемещение конца типа I к верхней паре вершин на этом ребре, удаляя верхнюю вершину. Если некоторое вертикальное ребро имеет лишь одну вершину, то немного выше неё добавим новую вершину. После нескольких таких операций мы получим требуемую диаграмму. □

Предложение 4.6.7. *Отображение $G \mapsto R(G)$ сюръективно.*

Доказательство. Предположим, что у нас есть диаграмма R. Мы применим к ней несколько элементарных движений типа I и получим диаграмму из множества $R(G)$ для некоторого лежандрова графа G.

По предложению 4.6.6 мы можем считать, что любое вертикальное ребро диаграммы R имеет ровно две вершины. Сделаем 4 этапа преобразований диаграммы:

- Возьмём некоторое горизонтальное ребро h как минимум с тремя вершинами на нём. В каждой вершине ребра h справа налево применим стабилизацию типа I так, что новое маленькое вертикальное ребро выходит вверх от ребра h. Рокировками передвинем все маленькие вертикальные рёбра близко к самому правому из них. Выберем малую прямоугольную окрестность (с горизонтальными и вертикальными сторонами), которая содержит все эти маленькие вертикальные рёбра такую, что диаграмма R пересекает границу этой окрестности только по её левой стороне. Полученная окрестность изображена на рис. 4.24 в случае, когда нет маленьких вертикальных рёбер, выходящих вниз.

- Предположим, что с вершиной v на том же горизонтальном ребре лежит всего ровно одна другая вершина, и пусть из v вертикальное ребро выходит вверх, а горизонтальное влево или вертикальное ребро выходит вниз, а горизонтальное вправо. Заметим, что в этом случае вершина v превращается в точку возврата на фронте графа G_R. Тогда применим две стабилизации типа I, чтобы окрестность вершины v выглядела так, как показано в середине рисунка 4.24.

- Для каждого перекрёстка c сделаем стабилизацию типа I в каждом конце ребра, содержащего c и (возможно) несколько рокировок, чтобы получить окрестность перекрёстка c, изображённую в правой части рисунка 4.24.

- Если горизонтальное ребро содержит лишь одну вершину, то применим в ней стабилизацию типа I. Выберем прямоугольную окрестность, содержащую новое маленькое вертикальное ребро и пересекающую новое маленькое горизонтальное ребро.

Заметим, что вне полученных окрестностей: диаграмма не имеет перекрёстков, все рёбра имеют две вершины, и все углы направлены либо влево-вниз, либо вправо-вверх. Очевидно, такая диаграмма апроксимирует некоторый косой фронт. □

4.7. Заборные диаграммы

Определение 4.7.1 ([101]). *Заборная диаграмма* состоит из горизон-

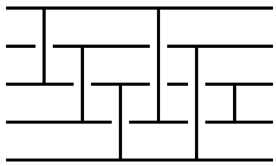


Рис. 4.30. Заборная диаграмма

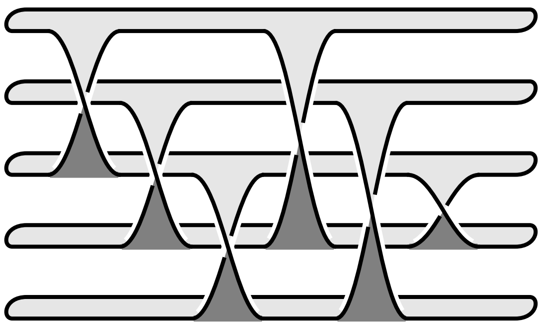


Рис. 4.31. Квазиположительная поверхность

тальных отрезков на плоскости, которые называются *столбами*, и вертикальных отрезков, которые называются *проводами*, таких, что:

- любые два столба отличаются вертикальным сдвигом;
- концы проводов лежат во внутренности столбов;
- все провода лежат на различных горизонтальных уровнях.

Мы считаем две заборные диаграммы одинаковыми, если они комбинаторно эквивалентны (как в определении 4.3.1). В перекрёстках провод всегда выше столба. Пример показан на рисунке 4.30.

По заборной диаграмме Л. Рудольф в [101] стоит поверхность (с границей), вложенную в $\mathbb{R}^3$: каждый столб соответствует горизонтальному диску, а провод — положительно закрученной ленте, соединяющей два диска. Поверхность, полученная таким образом, называется *квазиположительной*. Пример показан на рисунке 4.31.

