ФГБОУ ВО “МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА”

На правах рукописи

Загрядский Олег Александрович

ГЕОМЕТРИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ И ПОТЕНЦИАЛОВ БЕРТРАНА

Специальность 01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2015

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО “Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова”

Научные руководители:	**Фоменко Анатолий Тимофеевич**, доктор физико-математических наук, академик РАН **Кудрявцева Елена Александровна**, кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Шелехов Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук профессор (ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», профессор кафедры функционального анализа и геометрии) **Морозов Павел Валерьевич**, кандидат физико-математических наук (ЗАО "ВТБ Капитал Управление Активами")
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»

Защита диссертации состоится 15 мая 2015 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 на базе ФГБОУ ВО “Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова” по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВО МГУ им.М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, дом 27, сектор А, 8 этаж, и на сайте http://mech.math.msu.su/.

Автореферат разослан 15 апреля 2015.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ им. М.В.Ломоносова доктор физико-математических наук, профессор

Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению дифференциально-геометрических, механических и топологических свойств некомпактных гамильтоновых систем с угловой координатой на примере задачи Бертрана [1]. Задача Бертрана наряду с задачей Кеплера и задачей трёх тел является одной из наиболее известных обратных задач небесной механики и посвящена отысканию законов притяжения по геометрическим свойсвам орбит.

Впервые она была поставлена и решена Ж. Бертраном в 1873 г. и состояла в отыскание всех законов притяжения между Солнцем и планетой, обладающих тем свойством, что они зависят только от расстояния и планета описывает замкнутые траектории (если скорость ограничена определённым образом). Ответ состоял в том, что такими силами могут быть только две: сила всемирного тяготения $F \sim \frac{1}{r}$ и сила Гука $F \sim r^2$, где (r, φ) – полярные координаты. Этот результат позволяет вывести закон всемирного тяготения из законов Кеплера, т.к. согласно законам Кеплера орбиты замкнуты и являются эллипсами, значит согласно результату Бертрана сила может быть либо Ньютоновской либо Гуковской, но в последнем случае Солнце будет находится в центре эллипса, что противоречит первому закону Кеплера (оно должно находится в одном из фокусов).

В дальнейшем к этой задаче обращались многие учёные, исследователи; её усложнение и обобщение шло двумя путями.

Первый состоял в модификации требований к искомому закону сил. Ещё в XIX веке Г. Дарбу и Г.Альфену[2]. удалось описать все потенциалы приводящие к коническим сечениям, при этом не требовалось, чтобы потенциал зависел только от r, а Г.Кёнигсу[3] все потенциалы (зависящие только от r) приводящие к алгебраическим кривым. В дальнейшем потенциал всегда предполагался центральным (т.е. зависящим только от неугловой координаты r).

Второй путь состоял в усложнении геометрии пространства. В 1903 г. Г.Либман[4] решил задачу Бертрана для поверхностей постоянной кривизны – сферы и плоскости Лобачевского, нашёл уравнения траекторий и показал, что они будут коническими сечениями. тот же результат неоднократно переоткрывался, в т.ч. в работе В.В. Козлова, А.О. Харина [5] в 1992 г. правда в несколько другом контексте. За пространствами постоянной кривизны последовали поверхности вращения и пионером здесь оказался

[1] Bertrand J., Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, C.R. Acad. Sci. Paris 77 (1873), 849–853.

[2] Despeyrous T., Cours de mécanique. Vol. 2., Note XIV, Paris: A. Herman, 1886.

[3] Koenigs G., Sur les lois de force central fonction de la distance pour laquelle toutes les trajectoires sont algébraiques, Bull. de la Société de France 17 (1889), 153-155.

[4] Liebmann H., Über die Zentralbewegung in der nichteuklidische Geometrie, Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft, Math. Phys. Klasse, Bd. 55 (1903), 146–153.

[5] Kozlov V. V., Harin A. O., Kepler's problem in constant curvature spaces, Celestial Mech. and Dynamical Astronomy 54 (1992), 393–399.

Дарбу[6], который в 1877 г. указал способ описания поверхностей вращения, допускающих наличие потенциала, приводящего к замкнутым орбитам. За последние 25 лет многие исследователи возвращались к задаче Бертрана на поверхностях вращения, в т.ч. М. Сантопрете [7], В. Перлик [8], А. Баллестрос [9] и др.

В диссертации подробно изучена система Бертрана, т.е. система с потенциалом, приводящим к замкнутым орбитам, на поверхности вращения в своих различных модификациях, связанных с различными требованиями к искомому потенциалу, а также к поверхности вращения. Поверхность вращения рассматривается как абстрактное многообразие (не обязательно вложенное в $\mathbb{R}^3$) вида $S \approx (a, b) \times S^1$ с координатами $(u, \varphi \mod 2\pi)$ и некоторой метрикой вращения, а также многообразие $S' \approx (a, b) \times S^1$ с псевдоримановой метрикой вращения. Для таких систем описаны все метрики, допускающие наличие потенциалов с замкнутыми орбитами, геометрические и механические свойства орбит, связь формы орбит с метрикой поверхности, в т.ч. показано, что орбиты колеблются периодически между двумя параллелями поверхности, посчитаны угловой и временной периоды таких колебаний. Также описана геометрия Бертрановских (допускающих существование хотя бы одного искомого потенциала), наличие полюсов и экваторов, приведена глобальная и локальная классификация с точностью до изометрии и преобразования подобия таких поверхностей, установлена реализуемость как поверхности вращения в $\mathbb{R}^3_2$ для случая псевдоримановой метрики, приведены критерии Бертрановости поверхности вращения.

