

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

Полехин И. Ю.

О механических системах
с неавтономными возмущениями.

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.01 «Теоретическая механика».

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук Кугушев Е.И.

Москва 2015 год.

Оглавление

Введение	4
1 Движения без падений	22
1.2 Метод Важевского	23
1.3 Задача о движении перевернутого маятника, прикреп- ленного к тележке, движущейся по заданному закону .	27
1.4 Случай сферического маятника и обобщение	33
1.5 Качение диска с присоединенной массой по подвижной плоскости без падений	37
1.6 Движение велосипеда без падений по горизонтальной подвижной плоскости	45
2 Периодические решения	52
2.1 Метод доказательства существования периодических решений	52
2.2 Перевернутый маятник на подвижном основании . .	55
2.3 Массивная точка на кривой	60
2.4 Сферический маятник с трением	62
2.5 Вспомогательные сведения	68
3 Системы с затухающими со временем возмущениями	82
3.1 Шар в поле внешней силы, зависящей только от времени	83

3.2 Шар на плоскости, вращающейся с почти постоянной угловой скоростью	102
3.3 Шар с ротором на вращающейся поверхности	109
Заключение	115
Литература	119

Введение

Область исследования. Диссертация посвящена изучению неавтономных механических систем и применению топологических и аналитических методов для получения качественных результатов, касающихся динамики голономных и неголономных систем. Первую группу рассматриваемых задач образуют неавтономные системы, для которых с помощью топологических соображений и методов алгебраической топологии доказываются утверждения, касающиеся качественного анализа траекторий системы. В частности, показывается существование решений, соответствующих движениям механической системы, при которых в системе будут отсутствовать падения на горизонтальную плоскость рассматриваемого объекта и существование периодических решений (также при отсутствии падений). Аналитические методы применяются для анализа систем с убывающими по времени неавтономными возмущениями.

Мотивировкой для использования топологических методов послужила хорошо известная задача, предложенная в [54], заключающаяся в доказательстве того факта, что для перевернутого плоского математического маятника, расположенного на подвижном основании, совершающего движение вдоль прямой, лежащей в плоскости маятника, по заданному закону, существует такое начальное положение маятника с нулевой скоростью, что начав движение из него, маятник не примет горизонтального положения на всем заданном интервале времени. В [54] приводится и идея доказательства данного утверждения. Однако отсутствие достаточной строгости в рассуждениях, отмеченное в [3], позволяло считать доказательство от-

крытой проблемой. В диссертационной работе приводится доказательство утверждения о перевернутом маятнике на подвижном основании и ряд его обобщений. В частности, показывается, что аналогичное утверждение верно и для сферического маятника на подвижном основании. Случай сферического маятника обобщается на класс механических систем, в которых массивная точка движется без трения по компактной поверхности определенного вида, притом сама компактная поверхность совершает движения в горизонтальной плоскости.

Помимо рассмотрения данной классической задачи и ее прямых обобщений, рассматриваются и другие механические системы, в том числе и неголономные, которые позволяют также применить топологические методы. Отдельным классом задач, близким к задаче о движении без падений перевернутого маятника на подвижном основании, являются задачи о движении некоторого объекта без падений (при соответствующем определении данного понятия) по подвижной плоскости. При этом можно рассматривать различные условия, накладываемые на тип движения плоскости, на взаимодействие плоскости и рассматриваемого объекта, на его динамические свойства. В диссертационной работе рассматриваются следующие задачи. Задача о движении диска с присоединенной массой (находящейся все время в плоскости диска и также принадлежащая опорной плоскости) по подвижной плоскости без проскальзывания, показывается, что существуют такие начальные условия, что стартовав из них, диск никогда не упадет. Рассматривается задача о движении без падений велосипеда, руль которого зафиксирован таким образом, чтобы оба колеса принадлежали одной плоскости. В данном случае плос-

кость опять предполагается совершающей движение по заданному закону, а взаимодействие между колесами велосипеда и плоскостью осуществляется посредством силы вязкого трения. Также показывается, что существует решение без падений.

Отметим, что утверждение о том, что при заданном движении горизонтальной плоскости, по которой без проскальзывания движется диск с присоединенной массой, существуют такие начальные условия для диска, что он не примет горизонтального положения на сколь угодно большом рассматриваемом интервале времени, в некотором роде дополняет картину удивительной устойчивости диска на неподвижной плоскости, когда диск вечно не падает при почти всех начальных условиях [5].

Благодаря использованию при рассмотрении вышеописанных задач топологических соображений, существенно отличающихся от методов, используемых при исследовании движений без падений в случае неподвижной плоскости (например, [5]), удастся ослабить ограничения, накладываемые на динамические свойства диска. К сожалению, не удастся напрямую применить соображения метода Важевского, используемые в рассматриваемых в работе системах, к задаче о движении диска без присоединенной массы по подвижной плоскости — этому мешает возникающее вырождение. Замена, позволяющая устранить особенность в горизонтальном положении диска, приводит к появлению инвариантных многообразий, которые также являются препятствием к прямому применению данного метода.

Применение топологических соображений обладает тем преимуществом, что для механических систем определенного вида, поз-

воляет довольно простым образом получить информацию о существовании решений, которые не покидают определенной области в расширенном фазовом пространстве. При этом факт существования подобного решения в случае рассматриваемых задач в некотором смысле противоречит интуиции.

Кроме того, дополнительную информации о решении можно получить, если в большей степени использовать информацию о траекториях системы в окрестности границы рассматриваемой области. В частности, в работе используются методы алгебраической топологии, с помощью которых показывается, что для перевернутого плоского маятника, с основанием, для которого задан периодический закон движения, существует периодическое решение, вдоль которого маятник не принимает горизонтального положения. Аналогичное утверждение доказывается для системы, в которой вместо перевернутого маятника рассматривается массивная точка в поле силы тяжести, совершающая движение с трением по кривой, которая движется вдоль горизонтальной прямой по заданному закону. При дополнительном предположении о том, что кривая пересекает некоторую горизонтальную плоскость перпендикулярно, показывается, что если закон движения кривой периодический, то существует начальное условие, при котором решение периодическое и вдоль него массивная точка никогда не принадлежит вышеупомянутой горизонтальной плоскости. Также рассматривается задача о движении перевернутого сферического маятника с трением и с точкой подвеса, совершающей движение по заданному периодическому закону в горизонтальной плоскости. Показывается, что система допускает периодическое решение без падений. Приводятся необходимые све-

дения из алгебраической топологии.

Топологический подход к изучению динамики в рассматриваемых случаях позволяет доказать существование движений без падений не предполагая малости неавтономных членов в уравнениях, описывающих динамику этих систем. Помимо задач, в которых подобное неавтономное возмущение в общем случае не является малым, можно рассматривать системы, полученные из автономных путем добавления малого либо убывающего достаточно быстро со временем неавтономного возмущения. В диссертации рассматриваются подобные системы, полученные из автономных с помощью добавления неавтономного возмущения.

Точнее, пусть имеется автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений, причем известны несколько ее первых интегралов. Интересным является вопрос, при каких условиях траектория системы будет оставаться в малой окрестности инвариантного многообразия, если вместо уравнений исходной автономной системы рассмотреть близкие к ним неавтономные уравнения? Легко привести пример, в котором сколь угодно малое возмущение может привести к тому, что из системы, все решения которой ограничены, мы получим систему, решения которой не ограничены. В случае, если система гамильтонова и у нее имеется полный набор первых интегралов в инволюции, то в случае компактности их совместного уровня, траектория системы будет являться обмоткой тора. С помощью КАМ теории можно найти условия, которым должна удовлетворять невозмущенная система, чтобы при малом автономном или периодическом по времени возмущении гамильтониана большинство инвариантных торов не исчезло, а только лишь немного деформиро-

валось, т.е. большинство траекторий вечно оставалось в окрестности невозмущенного тора. В работе приводятся простейшие достаточные условия, при которых решения, начинающиеся на совместном уровне первых интегралов вечно не покидают малой окрестности этого многообразия при добавлении неавтономного убывающего со временем малого возмущения. Общие утверждения иллюстрируются на примерах из механики. Приводятся модификации утверждений для случая гамильтоновых систем. Также приводится формулировка и доказательство утверждения, касающегося конечного изменения значений первых интегралов вдоль возмущенных решений в случае, когда возмущение не является малым, а только лишь убывает со временем достаточно быстро.

В частности, рассматриваются следующие системы. Рассматривается шар на горизонтальной шероховатой плоскости, которая вращается с некоторой угловой скоростью. Изучается движение шара при наличии малого возмущения. В первом случае считаем, что угловая скорость движения плоскости постоянна и на центр масс шара действует малая заданная внешняя сила. Во втором случае рассматривается шар, который движется по вращающейся шероховатой плоскости, притом угловая скорость вращения плоскости почти постоянна. В третьем случае считаем, что в центре масс шара расположен ротор, вращающийся с заданной угловой скоростью вокруг оси, фиксированной «в теле», и задающий возмущение в системе. В первом случае находится достаточное условие на компоненты возмущающей силы, при котором траектория невозмущенного движения шара близка к траектории возмущенного движения, выходящего из тех же начальных условий. Во втором случае находится аналогич-

ное условие на возмущение угловой скорости вращения плоскости. В третьем случае приводится аналогичное достаточное условие на закон движения ротора. Для случая, когда возмущение не является малым, находятся достаточные условия, при которых шар в своем движении по плоскости не уходит на бесконечность, а остается в ограниченной области.

Обзор работ по теме.

Как было отмечено выше, мотивировкой к применению топологического метода Важевского к механическим проблемам послужила классическая задача «о перевернутом маятнике на тележке», которая впервые появилась в книге Куранта и Роббинса «Что такое математика?» [54]. Критическое обсуждение этой задачи приводится в [3].

Основополагающей работой, касающейся метода Важевского можно считать работу Важевского [85]. Общее описание метода с примерами его использования для качественного исследования обыкновенных дифференциальных уравнений можно найти в классических монографиях по обыкновенным дифференциальным уравнениям [59], [40]. Некоторые замечания по применению метода Важевского в бесконечномерных системах содержатся в [56].

Примером использования метода Важевского для исследования не только одной системы, но и близких к ней встречается в [58], в которой доказывалось утверждение о существовании периодического решения. В [72] с помощью метода Важевского доказывалось утверждение о существовании асимптотических решений определенного вида. В [65] и [66] рассматривается применение метода Важевского для исследования механических систем, в частности, для доказатель-

ства существования V -ограниченных решений, т.е. таких решений, что вдоль них некоторая функция $V(x, t)$, стремящаяся к бесконечности при каждом фиксированном t и $\|x\| \rightarrow +\infty$, ограничена.

Задача о движении диска по плоскости и доказательство того факта, что почти при всех начальных условиях диск никогда не примет горизонтального положения содержится (с различными вариантами доказательства) в [4], [17], [5]. В качестве нерешенной проблемы в [18] предлагается доказать, что диск почти при всех начальных условиях не упадет и при отсутствии динамической симметрии. Задача о стабилизации движения велосипеда рассматривалась в [21], [22]. Задача о движении твердого тела вокруг точки, совершающей высокочастотные колебания рассматривалась в [27]. Эти задачи отчасти близки к рассматриваемым задачам о движении велосипеда без падений и о периодическом движении перевернутого маятника с подвижным основанием.

Близкой к методу Важевского является идея использования индекса Конли для качественного исследования динамики. основополагающими работами, касающимися индекса Конли, являются [52] и [53], в которых приводятся основные мотивировки, определения и утверждения. В [6] можно найти краткое и доступное изложение основных идей и понятий, связанных с индексом Конли, а также его применение в механике (динамика вихревых структур). Введение в теорию индекса Конли и его приложения содержится в сборнике [55]. Доказательства базовых утверждений, относящихся к определению и применению индекса Конли можно найти в [78]. В [50] содержится как изложение метода Важевского, так и его связь с индексом Конли, рассматриваются примеры приложений. Версия индекса Конли

для дискретных динамических систем представлена в [75].

Основные понятия, определения и утверждения, касающиеся алгебраической топологии и ее приложений, используемые в данной работе, можно найти в [60], [38], [39] и в классических монографиях [82] и [71]. Общие сведения по алгебраической топологии, а также более детальное изложение вопросов, относящихся к алгебраическому числу неподвижных точек (рассматриваемому исключительно с алгебраической точки зрения) и числу Лефшеца содержит [10]. Также определение основных понятий, связанных с алгебраическим числом неподвижных точек (алгебраический подход), представлено в вводной главе к работе [51]. С точки зрения классического анализа алгебраическое число неподвижных точек определяется в [63], в которой также содержится достаточно полное изложение материала, касающегося теоремы Лефшеца-Хопфа. Подробное изложение современных достижений в области теории неподвижных точек, охватывающее не только материал непосредственно относящийся к теореме Лефшеца-Хопфа, содержится в [57].

Утверждения, на которых базируется материал второй главы, относящийся к приложениям теории Лефшеца-Хопфа, содержатся (в различных модификациях) в [49], [86], [87], [88] и [83].

Следующие классические работы могут представлять интерес с исторической точки зрения при рассмотрении теории Лефшеца-Хопфа (цитируется по [57]). Теорема Лефшеца-Хопфа была впервые сформулирована для компактных многообразий Лефшецем [68], [67] и была обобщена им же на случай многообразий с краем [69]. Позже Хопф представил новое простое доказательство для случая произвольных многогранников [61]. Лефшец рассматривал сумму индек-

сов неподвижных точек при формулировании теоремы для многообразий [67], Хопф развил идеи Лефшеца на случай произвольного конечного многогранника [62].

Задача изучения траекторий систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущением является классической и к ней обращалось множество авторов. Наиболее изученной в этой области является задача об устойчивости решений при возмущении начальных условий. В первую очередь можно отметить теоремы Ляпунова об устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости и теорему Четаева о неустойчивости [9], [47], [36], [45]. В [9], [15], [23] вводится важное понятие условной устойчивости и доказывается обобщенная теорема Ляпунова об условной устойчивости.

Сведение изучения устойчивости стационарных движений к исследованию экстремальных точек одного из первых интегралов при фиксированных значениях других первых интегралов было начато Раусом [76], [77], который рассматривал случай условной устойчивости стационарного движения. В [23] было отмечено, что стационарное движение будет устойчивым при произвольных возмущениях при выполнении некоторых дополнительных условий. Строгое доказательство этого факта было дано в [42], [42]. Утверждение об устойчивости стационарного движения в случае, когда один из первых интегралов имеет строгий локальный минимум или максимум при фиксированных значениях остальных первых интегралов было дано в работах [79], [37].

В [70] приводятся теоремы о соответствии экстремальных точек и множеств одного первого интеграла (при фиксированных значениях остальных) стационарным движениям и инвариантным множе-

ствам.

В [41], [16] приводится достаточное условие неустойчивости стационарного движения, которое является модификацией одной из теорем Кельвина-Четаева [48], [84].

В работах [13], [64], [14] представлены достаточные условия устойчивости и неустойчивости инвариантных множества систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Отдельно отметим утверждения, представленные в [80], [81], [64], [14], [8], касающиеся вопроса влияния диссепативных сил на устойчивость инвариантных многообразий.

Помимо возмущения начальных условий часто бывает необходимо рассматривать устойчивость при постоянно действующих возмущениях, когда возмущение может быть выражено аналитически как малое изменение правой части системы [9], [25], [26].

Если все решения системы дифференциальных уравнений бесконечно продолжаемы и ограничены, то говорят, что имеет место устойчивость по Лагранжу. Существует критерий ограниченности решений по Лагранжу [9], использующий аппарат функций Ляпунова. Поскольку не существует общего способа нахождения функций Ляпунова, то применение этого критерия может оказаться затруднительным. Более того, устойчивость по Лагранжу означает ограниченность всех решений системы, что может являться избыточным требованием в некоторых случаях.

В [44] приводятся теоремы о влиянии исчезающего постоянно действующего возмущения на асимптотически устойчивые решения

Сложность с построением функции Ляпунова отсутствует при использовании утверждений о конвергентности решений системы [9].

Существенным ограничением применения представленных утверждений к исследованию гамильтоновых систем является то, что ввиду сохранения фазового объема, гамильтонова система не может быть конвергентной, поэтому данные утверждения можно применять только при исследовании механических систем, не являющихся гамильтоновыми.

В [46] приводится ряд утверждений об ограниченности решений систем, которые применимы в случае, когда система неавтономна и линейна.