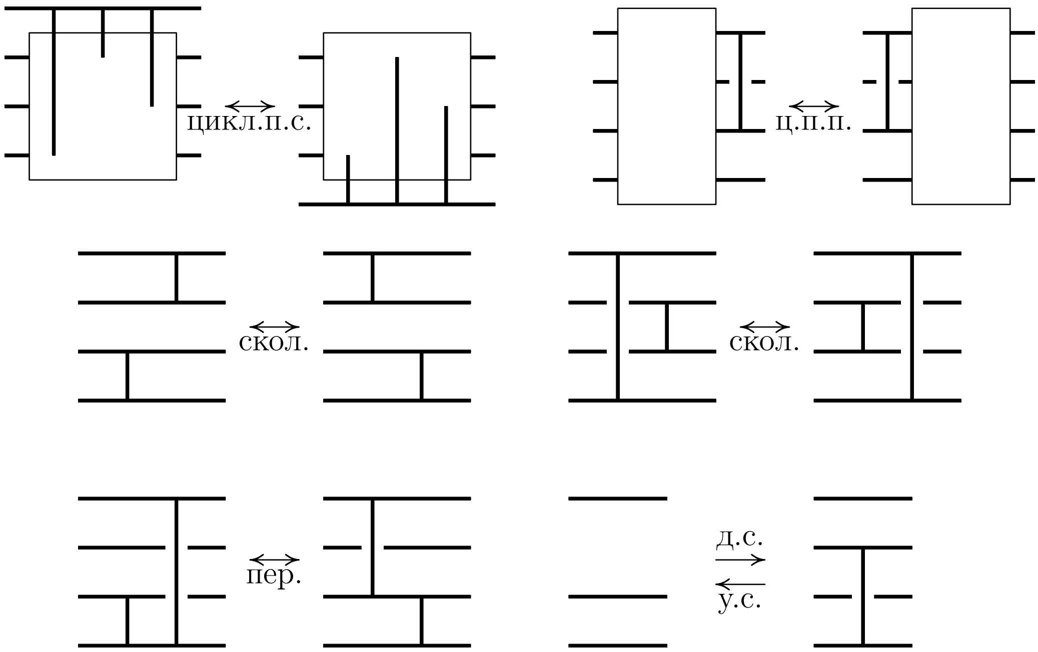


Рис. 4.32. Движения заборных диаграмм

Чтобы классифицировать изотопические классы квазиположительных поверхностей Л. Рудольф в [103] ввёл *движения заборных диаграмм* (см. рисунок 4.32):

- *Циклическая перестановка столбов* заключается в переносе верхнего или нижнего столба на противоположную сторону вместе с концами всех проводов, прикреплённых к столбу;
- *Циклическая перестановка проводов* заключается в переносе самого правого или самого левого провода на противоположную сторону;
- *Скольжение* заключается в обмене горизонтальных позиций двух соседних проводов, если они не зацепляются друг за друга;
- Пусть есть провод, соединяющий столбы на вертикальных уровнях

a и b, и соседний с ним справа провод, соединяющий столбы на вертикальных уровнях a и c, причём $a < b < c < a$ в циклическом порядке. *Переносом* называется замена этих проводов на два других на тех же горизонтальных уровнях, левый из которых соединяет столбы на уровнях b и c, а правый соединяет столбы на уровнях b и a.

- Можно *добавить столб* на любом свободном вертикальном уровне и соединить его одним проводом с любым другим столбом. Обратная операция называется *удалением столба.*

Рудольф в [103] спросил, верно ли, что две заборные диаграммы связаны заборными движениями, если и только если соответствующие квазиположительные поверхности изотопны? С. Баадер и М. Ишикава в [7] ответили отрицательно. Мы немного обсудим их подход.

Они строят отображение из 3-валентных лежандровых графов в заборные диаграммы с точностью до заборных движений. Они это делают аналогично тому, как мы строили отображение $R(G)$ в определении 4.6.2: они апроксимируют косой фронт (см. определение 4.6.1) заборной диаграммой и показывают, что если фронт изменить плоской изотопией или движением фронта, то апроксимирующая заборная диаграмма меняются с помощью заборных движений.

Они также заметили, что если заборная диаграмма соответствует лежандрову зацепелению, то заборные движения сохраняют лежандров тип этого зацепления. В конце концов, они предъявляют две изотопные квазиположительные поверхности, заборные диаграммы которых соответствуют различным лежандровым узлам (различающихся числом вращения).

Замечание 4.7.2. Также авторы в [7] замечают, что лента лежандрова графа (поверхность, определённая в 4.2.5) квазиположительна. О других связях квазиположительных поверхностей с контактной геометрией можно посмотреть, например, в [100].

Наша цель в этом параграфе пропустить отображение, построенное Баадером и Ишикавой, через лежандровы графы с точностью до изотопии и раздутия и доказать, что это новое отображение является биекцией. Чтобы пропустить отображение через фактор по модулю раздутий нам достаточно показать самую малость: что если фронт раздуть, то апроксимирующая заборная диаграмма может быть изменена заборными движениями. Но вместо этого мы построим биекцию из заборных диаграмм по модулю заборных движений в обобщённые прямоугольные диаграммы с точностью до элементарных движений типа I.

Теорема 4.7.3. *Обозначим за* $3\text{-}LG$ *множество лежандровых графов с точностью до лежандровой изотопии, валентности вершин которых равны 2 или 3, за* FD *— заборные диаграммы с точностью до заборных движений, за* LR *— лежандровы графы с точностью до лежандровой изотопии и раздутий, за* GRD_I *— обобщённые прямоугольные диаграммы с точностью до элементарных движений типа I.*

Пусть $3\text{-}LG \to FD$ *— отображение, определённое Баадером и Ишикавой в [7],* $3\text{-}LG \to LR$ *— естественное отображение,* $GRD_I \to LR$ *— отображение* $R \mapsto G_R$*, определённое в 4.5.1. Тогда существует биекция* $FD \to GRD_I$ *такая, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} 3\text{-}LG & \to & FD \\ \downarrow & & \downarrow \\ LR & \leftarrow & GRD_I \end{array}$$

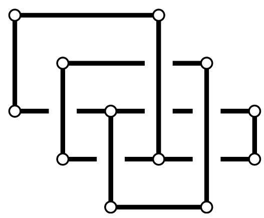


Рис. 4.33. Прямоугольная диаграмма, полученная из заборной диаграммы на рисунке 4.30

Перед доказательством теоремы введём два определения.