К данной динамической системе движения по двумерной поверхности вращения под действием центрального потенциала применим также гамильтонов подход. Система имеет две степени свободы и два первых независимых коммутирующих интеграла энергии и кинетического момента. Похожие системы активно изучаются в последнее время топологическими методами, разработанными А.Т. Фоменко, А.А. Ошемковым, С.В. Матвеевым, А.В. Болсиновым, Х.Цишангом, Т.З. Нгуеном и многими другими. Среди подобных динамическим систем бертрановская представляет особый интерес, т.к. она не является вполне интегрируемой по Лиувиллю, однако каждый её регулярный слой Лиувилля представляет собой либо тор, либо цилиндр, либо пару цилиндров, она не является компактной, все её торы Лиувилля резонансны. Полученное К.Р. Алешкиным [10] обобщение теоремы Лиувилля для систем с одним неполным фазовым потоком позволяет уверенно применять разработанные методы описания вполне

[6]Darboux G., Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution// Bull. S. M. F. 1877. **5**. 100–113.

[7] Santoprete M., Gravitational and harmonic oscillator potentials on surfaces of revolution, Journal of Math. Phys. 49:4 (2008), 042903, 16 pp.

[8] Perlick V., Bertrand spacetimes, Class. Quantum Grav. 9 (1992), 1009–1021.

[9]Ballesteros Á., Enciso A., Herranz F. J., Ragnisco O., Bertrand spacetimes as Kepler/oscillator potentials // 2008

[10]К. Р. Алешкин, "Топология интегрируемых систем с неполными полями", Матем. сб., **205**:9 (2014), 49–64

интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем к системе Бертрана.

Цель работы

Основной задачей работы является обобщение теоремы Бертрана на абстрактные многообразия вращения с псевдоримановыми метриками, проведение классификации поверхностей Бертрана, анализ их реализуемости, обобщение критерия Сантопрете, а также описание слоения Лиувилля бертрановских систем с псевдоримановой метрикой, построение бифуркационных диаграмм.

Методы исследования

В диссертации используются методы дифференциальной геометрии, топологии и теоретической механики. При исследовании топологии слоения Лиувилля бертрановской системы используются методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1. Найдены все ρ-замыкающие функции обобщенного семейства дифференциальных уравнений Бертрана.

2. Обобщена теорема Бертрана на абстрактные поверхности вращения без экваторов, с псевдоримановой метрикой. Проведена классификация всех поверхностей Бертрана.

3. Установлен факт реализуемости поверхностей Бертрана с псевдоримановой метрикой в $\mathbb{R}^3_2$, обобщен критерий Сантопрете и первый закон Кеплера.

4. Для систем Бертрана с псевдоримановой метрикой построены бифуркационные диаграммы отображения момента, описаны перестройки слоев Лиувилля, связанные как с особыми точками отображения момента, так и с регулярными.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. С.Г.Крейна.” (Воронеж, 25-30 января 2012 г.);

XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов” (Москва, 8–13 апреля 2013 г.);

XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов” (Москва, 7–11 апреля 2014 г.).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

на семинаре “Современные геометрические методы” под руководством акад. А.Т. Фоменко, проф. А.В. Болсинова, проф. А.С. Мищенко, проф. А.А. Ошемкова, доц. Е.А. Кудрявцевой, доц. И.М. Никонова (неоднократно: 2008-2014 гг.);

на семинаре “Геометрия в целом” под руководством проф. И.Х. Сабитова в 2012 г;

на семинаре «Oberseminar Differentialgeometrie» под руководством проф. Г. Книпера (совместный семинар Рурского университета в Бохуме и Технического университета в Дортмунде, Германия, 2010 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах [1-8], список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объём

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст диссертации изложен на 107 страницах и содержит 1 таблицу и 27 рисунков. Список литературы содержит 63 наименования.

Содержание работы

Во **введении** подробно излагается история обратной задачи механики Бертрана; обосновывается актуальность полученных в диссертации результатов и их научная новизна; описывается структура диссертации и основные результаты.

В **первой главе** даются основные определения, описывается несколько несложных примеров и формулируется опорная теорема об обобщенном семействе уравнений Бертрана.

Будем рассматривать поверхности $S \approx (a,b) \times S^1$ с координатами $(u, \varphi \mod 2\pi)$ и римановой метрикой вращения $ds^2 = a_{11}^2(u)du^2 + a_{22}^2(u)d\varphi^2$, а также псевдоримановой метрикой вращения $ds^2 = a_{11}^2(u)du^2 - a_{22}^2(u)d\varphi^2$, где $-\infty \le a < b \le \infty$, a_{11}, a_{22} – гладкие положительные функции. На поверхности S действует гладкий центральный потенциал, т.е. потенциал $V(u)$, зависящий только от координаты u. Под действием этого потенциала по S движется частица. Введем константу $\hat{\varepsilon}$, которая будет различать римановой и псевдоримановой случаи, и, соответственно, будет равна единице в первом и минус единице во втором. Назовём траекторией движения функцию $\vec{r}(t) = (u(t), \varphi(t))$, а орбитой – кривую $u(\varphi) \subset S$, которая является образом отображения $\vec{r}(t)$. Система допускает два первых интеграла: энергии E и кинетического момента K ($K = a_{22}^2(u)\dot{\varphi}$).

Определение. Назовём орбиту (траекторию) $u(\varphi)$ *круговой*, если $u(\varphi) = \mathrm{const}$. Назовём орбиту (траекторию) $u(\varphi)$ *вырожденной*, если $u(\varphi) \subset \{(u,\varphi), \varphi = \mathrm{const}\}$. Назовём орбиту (траекторию) $u(\varphi)$ *ограниченной*, если $u(\varphi) \subset \{(u,\varphi), u_1 \le u \le u_2\}$, т.е орбита целиком лежит в замкнутом поясе, между параллелями $u = u_1$, $u = u_2$.

Определение. Потенциал $V(u)$ *замыкающий*, если существует хотя бы одна замкнутая, ограниченная, некруговая, невырожденная орбита и любая невырожденная ограниченная орбита замкнута.

