ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Полехин Иван Юрьевич

О МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С НЕАВТОНОМНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2015

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Кугушев Евгений Иванович

Официальные оппоненты: Красильников Павел Сергеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой дифференциальных уравнений
факультета «Прикладная математика и физика»
Московского авиационного института
(национального исследовательского университета)

Родников Александр Владимирович,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Вычислительная математика и
математическая физика»
Московского государственного технического университета
имени Н.Э. Баумана

Ведущая организация: Вычислительный центр имени А.А. Дородницина
Российской академии наук

Защита состоится 15 мая 2015 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова
по адресу: Ломоносовский проспект, д.27
и на сайте `http://mech.math.msu.su/disersovet`

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
кандидат физико-математических наук,
доцент Прошкин В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Значительная часть исследований, проведенных в работе, мотивирована задачей о перевернутом плоском математическом маятнике на подвижном основании, для которой было представлено строгое обоснование того, что для широкого класса законов движения точки подвеса маятника в горизонтальной плоскости существует решение, вдоль которого движение маятника будет происходить без падений. В развитие данной задачи были рассмотрены новые примеры аналогичных систем, в том числе неголономных, для которых удается показать существование движений без падений при наличии неавтономного возмущения, задаваемого гладкими функциями времени. Прямым обобщением задачи о перевернутом плоском математическом маятнике является система, в которой рассматривается сферический маятник, расположенный на подвижном основании, которое движется по заранее заданному закону по горизонтальной плоскости. Несколько более общим случаем, рассмотренным в работе, является система, в которой массивная точка движется по произвольной двумерной компактной поверхности, которая пересекает горизонтальную плоскость, причем во всех точках пересечения касательная плоскость к поверхности ортогональна горизонту (например, в случае со сферическим маятником эта поверхность является сферой). Также предполагается, что поверхность движется плоскопараллельно горизонтальной плоскости по заданному закону. Показано, что в данной системе всегда существует решение, при котором массивная точка будет вечно оставаться строго выше горизонтальной плоскости. Также рассматриваются задачи о движении без падения диска с присоединенной массивной точкой и велосипеда, оба колеса которого принадлежат одной плоскости, по плоскости, которая движется горизонтально по заданному закону. В первом случае накладывается условие непроскальзывания на точку контакта диска и плоскости, во втором случае считаем, что взаимодействие колес велосипеда и плоскости происходит посредством силы вязкого трения. Для этих задач также показано существование движений без падений. Основным средством, используемым в вышеописанных задачах для доказательства существования движений без падения, является топологический метод Важевского. Применение несколько более тонких методов алгебраической топологии к подобным задачам позволяет узнать больше о свойствах решений. В частности, для перевернутого маятника показывается, что в случае, когда точка подвеса движется периодически, система допускает периодическое решение без падений. Показывается, что аналогичным свойством обладает и массивная точка, совершающая движение по кривой с трением, в случае, если кривая совершает движение по заданному периодическому закону. Часть диссертации посвящена изучению систем с убывающими со временем возмущениями, для которых с помощью простых оценок доказываются общие утверждения, иллюстрируемые на ряде примеров из динамики шара на вращающейся плоскости. Исследование механических систем с неавтономными возмущениями, которые в общем случае не предполагаются малыми, является относительно малоизученной и актуальной задачей.

Цель работы. Строгое обоснование результата о перевернутом маятнике с подвижным основанием, его обобщение и развитие, в том числе на неголономные системы и системы со многими степенями свободы. Усиление результата в задаче о перевернутом маятнике и близких задачах, заключающееся в доказательстве существования периодических решений без падений. Анализ влияния убывающих по времени возмущений на динамику механических систем.

Методы исследования. В работе используются методы аналитической механики, топологический метод Важевского, методы алгебраической топологии, которые применяются к рассматриваемым системам.

Достоверность результатов. Все результаты работы являются строгими, базирующимися на утверждениях из аналитической механики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, топологии и алгебры.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Они базируются на классических утверждениях механики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, топологии и алгебры. Среди новых результатов следует отметить строгое обоснование существования движения без падений в задаче о перевернутом маятнике на подвижном основании и доказательство существования периодических решений без падений в случае, если закон движения точки подвеса также периодический.

Теоретическая и практическая ценность. Работа является теоретической; утверждения, доказанные в ней, могут применяться для качественного исследования механических систем с неавтономными возмущениями и являются развитием классических задач. Полученные в ней результаты дают возможность изучать движение механических систем как с малыми и убывающими со временем возмущениями, так и в случае, когда возмущение не предполагается малым.

Апробация работы и публикации. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- На семинаре имени академика В. В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, Москва, ноябрь 2008 года.

- На семинаре имени академика В. В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, Москва, май 2010 года.

- На семинаре имени академика В. В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, Москва, ноябрь 2011 года.

- На семинаре «Математические методы технической механики» под руководством проф. С.Я.Степанова и доц.А.А.Бурова, Москва, декабрь 2010 года.