В случае, если рассматриваются интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы с малым возмущением, которое не зависит от времени или периодически по времени, то для доказательства того, что большинство инвариантных торов невозмущенной системы не разрушится, а лишь слегка деформируется можно использовать теорию КАМ. Точнее, верно, что если невозмущенная гамильтонова система невырождена или изоэнергетически невырождена, то при достаточно малом гамильтоновом возмущении большинство нерезонансных инвариантных торов не исчезнет, а лишь немного деформируется, так что в фазовом пространстве возмущенной системы также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно-периодически с числом частот равным числу степеней свободы. Указанные инвариантные торы образуют большинство в том смысле, что мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением. В случае изоэнергетической невырожденности инвариантные торы образуют большинство на каждом многообразии уровня энергии [4]. Точную формулировку можно найти в [1], [12], [4].

В [2] строится пример, в котором система с двумя степенями свободы, удовлетворяющая условию КАМ-теоремы, при наличии периодического возмущения обладает решением, которое начавшись в окрестности инвариантного тора покидает его окрестность, т.е. в примере аналитически доказывается, что в системе будет наблюдаться диффузия Арнольда.

Заканчивая краткий обзор работ, относящихся к КАМ теории, отметим, что несмотря на то, что значения переменных действия могут сильно изменяться вдоль возмущенного решения, скорость этого изменения будет экспоненциально малой [32]. Заметим также, что теоремы о сохранении условно-периодических движений при наличии автономного или периодического возмущения допускают обобщение и на негамильтоновы системы [28].

Классические труды по КАМ-теории собраны в [29].

Содержание работы. Основное содержание диссертации составляют три главы.

Первая глава посвящена введению в топологический метод Важевского, используемый для доказательства утверждений, касающихся движений без падений. Также в первой главе приводятся доказательства утверждений о существовании движения без падений для случая перевернутого плоского математического маятника на подвижном основании, для случая перевернутого сферического маятника на подвижном основании, для точки на подвижной поверхности (отдельно приводится определение падения).

Также рассматривается две системы, близкие к случаю диска на подвижной плоскости. В первом случае рассматривается неголономная механическая система, состоящая из диска, катящегося без про-

скальзывания по горизонтальной плоскости, совершающей плоскопараллельное движение по заданному закону, и массивной точки. На систему накладывается голономная связь: массивная точка всегда находится в плоскости диска на фиксированном от центра диска расстоянии и в плоскости, по которой происходит качение диска. Также предполагается, что плоскость, по которой движется диск, совершает горизонтальное движение по заданному закону, а само движение диска происходит без проскальзывания. Доказывается, что для любого закона движения опорной плоскости существуют такие начальные условия, при которых диск никогда не упадет. Во втором случае рассматривается упрощенная модель велосипеда, в которой оба колеса всегда находятся в одной плоскости. Предполагается, что велосипед совершает движение по горизонтальной плоскости, которая аналогично предыдущему случаю движется плоскопараллельно по заданному закону. Предполагается, что на велосипед действует сила вязкого трения со стороны плоскости. Показывается, что при заданном законе движения плоскости, всегда существует такое начальное положение велосипеда, что, начав движение из него, велосипед никогда не упадет.

Вторая глава посвящена доказательству утверждения о том, что если перевернутый плоский математический маятник расположен на тележке, которая совершает движение по заданному периодическому закону, то в данной системе существует периодическое решение, обладающее тем свойством, что вдоль него маятник совершает движение без падений. Также доказывается, что если вместо перевернутого маятника рассматривать более общую систему, в которой маятник заменен кривой, по которой с трением движется массивная

точка, притом кривая также совершает движение вдоль горизонтальной прямой по заданному периодическому закону, то при некоторых дополнительных условиях на форму кривой у системы также существует периодическое решение, вдоль которого точка движется «без падений». Также приводится доказательство существования периодического движения без падений для перевернутого сферического маятника с трением, точка подвеса которого движется периодическим образом по горизонтальной плоскости. Доказательства утверждений существенно используют методы алгебраической топологии, в частности, понятие об алгебраическом числе неподвижных точек и теорему Лефшеца-Хопфа и являются прямым следствием утверждения, приведенного в [63]. Для полноты изложения в главе приводятся необходимые сведения.

Третья глава посвящена системам обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе гамильтоновым, с убывающими по времени возмущениями. Используя простейшие аналитические методы, доказываются достаточные условия, при выполнении которых решение возмущенной системы, начавшееся на многообразии уровня первых интегралов невозмущенной системы будет вечно оставаться в окрестности этого многообразия. Также приводятся достаточные условия, при которых значения первых интегралов автономной системы меняются вдоль решений возмущенной системы на конечную величину в случае, если неавтономные возмущения не являются малыми. Доказанные утверждения иллюстрируются на примерах из механики. Рассматривается шар на горизонтальной шероховатой плоскости, которая вращается с некоторой угловой скоростью. Изучается движение шара при наличии малого возмущения. В первом

случае считаем, что угловая скорость движения плоскости постоянна и на центр масс шара действует малая заданная внешняя сила. Во втором случае рассматривается шар, который движется по вращающейся шероховатой плоскости, притом угловая скорость вращения плоскости почти постоянна. В третьем случае считаем, что в центре масс шара расположен ротор, вращающийся с заданной угловой скоростью вокруг оси, фиксированной «в теле», и задающий возмущение в системе. В первом случае находится достаточное условие на компоненты возмущающей силы, при котором траектория невозмущенного движения шара близка к траектории возмущенного движения, выходящего из тех же начальных условий. Во втором случае находится аналогичное условие на возмущение угловой скорости вращения плоскости. В третьем случае приводится аналогичное достаточное условие на закон движения ротора. Для случая, когда возмущение не является малым, находятся достаточные условия, при которых шар в своем движении по плоскости не уходит на бесконечность, а остается в ограниченной области.

Апробация работы.

Доклады на семинарах кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова:

- На семинаре имени академика В. В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, ноябрь 2008 года.
- На семинаре имени академика В. В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, май 2010 года.

- На семинаре имени академика В. В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, ноябрь 2011 года.
- На семинаре «Математические методы технической механики» под руководством проф. С.Я.Степанова и доц.А.А.Бурова, декабрь 2010 года.
- На семинаре «Математические методы технической механики» под руководством проф. С.Я.Степанова и доц.А.А.Бурова, декабрь 2011 года.
- На семинаре «Динамика относительного движения» под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В.Мелкумовой, ноябрь 2011 года.
- На семинаре «Математические методы технической механики» под руководством проф. С.Я.Степанова и доц. А.А.Бурова, май 2013 года.
- На семинаре имени академика В. В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, сентябрь 2013 года.
- На семинаре имени академика В. В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна, октябрь 2014 года.
- На семинаре «Избранные задачи динамики» под руководством рук. чл.-корр. РАН, проф. Д.В. Трещева , ноябрь 2014 года.

- На семинаре «Динамика относительного движения» под руководством рук. чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкий, проф. Ю.Ф. Голубев, проф. В.Е.Павловский, доц. К.Е. Якимова, доц. Е.В.Мелкумова , ноябрь 2014 года.

Доклады на конференции «Ломоносовские чтения»:

- «Системы с быстро убывающим по времени возмущением», 20 апреля 2009 года.
- «О движениях механических система с малыми неавтономными возмущениями», ноябрь 2011 года.

Глава 1

Движения без падений

Рассматриваются примеры неавтономных механических систем, для которых показывается существование движений без падений. Рассматриваемые системы являются развитием задачи о перевернутом маятнике, прикрепленном к полу вагона (которую мы для краткости также будем называть задачей о «маятнике на тележке»), впервые рассмотренной в [54], для которой авторами был предложен метод доказательства того, что для заданного закона движения тележки, существует такое начальное положение маятника с нулевой начальной скоростью, что начав движение из такого положения, маятник никогда не примет горизонтального положения.

В [3] отмечается, что авторами в [54] без достаточно строгого обоснования при доказательстве утверждения используется предположение о непрерывной зависимости решения от начального положения маятника.

В данной главе приводится строгое обоснование доказательства с использованием топологического метода Важевского. Описание метода и его приложение к другим механическим задачам также представлено.

1.2 Метод Важевского

Приведем необходимые сведения и определения, относящиеся к методу Важевского, основная идея которого является инструментом для доказательства утверждений, представленных в первой главе. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.2.1)$$

где $(t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, Ω — открытая область и $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Пусть $\Omega^0 \subset \Omega$ — открытое множество.

Определение. Через $x(t, t_0, x_0)$ будем обозначать решение уравнения (1.2.1) с начальным условием x_0 , т.е.

1. $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$,
2. $\dot{x}(t, t_0, x_0) = f(t, x(t, t_0, x_0))$ при $t \in I(t_0, x_0)$,

где $I(t_0, x_0)$ — интервал существования решения.

Определение. Точку $(t_e, x_e) \in \partial\Omega^0 \cap \Omega$ будем называть точкой выхода из множества Ω^0 относительно системы (1.2.1), если существует такое значение $\varepsilon > 0$, что решение $x(t, t_e, x_e)$ удовлетворяет условию

$$(t, x(t, x_e, t_e)) \in \Omega^0 \quad \text{при} \quad t_e - \varepsilon \leq t < t_e.$$

множество всех точек выхода из множества Ω будем обозначать символом Ω_e^0 .

Определение. Точка выхода (t_{se}, x_{se}) называется точкой строгого выхода, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$(t, x(t, t_{se}, x_{se})) \notin \text{cl}(\Omega^0) \quad \text{при} \quad t_0 < t \leq t_{se} + \varepsilon.$$

Множество всех точек строгого выхода из множества Ω будем обозначать Ω_{se}^0 .

Определение. Пусть U — топологическое пространство и $V \subset U$. Непрерывное отображение $\pi : U \rightarrow V$ называется ретракцией, если

$$\pi(x) = x \quad \text{для любого } x \in V.$$

Определение. Если для некоторого топологического пространства U существует ретракция $\pi : U \rightarrow V$, то множество $V \subset U$ называется ретрактом топологического пространства U .

Теорема (метод Важевского). Пусть в уравнении (1.2.1) функция f непрерывна на множестве Ω и каждое начальное условие задает единственное решение. Пусть $\Omega^0 \subset \Omega$ — открытое множество и $\Omega_e^0 = \Omega_{se}^0$, т.е. все точки выхода являются точками строгого выхода. Пусть $S \subset \Omega^0 \cup \Omega_e^0$ — непустое множество такое, что $S \cap \Omega_e^0$ не является ретрактом S , но является ретрактом Ω_e^0 . Тогда существует хотя бы одна точка $(t_0, x_0) \in S \cap \Omega^0$ такая, что

$$(t, x(t, t_0, x_0)) \in \Omega^0 \quad \text{при } t \in I(t_0, x_0).$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждой точки $(t_0, x_0) \in S \setminus \Omega_e^0$ существует момент времени $t_1 = t_1(t_0, x_0)$, $t_1 > t_0$ такой, что решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1.2.1) существует на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ и выполнены условия:

1. $(t, x(t, t_0, x_0)) \in \Omega^0$ при $t_0 \leq t < t_1$,
2. $(t_1, x(t_1, t_0, x_0)) \in \Omega_e^0$.

Определим отображение $\pi_1 : S \rightarrow \Omega_e^0$ следующим образом:

$$\pi_1(t_0, x_0) = \begin{cases} (t_1, x(t_1, t_0, x_0)), & \text{если } (t_0, x_0) \in S \setminus \Omega_e^0; \\ (t_0, x_0), & \text{если } (t_0, x_0) \in S \cap \Omega_e^0. \end{cases}$$

Покажем, что отображение $\pi_1 : S \rightarrow \Omega_e^0$ непрерывно. Пусть $(t_0, x_0) \in S$. Покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любой точки $(t^0, x^0) \in O_\delta(x_0, t_0) \cap S$ выполнено

$$\begin{aligned} |x(t_1(t^0, x^0), t^0, x^0) - x(t_1(t_0, x_0), t_0, x_0)| &< \varepsilon, \\ |t_1(t^0, x^0) - t_1(t_0, x_0)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку $(t_1(x^0, t^0), x(t_1(t^0, x^0), t^0, x^0)) \in \Omega_{se}^0$, то существует достаточно малое значение $\Delta t > 0$ такое, что

1. $(t, x(t, t_0, x_0)) \in \Omega^0$ при $t_0 \leq t \leq t_1(t_0, x_0) - \Delta t$,
2. $(t_1(x_0, t_0) + \Delta t, x(t_1(t_0, x_0) + \Delta t, t_0, x_0)) \notin \text{cl}(\Omega^0)$.

Так как множества Ω^0 и Ω открыты, то существует достаточно малое число $r > 0$ такое, что

1. $O_r((t_1(t_0, x_0) - \Delta t, x(t_1(t_0, x_0) - \Delta t, t_0, x_0))) \subset \Omega^0$,
2. $O_r((t_1(t_0, x_0) + \Delta t, x(t_1(t_0, x_0) + \Delta t, t_0, x_0))) \subset \Omega \setminus \text{cl}(\Omega^0)$.

Поскольку функция $x(t, t_0, x_0)$ непрерывна по каждому из своих аргументов, то можем выбрать $\delta > 0$ столь малым, чтобы при $(t^0, x^0) \in O_\delta(t_0, x_0)$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} (t_1(t_0, x_0) \pm \Delta t, x(t_1(t_0, x_0) \pm \Delta t, t^0, x^0)) &\in \\ &\in O_r((t_1(t_0, x_0) \pm \Delta t, x(t_1(t_0, x_0) \pm \Delta t, t_0, x_0))), \end{aligned}$$

Из этого следует, что для каждой точки из $(t^0, x^0) \in O_\delta(t_0, x_0) \cap S$ будет выполнено неравенство

$$|t_1(t^0, x^0) - t_1(t_0, x_0)| \leq r + \Delta t.$$

Поскольку функция x (решение) непрерывна в точке $(t_1(t_0, x_0), t_0, x_0)$, то при достаточно малых значениях r , Δt , δ будет выполнено неравенство

$$|x(t_1(t^0, x^0), t^0, x^0) - x(t_1(t_0, x_0), t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

Что и требовалось показать.

Пусть $\pi : \Omega_e^0 \rightarrow S \cap \Omega_e^0$ ретракция, тогда композиция $\pi \circ \pi_0$ будет ретракцией S на $S \cap \Omega_e^0$, что противоречит условию теоремы ■

Замечание. В дальнейшем при упоминании метода Важевского мы не будем придерживаться дословно формулировки, приведенной выше, но будем использовать ее незначительные модификации, опирающиеся на те же идеи и ту же схему применения. В первую очередь это относится к отступлению от необходимости множествам Ω^0 и Ω быть открытыми, поскольку будем рассматривать механические системы в неотрицательные моменты времени и требование открытости этих множеств вносило бы несодержательную громоздкость в формулировки.

1.3 Задача о движении перевернутого маятника, прикрепленного к тележке, движущейся по заданному закону

В [54] было сформулировано следующее утверждение:

Предположим, что поезд движется от станции А до станции В вдоль прямолинейного участка пути. Движение не предполагается равномерным или равноускоренным. Поезд может двигаться различным образом — ускоряться, тормозить, стоять на месте или даже некоторое время двигаться в обратном направлении пока не прибудет в пункт В. Однако закон движения поезда считается известным заранее; т.е. задана функция $s = f(t)$, где s — расстояние между поездом и станцией А и t — время, отсчитываемое от момента отправления. К полу одного из вагонов прикреплен стержень так, что он может двигаться вперед и назад без трения до соприкосновения с полом вагона. Если он касается пола, то будем предполагать, что он остается лежать на нем; это будет так, если он не будет отскакивать от пола. Можно установить стержень в начальный момент движения поезда таким образом, что будучи отпущенным без начальной скорости и двигаясь под действием только силы гравитации и движения поезда, он никогда не коснется пола за все время движения поезда от А до В.

Там же [54] было дано верное доказательство этого утверждения, с учетом предположения о непрерывной зависимости решения от начального положения маятника. Однако, как было отмечено в [3], это предположение необходимо обосновать. Действительно, непрерывная зависимость решения от начальных данных типична для многих задач механики, но коль скоро мы утверждаем, что коснув-

шись пола, маятник вечно останется лежать на нем, то непрерывная зависимость становится менее очевидной. В частности, на рисунке ниже представлена гипотетическая ситуация, в которой зависимость угла маятника к вертикали имеет такой вид, что при условии «прилипания» маятника к горизонтальной плоскости в положениях $\varphi = \pm\pi/2$, будет нарушаться непрерывность зависимости конечного положения от начального.