Определение 4.7.4. Обозначим за $R(F)$ обобщённую прямоугольную диаграмму, вершины которой — это концы проводов заборной диаграммы F. Пример приведён на рисунке 4.33.

Определение 4.7.5. Пусть R — обобщённая прямоугольная диаграмма, любое вертикальное ребро которой содержит ровно две вершины. Обозначим за $F(R)$ заборную диаграмму, провода которой суть вертикальные рёбра диаграммы R, а столбы содержат горизонтальные рёбра диаграммы R.

Если R имеет вертикальное ребро с более, чем двумя вершинами, то применим перемещение конца типа I к верхней паре вершин этого ребра, удаляя верхнюю вершину. Если некоторое вертикальное ребро диаграммы R имеет только одну вершину, то добавим вершину немного выше. После нескольких таких операций мы получаем диаграмму, вертикальные рёбра которой имеют только две вершины. Обозначим заборную диаграмму, соответствующую полученной прямоугольной диаграмме, также за $F(R)$.

Доказательство теоремы 4.7.3. Заметим, что $F(R(F)) = F$. Мы докажем, что отображение $F \mapsto R(F)$ — это требуемая биекция. Это следует из двух следующих лемм.

Лемма 4.7.6. *Если заборная диаграмма F' получена из заборной диаграммы F заборным движением, то $R(F')$ может быть получена из $R(F)$ элементарными движениями типа I.*

Доказательство. В каждом случае заборного движения мы приводим требуемые элементарные прямоугольные движения:

- циклическая перестановка столбов: циклическая перестановка горизонтальных рёбер;
- циклическая перестановка проводов: циклическая перестановка вертикальных рёбер;
- скольжение: рокировка вертикальных рёбер;
- перенос: комбинация перемещения конца и операции, обратной перемещению конца;
- добавление столба: добавление двух вершин.

□

Лемма 4.7.7. *Если обобщённая прямоугольная диаграмма R' получена из R элементарными движениями типа I, то $F(R')$ может быть получена из $F(R)$ заборными движениями.*

Доказательство. По теореме 4.3.2 достаточно рассмотреть случай рокировки, перемещения конца типа I и добавления вершины. В каждом случае мы приводим требуемые заборные движения:

- *Рокировка вертикальных рёбер.* Несколько скольжений.

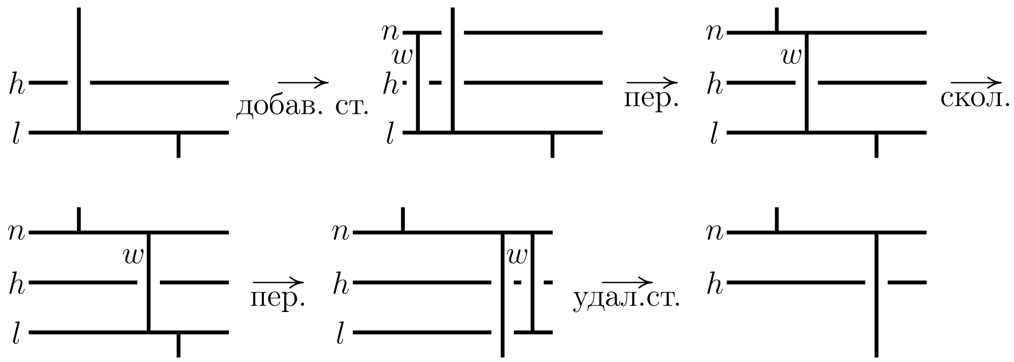


Рис. 4.34. Рокировка горизонтальных рёбер на языке заборных диаграмм

- *Рокировка горизонтальных рёбер.* Обозначим за h столб, соответствующий верхнему переставляемому ребру, а за l — нижнему. Сделаем несколько циклических перестановок проводов так, чтобы провода, прикреплённые к столбу l, были слева от проводов, прикреплённых к столбу h. Потом добавим новый столб n немного выше столба h и соединим его новым проводом w со столбом l слева от всех проводов этого столба. Применим перенос к проводу w и к соседнему от него справа проводу на l. В результате провод w перескочит через своего соседа справа, а конец того перепрыгнет на столб n. Применяя скольжения, передвинем w к следующему справа проводу на l. Повторим эти операции несколько раз, пока все провода, исходно прикреплённые к столбу l не станут прикреплены к столбу n, а провод w станет единственным проводом на столбе l. После этого удалим столб l с проводом w. Рокировка горизонтальных рёбер почти сделана: осталось только сделать несколько циклических перестановок проводов, чтобы вернуть их на исходные горизонтальные позиции. См. рис. 4.34.

