Отзыв

научного руководителя на диссертационную работу Загрядского Олега Александровича «Геометрия гамильтоновых систем для многообразий и потенциалов Бертрана», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

Диссертация О.А. Загрядского является исследованием в области геометрии и топологии и посвящена топологии слоения фазового пространства динамической системы Бертрана. Изучение систем Бертрана началось в 1873 году с решения одной обратной задачи небесной механики, посвящённой поиску всех центральных законов сил на плоскости, приводящих к замкнутым орбитам при движении под действием этих законов. С конца XIX века и по сей день данная задача не утратила своей актуальности. Ей, а также смежным проблемам, посвятили свои труды такие ученые как Г. Дарбу, Т. Депейру, П. Аппель, Г. Кёнигс, Г. Либман, Ж. Славяновский, М. Икеда, Н. Катаяма, В.В. Козлов, А.О. Харин, В. Перлик, М. Сантопрете. За это время удалось обобщить и решить задачу Бертрана на сфере S^n, на пространстве Лобачевского L^n, на проективном пространство SO(3) (со стандартными метриками). Последние два десятилетия активно изучается её обобщение на двумерные поверхности вращения. В своей диссертационной работе автор, комбинируя методы лагранжевой механики, гамильтоновой механики, а также теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и топологии получает обобщение на двумерные многообразия вращения с индефинитной метрикой, подробно останавливается на анализе аналитических, геометрических и механических свойств Бертрановской системы, и описывает для неё топологию слоения Лиувилля фазового пространства. Последнее представляет особый интерес в связи с тем, что для вполне интегрируемых компактных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы подробно изучены особенности фазового пространства, возникающие при перестройках на изоэнергетической поверхности регулярных слоёв Лиувилля при «проходе» через сингулярный слой; в то время как некоторые интересные системы механики, похожие на Бертрановскую, не являются компактными, не всегда вполне интегрируемы в обычном смысле, и богаты перестройками регулярных слоев при «переходе» через некоторые тоже «регулярные» слои.

Диссертация состоит из введения и четырех глав.

Во введении дается подробный обзор полученных ранее результатов, относящихся к данной проблематике, обосновывается актуальность работы, ставятся цели исследования и дается короткое содержание диссертации по главам.

В первой главе вводятся и анализируются базовые определения. Для обобщения теоремы Бертрана на поверхности вращения автор вводит понятие обобщенного семейства уравнений Бертрана с одним действительным параметром и двумя функциональными, затем формулирует и доказывает важные аналитические свойства решений рассматриваемого обобщенного семейства уравнений, используя которые доказывает теорему 3, описывающие все возможности, приводящие к периодическим решениям с попарно соизмеримыми периодами.

Во второй главе теорема Бертрана обобщается на поверхности вращения с псевдоримановыми метриками без экваторов, для чего автор устанавливает соответствия между геометрией орбит и аналитическими свойствами эффективного потенциала. Затем подробно описывается геометрия поверхностей Бертрана и дается их классификация с точностью до изометрии и преобразования подобия. Также обобщается результат В.В. Козлова, а именно устанавливается явный вид зависимости периода движения по ограниченным траекториям.

В третьей главе доказывается реализуемость многообразий Бертрана с псевдоримановой метрикой как поверхностей вращения в $\mathbb{R}^3_2$. Для орбит на некоторых таких поверхностях устанавливается свойство быть коническими сечениями, т.е. обобщается первый закон Кеплера. Также обобщается критерий Сантопрете, дающий простой алгоритм проверки Бертрановости поверхности в натуральных координатах.

В четвертой главе автор рассматривает систему Бертрана как автономную гамильтонову систему. Для неё подробно описывается слоение Лиувилля фазового пространства для первых интегралов энергии и кинетического момента. Отмечена резонансность, некомпактность и неполнота потоков. Построены образ отображения момента, бифуркационные диаграммы. Образ отображения момента детализирован, отмечены зоны, имеющие различные типы прообразов и отвечающие различным типам движений. Показано, что для систем Бертрана прообразом точки может быть либо окружность, либо тор, либо цилиндр, либо пара цилиндров. Описаны возникающие при этом некомпактные перестройки слоев Лиувилля.

Все полученные результаты диссертанта являются новыми, интересными, важными. Они своевременно опубликованы в центральной печати и доложены на многих семинарах и нескольких конференциях.

По моему мнению, диссертационная работа «Геометрия гамильтоновых систем для многообразий и потенциалов Бертрана» соответствует п.9, 10, 11, 13 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемых российским ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Автор диссертации Загрядский Олег Александрович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

Д.ф.-м.н., академик РАН Фоменко А.Т.

19.01.2015

Подпись академика А.Т. Фоменко заверяю