О Т З Ы В

официального оппонента о диссертационной работе
Прасолова Максима Вячеславовича
"Монотонное упрощение зацеплений и лежандровы графы",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.04 – геометрия и топология

Работа посвящена задаче различения узлов и зацеплений и, в частности, распознавания любого наперед заданного узла или зацепления. Эта старая трудная задача, которую около полутора веков интенсивно исследуют математики и физики-теоретики. К настоящему времени найдены полные инварианты узлов и решена задача алгоритмической классификация узлов. Однако, такой очевидный полный инвариант как диаграмма узла или зацепления на плоскости, при попытке сравнить диаграммы двух таких объектов, с использованием конечного набора элементарных преобразований диаграмм, а именно набора "движений Рейдемейстера" достаточного для сравнения диаграмм, приводит к задаче эквивалентной по трудности исходной задаче. Другой нетривиальный полный инвариант узла, дополнение к узлу в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, невычислим и не помогает в классификации узлов. В 1961 году В.Хакен нашел алгоритм классификации узлов с помощью нормальных поверхностей, однако его сложность оценивается двойной экспонентой от сложности узла (число перекрестков в диаграмме узла) и его компьтерные реализации очень медленно работают и всё, в плане различения узлов, что было сделано с помощью этих реализаций, также сделано раньше с помощью других инвариантов и более быстрых программ. В работе основным инструментом различения узлов и зацеплений являются прямогоугольные диаграммы узлов и зацеплений. Диаграмму любого узла или зацепления можно представить прямоугольной диаграммой, составленной из конечного числа замкнутых ломанных линий на плоскости, звенья которых являются горизонтальными или вертикальными отрезками, при этом правило "прохода-перехода" в точках самопересечения диаграммы устанавливается требованием: вертикальный отрезок всегда проходит сверху. Концы звеньев ломанных линий объявляются вершинами диаграммы и добавляется требование, что никакие три вершины не лежат на одной горизонтальной или вертикальной прямой. Тогда вершины однозначно определяют диаграмму, что очень удобно при задании диаграммы. Звенья ломаных в диаграмме называют ребрами. В качестве сложности прямоугольной диаграммы берется число вертикальных ребер. Определены элементарные преобразования прямогоугольных диаграмм. Две прямоугольные диаграммы определяют эквивалентные зацепления тогда и только тогда, когда их можно соединить конечной последовательностью элементарных преобразований. В качестве элементарных преобразований выбраны следующие три вида преобразований прямоугольных диаграмм: циклическая перестановка, рокировка, стабилизация и, обратная к ней, дестабилизация. Стабилизации (и обратные к ним дестабилизации) различают еще по двум типам

I и II. Циклические перестановки и рокировки не меняют сложности диаграммы. Вводится понятие элементарного упрощения прямоугольной диаграммы, которое состоит из последовательности элементарных преобразований: циклических перестановок и рокировок, при этом последнее элементарное преобразование является дестабилизацией. Это приводит к уменьшение сложности прямоугольной диаграммы на единицу, так как циклические перестановки и рокировки не меняют сложность диаграммы.

Основной технической целью диссертационной работы является указание критерия упрощаемости прямоугольной диаграммы зацепления хотя бы на единицу. Этот критерий связан с переходом к диаграммам лежандровых зацеплений. Лежандровыми зацеплениями называют гладкое зацепление, которые всюду касаются распределения плоскостей в $\mathbb{R}^3$, задаваемого дифференциальной 1-формой $\omega = xdy + dz$ и называемого стандартной контактной структурой. Определена эквивалентность лежандровых зацеплений с учетом их связи с контактной структурой. В качестве диаграмм лежандровых зацеплений берутся их проекции на плоскость YOZ в $\mathbb{R}^3$, называемых фронтальными проекциями лежандровых зацеплений. Имеется аналоги движений Рейдемейстера для фронтальных проекций, которые связывают между собой фронтальные проекции эквивалентных лежандровых зацеплений. В одном классе эквивалентности топологического зацепления содержится бесконечно много лежандровых классов эквивалентности. Их может различать инвариант лежандровых зацеплений Тёрстена-Беннекена, который вычисляется по формуле $tb(L) = w(L) - \frac{1}{2}c(L)$, где $w(F)$ – алгебраическое число двойных точек фронтальной проекции F зацепления L, а $c(F)$ – число точек возврата проекции F. Описана замечательная связь между прямоугольными диаграммами и фронтальными проекциями лежандровых зацеплений. Повернем прямоуголную диаграмму R на угол $\frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки, сгладим углы прямоуголной диаграммы торчащие вверх и вниз, а углы торчащие вправо и влево превратим в точки возврата. Получим фронтальную проекцию некоторого лежандрова зацепления L_R, причем любое лежандрово зацепление лежандрово эквивалентно некоторому зацеплению вида L_R. Стабилизации и дестабилизации типа II прямоугольных диаграмм – это в точности те элементарные преобразования диаграммы R, которые меняют лежандров тип зацепления L_R.