Известными примерами замыкающих потенциалов являются закон всемирного тяготения Ньютона и закон Гука на $\mathbb{R}^2$, а также их обобщения на полусферу S^2 и плоскость Лобачевского L^2. Цилиндр является поверхностью, на которой не существует замыкающих потенциалов.

Утверждение. *На круговом цилиндре* $C := \{(x,y,z) : z^2 = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$ *не существует замыкающего потециала* $V(z)$.

Основной результат первой главы относится к свойствам обобщенного семейства уравнений Бертрана. Назовём *обобщенным семейством уравнений Бертрана* однопараметрическое (ненулевой параметр K) семейство дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} + \rho(z) = \frac{1}{K^2}\Psi(z) \tag{1}$$

на интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}^1$, где $\Psi(z)$ и $\rho(z)$ – функции класса C^∞, определенные на интервале (a,b).

Определение. Функцию $\Psi = \Psi(z)$ на интервале (a,b) назовём *замыкающей* для функции $\rho = \rho(z)$ (или *ρ-замыкающей*), если

($\exists$) существует значение параметра $K = K_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, при котором соответствующее уравнение имеет ограниченное непостоянное решение $\tilde{z} = \tilde{z}(\varphi)$;

($\forall$) все ограниченные непостоянные решения $z = z(\varphi)$ уравнения со всевозможными значениями параметра K являются периодическими функциями с попарно соизмеримыми периодами.

Назовём функцию $\Psi = \Psi(z)$ на интервале (a,b) *локально замыкающей* для функции $\rho = \rho(z)$ (или *локально ρ-замыкающей*), если

$(\exists)^{\mathrm{loc}}$ существует значение параметра $K = K_0$ такое, что соответствующее уравнение имеет невырожденное устойчивое положение равновесия $z_0 \in (a,b)$;

$(\forall)^{\mathrm{loc}}$ для всякой пары $(K_0, z_0) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times (a,b)$, удовлетворяющей $(\exists)^{\mathrm{loc}}$, найдутся $\varepsilon, \delta > 0$, такие что все ограниченные непостоянные решения $z(\varphi)$ уравнений, отвечающих $K \in (K_0 - \delta, K_0 + \delta)$, с областью значений из ε-окрестности z_0, т.е. $z(\mathbb{R}^1) \subset [z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$, являются периодическими функциями с попарно соизмеримыми периодами.

Назовём функцию $\Psi = \Psi(z)$ на интервале (a,b) *полулокально замыкающей* для функции $\rho = \rho(z)$ (или *полулокально ρ-замыкающей*), если выполнены условия ($\exists$), $(\forall)^{\mathrm{loc}}$ и следующее условие:

$(\forall)^{\mathrm{s-loc}}$ все ограниченные решения $z(\varphi)$ уравнения при $K = K_0$, такие что $z(\mathbb{R}^1) \subset \tilde{z}(\mathbb{R}^1)$, являются периодическими функциями с попарно соизмеримыми периодами, где K_0 и $\tilde{z} = \tilde{z}(\varphi)$ – соответствующие значения параметра K и решение из условия ($\exists$).

Назовём функцию $\Psi(z)$ *сильно* (соответственно *слабо*) *ρ-замыкающей*, если любая точка $z_0 \in (a,b)$ является невырожденным устойчивым (соответственно устойчивым) положением равновесия уравнения при некотором $K = K_0$, зависящем от

z_0, а также выполнено условие $(\forall)^{\text{loc}}$ (соответственно его аналог для всякой пары $(K_0, z_0) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times (a, b)$, такой что z_0 – устойчивое положение равновесия уравнения при $K = K_0$).

Теорема. *Пусть задано семейство уравнений Бертрана (1) на (a, b).*

Если Ψ является полулокально ρ-замыкающей (или ρ-замыкающей, или сильно или слабо ρ-замыкающей), то она является локально ρ-замыкающей.

Если на интервале (a, b) функция ρ не имеет нулей, то все классы замыкающих, полулокально замыкающих, локально замыкающих, сильно замыкающих и слабо замыкающих для ρ функций Ψ совпадают.

Если на интервале (a, b) функция ρ не имеет нулей, то существует не более двух замыкающих функций с точностью до положительной мультипликативной константы и эти функции определяются условиями:

- *(a) если $\rho'|_{(a,b)} = \text{const} > 0$, то существуют ровно две (с точностью до положительной мультипликативной константы) ρ-замыкающие функции Ψ на (a, b), а именно $\Psi_i(z) = A_i/\rho^{i^2-1}(z), i = 1, 2$, гда $A_i \neq 0$ – произвольная мультипликативная константа, такая что $A_i\rho^i(z) > 0$; более того минимальный положительный период любого ограниченного непостоянного решения равен $\Phi_i = 2\pi/(i\sqrt{\rho'})$;*
- *(b) если $\rho|_{(a,b)}$ является рациональной функцией вида $\rho(z) = \frac{(z-\zeta)^4+D}{\mu^2(z-\zeta)^3}$, где $D = \text{const} \neq 0$, $\mu = \text{const} > 0$, $\zeta = \text{const} \notin (a, b)$, то существует единственная (с точностью до положительной мультипликативной константы) ρ-замыкающая функция на (a, b) : $\Psi(z) = \Psi_2(z) = \frac{A}{(z-\zeta)^3}$, где $A \neq 0$ – мультипликативная константа, такая что $A((z-\zeta)^4 + D) > 0$; более того минимальный положительный период любого ограниченного непостоянного решения равен $\Phi_i = \pi\mu$);*
- *(c) если $\rho(z)$ не имеет ни одного из указанных выше видов, то не существует ρ-замыкающих функций на (a, b).*

В случаях (a) и (b) каждая точка $z \in (a, b)$ является невырожденным положением равновесия уравнения при $K = K_i := \pm\sqrt{A_i/\rho^{i^2}(z)}$, $i = 1, 2$ в случае (a) и $K = \pm\mu\sqrt{\frac{A}{(z-\zeta)^4+D}}$ (в случае (b)), а при других значениях параметра K не является положением равновесия.