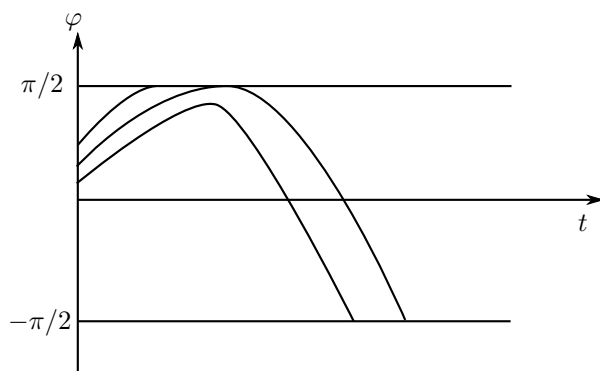


Рис. 1.1: Пример нарушения непрерывности.

Перейдем к доказательству утверждения, предложенного авторами в [54], с использованием топологического метода Важевского.

Пусть l — длина невесомого стержня, к свободному концу которого присоединена массивная точка, а другой конец соединен с полом вагона, точка имеет массу m , ускорение свободного падения будем обозначать g , пусть закон движения вагона задается гладкой функцией времени $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Таким образом, маятник движется под действием силы тяжести, и также на него оказывает влияние движение вагона, к которому он присоединен.

Пусть Oxy — неподвижная декартова система координат, такая что основание маятника движется вдоль оси x , а ось y направлена

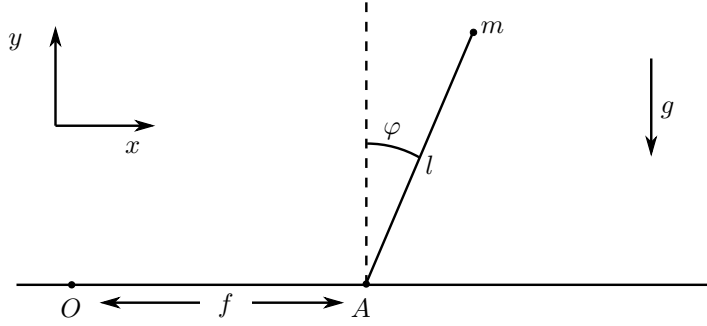


Рис. 1.2: Перевернутый маятник на подвижном основании.

вертикально вверх. Пусть через φ обозначен угол между осью x и маятником ($\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi/2$ соответствуют горизонтальным положениям маятника), т.е. для координат x и y массивной точки имеем

$$\begin{aligned}x &= f + l \sin \varphi, \\y &= l \cos \varphi.\end{aligned}$$

Отсюда для кинетической энергии T системы получаем выражение

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{f}^2 + 2f\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2),$$

потенциальная энергия запишется следующим образом

$$U = mgy = mgl \cos \varphi.$$

Выпишем Лагранжиан системы

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{f}^2 + 2f\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \varphi.$$

Окончательно получаем следующие уравнения, описывающие динамику системы

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= p, \\ \dot{p} &= \frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{\ddot{f}}{l} \cos \varphi.\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

Здесь мы предполагаем, что переменная φ является 2π -периодической, т.е. маятник может находиться «под полом» вагона, если использовать терминологию из [54].

Покажем, что верно следующее

Утверждение [35], [73]. *Рассмотрим плоский математический маятник в поле силы тяжести. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, задающая положение точки подвеса маятника на горизонтальной прямой. Тогда существует такое начальное положение $\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ маятника, что решение, выходящее из него с нулевой скоростью в момент времени $t = 0$, не достигает положений $\varphi = \pm\pi/2$ при всех $t \geq 0$.*

Доказательство Пусть Ω следующее подмножество расширенного фазового пространства

$$\Omega = \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\}.$$

Рассмотрим отрезок L , содержащийся в Ω и определяемый в координатах следующим образом

$$L = \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : t = 0, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, p = 0\}.$$

Покажем, что L содержит как минимум одну точку такую, что решение, выходящее из нее, не покидает множества $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ для всех $t \geq 0$. Предположим обратное. Тогда следующее отображение, которое мы обозначим σ , из L в $\partial\Omega$ корректно определено.

$$\sigma: (0, \varphi_0, p_0) \in L \mapsto (t^*, \varphi(t^*, \varphi_0, p_0), p(t^*, \varphi_0, p_0)) \in \partial\Omega.$$

Здесь

$$t^* = \sup(T), \quad T = \{s \in [0, \infty) : \varphi(t, \varphi_0, p_0) \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ for all } t \in [0, s]\}.$$

Покажем, что отображение σ непрерывно. В соответствии с типичным для метода Важевского подходом, рассмотрим систему (2.2.1) в окрестности границы $\partial\Omega$. Достаточно показать, что любое решение, начинающееся на L либо трансверсально границе $\partial\Omega$ в момент

времени $t > 0$, либо локально не принадлежит $\Omega \setminus \partial\Omega$. В таком случае непрерывность следует из непрерывной зависимости решения от начальных данных.

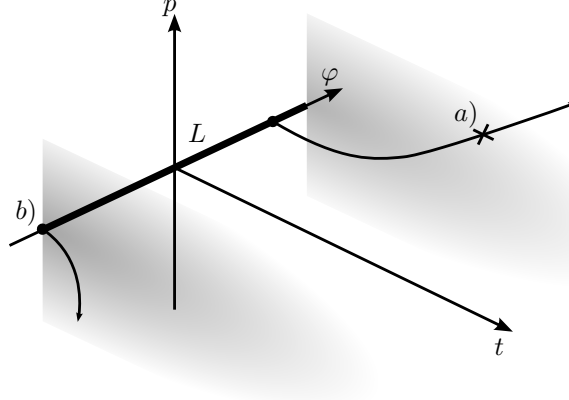


Рис. 1.3: Каждое решение, начинающееся на L и достигающее полуплоскостей $\varphi = \pm\pi/2$ либо а) трансверсально границе $\partial\Omega$ в момент $t > 0$, либо б) локально не принадлежит $\Omega \setminus \partial\Omega$.

Данное условие непрерывности выполнено для (2.2.1). Действительно, для решений, достигающих Ω^+ и Ω^- , где

$$\begin{aligned} \Omega^- &= \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : t > 0, \varphi = \pi/2, p > 0\} \cup \\ &\quad \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : t > 0, \varphi = -\pi/2, p < 0\}, \\ \Omega^+ &= \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : t > 0, \varphi = \pi/2, p < 0\} \cup \\ &\quad \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : t > 0, \varphi = -\pi/2, p > 0\}, \end{aligned}$$

выполнено свойство трансверсальности. Более того, решения, начинающиеся на L , не могут покинуть Ω через Ω^+ . Покажем, что в момент времени $t > 0$ они могут покинуть Ω только через Ω^- .

Для каждого решения, начинающегося с $\partial\Omega$ в какой-либо точке следующего множества

$$\begin{aligned} \Omega_0^+ &= \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : t \geq 0, \varphi = \pi/2, p = 0\} \cup \\ &\quad \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : t \geq 0, \varphi = -\pi/2, p = 0\}, \end{aligned}$$

из 2.2.1 имеем

$$\ddot{\varphi} = \begin{cases} g/l & \text{если } \varphi = \pi/2 \\ -g/l & \text{если } \varphi = -\pi/2. \end{cases}$$

Из чего следует, что решение, начинающееся с L , не может впервые достигнуть Ω_0^+ в момент времени $t > 0$ и для $t = 0$ оно локально не принадлежит Ω .

Завершим доказательство следующим рассуждением, типичным для метода Важевского. Рассмотрим множество ω граничных точек, удовлетворяющих $\varphi = \pm\pi/2$, т.е.

$$\omega = \partial\Omega \setminus \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \varphi \in (-\pi/2, \pi/2)\},$$

и непрерывное отображение $\pi: \omega \rightarrow \omega \cap L$. Поскольку σ и π непрерывны, то непрерывно и $\pi \circ \sigma$ отображающее L в ее двухточечную границу. Противоречие доказывает утверждение. ■

Замечание. В доказательстве неявно использовалось, что решения бесконечно продолжаемы. Для данной системы это может быть доказано строго.

Замечание. Можно показать, что утверждение остается в силе, если вместо заданного закона движения точки подвеса рассмотреть заданную силу, действующую на тележку.

Замечание. Также можно показать, что в случае, если функция \dot{f} является кусочно-гладкой, то отображение σ непрерывно, поэтому в этом случае также будет существовать решение без падений.

Замечание. В дальнейшем условия равенства нулю начальной скорости будет опускаться и в следующих примерах будет показываться, что существуют начальные условия, движение из которых происходит без падений без дополнительных ограничений на начальные скорости.

1.4 Случай сферического маятника и обобщение

Аналогично можно показать существование решений, которые не покидают некоторой заданной области для класса задач, близких к перевернутому маятнику на тележке.

Например, рассмотрим движение сферического маятника на подвижном основании (которое движется по плоскости) и покажем, что для заданного закона движения основания всегда существуют начальные условия, при которых маятник никогда не примет горизонтального положения. Общая схема рассуждений полностью аналогична случаю плоского маятника.

Далее будут использоваться следующие обозначения: l — длина маятника, m — масса точки, g — ускорение свободного падения. Аналогично случаю плоского маятника докажем

Утверждение Пусть дан сферический математический маятник в поле силы тяжести. Пусть $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, задающие положение точки подвеса маятника на горизонтальной плоскости $z = 0$ (ось z направлена против силы тяжести). Тогда существуют такие начальные условия при $t = 0$, что решение, выходящее из них, удовлетворяет условию $z > 0$ при всех $t \geq 0$.

Доказательство Декартовы координаты массивной точки (относительно неподвижной системы отсчета) могут быть выражены следующим образом

$$x = l \cos \varphi \cos \theta + \xi,$$

$$y = l \sin \varphi \cos \theta + \eta,$$

$$z = l \sin \theta.$$

Здесь угол θ отсчитывается от горизонтальной плоскости, угол φ определяет поворот проекции маятника на горизонтальную плоскость.

Проводя простые вычисления, получаем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -l\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - l\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\xi}, \\ \dot{y} &= l\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - l\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\eta}, \\ \dot{z} &= l\dot{\theta} \cos \theta.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \\ &= \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + \\ &+ ml\dot{\xi} (-\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta) + \\ &+ ml\dot{\eta} (\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta).\end{aligned}$$

Так же

$$V = -mgz = -mg \sin \theta.$$

Поэтому, если $L = T + V$, то

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} - ml\dot{\xi} \cos \varphi \sin \theta - ml\dot{\eta} \sin \varphi \sin \theta, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{\xi} \cos \varphi \sin \theta - ml\ddot{\eta} \sin \varphi \sin \theta + \\ &+ ml\dot{\varphi}\dot{\xi} \sin \varphi \sin \theta - ml\dot{\varphi}\dot{\eta} \cos \varphi \sin \theta - \\ &- ml\dot{\theta}\dot{\xi} \cos \varphi \cos \theta - ml\dot{\theta}\dot{\eta} \sin \varphi \cos \theta. \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= ml\dot{\varphi}\dot{\xi} \sin \varphi \sin \theta - ml\dot{\varphi}\dot{\eta} \cos \varphi \sin \theta - \\ &- ml\dot{\theta}\dot{\xi} \cos \varphi \cos \theta - ml\dot{\theta}\dot{\eta} \sin \varphi \cos \theta - mg \cos \theta.\end{aligned}$$

Поэтому

$$ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{\xi} \cos \varphi \sin \theta - ml\ddot{\eta} \sin \varphi \sin \theta + mg \cos \theta = 0.$$

Аналогично для координаты φ

$$ml^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta - ml^2\dot{\theta}\sin 2\theta - ml\ddot{\xi}\sin\varphi\cos\theta + ml\dot{\eta}\cos\varphi\cos\theta = 0.$$

Заметим, что эти два уравнения не определяют динамику системы в вертикальном положении маятника, однако для доказательства существования решения, которое никогда не примет горизонтального положения, не требуется выписывать явно уравнения во всех картах. Достаточно рассмотреть карту, которая содержит границу области. Функции φ , θ являются координатами в окрестности границы (которая задается уравнением $\theta = 0$).

Обозначим через TN подмножество фазового пространства TM системы, которое соответствует таким положениям и скоростям маятника, что координата $z \geq 0$. Как было отмечено выше, граница этого множества задается уравнением $\theta = 0$.

Покажем, что существует подмножество $D \subset \{0\} \times TN$, гомеоморфное двумерному диску, причем $D \cap (\mathbb{R} \times \partial TN)$ гомеоморфно окружности и состоит из точек строгого выхода из множества $\mathbb{R} \times TN$.

Пусть D^0 — множество точек $\{0\} \times TN$ с нулевыми скоростями. В локальных координатах определим следующее множество

$$D^+ = \{(t, \varphi, \theta, p_\varphi, p_\theta) \in \{0\} \times TN : \theta \in [0, \theta'], \quad p_\varphi = 0, \quad p_\theta = -\theta' + \theta\}.$$

Здесь $\theta' \in (0, \pi/2)$ заданный для построения параметр. Тогда положим множество D совпадающим с D^+ когда $\theta \in [0, \theta']$ и с D_0 в других точках.

Поскольку $\theta' > 0$, то $D \cap (\mathbb{R} \times \partial TN)$ является точками выхода для $\mathbb{R} \times TN$.

Заметим, что при $\theta = 0$ имеем

$$ml^2\ddot{\theta} = ml\ddot{\xi} \cos \varphi \sin \theta + ml\ddot{\eta} \sin \varphi \sin \theta - mg \cos \theta = -mg.$$

Поэтому выполнено $\ddot{\theta} = -g/l^2$, и для $\mathbb{R} \times TN$ все точки выхода являются точками строгого выхода.

Так как $D \cap (\mathbb{R} \times \partial TN)$ не является ретрактом D , но является ретрактом точек строгого выхода для $\mathbb{R} \times TN$, то можно применить рассуждения метода Важевского ■

Аналогично можно доказать следующее

Утверждение. *Рассмотрим компактную связную поверхность по которой без трения движется массивная точка под действием силы тяжести. Пусть поверхность совершает плоскопараллельное движение вдоль некоторой горизонтальной плоскости, которую поверхность пересекает во всех точках ортогонально. Тогда существуют такие начальные условия для массивной точки при $t = 0$, что решение, выходящее из них, удовлетворяет условию $z > 0$ при всех $t \geq 0$.*

Доказательство. Кривая пересечения поверхности и плоскости ли-

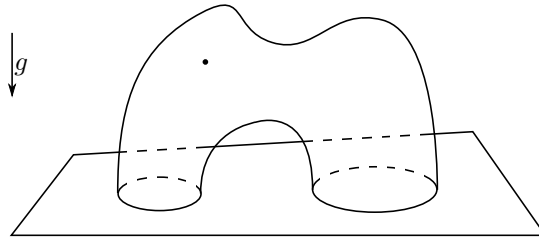


Рис. 1.4: Пример компактной поверхности, которая пересекает горизонтальную плоскость ортогонально.

бо связна (случай эквивалентен сферическому маятнику), либо имеет несколько компонент связности, из этого следует, что можно применить метод Важевского, поскольку не существует непрерывного

отображения связной поверхности на несколько компонент связности границы. Непрерывность соответствующего отображения следует из ортогональности пересечения горизонтальной плоскости ■

1.5 Качение диска с присоединенной массой по подвижной плоскости без падений

Рассматривается неголономная механическая система, состоящая из плоского несимметричного в общем случае диска, катящегося без проскальзывания по горизонтальной подвижной плоскости, и массивной точки. На систему накладывается голономная связь: массивная точка всегда находится в плоскости диска на фиксированном от центра диска расстоянии и в плоскости, по которой происходит качение диска. Также предполагается, что плоскость, по которой движется диск, совершает плоскопараллельное движение по заданному закону, а само движение диска происходит без проскальзывания. Доказывается, что для любого закона движения опорной плоскости существуют такие начальные условия, при которых диск никогда не упадет.