- *Вертикальное перемещение конца.* Несколько (или ни одного) пе-

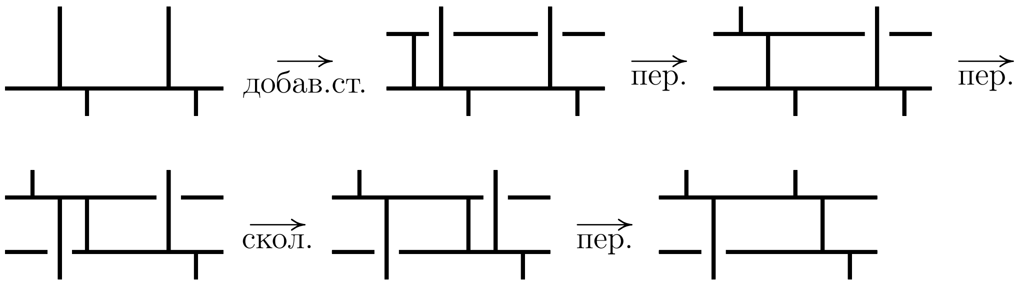


Рис. 4.35. Рокировка вертикальных рёбер на языке заборных диаграмм

реносов и, возможно, добавление столба.

- *Горизонтальное перемещение конца.* Рассмотрим случай перемещения конца на горизонтальном ребре, когда удаляется левая вершина. Другой случай может быть сведён к этому с помощью вращения на π. По построению $F(R)$ на столбе около удаляемой вершины прикреплено один или два провода. Добавим столб немного выше и соединим его проводом немного левее удаляемой вершины. Затем применим, соответственно, один или два переноса. Потом скольжением передвинем новый провод к другой вершине, задействованной в перемещении конца. Там прикреплено также один или два провода. Применим, соответственно, ноль или один перенос - и мы получили $F(R')$. Смотрите пример на рисунке 4.35.

- *Добавление вершины на вертикальном ребре.* Добавление столба и ещё, возможно, один перенос.

- *Добавление вершины на горизонтальном ребре.* Добавление столба.

$\square$

Следствие 4.7.8. *Отображение 3-$LG \to FD$, построенное в работе [7] индуцирует биекцию $LR \to FD$. Таким образом, лежандровы графы с*

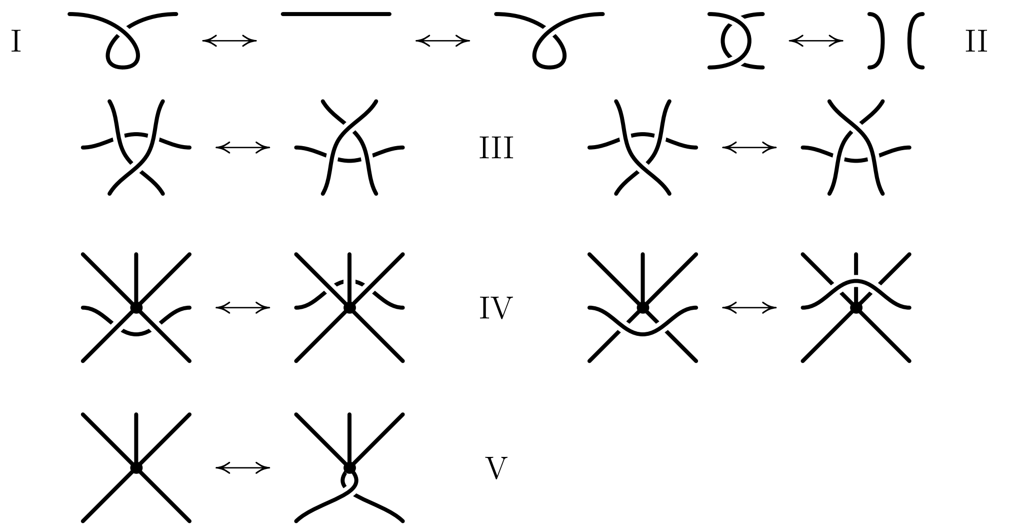


Рис. 4.36. Движения Райдемайстера

точностью до лежандровой изотопии и раздутия находятся во взаимно однозначном соответствии с заборными диаграммами с точностью до заборных движений.

4.8. Заузленные графы

В работе [63] доказан аналог теоремы Райдемайстера для заузленных графов: что два заузленных графа изотопны, если и только если их плоские проекции в общем положении связны плоской изотопией и движениями Райдемайстера, изображёнными на рисунке 4.36.

Используя эту теорему можно доказать вариант теоремы 4.5.2 для заузленных графов:

Предложение 4.8.1. *Будем рассматривать обобщённые прямоугольные диаграммы как плоские диаграммы заузленных графов. Это соответствие индуцирует биекцию между заузленными графами с точностью до раздутия и обобщёнными прямоугольными диаграммами с точ-*

ностью до элементарных движений.

Набросок доказательства. В доказательстве теоремы 4.5.2 мы уже показали, что элементарные движения типа I не меняют класс соответствующего заузленного графа по модулю изотопии и раздутий. Если применить горизонтальную симметрию к прямоугольным диаграммам, то движения типа I станут движениями типа II, а топологический тип графа поменяется на зеркальный образ. Это показывает, что элементарные движения типа II также не меняют класс заузленного графа. Итак, мы имеем отображение из прямоугольных диаграмм с точностью до элементарных движений в заузленные графы с точностью до изотопии и раздутий.