Во **второй главе** обобщена классическая теорема Бертрана на поверхности вращения с индефинитной метрикой.

Теорема. *Пусть на поверхности S с индефинитной метрикой $ds^2 = a_{11}^2(u)du^2 - a_{22}^2(u)d\varphi^2$ выполнено $a_{22}'(u) \neq 0$ для любого $u \in (a, b)$ (S не имеет экваторов). Тогда*

1. *На тех поверхностях S, псевдориманова метрика которых заменой $u = u(\theta)$ приводится к виду:*

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\theta^2+c)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2(\theta^2+c)} \end{pmatrix} \tag{2}$$

для некоторых μ – неотрицательной рациональной, c – действительной констант существуют ровно два типа замыкающих потенциалов с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант $V_1(\theta) = A|\theta| + B$ $(A < 0, B \in \mathbb{R})$, $V_2(\theta) = \frac{A}{\theta^2} + B$ $(A > 0,\ B \in \mathbb{R})$.

2. *На тех поверхностях S, псевдориманова метрика которых заменой $u = u(\varphi)$ приводится к виду:*

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\theta^2+c-t\theta^{-2})^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2(\theta^2+c-t\theta^{-2})} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

   для некоторых констант c, t, μ, причём μ – неотрицательная рациональная, а $t \neq 0$, существует ровно один тип замыкающего потенциала с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант $V_2(\theta) = \frac{A}{\theta^2} + B$ $(A(\theta^4 + t) > 0, B \in \mathbb{R})$.

3. *На остальных поверхностях замыкающего потенциала не существует.*

Каждая поверхность Бертрана (как в римановом, так и в псевдоримановом) случаях параметризуется пятеркой (c, t, μ, a, b). В диссертации приведена следующая классификация поверхностей Бертрана.

Теорема. *Для поверхностей Бертрана с римановой (псевдоримановой) метрикой справедливо:*

1. *Две поверхности $S_1 = S_{c_1,t_1,\mu_1,a_1,b_1}$ и $S_2 = S_{c_2,t_2,\mu_2,a_2,b_2}$ S^1-изометричны тогда и только тогда, когда совпадают все параметры $(c_1, t_1, \mu_1, a_1, b_1) = (c_2, t_2, \mu_2, a_2, b_2)$.*
   Две поверхности $S_1 = S_{c_1,t_1,\mu_1,a_1,b_1}$ и $S_2 = S_{c_2,t_2,\mu_2,a_2,b_2}$ φ-изометричны в окрестности своих меридианов тогда и только тогда, когда $(c_1, t_1, a_1, b_1) = (c_2, t_2, a_2, b_2)$, т.е. часть $\{(\theta, \varphi) : 0 < \varphi < \varphi_1\} \subset S_{c_1,t_1,\mu_1,a_1,b_1}$ вертикально изометрична части $\{(\theta, \varphi) : 0 < \varphi < \frac{\mu_2}{\mu_1}\varphi_1\} \subset S_{c_2,t_2,\mu_2,a_2,b_2}$.

2. *Две поверхности $S_{c_1,t_1,\mu_1,a_1,b_1}$ и $S_{c_2,t_2,\mu_2,a_2,b_2}$ S^1-подобны тогда и только тогда, когда существует $k > 0$: $t_1 = k^4 t_2$, $c_1 = k^2 c_2$, $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $\mu_1 = \mu_2$.*

Здесь под S^1-изометрией (подобием) понимается изометричный диффеоморфизм (диффеоморфизм подобия), переводящий параллели в параллели, а под вертикальной изометрией или φ изометрией – изометрия, переводящая меридианы в меридианы.

Как было установлено Гордоном[11] , в случае, если в некоторой области фазового пространства автономной гамильтоновой системы все фазовые орбиты замкнуты, то период движения по замкнутой траектории зависит только от интеграла E. Для

[11] Gordon W. B.. On the relation between period and energy in periodic dynamical systems // J. Math. Mech. 19 (1969), 111-114.

поверхностей постоянной кривизны явный вид такой зависимости был найтен В. Козловым[12], а для поверхностей Бертрана, соответствующих значениям параметров из области $\{c^2+4t>0\}$, явный вид даёт следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть задана система Бертрана (S,V), где S – поверхность Бертрана с римановой метрикой (псевдоримановой метрикой), соответствующая точке области значения параметров $\{(c,t,\mu=\frac{p}{q}) : c^2+4t>0, t\neq 0)\}$, $V=\frac{A}{\theta^2}$ – аналог гуковского потенциала. Тогда период T движения по замкнутой траектории $\vec{r}(t)$ не зависит от интеграла кинетического момента K и вычисляется по формуле*

$$T=\frac{\pi q}{2\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\sqrt{\Delta}+c}{\sqrt{E(\sqrt{\Delta}+c)+2A}}+\frac{\sqrt{\Delta}-c}{\sqrt{E(c-\sqrt{\Delta})+2A}}\right), \tag{4}$$

где $\Delta=c^2+4t$.

В **третьей главе** устанавливается факт реализуемости поверхностей Бертрана с псевдоримановой метрикой (3) в $\mathbb{R}^3_2$ с индефинитной метрикой $ds^2=-dx^2-dy^2+dz^2$ как поверхности вращения с осью OZ.