Рассмотрим качение без проскальзывания плоского диска в поле силы тяжести по горизонтальной плоскости. Пусть центр масс диска совпадает с его геометрическим центром, а главные моменты инерции равны A , B , $A + B$. Плоскость предполагается подвижной, совершающей горизонтальное плоскопараллельное движение по заданному закону. Пусть центр диска соединен с массивной точкой невесомым стержнем. Будем считать, что на систему наложена геометрическая связь, благодаря которой массивная точка всегда остается в плоскости диска и в плоскости, по которой диск движется,

а расстояние до центра диска постоянно. Механически такую связь можно реализовать, присоединив к диску треугольную невесомую раму, одна из вершин которой совпадает с центром диска, а две другие принадлежат опорной плоскости диска, причем движение рамы по плоскости происходит без трения, и массивная точка расположена в одной из этих двух вершин.

Если плоскость, на которую опирается диск и точка при движении, неподвижна, то несложно найти решение, при котором диск не упадет. Например, поставленный без начальной скорости вертикально диск все время останется в таком положении. В работе показывается, что если опорная плоскость движется по заданному закону, то всегда существует семейство начальных условий, при которых диск никогда не упадет, т.е. не примет горизонтального положения.

Данная задача является развитием классической задачи о перевернутом маятнике, основание которого движется по заданному закону [54].

Для доказательства используется метод Важевского [40]. Благодаря тому, что доказательство опирается на топологические рассуждения, то на закон движения плоскости накладываются только лишь ограничения, обеспечивающие непрерывность зависимости решений от начальных данных.

Пусть ρ — радиус диска, m — его масса, M — масса присоединенной точки, l — расстояние от точки касания диском плоскости, до массивной точки, g — ускорение свободного падения. Пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат, ось Oz вертикальна, $C\xi\eta\zeta$ — подвижная система координат, жестко связанная с диском с началом в центре масс диска C , оси $C\xi$ и $C\eta$ лежат в плоскости диска, ось $C\zeta$

направлена по нормали к плоскости диска. В качестве обобщенных координат введем следующие функции положения системы: координаты x и y центра масс диска и углы Эйлера θ , ψ , φ , задающие положение $C\xi\eta\zeta$ относительно $Oxyz$. Здесь угол между Oz и $C\zeta$ обозначен через θ , угол между Ox и линией узлов (которая лежит в пересечении плоскости диска и опорной плоскости) — ψ и угол между линией узлов и осью $O\xi$ обозначен через φ .

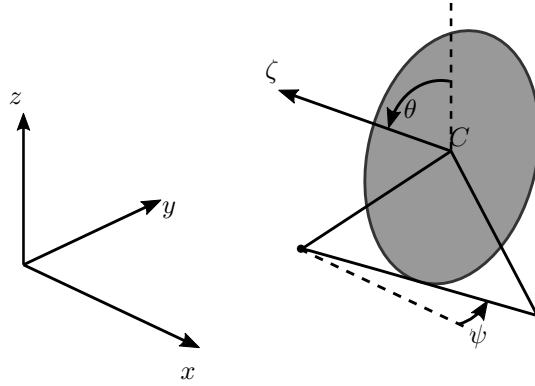


Рис. 1.5: Диск с присоединенной массивной точкой

Кинетическая энергия диска запишется следующим образом

$$T_1 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\rho^2}{2}\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{A}{2}(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + \frac{B}{2}(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + \frac{A+B}{2}(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2.$$

Кинетическая энергия точки

$$T_2 = \frac{M}{2}(\dot{x} + l\dot{\psi} \sin \psi + \rho\dot{\psi} \cos \psi \cos \theta - \rho\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta)^2 + \frac{M}{2}(\dot{y} - l\dot{\psi} \cos \psi + \rho\dot{\psi} \sin \psi \cos \theta + \rho\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta)^2.$$

Потенциал силы тяжести в выбранных координатах запишется следующим образом

$$V = -zmg = -mg \sin \theta.$$

Пусть $v_x(t)$ и $v_y(t)$ — компоненты скоростей точек подвижной плоскости момент времени t относительно $Oxyz$. Пусть $v_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и

$v_y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ являются гладкими функциями. Уравнения связи запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{x} - \rho[\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta - (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \psi] - v_x(t) &= 0, \\ \dot{y} + \rho[\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \sin \psi] - v_y(t) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Запишем уравнения Лагранжа с множителями. Уравнения, соответствующие координатам x и y имеют вид

$$\begin{aligned} (m + M)\ddot{x} + M \frac{d}{dt}[l\dot{\psi} \sin \psi + \rho\dot{\psi} \cos \psi \cos \theta - \rho\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta] &= \lambda, \\ (m + M)\ddot{y} + M \frac{d}{dt}[-l\dot{\psi} \cos \psi + \rho\dot{\psi} \sin \psi \cos \theta + \rho\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta] &= \mu. \end{aligned}$$

Используя выражения для \dot{x} и \dot{y} из уравнений связи, получаем следующее уравнение, которое соответствует координате θ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(-Mv_x\rho \sin \psi \sin \theta + Mv_y\rho \cos \psi \sin \theta - Ml\rho\dot{\psi} \sin \theta + m\rho^2\dot{\theta} \cos^2 \theta + \right. \\ \left. + A \cos \varphi(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) + B(-\sin \varphi)(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \right) = \\ = -m\rho^2 \cos \theta \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + (A + B)\dot{\psi}(-\sin \theta)(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) - \\ - \lambda\rho \sin \psi \sin \theta + \mu\rho \cos \psi \sin \theta - \rho mg \cos \theta + \\ + M(v_x - \dot{\varphi}\rho \cos \psi + l\dot{\psi} \sin \psi)(-\rho\dot{\psi} \cos \psi \sin \theta - \rho\dot{\theta} \sin \psi \cos \theta) + \\ + A\dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) + \\ + M(v_y - \rho\dot{\varphi} \sin \psi - l\dot{\psi} \cos \psi)(-\rho\dot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \rho\dot{\theta} \cos \psi \cos \theta) + \\ + B\dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi(\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi). \end{aligned}$$

Аналогично получаем уравнения, соответствующие ψ и φ

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(A \sin \theta \sin \varphi (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) + B \sin \theta \cos \varphi (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) + \right. \\
& + (A + B) \cos \theta (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) + M(-\dot{\varphi} \rho^2 \cos \theta + l^2 \dot{\psi}) + \\
& \left. + Mv_x(l \sin \psi + \rho \cos \psi \cos \theta) + Mv_y(-l \cos \psi + \rho \sin \psi \cos \theta) \right) = \\
& = M(v_x - \dot{\varphi} \rho \cos \psi + l \dot{\psi} \sin \psi)(l \dot{\psi} \cos \psi - \rho \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta - \rho \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta) + \\
& + M(v_y - \rho \dot{\varphi} \sin \psi - l \dot{\psi} \cos \psi)(l \dot{\psi} \sin \psi + \rho \dot{\psi} \cos \psi \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \psi \sin \theta) + \\
& + \lambda \rho \cos \theta \cos \psi + \mu \rho \cos \theta \sin \psi, \\
& \frac{d}{dt} \left((A + B)(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \right) = A \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) - \\
& - B \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) + \lambda \rho \cos \psi + \mu \rho \sin \psi.
\end{aligned}$$

Из уравнений связи получаем

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \rho \frac{d}{dt} [\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta - (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \psi] + \frac{d}{dt} v_x, \\
\ddot{y} &= -\rho \frac{d}{dt} [\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \sin \psi] + \frac{d}{dt} v_y.
\end{aligned}$$

Поэтому λ и μ могут быть найдены из следующих равенств

$$\begin{aligned}
\lambda &= Ml \ddot{\psi} \sin \psi + (m + M)(-\rho \ddot{\varphi} \cos \psi) + m(\rho \ddot{\theta} \sin \psi \sin \theta - \rho \ddot{\psi} \cos \theta \cos \psi) + \tilde{\lambda}, \\
\mu &= -Ml \ddot{\psi} \cos \psi + (m + M)(-\rho \ddot{\varphi} \sin \psi) + m(-\rho \ddot{\theta} \cos \psi \sin \theta - \ddot{\psi} \rho \cos \theta \sin \psi) + \tilde{\mu},
\end{aligned}$$

где в выражения для $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ не входят $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$. Используя то, что

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} v_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t}, \\
\frac{d}{dt} v_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t},
\end{aligned}$$

окончательно можем записать уравнение Лагранжа, соответствующее

щее координате θ , следующим образом

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta}(m\rho^2 + A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) + \ddot{\psi}((A - B) \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta) = \\
& = \dot{\psi} \frac{d}{dt}(Ml\rho \sin \theta) - \dot{\theta} \frac{d}{dt}(m\rho^2 \cos^2 \theta) - m\rho^2 \cos \theta \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \\
& + (A + B)\dot{\psi}(-\sin \theta)(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) - \tilde{\lambda}\rho \sin \psi \sin \theta + \tilde{\mu}\rho \cos \psi \sin \theta - \rho mg \cos \theta + \\
& + M(v_x - \dot{\varphi}\rho \cos \psi + l\dot{\psi} \sin \psi)(-\rho\dot{\psi} \cos \psi \sin \theta - \rho\dot{\theta} \sin \psi \cos \theta) + \\
& + M(v_y - \rho\dot{\varphi} \sin \psi - l\dot{\psi} \cos \psi)(-\rho\dot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \rho\dot{\theta} \cos \psi \cos \theta) + \\
& + A\dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) + B\dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi(\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) - \\
& - \dot{\psi} \frac{d}{dt}((A - B) \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta) - \dot{\theta} \frac{d}{dt}(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) + \\
& + \frac{d}{dt}(Mv_x \rho \sin \psi \sin \theta - Mv_y \rho \cos \psi \sin \theta).
\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Уравнение, соответствующее ψ

$$\begin{aligned}
& \ddot{\psi}(A \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + B \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + (A + B) \cos^2 \theta + Ml^2 + m\rho^2 \cos^2 \theta) + \\
& + \ddot{\varphi}(m\rho^2 \cos \theta + (A + B) \cos \theta) + \ddot{\theta}((A - B) \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi) = \\
& = -\frac{d}{dt} \left(Mv_x(l \sin \psi + \rho \cos \psi \cos \theta) + Mv_y(-l \cos \psi + \rho \sin \psi \cos \theta) \right) + \\
& + M(v_x - \dot{\varphi}\rho \cos \psi + l\dot{\psi} \sin \psi)(l\dot{\psi} \cos \psi - \rho\dot{\psi} \sin \psi \cos \theta - \rho\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta) + \\
& + M(v_y - \rho\dot{\varphi} \sin \psi - l\dot{\psi} \cos \psi)(l\dot{\psi} \sin \psi + \rho\dot{\psi} \cos \psi \cos \theta - \rho\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta) + \\
& + \tilde{\lambda}\rho \cos \theta \cos \psi + \tilde{\mu}\rho \cos \theta \sin \psi - \\
& - \dot{\psi} \frac{d}{dt}(A \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + B \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + (A + B) \cos^2 \theta + Ml^2) - \\
& - \dot{\varphi} \frac{d}{dt}(-m\rho^2 \cos \theta + (A + B) \cos \theta) - \dot{\theta} \frac{d}{dt}((A - B) \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi).
\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Уравнение, соответствующее координате φ

$$\begin{aligned}
& \ddot{\psi}(A + B + m\rho^2) \cos \theta + \ddot{\varphi}(A + B + (m + M)\rho^2) = \\
& = A\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) + \tilde{\lambda}\rho \cos \psi + \tilde{\mu}\rho \sin \psi - \\
& - B\dot{\psi} \sin \theta \sin \theta (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) + (A + B)\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta.
\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Система, состоящая из (1.5.1) — (1.5.4) образует полный набор уравнений для определения $x, y, \theta, \varphi, \psi$, если в начальный момент $t = 0$ заданы $x_0, y_0, \theta_0, \varphi_0, \psi_0, \dot{\theta}_0, \dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0$. При этом при $M \neq 0$ она является невырожденной, т.е. может быть записана в форме Коши и для нее справедлива локальная теорема о существовании и единственности решений.

Покажем, что существует такое начальное условие, что решение системы (1.5.1) — (1.5.4), выходящее из него, обладает тем свойством, что вдоль него $\theta \neq 0$ и $\theta \neq \pi$ на всем интервале существования решения.

Утверждение. *Для заданного закона движения опорной плоскости существует такое начальное условие, что вдоль решения, выходящего из него, для всех моментов времени выполнено условие $\theta(t) \in (0, \pi)$.*

Доказательство. Пусть через M обозначено расширенное фазовое пространство системы и $\dot{\varphi} = p_\varphi, \dot{\psi} = p_\psi, \dot{\theta} = p_\theta$.

Пусть $\chi > 0$ — некоторая константа, рассмотрим множество

$$\begin{aligned}
S_\chi = \{t, x, y, \varphi, \psi, \theta, p_\varphi, p_\psi, p_\theta: \\
x, y, p_\varphi, p_\psi, \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \theta \in [0, \pi], p_\theta = (\theta - \pi/2)\chi, t = 0\}.
\end{aligned}$$

Определим множество Ω следующим образом

$$\Omega = \{t, x, y, \varphi, \psi, \theta, p_\varphi, p_\psi, p_\theta: t, x, y, p_\varphi, p_\psi, p_\theta, \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \theta \in [0, \pi]\}.$$

Предположим, что каждое решение, начинающееся на S_χ покидает Ω , т.е. в некоторый момент времени достигает границы $\partial\Omega$. Определим функцию $f: S_\chi \rightarrow \partial\Omega$, которая каждой точке $s \in S$ сопоставляет точку границы $\partial\Omega$, в которую решение, выходящее из s , попадает при первом достижении $\partial\Omega$.

Ключевым элементом доказательства, позволяющим применить метод Важевского к данной системе, является тот факт, что находящийся в горизонтальном положении диск в случае отсутствия у его центра масс вертикальной составляющей скорости под действием силы тяжести будет двигаться таким образом (локально), что координата z центра масс будет уменьшаться, т.е. диск будет «проваливаться» сквозь горизонтальную плоскость. Покажем это.

Поскольку из (1.5.5) при $\theta = 0$ и $p_\theta = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
& \ddot{\psi}((A - B) \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta) = 0, \\
& \dot{\psi} \frac{d}{dt}(Ml\rho \sin \theta) - \dot{\theta} \frac{d}{dt}(m\rho^2 \cos^2 \theta) - m\rho^2 \cos \theta \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 = 0, \\
& (A + B)\dot{\psi}(-\sin \theta)(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) - \tilde{\lambda}\rho \sin \psi \sin \theta + \tilde{\mu}\rho \cos \psi \sin \theta = 0, \\
& M(v_x - \dot{\varphi}\rho \cos \psi + l\dot{\psi} \sin \psi)(-\rho\dot{\psi} \cos \psi \sin \theta - \rho\dot{\theta} \sin \psi \cos \theta) = 0, \\
& M(v_y - \rho\dot{\varphi} \sin \psi - l\dot{\psi} \cos \psi)(-\rho\dot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \rho\dot{\theta} \cos \psi \cos \theta) = 0, \\
& A\dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) + B\dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi(\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) = 0, \\
& -\dot{\psi} \frac{d}{dt}((A - B) \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta) - \dot{\theta} \frac{d}{dt}(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) = 0, \\
& \frac{d}{dt}(Mv_x\rho \sin \psi \sin \theta - Mv_y\rho \cos \psi \sin \theta) = 0.
\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Получаем, что $\ddot{\theta} < 0$ и, аналогично, при $\theta = \pi$ и $p_\theta = 0$, что $\ddot{\theta} > 0$. Решения системы (1.5.1) – (1.5.4) могут касаться границы $\partial\Omega$ только внешним образом. Из этого и того, что для решений системы верна теорема о непрерывной зависимости от начальных данных, следует,

что функция f непрерывна.

Рассмотрим множество $S' \subset S_\chi$

$$S' = \{t, x, y, \varphi, \psi, \theta, p_\varphi, p_\psi, p_\theta : x = \tilde{x}, y = \tilde{y}, p_\varphi = \tilde{p}_\varphi, p_\psi = \tilde{p}_\psi, \\ \varphi = \tilde{\varphi}, \psi \in \mathbb{R}, \theta \in [0, \pi], p_\theta = (\theta - \pi/2)\chi, t = 0\}.$$

Поскольку существует непрерывная функция $h: \partial\Omega \rightarrow S' \cap \partial\Omega$, то композиция $h \circ f$ задает непрерывное отображение отрезка S' на его границу $S' \cap \partial\Omega$, состоящую из двух точек. Полученное противоречие доказывает утверждение ■

Замечание. В случае, если масса присоединенной точки равна нулю, т.е. мы находимся в рамках задачи о качении диска по подвижной плоскости без проскальзывания, система уравнений (1.5.1) — (1.5.4) вырождается в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, что не позволяет доказать непрерывность функции f стандартными методами и провести полное доказательство утверждения.