Чтобы показать, что это отображение является биекцией, применим метод, использованный в доказательстве теоремы 4.5.2. Рассмотрим некоторую плоскую диаграмму заузленного графа. Развернём все её перекрёстки так, чтобы верхняя ветвь стала вертикальной, а нижняя — горизонтальной. После этого апроксимируем полученную плоскую диаграмму обобщённой прямоугольной диаграммой. После этого нам достаточно показать две вещи:

- Класс полученной прямоугольной диаграммы (по модулю элементарных движений) не зависит от направления предварительного вращения перекрёстков;

- Если две плоские диаграммы связаны плоской изотопией и движениями Райдемайстера, то соответствующие прямоугольные диаграммы связаны элементарными движениями.

Доказательство прямое и не требует новых идей. □

Вопросы

В недавней работе [69] Марк Лакенбай доказал, что число движений, необходимых для упрощения прямоугольной тривиального узла, ограничено сверху многочленом от сложности диаграммы. Причём нужные движения даёт упрощение диска, который ограничивает тривиальный узел. Можно ли с помощью упрощения шунта получить аналогичный результат для зацеплений?

Вопрос 1. Верно ли, что число движений, необходимых для упрощения прямоугольной диаграммы зацепления, ограничено сверху многочленом от сложности диаграммы?

Следующий вопрос обобщает предыдущий.

Вопрос 2. Верно ли, что число движений, необходимых для преобразования одной прямоугольной диаграммы зацепления в другую, ограничено сверху многочленом от сложности диаграмм?

Решение вопроса 2 можно начать с его частного случая.

Вопрос 3. Верно ли, что число стабилизаций, которые нужно применить к одной диаграмме зацепления, чтобы потом получить другую диаграмму упрощением, ограничено сверху многочленом от сложности диаграмм?

Предпочтительной классификацией зацеплений был бы список канонических представителей и способ упростить диаграмму до канонической. Прежде чем привести такую классификацию, необходимо ответить на следующий вопрос.

Вопрос 4. Конечно ли число неупрощаемых прямоугольных диаграмм для любого зацепления?

Исходя из теоремы 3.2.5 предыдущий вопрос можно переформулировать.

Вопрос 5. Конечно ли число недестабилизируемых лежандровых типов внутри любого фиксированного топологического типа зацепления?

Как упоминалось во введении, задача распознавания узлов алгоритмически разрешима. Верен ли аналогичный результат для лежандровых узлов?

Вопрос 6. Является ли задача сравнения лежандровых узлов алгоритмически разрешимой?

Литература

1. И.А.Дынников, «Алгоритмы распознавания в теории узлов», *УМН*, **58**:6(354) (2003), 45–92.

2. С.В.Матвеев, «Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий», - М.: МЦНМО, 2007, 456 с.

3. М.Прасолов, «Маленькие косы с большой ультраверхушкой», *Матем. заметки*, **89**:4 (2011), 577–588.

4. А.Шумакович, KhoHo – программа для вычисления и изучения гомологий Хованова, `http://www.geometrie.ch/KhoHo`.

5. J.Alexander, «A lemma on a system of knotted curves»,*Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **9** (1923), 93–95.

6. J.Alexander, «Topological invariants of knots and links», *Trans Amer. Mach. Soc.*, **30** (1928), p. 275–306.

7. S.Baader, M.Ishikawa, «Legendrian graphs and quasipositive diagrams», *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques*, **18** (2009), no. 2, p. 285-305.

8. D.Bar-Natan, KnotTheory – компьютерная программа для изучения узлов, `http://katlas.org/`.

9. D.Bennequin, «Entrelacements et equations de Pfaff», *Asterisque*, **107–108** (1983), p. 87–161.

10. M.Bestvina, M.Handel, «Train-tracks for surface homeomorphisms», *Topology*, **34** (1995), no. 1, p. 109–140.

11. J.Birman, «Braids, links, and mapping class groups», *Ann. of Math. Studies*, no. 82, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1975, 237 pp.

12. J.Birman, V.Gebhardt, J.Gonzalez-Meneses, «Conjugacy in Garside groups I: cyclings, powers and rigidity», *Groups, Geometry and Dynamics*, **1** (2007), p. 221—79

13. J.Birman, V.Gebhardt, J.Gonzalez-Meneses, «Conjugacy in Garside groups III: periodic braids», *Journal of Algebra*, **316** (2007), no. 2, p. 746–776.

14. J.Birman, M.Hirsch, «A new algorithm for recognizing the unknot», *Geometry & Topology*, **2** (1998), p.175-220.

15. J.Birman, K.H.Ko, S.J.Lee, «A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups», *Advanced Mathematics*, **139** (1998), no. 2, p. 322–353.

16. J.Birman, W.Menasco, «Studying links via closed braids IV: Composite links and split links», *Invent. Math.*, **102** (1990), p. 115–139.

17. J.Birman, W.Menasco, «Studying links via closed braids V: Closed braid representatives of the unlink», *Trans. AMS*, **329** (1992), no.2, p. 585–606.

18. J.Birman, W.Menasco, «Studying links via closed braids VI: A non-finiteness theorem», *Pacific Journal of Math.*, **156** (1992), no.2, p. 265–285.