- На семинаре «Математические методы технической механики» под руководством проф. С.Я.Степанова и доц.А.А.Бурова, Москва, декабрь 2011 года.

- На семинаре «Динамика относительного движения» под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В.Мелкумовой, Москва, ноябрь 2011 года.

- На семинаре «Математические методы технической механики» под руководством проф. С.Я.Степанова и доц. А.А.Бурова, Москва, май 2013 года.

- На семинаре имени академика В. В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, Москва, сентябрь 2013 года.
- На семинаре имени академика В. В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, Москва, октябрь 2014 года.
- На семинаре «Избранные задачи динамики» под руководством рук. чл.-корр. РАН, проф. Д.В. Трещева, Москва, ноябрь 2014 года.
- На семинаре «Динамика относительного движения» под руководством рук. чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкий, проф. Ю.Ф. Голубев, проф. В.Е.Павловский, доц. К.Е. Якимова, доц. Е.В.Мелкумова, Москва, ноябрь 2014 года.

Доклады на конференции «Ломоносовские чтения»:

- «Системы с быстро убывающим по времени возмущением», Москва, 20 апреля 2009 года.
- «О движениях механических система с малыми неавтономными возмущениями», Москва, ноябрь 2011 года.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 3 печатные работы и 2 электронных препринта. Среди них 3 печатные работы [1-3], опубликованные в журналах, включенных в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 88 наименований. Общий объем диссертации — 128 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** описана область исследования и цель настоящей диссертации. Приводится краткий обзор работ, касающихся изучения неавтономных механических систем и применению топологических и аналитических методов для получения качественных результатов, касающихся динамики голономных и неголономных систем. Особое внимание уделяется работам о применении теоремы

Лефшеца-Хопфа и прочих методов алгебраической топологии к изучению динамики и, в частности, неподвижных точек динамических систем. Кратко излагается содержание диссертации.

В **первой главе** диссертации приводится доказательство утверждения о перевернутом маятнике на подвижном основании и ряд его обобщений. Показывается, что для перевернутого плоского математического маятника, точка подвеса которого движется в горизонтальной плоскости по заданному закону, всегда существует начальное положение с нулевой начальной скорость такое, что начав движение из него, маятник никогда не примет горизонтального положения. Также показывается, что аналогичное утверждение верно и для сферического маятника на подвижном основании. Случай сферического маятника обобщается на класс механических систем, в которых массивная точка движется без трения по компактной поверхности, притом сама компактная поверхность совершает движение параллельно горизонтальной плоскости.

Помимо рассмотрения данной классической задачи и ее прямых обобщений рассматриваются и другие механические системы, в том числе и неголономные, в которых также удается показать существование движений без падений.

Рассматривается задача о движении диска с присоединенной массой (находящейся все время в плоскости диска и также принадлежащая опорной плоскости) по подвижной плоскости без проскальзывания, показывается, что существуют такие начальные условия, что стартовав из них, диск никогда не упадет. Рассматривается задача о движении без падений велосипеда, руль которого зафиксирован таким образом, чтобы оба колеса принадлежали одной плоскости. В данном случае плоскость опять предполагается совершающей движение по заданному закону, а взаимодействие между колесами велосипеда и плоскостью осуществляется посредством силы вязкого трения. Также показывается, что существует решение без падений.

Для доказательства всех вышеназванных утверждений используются топологические соображения, составляющие собой метод Важевского.

В *первом* разделе приводятся необходимые определения и доказательство основного утверждения метода Важевского качественного исследования решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во *втором* разделе рассматривается задача о движении перевернутого маятника, прикрепленного к тележке, движущейся по заданному закону. В.И. Арнольдом было отмечено, что отсутствует строгое доказательство утверждения о том, что для любого заданного движения точки подвеса существует такое начальное положение маятника с нулевой обобщенной скоростью, что начав движение из него, маятник никогда не примет горизонтального положения. Приводится строгое доказательство представленного утверждения.

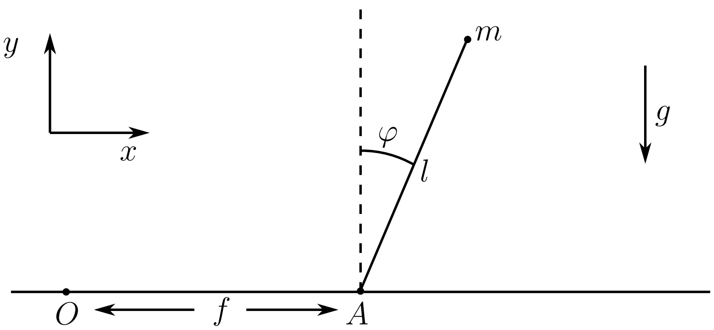

Рис. 1: Перевернутый маятник на подвижном основании.

