Отзыв

научного руководителя на диссертационную работу Загрядского Олега Александровича «Геометрия гамильтоновых систем для многообразий и потенциалов Бертрана», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

Диссертационная работа О.А. Загрядского «Геометрия гамильтоновых систем для многообразий и потенциалов Бертрана» является исследованием в области геометрии и топологии. Предмет изучения восходит к 1873 году, когда Ж. Бертран поставил и решил обратную задачу небесной механики, посвящённую поиску всех центральных законов сил на евклидовой плоскости, приводящих к замкнутым орбитам при движении частицы под действием этих законов. Соответствующие центральные потенциалы названы в данной работе замыкающими. Как установил Бертран, таких потенциальных законов притяжения на плоскости ровно два: закон гравитационного притяжения Ньютона и закон пружинного взаимодействия Гука. Развитием и обобщением теоремы Бертрана на различные римановы многообразия занимались в разные годы такие ученые, как Ж.Г. Дарбу, Г. Кенигс, Г. Либман, В. Киллинг, Ц. Нейман, П. Хиггс, В. Перлик, А. Бессе, В.В. Козлов, А.О. Харин, М. Сантопрете, А. Беллестерос, А. Энцисо, Ф. Герранц, О. Рагниско и др. Аналоги теоремы Бертрана были получены для двумерных римановых многообразий постоянной кривизны и без экваторов, в том числе для конусов, плоскости Лобачевского и полусферы. Г.Ж. Дарбу, В. Перлик, А. Бессе и М. Сантопрете получили классификации двумерных римановых многообразий вращения без экваторов, обладающих замыкающим центральным потенциалом с некоторыми специальными свойствами. Многими учеными исследовались геометрические и динамические свойства полученных семейств римановых многообразий вращения и центральных потенциалов на них.

В своей диссертационной работе автор, комбинируя методы лагранжевой механики, гамильтоновой механики, а также теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и топологии, получает обобщение на двумерные многообразия вращения с псевдоримановой метрикой, подробно останавливается на анализе аналитических, геометрических и механических свойств бертрановских динамических систем, и описывает для них топологию слоения Лиувилля фазового пространства. Последнее представляет особый интерес в связи с тем, что для вполне интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы подробно изучены особенности слоения Лиувилля и их перестройки (бифуркации) в окрестностях компактных слоев, в то время как многие системы механики похожи на бертрановскую, которая в свою очередь обладает некомпактными слоями Лиувилля, не является вполне интегрируемой в обычном смысле, и богата перестройками слоев, не содержащих сингулярные слои.

Диссертация состоит из введения и четырех глав.

Во введении дается подробный обзор полученных ранее результатов, относящихся к данной проблематике, обосновывается актуальность работы, ставятся цели исследования и дается краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе вводятся базовые определения, в том числе определения нескольких важных понятий замыкающих потенциалов. Для обобщения теоремы Бертрана на поверхности вращения автор вводит понятие обобщенного семейства уравнений Бертрана с одним действительным параметром и двумя функциональными, являющихся натуральными механическими системами с одной степенью свободы. Автор формулирует и доказывает важные аналитические свойства решений этого семейства дифференциальных уравнений, и с их помощью получает основной результат первой главы --- теорему 3, описывающую все обобщенные семейства уравнений Бертрана, решения которых вблизи положений равновесия являются периодическими и имеют попарно соизмеримые периоды.

Во второй главе обобщается теорема Бертрана на поверхности вращения с псевдоримановыми метриками без экваторов (теорема 6), для чего автор устанавливает соответствия между геометрией орбит и аналитическими свойствами эффективного потенциала. Далее подробно описывается геометрия поверхностей Бертрана и дается их классификация с точностью до изометрий и преобразований подобия (теорема 7). Также обобщается результат В.В. Козлова, а именно устанавливается явный вид зависимости периода движения по ограниченным траекториям от уровня энергии (утверждение 5).

В третьей главе устанавливается реализуемость многообразий Бертрана с псевдоримановой метрикой как поверхностей вращения в R^3_2 (теорема 8). Для орбит на некоторых таких поверхностях устанавливается свойство быть коническими сечениями, т.е. обобщается первый закон Кеплера (утверждение 15). Также обобщается (в теоремах 9 и 10) критерий Сантопрете, дающий простой алгоритм проверки Бертрановости риманова (или псевдориманова) многообразия вращения в натуральных координатах на нем.

В четвертой главе автор рассматривает систему Бертрана как автономную гамильтонову систему. Для неё подробно описывается слоение Лиувилля фазового пространства для первых интегралов энергии и кинетического момента. Отмечена резонансность, некомпактность и неполнота потоков (утверждения 18 и 19). Построены образ отображения момента, бифуркационные диаграммы (предложения 4.1—4.4). Образ отображения момента детализирован, отмечены зоны, имеющие различные типы прообразов и отвечающие различным типам движений. Показано, что для систем Бертрана прообразом точки может быть либо окружность, либо тор, либо цилиндр, либо пара цилиндров. Описаны возникающие при этом некомпактные перестройки слоев Лиувилля.

Все полученные результаты диссертанта являются новыми, интересными и важными, снабжены полными доказательствами. Они своевременно опубликованы в центральной печати и доложены на многих семинарах и нескольких конференциях.

Диссертационная работа «Геометрия гамильтоновых систем для многообразий и потенциалов Бертрана» соответствует п.9, 10, 11, 13 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемых российским ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Автор диссертации Загрядский Олег Александрович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

К.ф.-м.н., доцент Кудрявцева Е.А.

Кудрявцева

19.01.2015

Подпись доцента Е.А. Кудрявцевой заверяю