19. J. S. Birman, N. C. Wrinkle, «On transversally simple knots», *J. Differential Geom.*,**55** (2000), no. 2, 325–354.

20. H.Brunn, «Über verknotete Kurven», Mathematiker-Kongresses Zurich 1897, Leipzig 1898, 256–259.

21. S.Caruso, «A Family of Pseudo-Anosov Braids Whose Super-Summit Sets Grow Exponentially», *J. Knot Theory Ramifications*, **22** (2013), no. 9, 1350050.

22. Yu.V.Chekanov, «Differential algebra of Legendrian links», *Invent. Math.*, **150**:3 (2002), 441–483.

23. W.Chongchitmate and L.Ng, «The Legendrian knot atlas», *Exp. Math.*, **22** (2013), no. 1, p. 26–37.

24. J.C.Cha and C.Livingston, KnotInfo: Table of Knot Invariants, `http://www.indiana.edu/~knotinfo`, September 17, 2014.

25. S.S.Chern, «Pseudo groups continus infinis», *Coll. Intern. C.N.R.S. Geom. Diff.-Strasburg* (1953), 119–135.

26. S.S.Chern, «The geomtery of G-structures», *Bull. A.M.S.* **72** (1966), 167–219.

27. V.Colin, E.Giroux, K.Honda, «Finitude homotopique et isotopique des structures de contact tendues», *Publications Mathematiques De L Ihes* **109**:1 (2009), 245–293.

28. P.Cromwell, «Embedding knots and links in an open book I: Basic properties», *Topology and its Applications*, **64** (1995), p. 37–58.

29. N.Dunfield, страница, где собрано множество компьютерных программ для изучения узлов `http://www.math.uiuc.edu/~nmd/computop/`.

30. I.Dynnikov, «Arc-presentations of links: Monotonic simplification», *Fund.Math.*, **190** (2006), p. 29–76.

31. Ya.Eliashberg, «Classification of overtwisted contact structures on 3–manifolds», *Invent. Math.* **98** (1989), 623–637.

32. Ya.Eliashberg, «Contact 3-manifolds twenty years since J.Martinet's work», *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **42**:1-2 (1992), 165–192.

33. Y.Eliashberg, M.Fraser, «Classification of Topologically trivial Legendrian knots», *CRM Proc. Lecture Notes*, **15** (1998), no. 15, 17–51.

34. Y.Eliashberg, M.Fraser, «Topologically trivial Legendrian knots», *J. Symplectic Geom.*, **7**:2 (2009), 77–127.

35. Ya.Eliashberg, A.Givental, H.Hofer, «An introduction to symplectic field theory», *Geom. Funct. Anal.* Special volume, Part II (2000), 560–673.

36. E.A.Elrifai, H.R.Morton, «Algorithms for positive braids», *Quart. J. Math. Oxford* (2), **45** (1994), pp. 479–497

37. D.Epstein, J.Cannon, D.Holt, S.Levy, M.Paterson, W.Thurston, «Word Processing in Groups», Jones and Barlett Publishers, Boston, MA, 1992.

38. T.Erlandsson, «Geometry of contact transformations in dimension 3», *Doctoral Dissertation*, Uppsala, 1981.

39. J.Etnyre, «Transversal torus knots», *Geometry and Topology*, **3** (1999), 253–268.

40. J.Etnyre, K.Honda, «Knots and Contact Geometry I: Torus Knots and the Figure Eight Knot», *J. Symplectic Geom.*, **1** (2001), 63–120.

41. J.Etnyre, K.Honda, «On the non-existence of tight contact structures», *Ann. of Math.*, **153** (2001), 749–766.

42. N.Franco, J.Gonz'alez-Meneses, «Conjugacy problem for braid groups and Garside groups», *Journal of Algebra*, **266** (2003), no. 1, pp. 112–132.

43. D.Fuchs and S.Tabachnikov, «Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space», *Topology*, **36**:5 (1997), 1025–1053.

44. F.A.Garside, «The braid group and other groups»,*Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **20** (1969), p. 235–254.

45. V.Gebhardt, «A new approach to the conjugacy problem in Garside groups», *J. Algebra* (1), **292** (2005), p. 282–302.

46. V.Gebhardt, J.Gonz'alez-Meneses, «Solving the conjugacy problem in Garside groups by cyclic sliding», *J. of Symb. Comp.*, **45**:6 (2010), 629–656.

47. P.Ghiggini, «Knot Floer homology detects genus-one fibred knots», *Am.J.Math.*, **130**, p. 1151–1169.

48. E.Giroux, «Géométrie de Contact: de la Dimension Trois vers les Dimensions Supérieures», *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, V. **II**, (2002), p. 405–414, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

49. E.Giroux, «Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces», *Invent. math.*, **141** (2000), 615–689.

50. L.Goeritz, «Bemerkungen zur knotentheorie», *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **10** (1934), no. 1, p. 201–210.

51. W.Haken, «Theorie der Normälflachen», *Acta Math.*, **105** (1961), p. 245–375.

52. W.Haken, «Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten», *I. Math. Z.*, **80** (1962), p. 89–120.

53. J.Hass, J.Lagarias, N.Pippenger, «The computational complexity of knot and link problems», *J. ACM*, **46** (1999), p. 185–211.

54. A.Hatcher, «A proof of the Smale Conjecture, $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq O(4)$», *Annals of Mathematics*, **117** (1983), p. 553–607.