Рассмотрим перевернутый маятник в плоскости, точка подвеса которого прикреплена к тележке. Пусть l — длина невесомого стержня, к свободному концу которого присоединена массивная точка, а другой конец соединен с полом вагона, точка имеет массу m, ускорение свободного падения будем обозначать g, пусть закон движения вагона задается гладкой функцией времени f. Таким образом, маятник движется под действием силы тяжести, и также на него оказывает влияние движение вагона, к которому он присоединен. Доказывается следующее

Утверждение. *Рассмотрим перевернутый плоский математический маятник в поле силы тяжести. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, задающая положение точки подвеса маятника на горизонтальной прямой. Тогда существует такое начальное положение $\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ маятника, что решение, выходящее из него с нулевой скоростью в момент времени $t = 0$, не достигает положений $\varphi = \pm\pi/2$ при всех $t \geqslant 0$.*

Идея доказательства заключается в следующем. Пусть Ω следующее подмножество расширенного фазового пространства

$$\Omega = \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon\; -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}.$$

Рассмотрим отрезок L, содержащийся в Ω и определяемый в координатах следующим образом

$$L = \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t = 0, -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, p = 0\}.$$

Покажем, что L содержит как минимум одну точку такую, что решение, выходящее из нее, не покидает множества $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ для всех $t \geqslant 0$. Предположим обратное. Тогда следующее отображение, которое мы обозначим σ, из L в $\partial\Omega$ корректно определено.

$$\sigma\colon (0, \varphi_0, p_0) \in L \mapsto (t^*, \varphi(t^*, \varphi_0, p_0), p(t^*, \varphi_0, p_0)) \in \partial\Omega.$$

Здесь $t^* = \sup(T)$

$$T = \{s \in [0, \infty)\colon \varphi(t, \varphi_0, p_0) \in [-\pi/2, \pi/2]\,\text{для всех}\, t \in [0, s]\}.$$

Если маятник расположен в горизонтальном положении и величина $\dot\varphi$ равна нулю, то как минимум локально он будет «падать» под действием силы тяжести, т.е. покидать множество, которое мы обозначили Ω. Из этого будет следовать, что отображение σ непрерывно и применимы рассуждения метода Важевского. Отметим, что тот факт, что находящийся в горизонтальном положении маятник с нулевой скоростью $\dot\varphi$ локально покидает Ω означает, что решения могут касаться границы Ω только внешним образом, из чего и следует непрерывность соответствующего отображения. Подобные рассуждения будут использоваться и при рассмотрении остальных утверждений первой главы.

В *третьем* разделе рассматривается случай сферического маятника. Показывается существование решений, которые не покидают некоторой заданной области для класса задач, близких к перевернутому маятнику на тележке.

Рассмотрим движение сферического маятника на подвижном основании (которое движется по плоскости) и показывается, что для заданного закона движения основания всегда существуют начальные условия, при которых маятник никогда не примет горизонтального положения, точнее, доказывается следующее

Утверждение. *Рассмотрим перевернутый сферический математический маятник в поле силы тяжести. Пусть* $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *гладкие функции, задающие положение точки подвеса маятника на горизонтальной плоскости* $z = 0$ *(ось* z *направлена против силы тяжести). Тогда существуют такие начальные условия при* $t = 0$*, что решение, выходящее из них, удовлетворяет условию* $z > 0$ *при всех* $t \geqslant 0$*.*

Общая схема рассуждений полностью аналогична случаю плоского маятника. Аналогичным образом показывается, что все точки выхода являются точками строгого выхода. Прямая, соединяющая две полуплоскости, в случае сферического маятника заменяется диском, и утверждение следует из того, что не существует непрерывного отображения диска на его границу.

Подобные рассуждения проходят и в общем случае двигающейся по заданному закону компактной поверхности, по которой движется массивная точка, если данная поверхность пересекает выделенную горизонтальную плоскость ортогонально (т.е. вектор нормали к горизонтальной плоскости является касательным вектором к поверхности). В этом случае граница либо связна (случай эквивалентен сферическому маятнику), либо имеет несколько компонент связности, из чего также следует, что можно применить метод Важевского, т.е. верно следующее

Утверждение. *Рассмотрим компактную связную поверхность по которой без трения движется массивная точка под действием силы тяжести. Пусть поверхность совершает плоскопараллельное движение вдоль некоторой горизонтальной плоскости, которую поверхность пересекает во всех точках ортогонально. Тогда существуют такие начальные условия для массивной точки при* $t = 0$*, что решение, выходящее из них, удовлетворяет условию* $z > 0$ *при всех* $t \geqslant 0$*.*

В *четвертом* разделе рассматривается задача о качении диска с присоединенной массой по подвижной плоскости без падений.

Рассматривается неголономная механическая система, состоящая из плоского несимметричного (в общем случае) диска, катящегося без проскальзываания по горизонтальной подвижной плоскости, и массивной точки. На систему накладывается голономная связь: массивная точка всегда находится в плоскости диска на фиксированном от центра диска расстоянии и в плоскости, по которой происходит качение диска. Также предполагается, что плоскость, по которой движется диск, совершает плоскопараллельное движение по заданному закону, а само движение диска происходит без проскальзывания. Доказывается, что для любого закона движения опорной плоскости существуют такие начальные условия, при которых диск никогда не упадет.

