ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Загрядского Олега Александровича «ГЕОМЕТРИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ И ПОТЕНЦИАЛОВ БЕРТРАНА», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

В своей диссертации О.А. Загрядский рассматривает некоторые аспекты известной задачи Бертрана и ее обобщений. Имеется в виду задача, решение которой было дано Жозефом Бертраном в 1873 году: найти силу притяжения между Солнцем и планетами при условии, что эта сила зависит только от расстояния, а планеты движутся по замкнутым траекториям. У этой красивой задачи много различных обобщений, геометрия которых изучается до сих пор.

В рецензируемой работе получены следующие основные результаты: задача Бертрана обобщена на абстрактные многообразия с псевдоримановой метрикой; указаны условия, при которых на последних существует бертрановский потенциал; проведена классификация поверхностей Бертрана, рассмотрен вопрос об их вложении в псевдориманово пространство; найдена формулировка закона Кеплера для таких поверхностей; исследовано слоение Лиувилля бертрановских систем с псевдоримановой метрикой и построены соответствующие бифуркационные диаграммы.

В диссертации введение и 4 главы. Во введении достаточно подробно рассматривается история проблемы, приводятся основные известные результаты, обосновывается актуальность рассматриваемых вопросов, дается краткое описание полученных автором результатов.

В первой главе (Поверхности и метрики Бертрана) автор вводит необходимые понятия. На абстрактном многообразии с римановой или псевдоримановой метрикой поверхности вращения с локальными координатами u и φ рассматривается движение точки под действием потенциала V(u). Закон движения задается уравнениями Эйлера-Лагранжа, находится вид соответствующего лагранжиана и два первых интеграла - кинетической энергии и кинетического момента. Выводится уравнение орбит (утверждение 1). Вводятся бертрановские координаты и важное для дальнейшего понятие замыкающего потенциала (в частности, локально замыкающего, полулокально замыкающего, сильно и слабо замыкающего потенциала).

Поверхность вращения без экваторов называется бертрановской, если на ней существует замыкающий (бертрановский) потенциал. В качестве примера рассмотрены плоскость, конус, полусфера и цилиндр. Доказано, что на цилиндре замкнутых потенциалов не существует (утверждение 2). Вводится понятие обобщенного семейства уравнений Бертрана и для него понятие замыкающей функции, соответствующей понятию замыкающего потенциала. Основной результат главы содержится в теореме 3, где найден вид метрик, допускающих замыкающий потенциал, даны условия существования и вид замыкающей функции.

Во второй главе (Поверхности Бертрана) получены важные следствия из теоремы 3. Выведены условия существования замыкающего центрального потенциала и дано его явное выражения для псевдоримановой метрики вида $dv^2 - f^2(v)d\varphi^2$ (теорема 6), а также отмечено, что известные аналогичные теоремы для римановой метрики (теоремы 4 и 5) также получаются из теоремы 3. Доказательство теоремы 6 предваряется рассмотрением свойств орбит и эффективного потенциала, от которого эти свойства зависят (предложения 2.1 - 2.5).

Далее рассматриваются некоторые геометрические свойства поверхностей Бертрана. Поверхность Бертрана вместе с потенциалом определяется семью параметрами, из них 3 отвечают за форму поверхности, 2 - за ее "ширину", 2 - за выбор потенциала. В теореме 7 указаны условия на параметры, необходимые и достаточные для изометрии или подобия двух поверхностей Бертрана. В утверждении 5 выводится формула для вычисления периода движения по замкнутой траектории.

В третьей главе (Абстрактные многообразия Бертрана и поверхности Бертрана в R^3 и R^3_2) найдены условия реализации метрики Бертрана в виде поверхности вращения в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах (утверждение 6, лемма 3.1.1 и теорема 8). В теоремах 9 и 10 обобщается известный результат М. Сантопрете: найдено условие на функцию f(v), определяющую метрику вида $dv^2 + f^2(v)d\varphi^2$ или $dv^2 - f^2(v)d\varphi^2$, при котором эта метрика допускает бертрановский потенциал - замыкающий, локально замыкающий, полулокально замыкающего, слабо замыкающий потенциала (у Сантопрете было сделано для римановой метрики и сильно замыкающего потенциала). Здесь же рассматриваются некоторые геометрические свойства поверхностей Бертрана и орбит (утверждения 7 - 10). В утверждении 15 обобщен первый закон Кеплера на поверхности с индефинитной метрикой и значениями параметров $t=0$, $\mu=1$. В этом случае орбиты являются квадриками. Отмечено, что при $t\neq 0$ для орбит обобщаются некоторые понятия теории квадрик (например, эксцентриситет).

В главе 4 (Гамильтонов подход) система Бертрана рассматривается как гамильтонова система с четырехмерным фазовым пространством M^4. Указан соответствующий гамильтониан, записаны уравнения движения и два первых интеграла - энергии и кинетического момента. На M^4 возникает естественная симплектическая структура, с помощью которой определяется косой градиент и скобка Пуассона гладких функций, заданных на M^4. С помощью скобки Пуассона уравнения задачи записываются в симметричной форме. Далее вводится понятие гамильтоновой системы, вполне интегрируемой по Лиувиллю, понятие слоения и тора Лиувилля, резонансного тора и резонансной гамильтоновой системы.