Теорема. *При любом допустимом значении параметров c,t,μ,a,b поверхность Бертрана S' целиком реализуется в $\mathbb{R}^3_2$ как поверхность вращения.*

Для римановых и псевдоримановых поверхностей Бертрана обобщается критерий Сантопрете, в частности установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $S'\approx(a,b)\times S^1$ – многообразие с координатами $(v,\varphi \mod 2\pi)$ и псевдоримановой метрикой $ds^2=dv^2-f^2(v)d\varphi^2$, где $f(v)$ – гладкая функция на (a,b) и $f'(v)\neq 0$ на (a,b). Тогда, если функция $f(v)$ удовлетворяет уравнению*

$$\beta^4+5(-f''f+f'^2)\beta^2-5f''ff'^2+4f''^2f^2-3f'''f'f^2+4f'^4=0, \tag{5}$$

для неотрицательной действительной β, то на этом многообразии существуют координаты $(\theta,\varphi \mod 2\pi)$, такие, что $\theta=\theta(v)$, в которых псевдориманова метрика имеет вид (3):

$$ds^2=\frac{d\theta^2}{(\theta^2+c-t\theta^{-2})^2}+\frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2+c-t\theta^{-2})}, \tag{6}$$

где μ,c,t – некоторые вещественные константы, $\mu>0$. При этом $\mu\in\{\frac{1}{\beta},\frac{2}{\beta}\}$. Более того, если $ff''-f'^2\equiv \mathrm{const}$, то $f''f-f'^2\equiv\frac{\beta^2}{i^2}$, для $i\in\{1,2\}$, $t=0,\mu=\frac{i}{\beta}$; если $ff''-f'^2\neq\mathrm{const}$, то $t\neq 0,\mu\neq\frac{2}{\beta}$.

Обратно, для всякого многообразия Бертрана без экваторов, т.е. псевдориманова многообразия с индефинитной метрикой (6), функция $f(v)$, полученная при записи индефинитной метрики (6) в натуральных координатах, т.е. $f(v)$, определённая условиями $-f^2(v(\theta))=\frac{1}{\mu^2(\theta^2+c-t\theta^{-2})}$, $v'(\theta)=-(\theta^2+c-t\theta^{-2})^{-1}$, удовлетворяет уравнению (5) для константы $\beta:=\frac{2}{\mu}$ при $t\neq 0$, для любой константы $\beta\in\{\frac{1}{\mu},\frac{2}{\mu}\}$ при $t=0$.

[12] Козлов В. В., О динамике в пространствах постоянной кривизны, Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1994. N.2, 28–35.

Для поверхностей Бертрана S' с псевдоримановой метрикой (2) обобщен первый закон Кеплера.

Утверждение. *Пусть S' – поверхность Бертрана с псевдоримановой метрикой $ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2+c)^2} + \frac{d\varphi^2}{(\theta^2+c)}$, реализованная в $\mathbb{R}^3_2$. Пусть на ней действует аналог ньютоновского потенциала V_1 или аналог Гуковского V_2. Тогда движение по S' под действием V_1 (соответственно V_2) будет происходить по коническим сечениям, где конус является квадрикой и его центр расположен на оси вращения.*

В **четвертой главе** система Бертрана рассматривается как гамильтонова. Для данной гамильтоновой системы совместные поверхности уровней первых интегралов энергии H и кинетического момента p_φ образуют слоение Лиувилля фазового пространства M^4. Для данных двух интегралов в диссертации строится отображение момента, бифуркационные диаграммы и полный образ Σ фазового пространства (расширенная бифуркационная диаграмма), который разбивается на несколько зон, отвечающих различным типам слоев Лиувилля. Во множестве Σ выделим подмножество Σ_1, являющееся образом точек, в которых ранг отображения момента падает на единицу, что соответствует движению по круговым орбитам.

В зависимости от значений параметров (c, t), входящих в псевдориманову метрику (3), и вида замыкающего потенциала, биффуркационные диаграммы отличаются друг от друга. Выделим четыре случая (l_1, V_1), (l_1, V_2), (Ω_1, V_2), (Ω_2, V_2), где $l_1 := \{t = 0, c < 0\}$, $\Omega_1 := \{t > 0\}$, $\Omega_2 := \{t < 0, c < 0, c^2 + 4t > 0\}$, где $V_1 = A|\theta|$ – аналог потенциала Ньютона, $V_2 = \frac{A}{\theta^2}$ – аналог потенциала Гука.

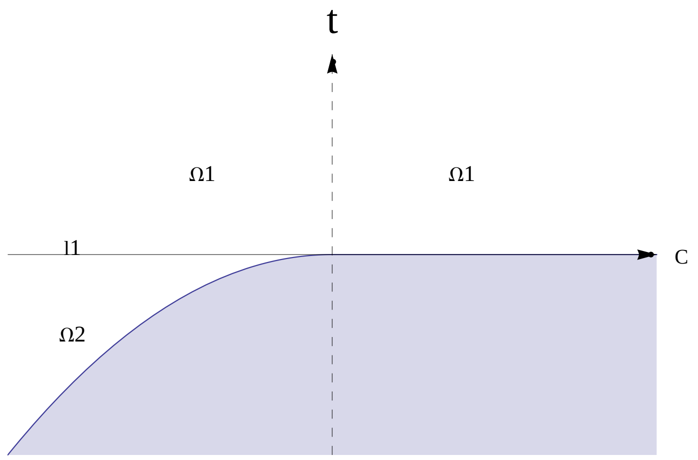

Рис. 1: Плоскость параметров c, t и её разбиение на зоны l_1, Ω_1, Ω_2, отвечающие различным типам поверхностей Бертрана.

Предложение. *Рассмотрим максимальную поверхность Бертрана S', соответствующую значениям параметров (c, t, μ) из области l_1 (рис. 1), и потенциал $V = A\theta$ $(A < 0)$. Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма и полный образ отображения момента (на плоскости (K, E)) имеют вид (рис. 2). Точка A_1 имеет* *координаты* $(\sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}}, A\sqrt{-c})$ *и не принадлежит* Σ, *множество* Σ_1 *представляет из себя кривую* $E_1(K) = \{(K,E) : E = \frac{c\mu^2K^2}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2K^2}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}} < K < \infty\}$.