Рассмотрим качение без проскальзывания плоского диска в поле силы тяжести по горизонтальной плоскости. Пусть центр масс диска совпадает с его геометрическим центром, а главные моменты инерции равны A, B, $A+B$. Плоскость предполагается подвижной, совершающей горизонтальное плоскопараллельное движение по заданному закону. Пусть центр диска соединен с массивной точкой невесомым стержнем. Будем считать, что на систему наложена геометрическая связь, благодаря которой массивная точка всегда остается в плоскости диска и в плоскости, по которой диск движется, а расстояние до центра диска постоянно. Механически такую связь можно реализовать, присоединив к диску треугольную невесомую раму, одна из вершин которой совпадает с центром диска, а две другие принадлежат опорной плоскости диска, причем движение рамы по плоскости происходит без трения, и массивная точка расположена в одной из этих двух вершин.

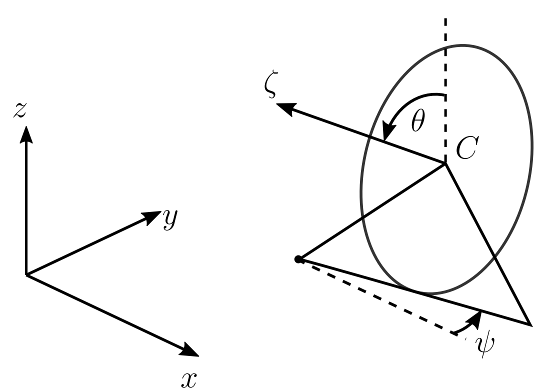

Рис. 2: Диск с присоединенной массивной точкой

Утверждение. *Для заданного закона движения опорной плоскости существует такое начальное условие, что вдоль решения, выходящего из него, для всех моментов времени выполнено условие* $\theta(t) \in (0, \pi)$.

Схема доказательства аналогична случаю перевернутого маятника.

Замечание. В случае, если масса присоединенной точки равна нулю, т.е. мы находимся в рамках задачи о качении диска по подвижной плоскости без проскальзывания, система уравнений вырождается в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, что не позволяет доказать непрерывность функции f стандартными методами и провести полное строгое доказательство утверждения. При этом использование стандартного метода устранения особенностей приводит к появлению инвариантных многообразий на границе рассматриваемой области, сквозь которые, соответственно, не проходят решения, что также делает невозможным прямое применение метода Важевского.

В *пятом* разделе аналогично рассматривается задача о движении велосипеда без падений по горизонтальной подвижной плоскости.

Рассматривается упрощенная модель велосипеда, в которой оба колеса всегда находятся в одной плоскости. Предполагается, что велосипед совершает движение по горизонтальной плоскости, которая в свою очередь движется плоскопараллельно по заданному закону. Предполагается, что на велосипед действует сила вязкого трения со стороны плоскости. Показывается, что при заданном законе движения плоскости, всегда существует такое начальное положение велосипеда, что, начав движение из него, велосипед никогда не упадет.

Будем считать, что велосипед представляет собой два одинаковых динамически симметричных диска радиуса R и с моментом инерции относительно оси, лежащей в плоскости диска и проходящей через его центр равным A, соединенных невесомым стержнем длины 2ρ, в центре которого расположена массивная точка массы m_0. Считаем, что массы дисков равны m_1 и m_2.

Велосипед движется по плоскости, совершающей плоскопараллельное движение по заданному закону: вертикальная составляющая скоростей точек плоскости всегда равна нулю, а проекции на неподвижные оси задаются гладкими функциями времени, которые мы будем обозначать w_x и w_y, а вектор скорости — w. Связь предполагаем удерживающей. Аналогично показывается, что для заданного закона движения плоскости всегда существует решение без падений. Точнее, если как и в случае задачи о движении диска, через θ обозначен угол между вертикалью и нормалью к плоскости велосипеда, то верно следующее

Утверждение. *Для заданного закона движения опорной плоскости существуют начальные условия такие, что вдоль соответствующего решения во все моменты времени выполнено условие* $\theta(t) \in (0, \pi)$.

Во **второй главе** рассматриваются примеры механических систем, для которых показывается существование периодических решений при наличии периодического неавтономного возмущения. Притом помимо периодичности решение системы обладает дополнительным свойством, что движение совершается без падений. В частности, показывается, что если основание перевернутого маятника движется по периодическому закону, то существует периодическое решение, вдоль которого маятник не упадет. Показывается, что периодическое решение существует в системе, состоящей из массивной точки, движущейся по плоской кривой, которая движется по заданному периодическому закону горизонтально и пересекает некоторую горизонтальную прямую ортогонально. Считаем, что на точку действует сила вязкого трения. Показывается, что периодическое решение также удовлетворяет тому свойству, что точка все время движения остается строго выше горизонтальной прямой, которую кривая пересекает ортогонально. Также показывается, что периодическое решение без падений существует в системе, состоящей из перевернутого математического сферического маятника, точка подвеса которого движется периодическим образом в горизонтальной плоскости, а на маятник действует сила вязкого трения.