55. P.Heegaard, «Forstudier til en Topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhæng», København, 1898 Filosofiske Doktorgrad; Французский перевод: «Sur l'Analysis situs», *Bull. Sac. Math. France*, **44** (1916), p. 161–242.

56. G.Hemion, «On the classification of the homeomorphisms of 2-manifolds and on the classification of 3-manifolds», *Acta Math.*, **142** (1979), no. 1-2, p. 123-155.

57. H.Hofer, «Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three», *Invent. math.*, **114** (1993), 515–563.

58. K.Honda, «On the classification of tight contact structures I», *Geometry and Topology*, **4** (2000), 309–368.

59. W.Jaco, P.Shalen, «Seifert fibered spaces in 3-manifolds», *Mem. Amer. Math. Soc.* (1979), **21**, no. 220.

60. G.T.Jin and W.K.Park, «A Tabulation of Prime Knots up to Arc INndex 11», *J. of Knot Theory and its Ramifications*, **20**:11 (2011), 1537.

61. K.Johannson, «Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries», Berlin:Springer-Verlag, 1979. (Lecture Notes in Math. V. 761.)

62. V.F.R.Jones, «Hecke algebra representations of braid group and link polynomials», *Ann. of Math.*, **126** (1987), 335–388.

63. Louis H.Kauffman, «Invariants of graphs in three-space», *Trans. Amer. Math. Soc.*, V. **311** (1989), p. 697-710.

64. K.Kawamuro, «The algebraic crossing number and the braid index of knots and links», *Algebraic & Geometric Topology*, **6** (2006), 2313–2350.

65. M.Khovanov, «A categorification of the Jones polynomial», *Duke Math. J.*, **101** (2000), no. 3, p. 359–426.

66. R.Kirby, L.Siebenmann, «Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothins, and Triangulations», *Annals of Math. Studies*, **88** (1977), Princeton Univ. Press, 368 pp.

67. P.Kronheimer, T.Mrowka, «Gauge theory for embedded surfaces I», *Topology*, **32** (1993), p. 773–826.

68. P.Kronheimer, T.Mrowka, «Khovanov homology is an unknot-detector», *Publications mathématiques de l'IHÉS*, **113** (June 2011), no. 1, pp 97–208.

69. M.Lackenby, «A polynomial upper bound on Reidemeister moves», *preprint*, arxiv:1302.0180.

70. D.LaFountain, W.Menasco «Embedded annuli and Jones' conjecture», *preprint*, arxiv:1302.1247.

71. E.S.Lee, «An endomorphism of the Khovanov invariant», *Adv. Math.* **197** (2005), no. 2, p. 554–586.

72. E.S.Lee, «The support of Khovanov's invariants for alternating knots», *preprint*, math.GT/0201105 (2002).

73. S.Lie, «Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen», *Math. Ann.* **8** (1875), 215–303.

74. C.Little, «Non-alternate ± knots», *Trans. R.S.E.*, **39** (1898-1899), no.30, p. 771–778.

75. R.Lutz, «Quelques propriété des formes différrentielles en dimension 3», *Thèse, Strasburg* (1971).

76. R.Lutz, «Structures de contact sur les fibres principeaux en cercle de dimension 3», *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **27** (1977), no. 3, 1–15.

77. S.Makar-Limanov, «Tight contact structures on solid tori», *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350** (1998), 1013–1044.

78. J.Malešič, P.Traczyk, «Seifert circles, braid index and the algebraic crossing number» *Topology Appl.*, **153** (2005), no. 2–3, 303–317.

79. C.Manolescu, P.Ozsváth, S.Sarkar, «A combinatorial description of knot Floer homology», *Ann. of Math.*, **169** (2009), no. 2, p. 633–660.

80. C.Manolescu, P.Ozsváth, Z.Szabó, D.Thurston, «On combinatorial link Floer homology», *Geom. Topol.*, **11** (2007), p. 2339–2412.

81. A. Markoff, «Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe», *Матем. сб.*, **1(43)** (1936), №1, 73–78.

82. J.Martinet, «Sur les singularités des formes differentiells», *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **20** (1970), no. 1, 95–178.

83. H.Matsuda, W.Menasco, «On rectangular diagrams, Legendrian knots and transverse knots», *preprint*, arxiv:0708.2406v1.

84. K.Murasugi, «On a certain numerical invariant of link types», *Trans. Amer. Math. Soc.*, **117** (1965), p. 387–482.

85. L.Ng, «Invariants of Legendrian links», Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.

86. L.Ng, «On arc index and maximal Thurston–Bennequin number», J. Knot Theory Ramifications, **21** (2012), no. 4, 1250031, 11 p.

87. L.Ng, D.Thurston, «Grid diagrams, braids, and contact geometry», *Proceedings of Gökova Geometry–Topology Conference*, 2008, 120–136, Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2009.

88. Y.Ni, «Knot Floer homology detects fibred knots», *Inventiones mathematicae*, **170** (December 2007), no. 3, p. 577–608.

89. D.O'Donnol, E.Pavelescu, «On Legendrian graphs», *Alg. Geom. Top.*,**12** (2012), no. 3, p. 1273-1299.

90. S. Yu. Orevkov, V. V. Shevchishin, «Markov theorem for transversal links», *J. Knot Theory Ramifications*, **12** (2003), no. 7, 905–913; arXiv:math.GT/0112207.