1.6 Движение велосипеда без падений по горизонтальной подвижной плоскости

Рассматривается упрощенная модель велосипеда, в которой оба колеса всегда находятся в одной плоскости. Предполагается, что велосипед совершает движение по горизонтальной плоскости, которая в свою очередь движется плоско-параллельно по заданному закону. Предполагается, что на велосипед действует сила вязкого трения со стороны плоскости. Показывается, что при заданном законе движения плоскости, всегда существует такое начальное положение велосипеда, что, начав движение из него, велосипед никогда не упадет.

Будем считать, что велосипед представляет собой два одинаковых

динамически симметричных диска радиуса R и с моментом инерции относительно оси, лежащей в плоскости диска и проходящей через его центр равным A , соединенных невесомым стержнем длины 2ρ , в центре которого расположена массивная точка массы m_0 . Считаем, что массы дисков равны m_1 и m_2 .

Велосипед движется по плоскости, совершающей плоскопараллельное движение по заданному закону: вертикальная составляющая скоростей точек плоскости всегда равна нулю, а проекции на неподвижные оси задаются гладкими функциями времени, которые мы будем обозначать w_x и w_y , а вектор скорости — w . Пусть $w_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $w_y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции. Связь предполагаем удерживающей.

Со стороны плоскости на велосипед действует сила вязкого трения с коэффициентом трения κ .

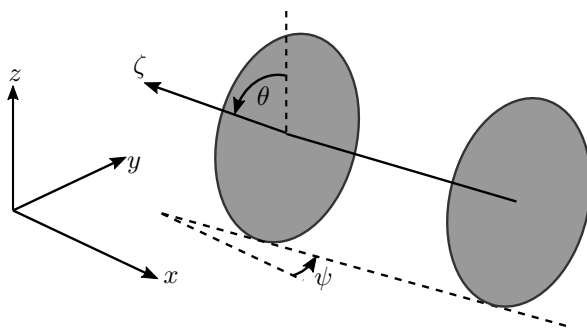


Рис. 1.6: Простейшая модель велосипеда

Пусть x, y — абсолютные координаты проекции центра велосипеда на горизонтальную плоскость, углы $\varphi_1, \varphi_2, \psi, \theta$ задают ориентацию велосипеда в пространстве. Пусть T_1, T_2 — кинетические энергии вращения первого и второго колеса соответственно, T_3, T_4 — кинетические энергии центров масс первого и второго колес, T_5

— кинетическая энергия массивной точки. Несложно получить, что

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{A}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + A(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi} \cos \theta)^2, \\
T_2 &= \frac{A}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + A(\dot{\varphi}_2 + \dot{\psi} \cos \theta)^2, \\
T_3 &= \frac{m_1}{2}((\dot{x} + \rho\dot{\psi} \sin \psi)^2 + (\dot{y} - \rho\dot{\psi} \cos \psi)^2 + (R\dot{\theta} \cos \theta)^2), \\
T_4 &= \frac{m_2}{2}((\dot{x} - \rho\dot{\psi} \sin \psi)^2 + (\dot{y} + \rho\dot{\psi} \cos \psi)^2 + (R\dot{\theta} \cos \theta)^2), \\
T_5 &= \frac{m_0}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (R\dot{\theta} \cos \theta)^2).
\end{aligned}$$

Выражение для полной энергии T примет вид

$$\begin{aligned}
T &= A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + A(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + A(\dot{\varphi}_2 + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + \\
&+ \frac{m_0 + m_1 + m_2}{2}(R^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m_1 + m_2}{2}\rho^2\dot{\psi}^2.
\end{aligned}$$

Угловые скорости колес ω_1, ω_2 имеют следующие выражения через координаты

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\theta} \cos \varphi_1 e_\xi - \dot{\theta} \sin \varphi_1 e_\eta + \dot{\varphi}_1 e_\zeta + \dot{\psi} \cos \theta e_\zeta + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi_1 e_\xi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi_1 e_\eta, \\
\omega_2 &= \dot{\theta} \cos \varphi_2 e_\xi - \dot{\theta} \sin \varphi_2 e_\eta + \dot{\varphi}_2 e_\zeta + \dot{\psi} \cos \theta e_\zeta + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi_2 e_\xi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi_2 e_\eta.
\end{aligned}$$

Скорость v_1 точки контакта первого колеса с плоскостью может быть получена из следующих соотношений

$$\begin{aligned}
v_1 &= (\dot{x} + \rho\dot{\psi} \sin \psi)e_x + (\dot{y} - \rho\dot{\psi} \cos \psi)e_y + (R\dot{\theta} \cos \theta)e_z + \\
&+ [\omega_1, -R \sin \varphi_1 e_\xi - R \cos \varphi_1 e_\eta] = (\dot{x} + \rho\dot{\psi} \sin \psi)e_x + (\dot{y} - \rho\dot{\psi} \cos \psi)e_y + \\
&+ (R\dot{\theta} \cos \theta)e_z + (R \cos \varphi_1)(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi} \cos \theta)e_\xi + \\
&+ (-R \sin \varphi_1)(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi} \cos \theta)e_\eta + (-R\dot{\theta})e_\zeta.
\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Аналогично находится v_2

$$\begin{aligned}
v_2 &= (\dot{x} - \rho\dot{\psi} \sin \psi)e_x + (\dot{y} + \rho\dot{\psi} \cos \psi)e_y + (R\dot{\theta} \cos \theta)e_z + \\
&+ [\omega_2, -R \sin \varphi_2 e_\xi - R \cos \varphi_2 e_\eta] = (\dot{x} - \rho\dot{\psi} \sin \psi)e_x + \\
&+ (\dot{y} + \rho\dot{\psi} \cos \psi)e_y + (R\dot{\theta} \cos \theta)e_z + (-R\dot{\theta})e_\zeta + (R\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + R\dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi_2)e_\xi + \\
&+ (-R\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - R\dot{\psi} \sin \varphi_2 \cos \theta)e_\eta.
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

В предположении модели вязкого трения получаем, что для сил, действующих на колеса со стороны плоскости, верны соотношения

$$F_i = \kappa(w - v_i), \quad \kappa > 0, \quad i = 1, 2. \tag{1.6.3}$$

Векторы сил трения расположены в опорной плоскости, т.е.

$$F_i = F_{ix}e_x + F_{iy}e_y.$$

Определим элементарную работу сил трения. Из выражения для скорости точки контакта получаем следующие выражения для элементарных перемещений

$$\begin{aligned}
\delta r_1 &= (\delta x + \rho \sin \psi \delta \psi)e_x + (\delta y - \rho \cos \psi \delta \psi)e_y + (R \cos \theta \delta \theta)e_z + \\
&+ (R \cos \varphi_1)(\delta \varphi_1 + \cos \theta \delta \psi)e_\xi + (-R \sin \varphi_1)(\delta \varphi_1 + \cos \theta \delta \psi)e_\eta + (-R \delta \theta)e_\zeta, \\
\delta r_2 &= (\delta x - \rho \sin \psi \delta \psi)e_x + (\delta y + \rho \cos \psi \delta \psi)e_y + (R \cos \theta \delta \theta)e_z + \\
&+ (-R \delta \theta)e_\zeta + (R \cos \varphi_2 \delta \varphi_2 + R \cos \theta \cos \varphi_2 \delta \psi)e_\xi + \\
&+ (-R \sin \varphi_2 \delta \varphi_2 - R \sin \varphi_2 \cos \theta \delta \psi)e_\eta.
\end{aligned}$$

Используя эти выражения, несложно получить, что

$$\begin{aligned}
\delta A_x &= (F_{1x} + F_{2x})\delta x, \\
\delta A_y &= (F_{1y} + F_{2y})\delta y, \\
\delta A_\psi &= ((F_{1x} - F_{2x})\rho \sin \psi + (F_{2x} - F_{1x})\rho \cos \psi)\delta \psi, \\
\delta A_\theta &= (-RF_{1x}(e_x, e_\zeta) - RF_{1y}(e_y, e_\zeta) - RF_{2x}(e_x, e_\zeta) - RF_{2y}(e_y, e_\zeta))\delta \theta, \\
\delta A_{\varphi_1} &= \delta A_{\varphi_2} = 0.
\end{aligned}$$

Учитывая, что потенциал силы тяжести V для рассматриваемой системы в выбранных координатах выражается следующим образом

$$V = -(m_0 + m_1 + m_2)gz = -(m_0 + m_1 + m_2)g\rho \sin \theta,$$

то система уравнений Лагранжа имеет следующий вид

$$(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{x} = F_{1x} + F_{2x},$$

$$(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{y} = F_{1y} + F_{2y},$$

$$2A\ddot{\psi} \sin^2 \theta + 4A\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + 2A(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta -$$

$$- 2A\dot{\theta}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi} \cos \theta) \sin \theta +$$

$$+ 2A(\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta - 2A\dot{\theta}(\dot{\varphi}_2 + \dot{\psi} \cos \theta) \sin \theta + (m_1 + m_2)\rho^2\ddot{\psi} =$$

$$= (F_{1x} - F_{2x})\rho \sin \psi + (F_{2x} - F_{1x})\rho \cos \psi,$$

$$2A\ddot{\theta} + (m_0 + m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta} \cos^2 \theta - 2(m_0 + m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta =$$

$$= 2A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - 2A(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi} \cos \theta) \sin \theta - 2A(\dot{\varphi}_2 + \dot{\psi} \cos \theta) \sin \theta -$$

$$- (m_0 + m_1 + m_2)(R^2\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta + g\rho \cos \theta) -$$

$$- RF_{1x}(e_x, e_\zeta) - RF_{1y}(e_y, e_\zeta) - RF_{2x}(e_x, e_\zeta) - RF_{2y}(e_y, e_\zeta),$$

$$2A(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta) = 0,$$

$$2A(\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta) = 0.$$

(1.6.4)

Утверждение. Для заданного закона движения опорной плоскости существуют начальные условия такие, что вдоль соответствующего решения во все моменты времени выполнено условие $\theta(t) \in (0, \pi)$.

Доказательство. Введем обозначения $\dot{\varphi}_1 = p_{\varphi_1}$, $\dot{\varphi}_2 = p_{\varphi_2}$, $\dot{x} = p_x$, $\dot{y} = p_y$, $\dot{\theta} = p_\theta$, $\dot{\psi} = p_\psi$. Пусть $\chi > 0$, рассмотрим множество

$$S_\chi = \{t, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \psi, \theta, p_x, p_y, p_{\varphi_1}, p_{\varphi_2}, p_\psi, p_\theta :$$

$$\theta \in [0, \pi], p_\theta = (\theta - \frac{\pi}{2})\chi, t = t_0, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \psi, p_x, p_y, p_{\varphi_1}, p_{\varphi_2}, p_\psi \in \mathbb{R}\}.$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{t, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \psi, \theta, p_{\varphi_1}, p_{\varphi_2}, p_{\psi}, p_{\theta} :$$

$$t, x, y, p_{\varphi_1}, p_{\varphi_2}, p_{\psi}, p_{\theta}, \varphi_1, \varphi_2, \psi \in \mathbb{R}, \theta \in [0, \pi]\}.$$

Предположим, что каждое решение, начинающееся на S_{χ} покидает Ω , т.е. в некоторый момент времени достигает границы $\partial\Omega$. Определим функцию $f: S_{\chi} \rightarrow \partial\Omega$, которая каждой точке $s \in S_{\chi}$ сопоставляет точку границы $\partial\Omega$, в которую решение, выходящее из s , попадает при первом достижении $\partial\Omega$.

Из системы (1.6.4) при $\theta = 0$ и $p_{\theta} = 0$ имеем

$$\begin{aligned} (m_0 + m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta &= 0, \\ 2A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - 2A(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi} \cos \theta) \sin \theta - 2A(\dot{\varphi}_2 + \dot{\psi} \cos \theta) \sin \theta &= 0, \\ (m_0 + m_1 + m_2)(R^2\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta) &= 0. \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Также из 1.6.1, 1.6.2 и 1.6.3 получаем

$$-RF_{1x}(e_x, e_{\zeta}) - RF_{1y}(e_y, e_{\zeta}) - RF_{2x}(e_x, e_{\zeta}) - RF_{2y}(e_y, e_{\zeta}) = 0.$$

Из чего следует, что $\ddot{\theta} < 0$. Аналогично при $\theta = \pi$ и $p_{\theta} = 0$ получаем $\ddot{\theta} > 0$. Следовательно, решения системы могут касаться границы $\partial\Omega$ только внешним образом. Из этого и того, что для решений системы верна теорема о непрерывной зависимости от начальных данных, следует, что функция f непрерывна.

Рассмотрим множество $S' \subset S_{\chi}$

$$S' = \{t, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \psi, \theta, p_{\varphi_1}, p_{\varphi_2}, p_{\psi}, p_{\theta} :$$

$$x = \tilde{x}, y = \tilde{y}, p_{\varphi_1} = \tilde{p}_{\varphi_1}, p_{\varphi_2} = \tilde{p}_{\varphi_2}, p_{\psi} = \tilde{p}_{\psi},$$

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1, \varphi_2 = \tilde{\varphi}_2, \psi \in \mathbb{R}, \theta \in [0, \pi], p_{\theta} = (\theta - \pi/2)\chi, t = t_0\}.$$

Поскольку существует непрерывная функция $h: \partial\Omega \rightarrow S' \cap \partial\Omega$, то композиция $h \circ f$ задает непрерывное отображение отрезка S' на его

границу $S' \cap \partial\Omega$, состоящую из двух точек. Полученное противоречие доказывает утверждение ■

Глава 2

Периодические решения

В данной главе рассматриваются примеры механических систем, для которых показывается существование периодических решений при наличии периодического неавтономного возмущения. При этом помимо периодичности решение системы обладает дополнительным свойством, что движение совершается без падений. В частности, показывается, что если основание перевернутого маятника движется по периодическому закону, то существует периодическое решение, вдоль которого маятник не упадет.

Для доказательства используются методы и понятия алгебраической топологии, которые также приводятся в данной главе для полноты и максимальной замкнутости изложения. Значительная часть вспомогательного материала взята из [63].

2.1 Метод доказательства существования периодических решений

Следуя [49], приведем формулировку и доказательство утверждения, которое далее будет использоваться при доказательстве утверждений, касающихся механических систем.

Будем предполагать, что

$$v: \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$$

является гладким неавтономным векторным полем на многообразии M .

Определение. Для $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in M$ отображение $t \mapsto x(t, t_0, x_0)$ задается решением системы $\dot{x} = v(t, x)$ с начальным условием $x(0, t_0, x_0) = x_0$.

Определение. Пусть $W \subset \mathbb{R} \times M$. Определим множество W^- следующим образом. Точка (t, x) принадлежит W^- , если существует $\delta > 0$ такое, что $(t + t_0, x(t, t_0, x_0)) \notin W$ для всех $t \in (0, \delta)$.

Определение. Будем называть $W \subset \mathbb{R} \times M$ блоком для системы $\dot{x} = v(t, x)$, если W и W^- компактны.

Введем некоторые обозначения. Через π_1 и π_2 обозначим проекции $\mathbb{R} \times M$ на \mathbb{R} и M соответственно. Если $Z \subset \mathbb{R} \times M$, $t \in \mathbb{R}$, тогда обозначим

$$Z_t = \{z \in M: (t, z) \in Z\}.$$

Определение. Множество $W \subset [a, b] \times M$ называется сегментом над $[a, b]$ если оно является блоком для системы $\dot{x} = v(t, x)$ и выполнены следующие условия:

- существует компактное подмножество W^{--} множества W^- , называемое множеством существенного выхода

$$W^- = W^{--} \cup (\{b\} \times W_b), \quad W^- \cap ([a, b) \times M) \subset W^{--},$$

- существует гомеоморфизм $h: [a, b] \times W_a \rightarrow W$ такой, что $\pi_1 \circ h = \pi_1$ и

$$h([a, b] \times W_a^{--}) = W^{--}. \quad (2.1.1)$$

Определение. Пусть W — сегмент над $[a, b]$. Он называется *периодическим*, если

$$(W_a, W_a^{--}) = (W_b, W_b^{--}).$$

Определение. Для периодического сегмента W определим соответствующее отображение монодромии t следующим образом

$$t: W_a \rightarrow W_a, \quad t(x) = \pi_2 h(b, \pi_2 h^{-1}(a, x)).$$

Замечание. Отображение t является гомеоморфизмом. Более того, можно показать, что различный выбор h , удовлетворяющего условиям (2.1.1) приводит к отображениям монодромии гомотопным t . Из чего следует, что соответствующий изоморфизм групп гомологий t_* не зависит от выбора h .