Для доказательства используются методы и понятия алгебраической топологии, которые также приводятся в данной главе для полноты и максимальной замкнутости изложения.

Во *первом* разделе представлено описание вспомогательных конструкций (в частности, дается определение периодического сегмента) и результатов из теории отображений с неподвижными точками, которые применяются к механическим системам, рассмотренным в следующих разделах.

Второй раздел. Рассмотрим перевернутый маятник на подвижном основании в поле силы тяжести. Считаем, что основание движется вдоль прямой по заданному закону. Длину маятника обозначим l, массу — m, ускорение силы тяжести — g. Положение маятника относительно подвижного основания задается углом φ, отсчитываемым от горизонтали.

Утверждение. *Пусть для перевернутого маятника на подвижном основании в поле силы тяжести закон движения основания вдоль горизонтальной прямой определяется гладкой T-периодической функцией времени ξ, тогда система допускает T-периодичекое решение вдоль которого движение происходит без падений.*

Общая схема доказательства следующая.

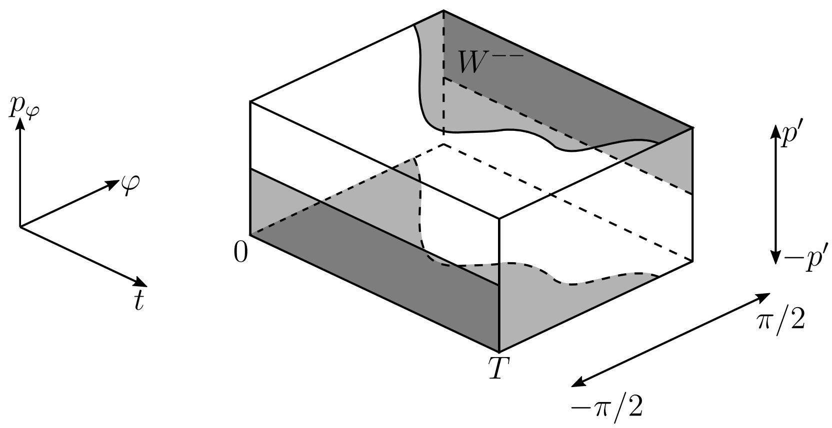

Рис. 3: Периодический сегмент W системы

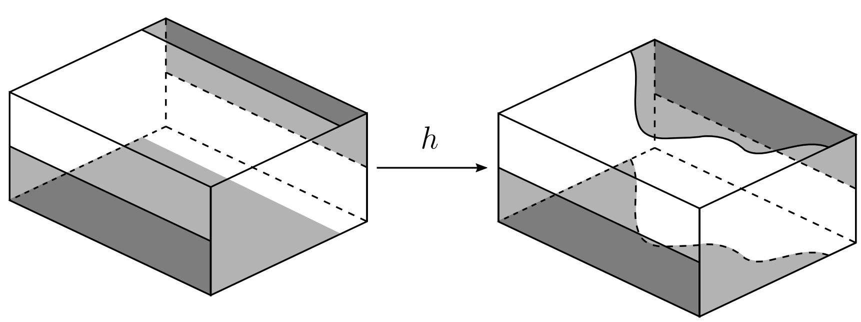

Рис. 4: Гомеоморфизм h, используемый при построении периодического сегмента

Показывается, что в следующем подмножестве расширенного фазового пространства

$$W = \{(t, \varphi, p) \colon t \in [0, T], \varphi \in [0, \pi], p \in [-p', p']\},$$

где

$$p' > \sup_{t\in[0,T]} \frac{|\dddot{f}|}{g}.$$

всегда существует как минимум одно периодическое решение. Для доказательства используется утверждение, приведенное в первом разделе данной главы.

Третий раздел. Показывается, что верно следующее

Утверждение. *Пусть дана система, в которой массивная точка движется с вязким трением в поле силы тяжести по подвижной кривой, задаваемой в декартовой системе координатат уравнениями $X(s)$, $Y(s)$, где s — натуральный параметр.*
Пусть кривая, форма которой задается гладкой функцией, такова, что

$$X'(s)|_{s=0} = 0, X'(s)|_{s=1} = 0, Y'(s)|_{s=0} = 1, Y'(s)|_{s=1} = -1$$

и движется вдоль оси Ox по закону, задаваемому гладкой T-периодической функцией ξ, тогда для любого коэффициента трения $\varkappa > 0$ у системы существует T-периодическое решение, для которого всегда выполнено $s(t) \in [0, 1]$.