91. P.Ozsváth, Z.Szabó, «Holomorphic disks and genus bounds», *Geom. Topol.*, **8** (2004), p. 311–334.

92. P.Ozsváth, Z.Szabó, «Holomorphic disks and knot invariants», *Adv. Math.*, **186** (2004), no. 1, p. 58–116.

93. P.Ozsváth, Z.Szabó, D.Thurston, «Legendrian knots, transverse knots and combinatorial Floer homology», *Geometry and Topology*, **12** (2008), p. 941–980.

94. K.Perko, «On the Classification of Knots», *Proceedings of the American Mathematical Society*, **45** (August 1974), no. 2, p. 262–266.

95. H.Poincaré, «Analysis Situs», *Journal de lÉcole Polytechnique*, **1** (1895), p.1–121.

96. J.Rasmussen, «Khovanov homology and the slice genus», *Invent. Math.*, **182** (2010), no. 2, p. 419–447.

97. K.Reidemeister, «Elementare Begründung der Knotentheorie», *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **5** (1926), p. 24–32.

98. Regina — Software for 3-manifold topology and normal surface theory, `http://regina.sourceforge.net/`.

99. The Rolfsen Knot table, `http://katlas.math.toronto.edu/`.

100. L.Rudolph, «An obstruction to sliceness via contact geometry and "classical"gauge theory», *Invent. math.*, **119** (1995), p. 155-163.

101. L.Rudolph, «Quasipositive annuli (Constructions of quasipositive knots and links, IV)», *J. Knot Theory Ramif.*, **1** (1993), p.451-466.

102. L.Rudolph, «Quasipositivity as an obstruction to sliceness», *Bull Amer. Math. Soc.* (N.S.), **29** (1993), no. 1, p. 51–59.

103. L.Rudolph, «Quasipositive plumbing (Constructions of quasipositive knots and links, V)», *Proc. A.M.S.*, **126** (1998), p. 257-267.

104. A.Shumakovitch, «Rasmussen invariant, Slice-Bennequin inequality, and sliceness of knots», *J. Knot Theory Ramifications*, **16**:10 (2007), p. 1403–1412.

105. J.Świątkowski, «On the isotopy of Legendrian knots», *Ann.Global Anal.Geom.*, **10** (1992), 195–207.

106. P.Tait, «On Knots», *Trans. R.S.E.*, **28** (1876-1877), p. 145–190.

107. P.Tait, «On Knots. Part II», *Trans. R.S.E.*, **32** (1884-1885), p. 327–339.

108. P.Tait, «On Knots. Part III», *Trans. R.S.E.*, **32** (1884-1885), p. 493–506.

109. W.Thomson, «Hydrodynamics», *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **6** (1867) p. 94–105.

110. W.Thurston, «On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces», *Bull. Amer. Math. Soc.*, **19** (1988), no. 2, p. 417–431.

111. H.Titze, «Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten», *Monatsh. Math. Phys.*, **19** (1908), p. 1–118.

112. H.Trotter, «Homology of group systems with applications to knot theory», *Ann. of Math.* (2), **76** (1962), p.464–498.

113. F.Waldhausen, «On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large», *Ann. of Math.* (2), **87** (1968), p.56–88.

114. W.Wirtinger, «Über die Verzweigungen bei Funktionen von zwei Veränderlichen, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.* **14** (1905), p. 517 (Название доклада, который предположительно был сделан 26 сентября 1905 года на ежегодном собрании немецкого математического общества в Мерано).

115. N. C. Wrinkle, «The Markov Theorem for transverse knots», Thesis (Ph.D.), Columbia University, 2002. 51 pp.; arXiv:math.GT/0202055.

Работы автора по теме диссертации:

116. И.А.Дынников, М.В.Прасолов, «Шунты для прямоугольных диаграмм. Доказательство гипотезы Джонса и связанные вопросы», *Труды ММО*, **74:1** (2013), с. 115-173.

117. Прасолов М.В., «Прямоугольные диаграммы лежандровых графов», *Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014»*, Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. — М.: МАКС Пресс, 2014, электронное издание: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2014/2592/2200_72493_23bf5c.pdf

118. M.Prasolov, «Rectangular Diagrams of Legendrian Graphs», *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, V. **23** (2014), no. 13, 1450074.

119. M. Prasolov, «Bypasses for Rectangular diagrams of a link and Jones' conjecture», *Abstracts of the International Conference "Geometry and Analysis on Metric Structures"*, Novosibirsk. — 2013, электронное издание: http://gct.math.nsc.ru/wordpress/wp-content/uploads/2013/07/Prasolov.pdf

120. M. Prasolov, «Rectangular Diagrams and Jones' Conjecture II-Legendrian graphs, bypasses and simplifying disks», *Supporting materials for conference «Combinatorial Link Homology Theories, Braids, and Contact Geometry»*, электронное издание: http://icerm.brown.edu/tw14-6-clht/

121. Prasolov M. V., «Rectangular diagrams of Legendrian graphs», *ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ – 2014: Тезисы Международной конференции, посвященной 85-летию академика Ю. Г. Решетняка*, Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2014, 126 с.