Область Σ_2 *делится кривыми* $E_2(K), E_3(K)$ *на четыре зоны (рис. 3)* I_B, I_1, I_2, I_3, *где* $E_2(K) = \{(K,E) : E = \frac{c\mu^2K^2}{2}, 0 < K < \infty\}$, $E_3(K) = \{(K,E) : E = A\sqrt{-c}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}} < K < \infty\}$. *Прообраз любой точки из* Σ_1 *– окружность, прообраз любой точки из* I_B *тор (рис. 3). Прообраз каждой точки из* I_1 *цилиндр, соответствующие фазовые потоки полны. Прообраз каждой точки из* I_2 *цилиндр с неполными фазовыми потоками, время на соответствующих траекториях не продолжается ни до* $+\infty$, *ни до* $-\infty$. *Прообраз любой точки из* I_3 *– пара цилиндров с неполными потоками; время на траекториях цилиндра, лежащего в* $\{p_\theta < 0\}$, *не продолжается до* $+\infty$, *но продолжается до* $-\infty$, *для цилиндра* $\{p_\theta > 0\}$ *наоборот. Граница зон* I_1 *и* I_B *содержится в* I_1, *граница зон* I_2 *и* I_B *содержится в* I_2, *граница зон* I_1 *и* I_3 *содержится в* I_3, *граница зон* I_2 *и* I_3 *содержится в* I_3, *общая граничная точка четырех зон принадлежит* I_3.

Предложение. *Рассмотрим максимальную поверхность Бертрана* S', *соответствующую значениям параметров* (c, t, μ) *из области* l_1 *(рис. 1), и замыкающий потенциал* $V = A\theta^{-2}$ $(A > 0)$. *Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма и полный образ фазового пространства (на плоскости* (K, E)*) имеют вид (рис. 4). Точка* A_1 *имеет координаты* $(\frac{\sqrt{2A}}{-\mu c}, \frac{A}{-c})$ *и не принадлежит* Σ, *множество* Σ_1 *представляет из себя кривую* $E_1(K) = \{(K,E) : E = \frac{c\mu^2K^2}{2} + \sqrt{2A}\mu K, \frac{\sqrt{2A}}{-\mu c} < K < \infty\}$.

Область Σ_2 *делится кривой* $E_2(K)$ *на две зоны (рис. 5)* I_B, I_1, *где* $E_2(K) = \{(K,E) : E = \frac{A}{-c}, \frac{\sqrt{2A}}{-\mu c} < K < \infty\}$. *Прообраз любой точки из* Σ_1 *– окружность, прообраз любой точки из* I_B *тор (рис. 5). Прообраз каждой точки из* I_1 *цилиндр с полными фазовыми потоками. Граница зон* I_1 *и* I_B *содержится в* I_1.

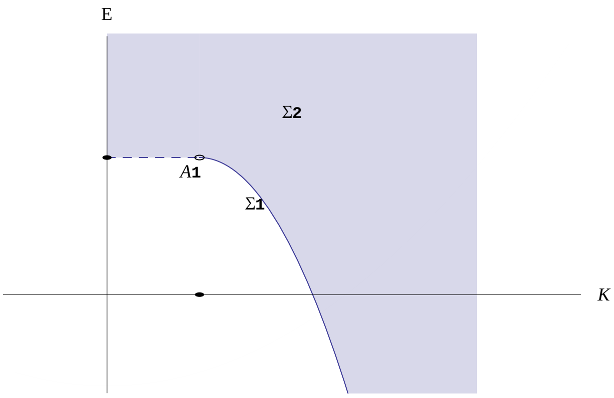

Рис. 2: Бифуркационная диаграмма и Σ в случае l_1, V_1.

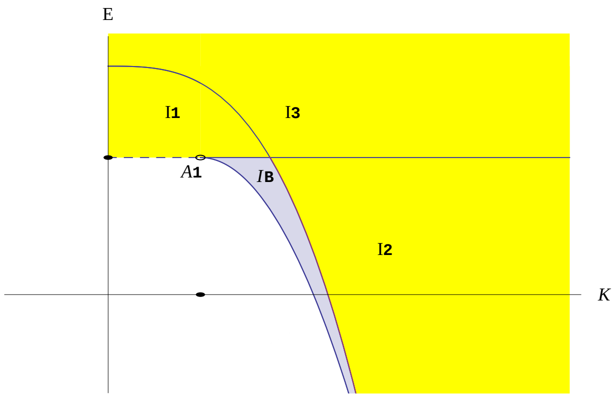

Рис. 3: Расширенная бифуркационная диаграмма в случае l_1, V_1.

Предложение. *Рассмотрим максимальную поверхность Бертрана* S', *соответствующую значениям параметров* (c, t, μ) *из области* Ω_1 *(рис. 1), и потенциал* $V =$

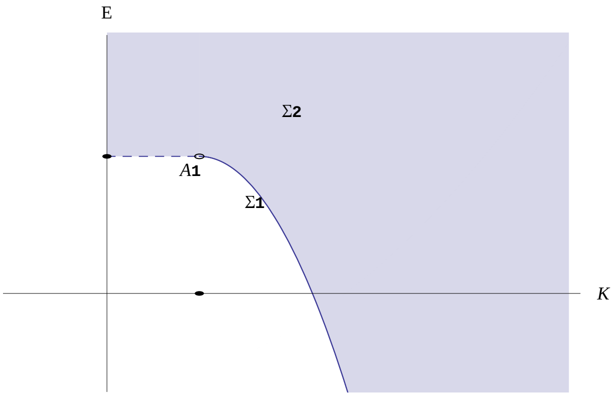

Рис. 4: Бифуркационная диаграмма и Σ в случае l_1, V_2.