Отметим, что наличие сколь угодно малого трения позволяет построить периодичексий сегмент в данной задаче, поскольку при наличии трения все траектории при достаточно больших по модулю значениях импульсов строго «входят» в периодичексий сегмент (касание на «верхней» и «нижней» грани сегмента отсутствует).

Четвертый раздел. Доказывается утверждение о существовании периодического решения в случае сферического маятника.

Утверждение *Рассмотрим сферический математический маятник в поле силы тяжести, на массивную точку которого при движении действует сила вязкого трения с коэффициентом $\gamma > 0$. Пусть $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, задающие положение точки подвеса маятника на горизонтальной плоскости $z = 0$. Тогда для любого $\gamma > 0$ существуют такие начальные условия, что решение, выходящее из них, T-периодично и остается выше горизонтальной плоскости $z = 0$ при всех $t \geqslant 0$.*

В *пятом* разделе представлены вспомогательные сведения из алгебраической топологии. Приводится конструкция определения и свойства алгебраического числа неподвижных точек.

Третья глава посвящена системам обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе гамильтоновым, с убывающими по времени возмущениями. Теория КАМ позволяет получать качественные выводы о динамике близких к интегрируемым гамильтоновых систем, если возмущение гамильтониана автономно или периодично по времени. При определенных предположениях о невозмущенной системе большинство нерезонансных инвариантных торов не разрушится, а только слегка деформируется. Однако, если размерность фазового пространства системы больше 4, то значение переменных действие в возмущенной системе может изменяться на величину порядка единицы при сколь угодно малом возмущении. В главе рассматриваются системы с неавтономным и непериодическим по времени возмущением. В случае, когда величина возмущения мала и достаточно быстро стремится к нулю с течением времени, с помощью несложных оценок можно показать, что вдоль возмущенных решений значения функций первых интегралов невозмущенной системы изменяются на малую величину. В частности, если невозмущенная система интегрируема и невозмущенное движение происходит по компактному многоообразию, то возмущенное решение, начавшееся на инвариантном торе, все время будет оставаться близким к этому тору. Приводятся примеры механических систем, иллюстрирующие общие утверждения. Рассматривается шар на горизонтальной шероховатой плоскости, которая вращается с некоторой угловой скоростью. Изучается движение шара при наличии малого возмущения. В первом случае считаем, что угловая скорость движения плокости постоянна и на центр масс шара действует малая заданная внешняя сила. Во втором случае рассматривается шар, который движется по вращающейся шероховатой плоскости, притом угловая скорость вращения плоскости почти постоянна. В третьем случае считаем, что в центре масс шара расположен ротор, вращающийся с заданной угловой скоростью вокруг оси, фиксированной «в теле», и задающий возмущение в системе. В первом случае находится достаточное условие на компоненты возмущающе силы, при котором траектория невозмущенного движения шара близка к траектории возмущенного движения, выходящего из тех же начальных условий. Во втором случае находится аналогичное условие на возмущение угловой скорости вращения плоскости. В третьем случае приводится аналогичное достаточное условие на закон движения ротора. Для случая, когда возмущение не является малым, находятся достаточные условия, при которых шар в своем движении по плоскости не уходит на бесконечность, а остается в ограниченной области.

Первый раздел в значительной степени посвящен формулировке и доказательству общих утверждений.

Рассматривается гамильтонова система (M, ω^2, H), где M — гладкое многообразие, ω^2 — симплектическая структура на нем, $H\colon M \times \mathbb{R}^{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$; предположим, что гамильтониан H представим в следующем виде: $H = H_0 + \varepsilon H_1$, притом H_0 не зависит от времени.

Пусть F_1, F_2, ..., F_k — первые интегралы невозмущенной системы, т.е. $\{F_i, H_0\} \equiv 0$, $i = 1, 2, ..., k$; рассмотрим некоторое многообразие их уровня:

$$M_f = \{x \in M : F_i(x) = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Это многообразие инвариантно относительно действия потока невозмущенной системы. Приводятся достаточные условия на функции H_0 и H_1, при которых возмущенное решение, начавшееся на M_f, при малых по модулю ε будет вечно оставаться в малой окрестности многообразия M_f, т.е. значения первых интегралов вдоль возмущенных решений изменяются слабо.

Аналогичные утверждения доказываются для случая, когда возмущение не является малым, т.е. формально $\varepsilon = 1$. В этом случае можно говорить не о близости траекторий инвариантным торам невозмущенной задачи, а о том, что решение не уйдет на бесконечное расстояние от этих торов, т.е. исключая из утверждения требование малости возмущения, мы находим достаточные условия, при которых решение уйдет от невозмущенного тора на конечное расстояние. Данные леммы и их модификации для случаев негамильтоновых возмущений и линейных систем используются для доказательства утверждений о динамике следующих механических систем.

Рассмотрим систему, состоящую из однородного шара, двигающегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости, которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью. Считаем, что к центру шара приложена горизонтально направленная возмущающая сила, величина и направление которой зависят от времени.