В случае системы Бертрана совместные поверхности уровней первых интегралов энергии и кинетического момента образуют слоение Лиувилля фазового пространства. Для них строится отображение момента, бифуркационные диаграммы и расширенная бифуркационная диаграмма. Полный образ фазового пространства $\sum$ разбивается на несколько зон, отвечающих различным типам слоев Лиувилля. В $\sum$ выделяется подмножество точек, в которых ранг отображения момента уменьшается на единицу (движение по круговым орбитам). В зависимости от вида замыкающего потенциала и значений параметров, определяющих метрику, получаются различные диаграммы (предложения 4.1 - 4.4). Показано, в частности, что каждый слой является одним из следующих: окружность, тор, цилиндр, пара цилиндров.

В заключении приводится описание перестроек слоев Лиувилля, возникающих на расширенной бифуркационной диаграмме при переходе точки из одной зоны в другую.

Замечания.

1. Стр. 10: Определение 1.1.1 на самом деле ничего не определяет. Это не определение, а обозначение.
2. Стр. 11: граничные параллели определяются при u=a и u=b, но по определению u меняется в интервале (a, b).
3. Стр. 17, доказательство Утверждения 2. Непонятно, что означает фраза: "Движения вдоль координат происходят независимо друг от друга". Далее: "Значения, отличающиеся на 2π, задают одну и ту же координату". Значения чего? Координату какую?

Терминология некорректна. Если мы говорим об ускорении на траектории, то замена t на $2^{1/2}$ t должна производиться и в функции z(t). Но при замене параметра геометрии не меняется, траектория останется той же. Если же речь идет о замене постоянной c_1 на $2^{1/2}$ c_1, то это переход к другой траектории, но тогда говорить об ускорении нельзя. Результат, тем не менее, верный. Справедливость утверждения 2 вытекает из того простого факта, что для замкнутости всех траекторий необходимо, чтобы обе функции z и φ были периодическими, а у нас одна из них линейная, то есть не периодическая.

4. Стр. 14: орбита названа особой, если она лежит на меридиане. В автореферате она названа вырожденной.

5. Стр. 20: в названии пункта 1.2 надо добавить "Бертрана" (Обобщенное семейство уравнений Бертрана).
6. Стр. 20: в определении уравнений Бертрана 1.2.1 надо указать область значений параметра K.
7. Стр. 22, перед леммой 1.2.1: "...гладкая функция на интервале (a,b), к которому относятся....уравнения Бертрана." К чему относятся слова "к которому"?
8. Стр. 25, 2 абзац сверху: пропущено слово "такие".
9. Стр. 29, внизу: "...поверхности вращения с римановой метрикой". Этот термин нам представляется некорректным.
10. Стр. 31: в определении 2.1.1 не согласованы времена. Здесь же, в замечании 2.1.1: что означает запись $\varphi = \varphi \bmod 2\pi$?
11. Стр. 31: условие, указанное в замечании 2.1.1 (ответ на замечание А.С. Мищенко) не является вполне конструктивным, поскольку требует интегрирования. Ответ следовало бы дать в терминах дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции f_1 и f_2 .
12. Стр. 32, замечание 2.1.2: в неравенстве пропущен символ d.
13. Стр. 71: "...орбиты не являются эллипсами, но похожи на них, т. к. их уравнение напоминает уравнение эллипса". Это не математические рассуждения.
14. Стр. 74: в определении 4.1.2 надо указать, какие значения принимают индексы i и j.
15. Термины ньютоновской, гуковский, бертрановский надо писать с маленькой буквы.
16. Автореферат, стр. 1: как понять запись "...сила всемирного тяготения $F \sim 1/r$ и сила Гука $F \sim r^2$..."?

В целом материал диссертации изложен хорошо, доказательства корректные и достаточно подробные. Тем не менее, в диссертации и автореферате есть опечатки, неудачные стилистические обороты, орфографические погрешности. Автор часто заменяет литературный язык, на котором принято писать тексты, разговорным языком и жаргоном, что, на мой взгляд, вредит изложению.

Указанные недочеты имеют методический характер и не влияют на содержание и оценку работы. А оценка такова: диссертация представляет собой цельное научное исследование, содержащее новые интересные результаты, существенно дополняющие известные факты в исследуемой области. Направление исследования актуальное, допускающее разнообразные приложения. Автор хорошо владеет современным аппаратом дифференциально-геометрических исследований, демонстрирует математическую эрудицию, способность логично и доказательно изложить непростые результаты. Выводы, полученные в диссертации, достоверны и обоснованы. Содержание диссертации в автореферате отражено адекватно. Основные результаты диссертации докладывались автором на семинарах и конференциях, так что работа представлена научной общественности надлежащим образом.

Считаю, что диссертация соответствует требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор – Загрядский Олег Александрович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология.

Официальный оппонент, доктор физико-математических наук,
профессор Шелехов Александр Михайлович
Дом. адрес: 170 008, Тверь, ул. 15 лет Октября, 153, кв. 13
Тел. 8 961 019 93 59, эл. почта <amshelekhov@rambler.ru>
Место работы: Тверской государственный университет,
профессор кафедры функционального анализа и геометрии

А.М. Шелехов