Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской академии наук
(ИМ СО РАН)

630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
Для телеграмм: Новосибирск, 90, Математика
Тел.: (8-383) 333-28-92. Факс: (8-383) 333-25-98
E-mail: im@math.nsc.ru

13.05.15 № 15302-2-2171
На № 15/101-03/84 от 23.03.15

«Утверждаю»
Директор ИМ СО РАН
член-корр. РАН
С.С.Гончаров

ОТЗЫВ

ведущей организации – Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН на диссертационную работу Прасолова Максима Вячеславовича «Монотонное упрощение зацеплений и лежандровы графы», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология

Диссертационная работа **Максима Вячеславовича Прасолова** относится к активно развивающемуся разделу современной топологии – теории узлов, тесно связанному с теорией трехмерных многообразий. Благодаря наглядности и естественности формулируемых задач теория узлов является привлекательной областью для большого числа исследователей. Однако, трудность этих задач требует развития весьма нетривиальных методов и подходов, тесно связанных с передовыми результатами смежных областей математики.

Теория узлов имеет весьма богатую историю. Раздел, посвященный изучению узлов, содержался в работе И.Б. Листинга «Предварительные исследования по топологии», изданной в Геттингене в 1848 г. Систематические исследования по табулированию узлов относятся к концу 19-го века и связаны с работами П. Тэйта, Т. Киркмана, К. Литтла. Классические результаты по теории узлов относятся к первой половине 20 века и связаны с работами ведущих топологов того времени - Дж. Александера, Г. Зейферта, М. Дэна, К. Райдемайстера. Благодаря работам Э. Артина и А.А. Маркова была развита теория групп кос, которая позволила плодотворно использовать для исследования узлов алгебраические методы. В последние десятилетия теория узлов переживает период бурного развития, связанного с новыми методами и подходами к решению трудных классических задач. Среди прочих ярких результатов упомянем исследования геометрических структур на дополнениях к узлам, связанные с гипотезой У. Терстона о геометризации, построение полинома Джонса и его аналогов и обобщений, создание теории квантовых инвариантов узлов и многообразий, теорию инвариантов Васильева, гомологии Хованова. Для современной теории узлов типично широкое использование компьютерных методов для табулирования узлов и вычисления их инвариантов.

Использование современных методов исследований для решения классической задачи характерно и для рассматриваемой диссертационной работы.

Фундаментальной проблемой теории узлов является классификация узлов и зацеплений. К настоящему времени можно говорить только о наличии формального решения проблемы алгоритмической классификации. Основываясь на подходе В. Хакена, благодаря работам К. Йохансона, Ф. Вальтхаузена, В. Джейко, С.В. Матевеева удалось доказать существование необходимых алгоритмов. Однако, о возможности их практического использования говорить не приходится ввиду значительной вычислительной сложности. Поэтому задача отыскания полиномиального алгоритма распознавания узла является весьма актуальной.

В диссертационной работе используется представление узлов и зацеплений прямоугольными диаграммами. Замечательные свойства прямоугольных диаграмм были установлены в работах П. Кромвеля и И.А. Дынникова. В частности, были описаны преобразования прямоугольных диаграмм не меняющие зацепление. Также оказалось, что прямоугольные диаграммы весьма удобны для описания инвариантов П. Ожвата и З. Сабо.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, дополнительной главы «Вопросы», списка литературы. Она изложена на 166 страницах. Список литературы состоит из 121 наименования и включает в себя шесть работ автора по теме диссертации, две из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

Перейдем к обсуждению содержания диссертации.

Во **введении** кратко, но достаточно тщательно, изложена история исследований по теории узлов в контексте решения проблемы распознавания тривиального узла. Особое внимание уделено обоснованию актуальности исследования. Приводится краткое содержание работы. Формулируются цели работы, обсуждаются используемые методы и научная новизна, описывается структура диссертации и ее содержание по главам.

Первая глава диссертации посвящена изложению предварительных сведений о прямоугольных диаграммах топологических и лежандровых зацеплений. Дается определение прямоугольной диаграммы и описываются элементарные преобразования диаграмм: циклическая перестановка, рокировка, стабилизация и дестабилизация. Вводится понятие прямоугольного пути. Напоминается понятие книжного представления. Дается описание в терминах прямоугольных диаграмм для классов Бирман – Менаско кос, эквивалентных с точностью до сопряжения и операции обмена. Обсуждается связь между прямоугольными представлениями и лежандровыми узлами, описываются инварианты лежандровых узлов.

Доказательство основных результатов диссертации существенно опирается на ключевое техническое утверждение, которое названо в работе ключевой леммой. **Вторая** глава посвящена введению понятий и конструкций, необходимых для формулировки ключевой леммы и ее доказательству. Вводится понятие шунта диаграммы, которое определяется как в терминах лежандровых узлов, так и в терминах прямоугольных диаграмм. Определяется понятие прямоугольной тэта-диаграммы и вводятся соответствующие элементарные преобразования.