Теорема [49]. Пусть W — периодический сегмент над $[a, b]$. Тогда множество

$$U = \{x_0 \in W_a : x(t - a, a, x_0) \in W_t \setminus W_t^{--} \text{ для всех } t \in [a, b]\}$$

открыто в W_a и множество неподвижных точек отображения $x(b - a, a, \cdot)|_U: U \rightarrow W_a$ компактно. Более того, если W и W^{--} являются абсолютными окрестностными ретрактами, то

$$\text{ind}(x(b - a, a, \cdot)|_U) = \Lambda(t) - \Lambda(t|_{W_a^{--}}).$$

Здесь через $\Lambda(t)$ обозначено число Лефшеца отображения t , а через $\Lambda(t|_{W_a^{--}})$ число Лефшеца его ограничения на W_a^{--} . В частности, если $\Lambda(t) - \Lambda(t|_{W_a^{--}}) \neq 0$, тогда у отображения $x(b - a, a, \cdot)|_U$ имеется хотя бы одна неподвижная точка в W_a .

2.2 Перевернутый маятник на подвижном основании

Рассмотрим маятник длины l , состоящий из невесомого стержня и массивной точки массы m , совершающий движение в поле силы тяжести. Считаем, что точка подвеса маятника движется по заданному закону, задаваемому гладкой функцией времени $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, вдоль горизонтальной прямой. Таким образом, на движение маятника оказывает влияние закон движения точки подвеса и сила тяжести.

Здесь мы считаем, что угловая переменная 2π -периодична, т.е. мы допускаем такие положения маятника, при которых он находится ниже горизонта или, используя первоначальную терминологию из [54], можно сказать, что маятник может быть «под полом» вагона и мы не считаем, что однажды приняв горизонтальное положение, он вечно останется в нем.

Утверждение [35], [73]. Пусть для перевернутого маятника на подвижном основании в поле силы тяжести закон движения основания вдоль горизонтальной прямой определяется гладкой T -периодической функцией времени ξ , тогда система допускает T -периодическое решение вдоль которого движение происходит без падений.

Доказательство. Через Oxy обозначим неподвижную систему декартовых координат, выбранную таким образом, что точка подвеса движется вдоль оси Ox , а ось Oy вертикальна и направлена противоположно силе тяжести. Угол между осью Ox и стержнем обозначим φ (углам $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi/2$ соответствуют горизонтальные положения маятника). Координаты x и y массивной точки выражаются

через φ обычным образом

$$\begin{aligned}x &= f + l \sin \varphi, \\y &= l \cos \varphi.\end{aligned}$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{f}^2 + 2\dot{f}l\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2\dot{\varphi}^2).$$

Пусть g — ускорение свободного падения, тогда выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$U = mgy = mgl \cos \varphi.$$

Получаем лагранжиан системы

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{f}^2 + 2\dot{f}l\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2\dot{\varphi}^2) - mgl \cos \varphi.$$

Уравнения, описывающие динамику системы, запишем в следующем виде

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= p, \\ \dot{p} &= \frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{\ddot{f}}{l} \cos \varphi.\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Сначала покажем, что периодический сегмент для рассматриваемой системы можно определить следующим образом

$$W = \{(t, \varphi, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, -p' \leq p \leq p'\},$$

где p' удовлетворяет условию

$$p' > \sup_{t \in [0, T]} \frac{|\ddot{f}|}{g}.$$

Ясно, что W компактно. Покажем, что W^{--} также является ком-

ПАКТОМ И

$$\begin{aligned}
W^{--} = & \{(t, \varphi, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \varphi = \pi/2, 0 \leq p \leq p'\} \cup \\
& \{(t, \varphi, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \varphi = -\pi/2, -p' \leq p \leq 0\} \cup \\
& \{(t, \varphi, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \varphi'(t) \leq \varphi \leq \pi/2, p = p'\} \cup \\
& \{(t, \varphi, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} : -\pi/2 \leq \varphi \leq \varphi'(t), p = -p'\},
\end{aligned}$$

где для данного $t \in [0, T]$, $\varphi'(t) \in (-\pi/2, \pi/2)$ удовлетворяет условию

$$g \sin \varphi'(t) - \ddot{f}(t) \cos \varphi'(t) = 0.$$

Действительно, если $p = p'$ и $\varphi = \varphi'(t)$ (т.е. $\dot{p} = 0$), тогда имеем из (2.2.1)

$$\begin{aligned}
\ddot{p} &= \frac{g}{l} p' \cos \varphi'(t) - \frac{\ddot{f}}{l} \cos \varphi'(t) + \frac{\ddot{f}}{l} p' \sin \varphi'(t) = \\
& \frac{g}{l} p' \cos \varphi'(t) - \frac{\ddot{f}}{l} \cos \varphi'(t) + \frac{\ddot{f}^2}{gl} p' \cos \varphi'(t) > 0.
\end{aligned}$$

Поскольку $\varphi'(t)$ — единственный корень уравнения $\dot{p} = 0$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, тогда при $p = p'$ и $\varphi'(t) < \varphi \leq \pi/2$ получаем $\dot{p} > 0$, для $p = p'$ и $-\pi/2 \leq \varphi < \varphi'(t)$ имеем $\dot{p} < 0$. Аналогично рассматривается случай $p = -p'$ и $\varphi = \varphi'(t)$

$$\begin{aligned}
\ddot{p} &= -\frac{g}{l} p' \cos \varphi'(t) - \frac{\ddot{f}}{l} \cos \varphi'(t) - \frac{\ddot{f}}{l} p' \sin \varphi'(t) = \\
& -\frac{g}{l} p' \cos \varphi'(t) - \frac{\ddot{f}}{l} \cos \varphi'(t) - \frac{\ddot{f}^2}{gl} p' \cos \varphi'(t) < 0,
\end{aligned}$$

и $\dot{p} > 0$ при $p = -p'$, $\varphi'(t) < \varphi \leq \pi/2$; $\dot{p} < 0$ при $p = p'$, $-\pi/2 \leq \varphi < \varphi'(t)$.

Рассмотрим «боковые грани» W . Пусть

$$W_{t', -\pi/2} = \{(t, \varphi, p) : t = t', \varphi = -\pi/2, p \in [-p', p']\}.$$

Покажем, что

$$W^{--} \cap W_{t', -\pi/2} = \{(t, \varphi, p) : t = t', \varphi = -\pi/2, p \in [-p', 0]\}.$$

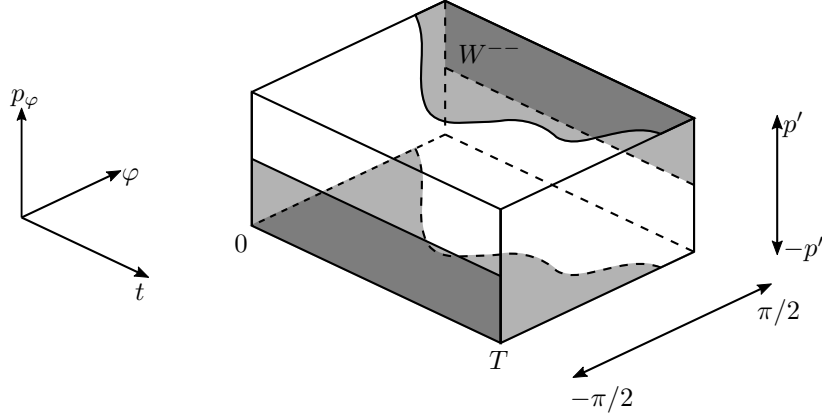


Рис. 2.1: Периодический сегмент W системы

Действительно, если для точки, принадлежащей W , выполнено

$$\varphi = -\pi/2 \text{ и } p < 0,$$

то она является точкой строгого выхода. Если

$$\varphi = -\pi/2 \text{ и } p = 0,$$

то вдоль решения в таких точках имеем

$$\ddot{\varphi} = -g/l < 0.$$

Из чего следует, что решение в этих точках касается W внешним образом.

Аналогично

$$W^{--} \cap W_{t', \pi/2} = \{(t, \varphi, p) : t = t', \varphi = \pi/2, p \in [0, p']\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} W_t^{--} = & \{(t, \varphi, p) : t = t', \varphi \in [\varphi'(t'), \pi/2], p = p'\} \cup \\ & \cup \{(t, \varphi, p) : t = t', \varphi \in [-\pi/2, \varphi'(t')], p = -p'\} \cup \\ & \cup \{(t, \varphi, p) : t = t', \varphi = -\pi/2, p \in [-p', 0]\} \cup \\ & \cup \{(t, \varphi, p) : t = t', \varphi = \pi/2, p \in [0, p']\}. \end{aligned}$$

Поэтому множество W_t^{--} гомеоморфно W_0^{--} . Гомеоморфизм h можно задать очевидным образом, определив его для каждого значения

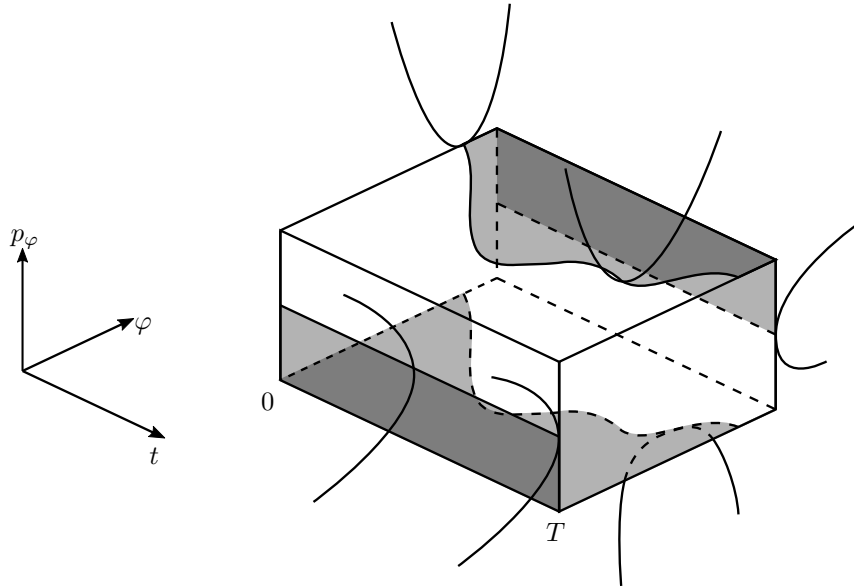


Рис. 2.2: Решения касаются W внешним образом

t как «сжатие» или «растяжение» в окрестности верхней и нижней грани W , и считая его тождественным в остальных точках.

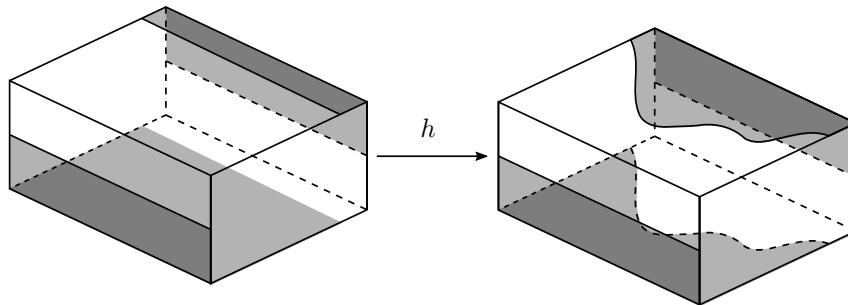


Рис. 2.3: Гомеоморфизм h

Опуская явное определение h , заметим, что в нашем случае $m = \text{id}$. Таким образом, можем выразить $\Lambda(m)$ через эйлерову характеристику W_0 и W_0^{--}

$$\Lambda(m) - \Lambda(m|_{W_0^{--}}) = \chi(W_0) - \chi(W_0^{--}) = -1,$$

и можно применить теорему ■

2.3 Массивная точка на кривой

Аналогично можно показать, что верно следующее

Утверждение. Пусть дана система, в которой массивная точка движется с вязким трением в поле силы тяжести по подвижной кривой, задаваемой в декартовой системе координат уравнениями $X(s)$, $Y(s)$, где s — натуральный параметр.

Пусть кривая, форма которой задается гладкой функцией, такова, что

$$X'(s)|_{s=0} = 0, X'(s)|_{s=1} = 0, Y'(s)|_{s=0} = 1, Y'(s)|_{s=1} = -1$$

и движется вдоль оси Ox по закону, задаваемому гладкой T -периодической функцией ξ , тогда для любого коэффициента трения $\kappa > 0$ у системы существует T -периодическое решение, для которого всегда выполнено $s(t) \in [0, 1]$.

Доказательство. Поскольку

$$\dot{x} = \dot{\xi} + X'\dot{s},$$

$$\dot{y} = Y'\dot{s},$$

то, учитывая $X'^2 + Y'^2 = 1$, получаем

$$T = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + m\dot{\xi}\dot{s}X',$$

$$V = -mgY.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} + m\dot{\xi}X',$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m\ddot{s} + m\ddot{\xi}X' + m\dot{\xi}\dot{s}X'',$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = m\dot{\xi}\dot{s}X'',$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -mgY'.$$

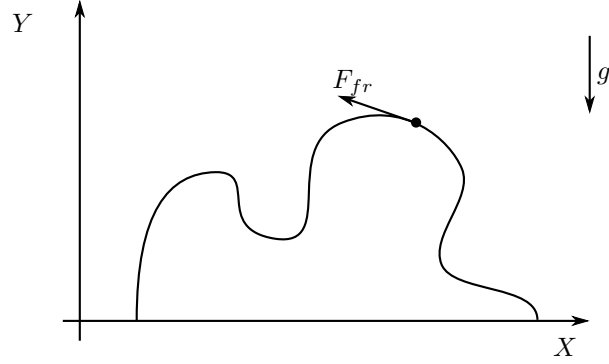


Рис. 2.4: Массивная точка на кривой с трением

Поскольку на точку действует сила трения

$$F_{fr} = -\varkappa X' \dot{s} e_x - \varkappa Y' \dot{s} e_y,$$

и

$$\delta x = X' \delta s,$$

$$\delta y = Y' \delta s,$$

то уравнения движения с учетом силы трения записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{s} &= p, \\ \dot{p} &= -\ddot{\xi} X' - g Y' - \frac{\varkappa}{m} p. \end{aligned}$$

Возьмем $W = [0, T] \times W_0$, где $W_0 = \{(s, p) : s \in [0, 1], p \in [-p', p']\}$.

Здесь величина $p' > 0$ такова, что

$$p' > \sup_{s \in [0, 1], t \in [0, T]} (|\ddot{\xi} X'| + |g Y'|) \frac{m}{\varkappa}.$$

Видно, что при таком значении p' , грани W , на которых $p = p'$ и $p = -p'$, не являются точками выхода (за исключением точек, являющихся также и точками граней $s = 0$ и $s = 1$), поэтому, с учетом ортогональности пересечения кривой горизонтальной прямой, полу-

чаем, что множество W^{--} имеет следующий вид

$$W^{--} = \{(t, s, p) : t \in [0, T], s = 0, p \in [-p', 0]\} \cup \\ \cup \{(t, s, p) : t \in [0, T], s = 1, p \in [0, p']\},$$

и применимы рассуждения, аналогичные представленным выше для случая маятника ■

2.4 Сферический маятник с трением

Покажем, что аналогичное утверждение о периодическом движении без падений верно и для случая сферического маятника с трением.

В [54] авторами в качестве упражнения предлагалось доказать, что для перевернутого сферического маятника с точкой подвеса, движущейся по плоскости по заданному закону существует движение без падений. В данной части работы рассматривается немного отличная постановка задачи, в которой на маятник действует сила вязкого трения. Показывается, что при сколь угодно малом коэффициенте трения всегда существует решение без падений в случае, если закон движения точки подвеса по плоскости периодический. Более того, показывается, что существует периодическое решение без падений.