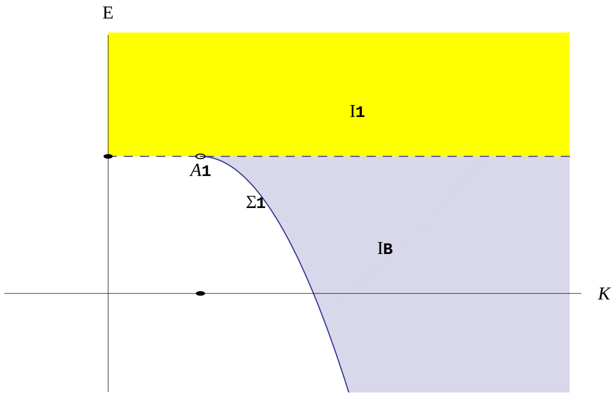

Рис. 5: Расширенная бифуркационная диаграмма в случае l_1, V_2.

$A\theta^{-2}$ $(A > 0)$. *Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма и полный образ отображения момента (на плоскости* (K, E)*) имеют вид (рис. 6). Точки* A_1, A_2 *имеют координаты* $(\frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_2^4+t}}, \frac{A}{\theta_2^2})$, $(\frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{t}}, \frac{Ac}{t})$ *соответственно и не принадлежат* Σ. *Множество* Σ_1 *представляет из себя кривую* $E_1(K) = \{(K, E) : E = \frac{c\mu^2K^2}{2} + \mu^2K^2\sqrt{\frac{2A}{\mu^2K^2} - t},$
$\sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}} < K < \infty\}$.

Область Σ_2 *делится кривыми* $E_2(K), E_3(K)$ *на четыре зоны (рис. 7)* I_B, I_1, I_2, I_3, *где* $E_2(K) = \{(K, E) : E = \frac{A}{\theta_2^2}, \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_2^4+t}} < K < \infty\}$, $E_3(K) = \{(K, E) : K = \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{t}}, \frac{Ac}{t} < E < \infty\}$. *Прообраз любой точки из* Σ_1 *– окружность, прообраз любой точки из* I_B *тор (рис. 7). Прообраз каждой точки из* I_1 *цилиндр, соответствующие фазовые потоки полны, прообраз каждой точки из* I_2 *цилиндр с неполными фазовыми потоками, время на соответствующих фазовых траекториях не продолжается ни до* $+\infty$, *ни до* $-\infty$. *Прообраз любой точки из* I_3 *– пара цилиндров с неполными потоками; время на траекториях цилиндра, лежащего в* $\{p_\theta < 0\}$, *не продолжается до* $+\infty$, *но продолжается до* $-\infty$, *для цилиндра* $\{p_\theta > 0\}$ *наоборот. Граница зон* I_1 *и* I_B *содержится в* I_1, *граница зон* I_2 *и* I_B *содержится в* I_2, *граница зон* I_1 *и* I_3 *содержится в* I_3, *граница зон* I_2 *и* I_3 *содержится в* I_3, *общая граничная точка четырех зон принадлежит* I_3.

Предложение. *Рассмотрим максимальную поверхность Бертрана* S' *с координатами* (θ, φ), *соответствующую значениям параметров* (c, t, μ) *из области* Ω_2 *(рис. 1); без ограничения общности координата* θ *меняется в пределах первой компоненты, т.е. в пределах интервала* $(\theta_1, \sqrt[4]{-t})$. *На* S' *действует потенциал* $V = A\theta^{-2}$ $(A < 0)$. *Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма и полный образ отображения момента (на плоскости* (K, E)*) имеют вид (рис. 8). Точка* A_1 *имеет координаты* $(\frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_1^4+t}}, \frac{A}{\theta_1^2})$ *и не принадлежит* Σ. *Множество* Σ_1 *представляет из себя кривую* $E_1(K) = \{(K, E) : E = \frac{c\mu^2K^2}{2} + \mu^2K^2\sqrt{\frac{2A}{\mu^2K^2} - t}, \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_1^4+t}} < K < \infty\}$.

Область Σ_2 *делится кривыми* $E_2(K), E_3(K)$ *на четыре зоны (рис. 9)* I_B, I_1, I_2,

I_3, где $E_2(K) = \{(K,E) : E = \frac{A}{\theta_1^2}, \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_1^4+t}} < K < \infty\}$, $E_3(K) = \{(K,E) : E = \frac{c\mu^2K^2}{2} + \sqrt{-t}\mu^2K^2 + \frac{A}{\sqrt{-t}}, 0 < K < \infty\}$. Прообраз любой точки из Σ_1 – окружность, прообраз любой точки из I_B тор (рис. 9). Прообраз каждой точки из I_1 цилиндр, соответствующие фазовые потоки полны, прообраз каждой точки из I_2 цилиндр с неполными фазовыми потоками, время на траекториях, лежащих на цилиндре не продолжается вправо до $+\infty$, не продолжается влево до $-\infty$. Прообраз любой точки из I_3 – пара цилиндров с неполными потоками; время на траекториях цилиндра, лежащего в $\{p_\theta < 0\}$, продолжается до $+\infty$, но не продолжается до $-\infty$, для цилиндра $\{p_\theta > 0\}$ наоборот. Граница зон I_1 и I_B содержится в I_1, граница зон I_2 и I_B содержится в I_2, граница зон I_1 и I_3 содержится в I_3, граница зон I_2 и I_3 содержится в I_3, общая граничная точка четырех зон принадлежит I_3.