Ключевая лемма утверждает, что если для прямоугольной диаграммы зацепления найдется шунт меньшего веса, чем число вертикальных ребер соответствующей компоненты зацепления, то найдется прямоугольная диаграмма лежандрово эквивалентная преобразованию исходной с помощью шунта, которая может быть получена элементарными упрощениями 2-го типа.

Идея доказательства ключевой леммы состоит в сопоставлении прямоугольной диаграмме с шунтом книжного представления, при этом на диске возникает слоение, высекаемое страницами книги. Упрощение слоения приводит к упрощению зацепления. Доказательство весьма техническое, требующее тщательного рассмотрения всех возникающих комбинаторных ситуаций. Оно составляет оставшуюся часть второй главы.

В **третьей** главе приводятся следствия из ключевой леммы. Укажем некоторые из них. Прежде всего, это геометрический критерий упрощаемости прямоугольной диаграммы. Он сформулирован в работе как Следствие 3.2.2 и состоит в следующем: прямоугольная диаграмма допускает упрощение фиксированного типа если и только если соответствующее лежандрово зацепление дестабилизируемо. Два типа упрощений и соответствующие им лежандровы зацепления подробно описаны в работе. Более того, показано, что эти два типа упрощений в определенном смысле независимы.

Следствие 3.2.6 указывает, что число Терстона – Беннекена принимает максимальное значение на лежандровых узлах, соответствующих минимальным прямоугольным диаграммам. Это позволило вычислить инварианты Терстона – Беннекена для большого числа узлов порядка 12, для которых ранее этот вопрос был открытым.

Еще одно следствие относится к представлениям узлов и зацеплений в виде замкнутой косы. А именно, на основе развитой автором техники доказана гипотеза Джонса об инвариантности алгебраического числа пересечений минимальной косы, представляющей данное зацепление (Теорема 3.5.1).

В главе 4 развивается теория лежандровых графов. Дается описание лежандровых графов с помощью введенного автором понятия обобщенных прямоугольных диаграмм. А именно, установлена биекция между обобщенными прямоугольными диаграммами с точностью до элементарных движений первого типа и лежандровыми графами с точностью до лежандровой изотопии и операций раздутия/стягивания ребра (Теорема 4.5.2).

В главе «Вопросы» автор формулирует шесть вопросов, которые по его мнению, естественно связаны с тематикой диссертации и для получения ответов на которые могут быть использованы развитые в диссертационной работе методы. Отметим наиболее интересный: является ли задача сравнения лежандровых узлов алгоритмически разрешимой?

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Сформулирован и доказан критерий упрощаемости прямоугольной диаграммы в терминах лежандровых зацеплений.
2. Доказана независимость (в некотором смысле) двух типов дестабилизаций прямоугольной диаграммы.
3. Доказана гипотеза Джонса об инвариантности алгебраического числа пересечений минимальной косы, представляющей данное зацепление.
4. Получено комбинаторное описание лежандровых графов с помощью обобщенных прямоугольных диаграмм.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Работа написана достаточно тщательно и подробно. Отдельно следует отметить, что изложение щедро и продуманно иллюстрировано рисунками. Имеющиеся опечатки и терминологические неточности не стоят отдельного упоминания, поскольку не влияют на математическое содержание работы.

Результаты, полученные в диссертации, несомненно, найдут применение в исследованиях по теории узлов и топологии малых размерностей, проводимых в Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском, Челябинском государственных университетах, в математических институтах РАН, СО РАН, УрО РАН. Они найдут отражение в соответствующих спецкурсах по теории узлов и теории трехмерных многообразий, читаемых в ведущих университетах России и за рубежом.

Диссертационная работа М.В. Прасолова представляет собой цельное законченное научное исследование. Совокупность полученных в ней результатов можно квалифицировать как решение задачи, имеющей существенное значение для соответствующей отрасли знаний.

Диссертация М.В. Прасолова «Монотонное упрощение зацеплений и лежандровы узлы» соответствует «Положению о порядке присуждения степеней» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертационным работам на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология, а ее автор, **Прасолов Максим Вячеславович**, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании лаборатории прикладного анализа 12 мая 2015 г., протокол № 1.

Заведующий лабораторией прикладного анализа
член-корр. РАН, д.ф.-м.н. А.Ю. Веснин
13.05.2015 г.

Почтовый адрес: ИМ СО РАН,
пр. ак. Коптюга 4, Новосибирск, 630090
Тел. раб. 8-383-329-7616
Электронная почта: vesnin@math.nsc.ru

Подпись А.Ю. Веснина
удостоверяю
Зав. оргтделом Н.З. Киндалева
ИМ СО РАН
«13» 05 2015 г.