Пусть $Oxyz$ — подвижная ортогональная система координат такая, что O совпадает с точкой подвеса маятника, оси Ox и Oy расположены в горизонтальной плоскости и всегда остаются параллельными себе в начальный момент времени; ось Oz вертикальна и направлена противоположно силе тяжести. Через r_{moving} мы обозначим радиус-вектор массивной точки относительно $Oxyz$. Пусть x , y и z обозначают его компоненты.

Поскольку периодический закон движения точки подвеса в го-

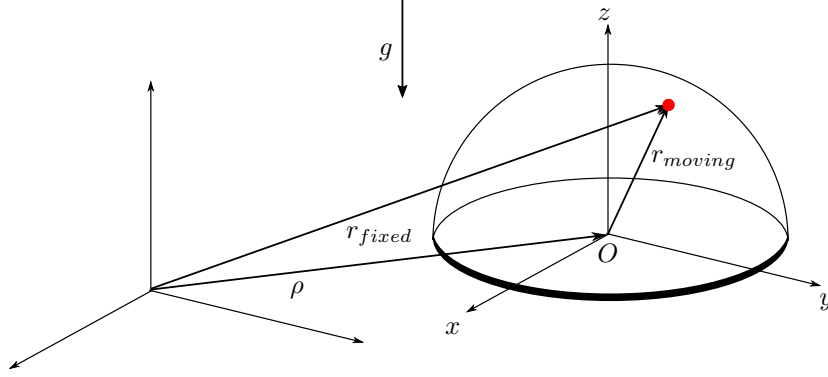


Рис. 2.5: Неподвижная и подвижная системы отсчета

ризонгальной плоскости задан, то радиус-вектор r_{fixed} массивной точки в некоторой неподвижной системе отсчета, оси которой параллельны осям $Oxyz$, получаем

$$r_{fixed} = r_{moving} + \rho,$$

где $\rho = \xi e_x + \eta e_y$, и мы считаем, что ξ, η являются 2π -периодическими гладкими функциями. Очевидно, что аналогичное соотношение верно для скорости и ускорения

$$\dot{r}_{fixed} = \dot{r}_{moving} + \dot{\rho}, \quad \ddot{r}_{fixed} = \ddot{r}_{moving} + \ddot{\rho}.$$

Массивная точка движется под действием силы тяжести, силы вязкого трения, также на нее действует сила реакции связи

$$m\ddot{r}_{fixed} = F_{grav} + F_{friction} + N. \quad (2.4.1)$$

Здесь N — сила реакции связи параллельная радиус-вектору r_{moving} .

$$N = |N| \frac{r_{moving}}{|r_{moving}|} = |N| e_n.$$

Сила вязкого трения выражается обычным образом через величину относительной скорости

$$F_{friction} = -\gamma(\dot{r}_{fixed} - \dot{\rho}) = -\gamma\dot{r}_{moving}, \quad \gamma > 0. \quad (2.4.2)$$

Можем записать (2.4.1) следующим образом

$$m\ddot{r}_{moving} = |N|e_n - mge_z - m\ddot{\rho} - \gamma\dot{r}_{moving}. \quad (2.4.3)$$

Замечание. Для уравнения (2.4.3) функция, задающая решение $r_{moving}(\cdot, r_0, \dot{r}_0): \mathbb{R} \rightarrow S^2$ определяется начальными условиями r_0 и \dot{r}_0 .

Поскольку функции ξ и η являются 2π -периодическими, то расширенное фазовое пространство нашей системы является многообразием $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times TS^2$. Пусть функция $F: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times TS^2 \rightarrow \mathbb{R}$ определяется следующим уравнением

$$F = \frac{m}{2}(\dot{r}_{moving}, \dot{r}_{moving}). \quad (2.4.4)$$

Рассмотрим подмногообразие расширенного фазового пространства, задаваемое уравнением $F = c$ и покажем, что если $c > 0$ достаточно велико, то вдоль решений, начинающихся на этом подмногообразии, функция F локально убывает. Точнее, верна следующая

Лемма 1 [74]. *Существует $c > 0$ такое, что*

$$\dot{F} \Big|_{F=c} < 0.$$

Доказательство. Из определения функции F и (2.4.1) легко получить, что

$$\begin{aligned} \dot{F} &= m(\ddot{r}_{moving}, \dot{r}_{moving}) = m(\ddot{r}_{fixed} - \ddot{\rho}, \dot{r}_{moving}) \\ &= (F_{grav} + F_{friction} + N, \dot{r}_{moving}) - m(\ddot{\rho}, \dot{r}_{moving}). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (2.4.2) и то, что $|\dot{r}_{moving}| = (2c/m)^{1/2}$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{F} &= (F_{grav}, \dot{r}_{moving}) - \gamma|\dot{r}_{moving}|^2 - m(\ddot{\rho}, \dot{r}_{moving}) \\ &\leq |F_{grav}||\dot{r}_{moving}| - \gamma|\dot{r}_{moving}|^2 + m|\ddot{\rho}||\dot{r}_{moving}| \\ &= (2c/m)^{1/2}|F_{grav}| - 2c\gamma/m + (2cm)^{1/2}|\ddot{\rho}|. \end{aligned}$$

Поскольку $|\ddot{\rho}|$ ограничено, то если $c > 0$ достаточно велико, то получаем, что $\dot{F} < 0$ ■

Теперь покажем, что если маятник расположен горизонтально, а также горизонтальна его скорость, то хотя бы локально массивная точка будет падать, точнее, верна следующая

Лемма 2 [74]. Если решение r_{moving} уравнений (2.4.1) в момент времени t таково, что $(r_{moving}(t), e_z) = z(t) = 0$ и $(\dot{r}_{moving}(t), e_z) = \dot{z}(t) = 0$, тогда $(\ddot{r}_{moving}(t), e_z) = \ddot{z}(t) < 0$.

Доказательство. Когда маятник находится в горизонтальной плоскости и его скорость также находится в горизонтальной плоскости, то верно следующее:

1. сила трения параллельна радиус-вектору \dot{r}_{moving} , поэтому при вышеназванных предположениях сила трения также направлена горизонтально;
2. сила реакции также лежит в плоскости $z = 0$;
3. *Oxyz* движется горизонтально, поэтому $(\dot{\rho}, e_z) = 0$.

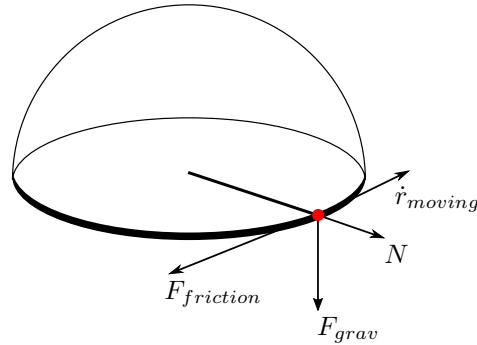


Рис. 2.6: Силы, действующие на маятник в горизонтальном положении.

Таким образом, из (2.4.1) получаем

$$\begin{aligned} (m\ddot{r}_{moving}, e_z) &= (F_{grav} + F_{friction} + N - \ddot{\rho}, e_z) \\ &= -mg - \gamma(\dot{r}_{fixed} - \dot{\rho}, e_z) + (N, e_z) - (\ddot{\rho}, e_z) = -mg < 0. \end{aligned}$$

■ Докажем основное

Утверждение [74]. Рассмотрим сферический математический маятник в поле силы тяжести, на массивную точку которого при движении действует сила вязкого трения с коэффициентом $\gamma > 0$. Пусть $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, задающие положение точки подвеса маятника на горизонтальной плоскости $z = 0$. Тогда для любого $\gamma > 0$ существуют такие начальные условия, что решение, выходящее из них, T -периодично и остается выше горизонтальной плоскости $z = 0$ при всех $t \geq 0$.

Доказательство. Пусть $W \subset \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times TS^2$ — многообразие с границей, задаваемое неравенствами $F \leq c$, $z \geq 0$, где c получено из леммы 1. Можно показать, что W диффеоморфно $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times D^2 \times D^2$, где D^2 — двумерный диск (с границей). Покажем, что W является периодическим сегментом над $[0, 2\pi]$ для системы (2.4.1).

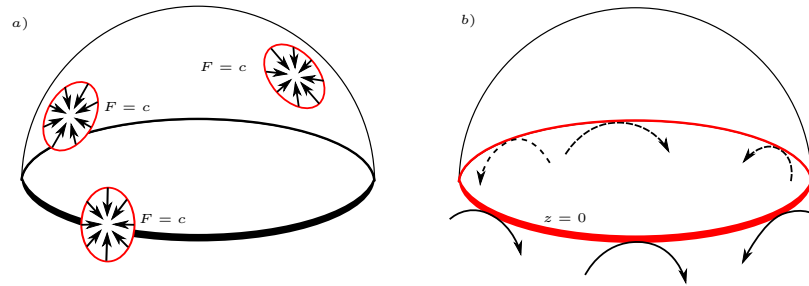


Рис. 2.7: Особенности поведения траекторий в окрестности границы W (отмечена красным): а) траектории могут покидать W только через часть границы, удовлетворяющую условию $z = 0$ б) если для некоторой точки выполнено условие $z = 0$, то решение, начинающееся в ней, покидает W тогда и только тогда, когда $\dot{z} \leq 0$.

Действительно, из леммы 1 получаем, что множество точек существенного выхода целиком лежит на границе, задаваемой уравнением $z = 0$. Более того, из леммы 2 получаем, что те точки, в которых выполнены условия $z = 0$ и $\dot{z} > 0$ не принадлежат множеству существенного выхода. Более того, если для некоторой точки выполнены условия $z = 0$, $\dot{z} \leq 0$, то эта точка принадлежит множеству суще-

ственного выхода. Получаем, что множество точек существенного выхода компактно. Гомеоморфизм h в данном случае задается тождественным отображением, т.е. $[0, 2\pi] \times W_0 = W$.

Окончательно, поскольку множество W_0 гомотопно D^2 и множество W_0^{--} гомотопно S^1 , то, учитывая, что $\mu_W = \text{id}$, получаем

$$\Lambda(\mu_W) = \Lambda(\text{id}_{W_0}) - \Lambda(\text{id}_{W_0^{--}}) = \chi(D^2) - \chi(S^1) = 1 - 0 \neq 0$$

и можно применить теорему ■

2.5 Вспомогательные сведения

Алгебраическое число неподвижных точек

Пусть $f: U \rightarrow X$ непрерывное отображение открытого множества $U \subset X$ в пространство X , допускающее конечную триангуляцию. Пусть множество неподвижных точек отображения компактно. Каждому такому отображению мы будем сопоставлять целое число, называемое алгебраическим числом неподвижных точек.

Как правило, для определения алгебраического числа неподвижных точек в литературе используют язык типичный для алгебраической топологии. Однако в данной работе индекс будет вводиться с использованием конструкций из анализа, следуя [63].

Сначала определим, что такое степень отображения в случае отображения $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

Определение. Будем говорить, что отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ d -компактно, если множество $f^{-1}(0)$ компактно. Здесь $U \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. Отображения называются d -компактно гомотопными, если гомотопия задается d -компактной функцией $f_t: U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. $f_t^{-1}(0)$ компактно в $U \times [0, 1]$.

Для d -компактных отображений верно следующее

Утверждение. [63] Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное d -компактное отображение, тогда

1. f d -компактно гомотопно гладкому отображению g .
2. Отображение g может быть выбрано так, что $g^{-1}(0)$ не содержит особых точек.
3. Любые два гладких отображения, которые d -компактно гомотопны f (как непрерывные отображения), гладко d -компактно

гомотопны между собой.

Определим степень отображения для гладких отображений. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое d -компактное отображение, притом 0 не является его критическим значением, $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Тогда $f^{-1}(0)$ состоит из изолированных точек и компактно, поэтому конечно.

Определение. Степенью отображения f называется число $\deg(f)$

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(\det Df(x))$$

Поскольку для непрерывного d -компактного отображения $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует d -компактно гомотопное ему гладкое отображение g , то можем положить по определению степень отображения f равной степени g , если покажем корректность такого определения, а именно, что для двух гладких отображений g_1 и g_2 , гомотопных f , степени будут совпадать. Более строго

Определение. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — d -компактное непрерывное отображение, $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Пусть $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение d -компактно гомотопное f , и у которого 0 не является критическим значением (такое отображение существует). Тогда положим

$$\deg(f) = \deg(g).$$

Корректность определения обеспечивается следующим утверждением.

Лемма. Пусть $g_1, g_2: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — d -компактно гладко гомотопные гладкие отображения, у которых 0 не является критическим значением. Тогда $\deg(g_1) = \deg(g_2)$.

Теперь, используя понятие степени отображения, определим ин-

декс неподвижных точек отображения следующим образом.

Определение. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Пусть множество $\text{Fix}(f)$ неподвижных точек отображения f компактно. Тогда положим

$$\text{ind}(f) = \text{deg}(F),$$

где $F(x) = f(x) - x$.

Заметим, что отображение F d -компактно тогда и только тогда, когда компактно множество неподвижных точек отображения f .

Следующие утверждения описывают основные свойства индекса.

Утверждение. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Если $V \subset U$ — открытое множество и $i: V \rightarrow U$ — включение, $\text{Fix}(f) \subset V$ — компактное множество, тогда

$$\text{ind} f|_V = \text{ind} f.$$

Утверждение. Пусть $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Пусть множество V представлено в виде конечного объединения открытых множеств $V_i, i = 1, \dots, r$, множества $\text{Fix}(f|_{V_i})$ компактны и $\text{Fix}(f|_{V_i}) \cap \text{Fix}(f|_{V_j}) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Тогда

$$\text{Fix}(f) = \bigcup_i \text{Fix}(f|_{V_i}) \quad \text{и} \quad \text{ind}(f) = \sum_i \text{ind}(f|_{V_i}).$$

Утверждение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^k$ — открытые множества, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k, g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывные отображения, тогда отображения

$$gf: f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad fg: g^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

имеют гомеоморфные множества неподвижных точек. Более того, если эти множества компактны, то $\text{ind}(fg) = \text{ind}(gf)$.

Утверждение. Пусть $f_t: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(0 \leq t \leq 1)$ — такая деформация, что

$$K = \{x \in V : f_t(x) = x \text{ при некотором } t\}$$

компактно, то $\text{ind}f_0 = \text{ind}f_1$.

Определим индекс для более широкого класса отображений.

Определение. Метрическое пространство X называется евклидовым окрестностным ретрактом (ENR), если X является ретрактом открытого подмножества евклидова пространства.

Замечание. Напомним, что топологическое пространство X называется ретрактом топологического пространства Y , если существуют непрерывные отображения $s: X \rightarrow Y$ и $r: Y \rightarrow X$ такие, что $rs = \text{id}_X$.

Замечание. Любое пространство, допускающее конечную триангуляцию, является ENR.

Пусть X — ENR, $U \subset X$ — открытое множество, $f: U \rightarrow X$ — непрерывное отображение и $\text{Fix}(f)$ — компактное множество. Пусть фиксировано открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывные отображения $r: V \rightarrow X$, $s: X \rightarrow V$, $rs = \text{id}_X$. Рассмотрим отображение $sfr|_U: r^{-1}(U) \rightarrow V$, задаваемое равенством $sfr|_U(x) = sfr(x)$.

Утверждение. Множества неподвижных точек $\text{Fix}(sfr|_U)$ и $\text{Fix}(f)$ гомеоморфны.

Это утверждение является мотивировкой для следующего определения индекса для отображений в ENR.

Определение. Пусть X — ENR, $U \subset X$ — открытое множество, $f: U \rightarrow X$ — непрерывное отображение и $\text{Fix}(f)$ — компактное множество. Пусть задано открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывные

отображения $r: V \rightarrow X$, $s: X \rightarrow V$, $rs = \text{id}_X$. Тогда положим

$$\text{ind}(f) = \text{ind}(sfr|_V).$$

Корректность данного определения доказывает следующее

Утверждение. Пусть X — ENR, $V \subset X$ — открытое множество и $f: V \rightarrow X$ — непрерывное отображение с компактным множеством неподвижных точек. Пусть $U_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$ — открытые множества и $U_1 \xrightarrow{r_1} X \xrightarrow{s_1} U_1$, $U_2 \xrightarrow{r_2} X \xrightarrow{s_2} U_2$ — отображения, удовлетворяющие свойствам $r_i s_i = \text{id}_X$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\text{ind}(s_1 f r_1|_V, r_1^{-1}) = \text{ind}(s_2 f r_2|_V, r_2^{-1}).$$

Отображения, определенные в ENR, обладают свойствами, полностью аналогичными свойствам отображений в \mathbb{R}^n .