Находятся достаточные условия на компоненты возмущающей силы, при которых координаты центра масс шара в возмущенном

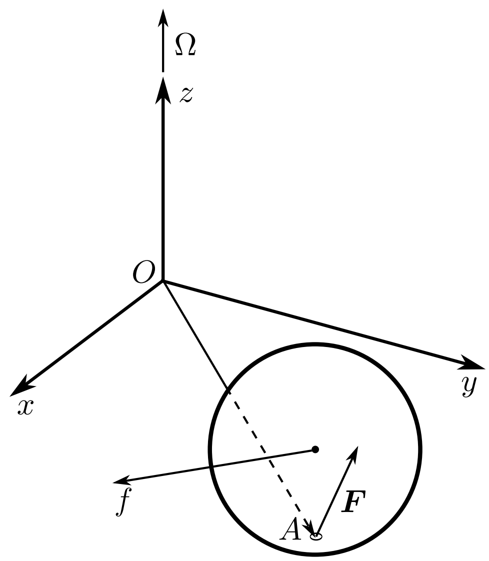

Рис. 5: Шар на вращающейся плоскости.

случае будут слабо отличаться от соответствующих координат в невозмущенном случае при тех же начальных условиях. Также приводятся достаточные условия на комопненты возмущающей силы, при выполнении которых решения возмущенной системы ограничены.

Во *втором* разделе также рассматривается задача о движении шара при наличии малого возмущения. Рассматривается шар, который движется по вращающейся шероховатой плоскости, притом угловая скорость вращения плоскости почти постоянна $\Omega+\varepsilon\Omega_1$. Находится достаточное условие на функцию, определяющую возмущение угловой скорости, при котором траектория невозмущенного движения шара близка к траектории возмущенного движения.

В *третьем* разделе рассматривается система, в которой однородный шар движется без проскальзывания по горизонтальной плоскости, равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω. Считаем, что шар однородный и в его центре масс расположен сферический однородный ротор с осью вращения $\boldsymbol{e}_\mu$, фиксированной «в теле» и заданной угловой скорость вращения вокруг этой оси такой, что кинетический момент относительно центра масс в осях Кенига записывается следующим образом

$$\boldsymbol{K} = \frac{2}{5}m_b R^2(p\boldsymbol{e}_x + q\boldsymbol{e}_y + r\boldsymbol{e}_z) + \varepsilon\mu\boldsymbol{e}_\mu.$$

Здесь p, q, r — компоненты угловой скорости шара «в пространстве»,

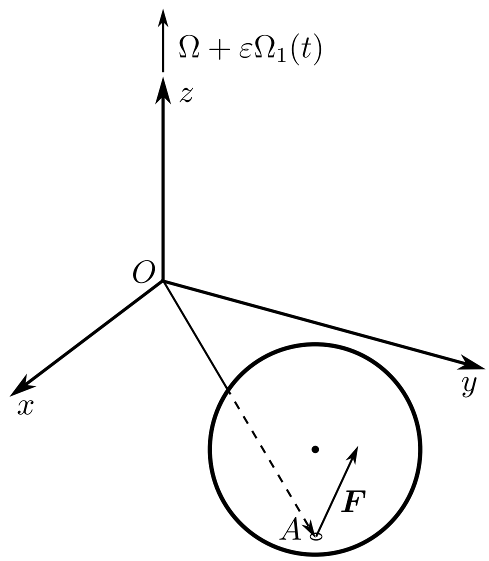

Рис. 6: Шар на вращающейся плоскости.

т.е. угловая скорость шара имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{e}_x + q\boldsymbol{e}_y + r\boldsymbol{e}_z.$$

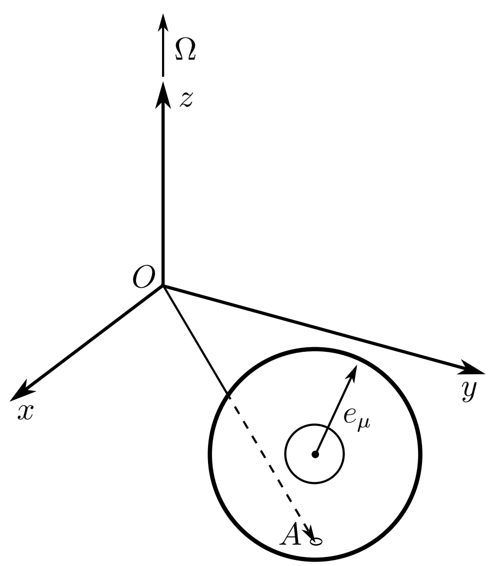

Рис. 7: Шар на вращающейся плоскости с ротором.

Находятся достаточные условия на функцию $\mu : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, при выполнении которых координаты центра масс шара в возмущенном случае будут слабо отличаться от соответствующих координат в невозмущенном случае при тех же начальных условиях.