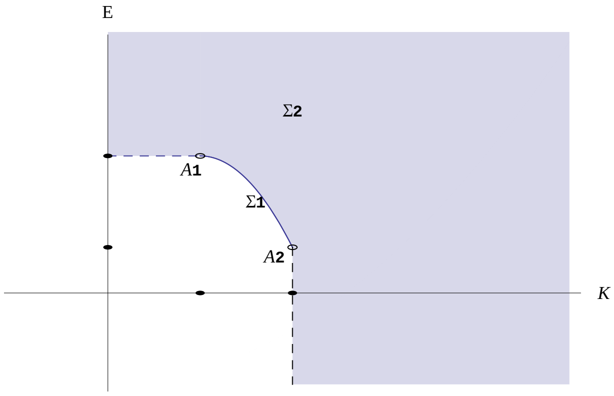

Рис. 6: Бифуркационная диаграмма и Σ в случае Ω_1, V_2.

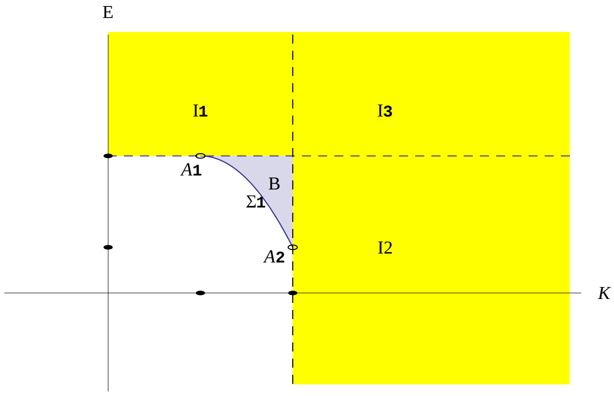

Рис. 7: Расширенная бифуркационная диаграмма в случае Ω_1, V_2.

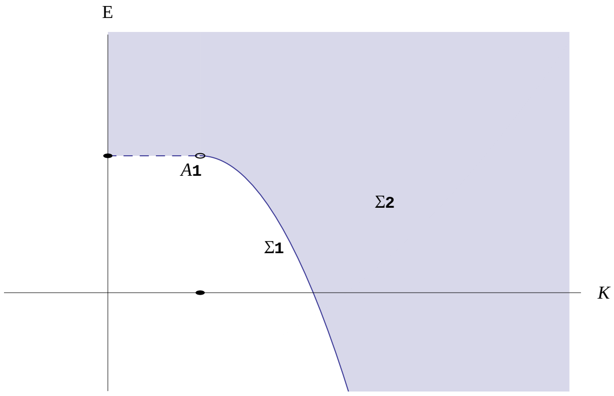

Рис. 8: Бифуркационная диаграмма и Σ в случае Ω_2, V_2.

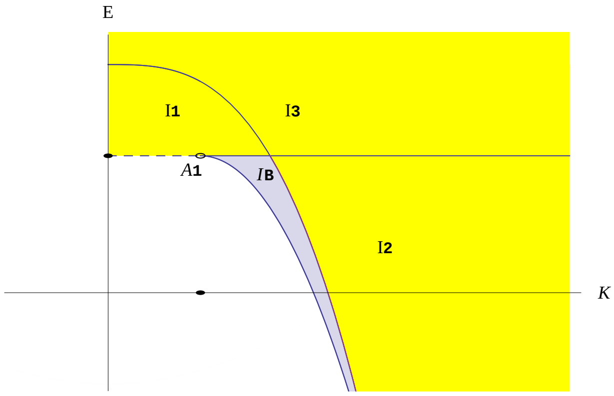

Рис. 9: Расширенная бифуркационная диаграмма в случае Ω_2, V_2.

В конце главы приводится описание перестроек слоев Лиувилля, возникающих при переходе точки (K, E) на расширенной бифуркационной диаграмме из одной зоны в другую (например, из I_B в I_1), а также вводится понятие некомпактных атомов $O_{0-1}, O_{0-11}, O_{1-11}$, которые наряду с компактным атомом A возникают в системах Бертрана.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность научным руководителям академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко, доценту Кудрявцевой Елене Александровне за постановку задач и за глубокое внимание к работе. Автор благодарен Малых А.Д., Щепетилову А.В., Сабитову И.Х. за полезные обсуждения. Автор благодарен А.С. Мищенко, А.А. Ошемкову, Д.А. Федосееву за участие в дискуссиях и полезные советы. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений за внимание к работе.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. Загрядский О. А., Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А., "Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения"// *Матем. сб.*, **203**:8 (2012), 39–78 (Загрядскому принадлежит формулировка и доказательство теоремы 8, формулировка следствия 3).

2. Загрядский О. А., Федосеев Д. А., "О явном виде метрик Бертрана'// *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, **67**:5 (2013), 46–50 (Загрядскому принадлежит теорема 1, лемма 2 и случаи 1 и 3 леммы 1).

3. Загрядский О. А., "Соотношение классов Бертрана, Бонне и Таннери"// *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, №6 (2014), 62-65.

4. Загрядский О. А., "Поверхности Бертрана с псевдоримановой метрикой вращения"// *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, №1 (2015), 66-69.

5. Загрядский О. А., "Бертрановская система и её фазовое пространство"// Наука и образование МГТУ, № 12 (2014), 365-386.

6. Загрядский О. А., Федосеев Д. А., Фоменко А. Т., Кудрявцева Е. А., "Гамильтоновы системы и движения планет по замкнутым орбитам', международная конференция "Воронежская зимняя математическая школа им. С.Г.Крейна.", Воронеж 25-30 января 2012 года, с. 68.

7. Загрядский О. А., "Поверхности Бертрана", XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", Москва, 8–13 апреля 2013 г., `http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2189/55595_bca6.pdf`.

8. Загрядский О. А., "Псевдоримановы поверхности с центральными потенциалами и замкнутыми траекториями", XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", Москва, 7–11 апреля 2014 г., `http://lomonosov-msu.ru/uploaded/2200/2200_55595_8d0af8.pdf`.