В работе вводится понятие пути β на прямоугольной диаграмме R и понятие концов пути. Вводится понятие шунта. Это некоторый дополнительный прямоугольный путь α, не содержащийся в прямоугольной диаграмме R и соединяющий концы пути β этой диаграммы. При этом предполагается, что на объединение путей $\alpha \cup \beta$ при их лежандровой реализации можно натянуть диск с некоторами дополнительными свойствами относительно стандартной контактной структуры в $\mathbb{R}^3$ и книжного представления исходного зацепления, отвечающего диаграмме R. Пара путей (α, β) также называют шунтом диаграммы. Вводится понятие веса шунта. Он равен инварианту Тёрстена-Беннекена зацепления с диаграммой $\alpha \cup \beta$. В последующем путь β заменяется путем α и называется шунтированием пути β. Значительное место в диссертационной работе занимает доказательство Ключевой леммы, в которой утверждается, что для прямоугольной диаграммы зацепления R и шунта (α, β) с весом b меньшим, чем число вертикальных ребер компоненты диаграммы R, на ребрах которой находятся концы шунта α, найдется прямоугольная диаграмма R', лежандрово эквивалентная $(R \setminus \beta) \cup \alpha$, которая из R может быть получена b последовательными элементарными упрощениями типа II. В доказательстве этой леммы основную роль играет анализ слоения, высекаемого листами книжного представления зацепления на диске, участвущем в шунтировании, и анализ особенностей этого слоения. На основе этой леммы показано существование упрощений разных типов исходной диаграммы и их независимость, что приводит к новому доказательству теоремы Дынникова о монотонной упрощаесоти нетривиальной диаграммы тривиального узлов до тривиальной диаграммы. Доказано предположение, ранее высказаное Дж.Грином, что для неупрощаемой прямоугольной диаграммы R зацепления фиксированного топологическклгл типа, зацепление L_R имеет наибольшее число Тёрстена-Беннекена среди всех лежандровых зацеплений того же топологического типа. На основе этого результата и таблицы Г.Т.Джина и В.Парка, составлена таблица максимальных чисел Тёрстена-Беннекена для тех узлов с минимальным числом перекрестков равным 12, для которых эти числа до сих были неизвестны. На основе Ключевой леммы более детально описана связи между упрощениями и шунтами. Доказана утверждение о типе связи между класами Бирман-Менаско, задающих эквивалентные ориентированные зацепления. Одним из наиболее значимых следствий Ключевой леммы и техники разработанной для ее доказательства является доказательство обобщенной гипотезы Вогана Джонса, которая утверждает, что если две косы $\beta_1 \in B_m$ и $\beta_2 \in B_n$ представляют один и тот же класс ориентированных зацеплений и β_1 имеет наименьшее возможное для данного класса число нитей, то для алгебраического числа перекрестков этих кос имеет место неравенство $|w(\beta_1) - w(\beta_2)| \leq n - m$. В частности, при $n = m$ имеем $w(\beta_1) = w(\beta_2)$.

В последней четвертой главе прямоугольные диаграммы применяются для классификации лежандровых графов с точностью до их непрерывной деформации. Вводится понятие заборной диаграммы и их эквивалентности. Показано, что имеется взаимнооднозначное соответствие между классами лежандровых графов и классами заборных диаграмм.

По изложению отметим, что структура диссертационной работы хорошо продумана, а текст тщательно выверен (имеется лишь небольшого числа неизбежных опечаток), все изложено хорошим литературным языком. Отметим также, что текст диссертационной работы сопровождается большим числом довольно сложных рисунков, без которых было бы достаточно трудно понять рассуждения и описания комбинаторных и геометрических объектов, рассматриваемых в работе. Доказательство Ключевой леммы, на которой основана большая часть результатов работы, снабжено описанием основных шагов и идеи всего доказательства. Автор проявил настоящий комбинаторный дар проводя рассуждение и доказательство по индукции Ключевой леммы и классификационных теорем в четвертой главе. Во введении и в тексте всех четырех глав дан содержательный обзор работ, где впервые доказаны используемые теоремы или поставлены решаемые задачи. Выбранная степень детализации изложения дает возможность проникнуть в суть рассуждений и геометрических построений, которые позволяют убедиться в правильности доказательств сформулированных результатов. Доказательства всех новых результатов изложены с исчерпывающей полнотой и тщательностью.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Все результаты работы должным образом опубликованы в ведущих российских математических журналах и апробированы в докладах на математических семинарах по геометрии и топологии в России и зарубежом, а также докладывалиь на крупных международных математических конференциях.

Оценивая диссертацию в целом необходимо отметить, что это актуальное научно квалифицированное исследование в области топологических объектов малой размерности, в котором решен ряд тесно связанных задач, имеющих важное значение для распознавания узлов, зацеплений и графов. В работе над диссертационной темой М.В.Прасолов продемонстрировал владение многими методами современной топологии и комбинаторики, связанных с геометрией узлов, зацеплений, графов и комбинаторикой их диаграмм. Прасолов получил новые существенные результаты о монотонной и лежандровой упрощаемости топологических объектов на плоскости. Описаны минимальные условия на преобразования диаграмм, не увеличивающих их сложность.

Работа М.В.Прасолова удовлетворяет всем требованиям п.9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней", предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, ее тематика полностью соответствует специальности 01.01.04 – геометрия и топология, а ее автор Прасолов Максим Вячеславович, заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук.

12 мая 2015 г.

Доктор физико-математических наук,
профессор (В.П.Лексин)

адрес: 140411, Московская область, г. Коломна, ул. Зеленая, 30, МГОСГИ

e-mail: *lexin_vp@mail.ru*

Подпись Лексина В.П. заверяю:

Проректор по научной работе МГОСГИ,
доктор физико-математических наук,
доцент (С.П.Хэкало)