В **заключении** приведены основные результаты: рассматриваются примеры неавтономных голономных и неголономных механических систем, в которых показывается, что существует решения без падений, также показывается, что существуют периодические решения без падений, если неавтономное возмущение периодическое. Рассматриваются примеры, в которых неавтономное возмущение убывает со временем и мало.

- Рассматривается классическая задача о перевернутом маятнике на подвижном основании. Для нее строго обосновывается, что всегда существуют начальные условия, при которых будет происходить движение без падений. В том числе можно выбрать начальные условия с нулевой скоростью маятника. Аналогичное показывается для сферического маятника и для системы, которая обобщает предыдущие случаи — точка движется по поверхности без трения, при этом поверхность пересекает горизонтальную плоскость перпендикулярно и также движется по заданному закону. В качестве дальнейшего обобщения задачи о перевернутом маятнике рассматривается задача о качении диска с присоединенной массой по подвижной плоскости без проскальзывания. Присоединенная масса считается вечно находящейся в пересечении плоскости диска и опорной плоскости на фиксированном расстоянии от центра диска. Механически такую связь можно осуществить, рассмотрев треугольную невесомую раму, одна из вершин которой находится в центре диска, а две другие движутся по опорной плоскости без трения. Массивную точку тогда можно разместить, например, в одной из вершин рамы, отличной от центра диска. Для данной неголономной системы показывается, что при заданном горизонтальном движении опорной плоскости всегда существуют такие начальные условия, что диск будет вечно двигаться без падений. Рассматривается задача о движении без падений велосипеда, руль которого зафиксирован таким образом, чтобы оба колеса принадлежали одной плоскости. В данном случае плоскость опять предполгается совершающей движение по заданному закону, а взаимодействие между колесами велосипеда и плоскостью осуществляется посредством силы вязкого трения. Также показывается, что существует решение без падений.

- Для задачи о перевернутом маятнике на подвижном основании показывается, что в случае, когда закон движения точки подвеса маятника является периодическим, существует периодическое решение, которое дополнительно является решением вдоль которого движение маятника происходит без падений. Аналогичное показывается и для системы, в которой массивная точка движется с трением по кривой, которая аналогично случаю перевернутого маятника пересекает перпендикулярно некоторую горизонтальную плоскость в двух точках, а между ними находится над этой плоскостью (в случае маятника этак кривая — полуокружность). Тогда, если закон горизонтального движения кривой периодический, то в системе существует периодическое решение, которое происходит без падений на горизонтальную плоскость. Также показывается, что периодическое движение без падений существует для перевернутого сферического маятника с вязким трением, точка подвеса которого совершает периодическое движение в горизонтальной плоскости. Доказательства основаны на применении методов алгебраической топологии.

- Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми неавтономными возмущениями, используя простые аналитические оценки, найдены достаточные условия, при которых значения функций первых интегралов невозмущенной системы мало меняются при движении по траекториям возмущенной системы. Приводятся различные модификации этих утверждений в том числе для гамильтоновых систем. Приводится пример, для которого достаточные условия совпадают с необходимыми. Также рассматриваются следующие системы. Рассматривается шар на горизонтальной шероховатой плоскости, которая вращается с некоторой угловой скоростью. Изучается движение шара при наличии малого возмущения. В первом случае считаем, что угловая скорость движения плоскости постоянна и на центр масс шара действует малая заданная внешняя сила. Во втором случае рассматривается шар, который движется по вращающейся шероховатой плоскости, притом угловая скорость вращения плоскости почти постоянна. В третьем случае считаем, что в центре масс шара расположен ротор, вращающийся с заданной угловой скоростью вокруг оси, фиксированной «в теле», и задающий возмущение в системе. В первом случае находится достаточное условие на компоненты возмущающе силы, при котором траектория невозмущенного движения шара близка к траектории возмущенного движения, выходящего из тех же начальных условий. Во втором случае находится аналогичное условие на возмущение угловой скорости вращения плоскости. В третьем случае приводится аналогичное достаточное условие на закон движения ротора. Для случая, когда возмущение не является малым, находятся достаточные условия, при которых шар в своем движении по плоскости не уходит на бесконечность, а остается в ограниченной области.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. И. Ю. Полехин, О конечном изменении первых интегралов автономных гамильтоновых систем при наличии неавтономного возмущения, Проблемы машиностроения и автоматизации, №3, 2011 г., с. 58-62.

2. И. Ю. Полехин, О гамильтоновых системах с малыми неавтономными возмущениями, Вестник МГУ, №1, 2012 г., с. 47-53.

3. И. Ю. Полехин, Примеры использования топологических методов в задаче о перевернутом маятнике на подвижном основании, Нелинейная динамика, 2014, Том 10, №4, с. 465-472

4. Polekhin I. Inverted pendulum with moving pivot point: examples of topological approach, http://arxiv.org/abs/1407.4787

5. Polekhin I. Periodic and falling-free motion of inverted spherical pendulum with moving pivot point, http://arxiv.org/abs/1411.1585

г. Москва