Утверждение. Пусть X — ENR, $f: U \rightarrow X$ — непрерывное отображение, $U \subset X$ — открытое множество. Если $V \subset U$ — открытое множество и $i: V \rightarrow U$ — включение, $\text{Fix}(f) \subset V$ — компактное множество, тогда

$$\text{ind} f|_V = \text{ind} f.$$

Утверждение. Пусть X — ENR, $f: V \rightarrow X$ — непрерывное отображение, $V \subset X$ — открытое множество. Пусть множество V представлено в виде конечного объединения открытых множеств V_i , $i = 1, \dots, r$, множества $\text{Fix}(f|_{V_i})$ компактны и $\text{Fix}(f|_{V_i}) \cap \text{Fix}(f|_{V_j}) = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда

$$\text{Fix}(f) = \bigcup_i \text{Fix}(f|_{V_i}) \quad \text{и} \quad \text{ind}(f) = \sum_i \text{ind}(f|_{V_i}).$$

Утверждение. Пусть X, Y — ENR, $U \subset X$, $V \subset Y$ — открытые множества, $f: U \rightarrow Y$, $g: V \rightarrow X$ — непрерывные отображения,

тогда отображения

$$gf: f^{-1}(V) \rightarrow X, \quad fg: g^{-1}(U) \rightarrow Y$$

имеют гомеоморфные множества неподвижных точек. Более того, если эти множества компактны, то $\text{ind}(fg) = \text{ind}(gf)$.

Утверждение. Пусть X — ENR, $f_t: V \rightarrow X$, $(0 \leq t \leq 1)$ — такая деформация, что

$$K = \{x \in V : f_t(x) = x \text{ при некотором } t\}$$

компактно, то $\text{ind} f_0 = \text{ind} f_1$.

Сингулярные и симплициальные гомологии

Приведем некоторые определения, относящиеся к теории гомологий. Определяемые в данном разделе понятия являются широко используемыми, поэтому за дополнительной информацией можно обращаться к любому стандартному курсу алгебраической топологии, например, [60], [71], [38] и [39] и др.

Определение. n -мерным симплексом называется подмножество пространства \mathbb{R}^m ($m \geq n$), являющееся выпуклой оболочкой $n + 1$ точек, которые не лежат в одной $(n - 1)$ -мерной плоскости.

Определение. Симплициальным комплексом K называется набор симплексов в \mathbb{R}^n , удовлетворяющий следующим условиям:

1. Любая грань симплекса из K принадлежит K ;
2. Пересечение любых двух симплексов из K либо пусто, либо является гранью каждого из них.

Замечание. Выше под гранью подразумевается грань любой размерности.

Замечание. Множество точек \mathbb{R}^n , принадлежащих симплексам комплекса K , будем обозначать $|K|$.

Замечание. Будем считать, что симплексы комплекса K ориентированы. Симплекс будем обозначать $[s_0, s_1, \dots, s_n]$. Будем говорить, что симплексы $[s_0, s_1, \dots, s_n]$ и $[s_{\sigma(0)}, s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}]$ ориентированы одинаково, если $\text{sgn}\sigma = 1$.

Определение. Определим границу симплекса следующим образом

$$\partial[s_0, s_1, \dots, s_n] = \sum (-1)^i [s_0, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_n],$$

где $[s_0, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_n] = [s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n]$.

Выполнено следующее

Утверждение Для любого симплекса Δ имеем $\partial\partial\Delta = 0$.

Будем рассматривать конечные линейные комбинации симплексов вида $\sum a_i \Delta_i^k$, где a_i является элементом некоторой абелевой группы G , Δ_i^k — симплекс размерности k . Выражение $\sum a_i \Delta_i^k$ называется k -мерной цепью. Абелеву группу k -мерных цепей будем обозначать $C_k(K; G)$ или просто C_k .

Отображение ∂ можно по линейности определить для цепей.

Определение. Цепь $c \in C_k$ называют циклом, если $\partial_k c = 0$. Группу k -мерных циклов будем обозначать Z_k .

Определение. Цепь $c \in C_k$ называют границей, если $c \in \text{Im}c_{k+1}$. Группу k -мерных границ обозначим B_k .

Поскольку $B_k \subset Z_k$, то корректно следующее

Определение. Группой k -мерных симплициальных гомологий комплекса K назовем $H_k(K) = Z_k/B_k$.

Определим относительные гомологии. Пусть K — симплициальный комплекс, $L \subset K$ — подкомплекс. Очевидно, что $C_k(L) \subset C_k(K)$, поэтому можно рассмотреть группу $C_k(K, L) =$

$C_k(K)/C_k(L)$.

Определение. Элементы $C_k(K, L)$ назовем относительными k -мерными цепями.

Граничный гомоморфизм естественным образом определен на относительных, цепях, т.е. $\partial_k: C_k(K, L) \rightarrow C_{k-1}(K, L)$, причем для него также $\partial\partial = 0$, поэтому корректно следующее

Определение. Пусть $Z_k(K, L) = \text{Ker}\partial_k$ и $B_k(K, L) = \text{Im}\partial_{k+1}$, тогда группой k -мерных относительных гомологий для пары K и L называется $H_k(K, L) = Z_k/B_k$.

С вычислительной точки зрения симплициальные гомологии удобны, но с точки зрения построения теоретических конструкций более удобными являются так называемые сингулярные гомологии. В частности, для сингулярных гомологий очевидно, что они совпадают для гомеоморфных пространств. Притом можно показать, что для симплициальных комплексов они совпадают с симплициальными гомологиями.

Определение. Сингулярным k -мерным симплексом называется непрерывное отображение $f: \Delta^k \rightarrow X$ симплекса $[0, 1, \dots, k]$ в топологическое пространство X .

Определение. Группу $C_k(X; G)$ составляют конечные суммы $\sum a_i f_i$, где $a_i \in G$, G — абелева группа.

Определение. Отображение $\varepsilon_j = \varepsilon_j^k: \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$, $j = 0, 1, \dots, k$ зададим следующим образом: $\varepsilon_j^k[i] = [i]$ при $i < j$ и $\varepsilon_j^k[i] = [i + 1]$ при $i \geq j$. На весь симплекс отображение продолжается линейно.

Определение. Для сингулярного симплекса $f: \Delta^k \rightarrow X$ положим $\partial f = \sum_{j=0}^k (-1)^j f \varepsilon_j^k \in C_{k-1}(X; G)$. Для нульмерного симплекса f считаем по определению $\partial f = 0$.

Утверждение. Справедливо равенство $\partial\partial = 0$.

Определение. Пусть $Z_k = \text{Ker}\partial_k$, $B_k = \text{Im}\partial_{k+1}$, положим $H_k(X; G) = Z_k/B_k$.

Утверждение. Пусть X, Y — топологические пространства, $\varphi: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Тогда φ индуцирует гомоморфизм $\varphi_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$.

Утверждение. Гомотопные отображения индуцируют одинаковые отображения в гомологиях.

Утверждение. Для симплициальных комплексов сингулярные гомологии совпадают с симплициальными.

Определение. Будем говорить, что пространство X триангулируемо, если существует гомеоморфизм $\tau: |K| \rightarrow X$, где K — симплициальный комплекс.

Число Лефшеца и теорема Лефшеца-Хопфа

Для непрерывных отображений $f: X \rightarrow X$ определим число, называемое числом Лефшеца отображения. При этом будем считать, что X — пространство, допускающее конечную триангуляцию.

Покажем, что для конечного симплициального комплекса K группы гомологий с рациональными коэффициентами устроены достаточно просто, а именно, они изоморфны $\mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}$, т.е. представляют собой векторное пространство над \mathbb{Q} . Это позволит определить след для эндоморфизма пространства $H(K; \mathbb{Q})$ как след соответствующего линейного отображения, задаваемого в фиксированном базисе матрицей коэффициентов.

Определение. Тензорным произведением $A \otimes B$ двух абелевых

групп называется абелева группа с образующими $a \otimes b$, $a \in A$, $b \in B$ с соотношениями $(a+a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$ и $a \otimes (b+b') = a \otimes b + a \otimes b'$. Используя тензорное произведение, группу цепей $C_n(K; G)$ с коэффициентами из абелевой группы G можно записать как $C_n(K) \otimes G$. Верно [39] следующее

Утверждение. Если $G = \mathbb{Q}$, то $H_k(K; G) \cong H_k(K; \mathbb{Z}) \otimes G$.

Поскольку из структурной теоремы для конечно порожденных абелевых групп имеем

$$H_k(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$$

, то

$$H_k(K; \mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{Z}_{n_1} \otimes \mathbb{Q}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}_{n_k} \otimes \mathbb{Q}).$$

Поскольку $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_k = 0$, то получаем окончательно

$$H_k(K; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}.$$

Определение. Пусть X — пространство, допускающее конечную триангуляцию $\tau: |K| \rightarrow X$, $f: X \rightarrow X$ — непрерывное отображение, тогда число Лефшеца $\Lambda(f)$ отображения f называется след матрицы отображения $f_*: H_*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Q})$.

Следующее утверждение [63] позволяет не использовать рациональные гомологии в определении числа Лефшеца, а ограничиться гомологиями с целыми коэффициентами, пренебрегая кручением.

Утверждение. Пусть $f: X \rightarrow X$ непрерывное отображение пространства, допускающего конечную триангуляцию, тогда матрица отображения $f_*: H_*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Q})$ имеет только целые коэффициенты и совпадает с матрицей эндоморфизма $H_*(X; \mathbb{Z})/\text{Tor}(H_*(X; \mathbb{Z}))$, порожденного f .

Замечание. Здесь через $H_*(X; G)$ обозначена конечная прямая сумма $H_*(X; G) = \bigoplus_{i=0}^d H_i(X; G)$.

Теорема. Пусть $f: X \rightarrow X$ — непрерывное отображение пространства X , допускающего конечную триангуляцию. Тогда $\Lambda(f) = \text{ind}(f)$.

Замечание. Теорема верна и в более общей формулировке для случая отображения конечного CW -комплекса.

Определение. Пространство называется клеткой размерности m , если оно гомеоморфно замкнутому шару B^n . Клетка называется открытой, если она гомеоморфна $\text{Int}B^b$.

Определение. CW -комплексом называется топологическое пространство X вместе с набором непересекающихся открытых клеток e_n , объединение которых есть все X и

1. X — хаусдорфово пространство.
2. Для каждой открытой клетки e_α размерности m существует непрерывное отображение $f_\alpha: B^m \rightarrow X$ такое, что оно переводит $\text{Int}B^m$ гомеоморфно в e_α и отображает границу $\text{Vd}B^m$ в конечное объединение открытых клеток, каждая из которых имеет размерность меньше, чем m .
3. Множество A замкнуто в X , если $A \cap \bar{e}_\alpha$ замкнуто в \bar{e}_α для каждого α .

С вычислительной точки зрения удобно находить число Лефшеца, опираясь на следующее утверждение [39]

Утверждение. Пусть K — конечный симплициальный комплекс, $b_k = \dim H_k(K; F)$, где F — аддитивная группа некоторого поля,

тогда

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + \dots + (-1)^n b_n.$$

Из чего следует, что в случае, когда $f_* = \text{id}_{H_*(K;F)}$, число Лефшеца совпадает с эйлеровой характеристикой.

Доказательство теоремы о существовании неподвижной точки

Теорема [49]. Пусть W — периодический сегмент над $[a, b]$. Тогда множество

$$U = \{x_0 \in W_a : x(t - a, a, x_0) \in W_t \setminus W_t^{--} \text{ для всех } t \in [a, b]\}$$

открыто в W_a и множество неподвижных точек отображения $x(b - a, a, \cdot)|_U : U \rightarrow W_a$ компактно. Более того, если W и W^{--} являются абсолютными окрестностными ретрактами, то

$$\text{ind}(x(b - a, a, \cdot)|_U) = \Lambda(m) - \Lambda(m|_{W_a^{--}}).$$

Здесь через $\Lambda(m)$ обозначено число Лефшеца отображения m , а через $\Lambda(m|_{W_a^{--}})$ число Лефшеца его ограничения на W_a^{--} . В частности, если $\Lambda(m) - \Lambda(m|_{W_a^{--}}) \neq 0$, тогда у отображения $x(b - a, a, \cdot)|_U$ имеется хотя бы одна неподвижная точка в W_a .

Доказательство. Пусть $s \in [a, b]$, определим отображение $m_s : W_s \rightarrow W_a$ следующим образом

$$m_s(x) = \pi_2 h(b, \pi_2 h^{-1}(s, x)).$$

Поскольку W_a, W_a^{--} допускают конечную триангуляцию, то определены числа Лефшеца $\Lambda(m_a)$ и $\Lambda(m_a|_{W_a^{--}})$.

Рассмотрим семейство гомотопных отображений $H : W_a \times [0, 1] \rightarrow$

$W_a, H_t := H(\cdot, t)$, задаваемое следующим образом

$$H_t(x) = \begin{cases} m_{a+\sigma(a,x)}(\Phi_{(a,\sigma(a,x))}(x)) & \text{если } \sigma(a,x) \leq (1-t)(b-a), \\ m_{a+(1-t)(b-a)}(\Phi_{(a,(1-t)(b-a))}(x)) & \text{если } \sigma(a,x) \geq (1-t)(b-a). \end{cases}$$

Видно, что $H_1 = m_a$ и, поскольку число Лефшеца одинаково для гомотопных отображений, то

$$\Lambda(m_a) = \Lambda(H_1) = \Lambda(H_0).$$

Пусть

$$U = \{x \in W_a : \sigma(a,x) = b-a, \Phi_{(a,b-a)}(x) \in W_a \setminus W_a^{--}\},$$

тогда, поскольку $m_b = \text{id}$, то при $x \in W_a$ и $\sigma(a,x) = b-a$ имеем $H_0(x) = \Phi_{(a,b-a)}(x)$, поэтому

$$H_0|_U = \Phi_{(a,b-a)}|_U.$$

Из непрерывной зависимости от начальных данных следует, что множество U открыто в W_a .

Если $x \in W_a \setminus W_a^{--}$ и $H_0(x) = x$, то $\sigma(a,x) = b-a$, поэтому тогда $x \in U$. Из этого следует, что можем записать

$$\text{Fix}(\Phi_{(a,b-a)}|_U) = \text{Fix}(H_0|_U) = \text{Fix}(H_0) \cap U = \text{Fix}(H_0|_{W_a \setminus W_a^{--}}) \cup \text{Fix}(H_0|_{W_a^{--}}) \cap U.$$

Поскольку $U \cap W_a^{--} = \emptyset$ и, в частности, $\text{Fix}(H_0|_{W_a^{--}}) \cap U = \emptyset$, то

$$\begin{aligned} \text{Fix}(\Phi_{(a,b-a)}|_U) &= \text{Fix}(H_0|_{W_a \setminus W_a^{--}}) \cap U = \text{Fix}(H_0|_{W_a \setminus W_a^{--}}) \cap \\ &\cap \{x \in W_a : \sigma(a,x) = b-a, \Phi_{(a,b-a)}(x) \in W_a \setminus W_a^{--}\}. \end{aligned}$$

Окончательно можем записать

$$\text{Fix}(\Phi_{(a,b-a)}|_U) = \text{Fix}(H_0) \cap \{x \in W_a : \sigma(a,x) = b-a\}.$$

Из чего также следует, что $\text{Fix}(\Phi_{(a,b-a)}|_U)$ компактно (поскольку дополнения к обоим множествам в пересечении открыты в W_a). Пусть

$V = \{x \in W_a : \sigma(a, x) < b - a\}$. Множество V открыто в W_a , $W_a^{--} \subset V$ и $H_0(V) = W_a^{--}$.

Получаем

$$\text{Fix}(H_0) = \text{Fix}(H_0|_U) \cup \text{Fix}(H_0|_V) = \text{Fix}(\Phi_{(a,b-a)}|_U) \cup \text{Fix}(m_a|_{W_a^{--}}).$$

Из теоремы Лефшеца-Хопфа о неподвижной точке и аддитивности индекса следует, что

$$\Lambda(H_0) = \text{ind}(H_0|_U) + \text{ind}(H_0|_V).$$

Обозначим через $i: W_a^{--} \rightarrow W_a$ тождественную функцию, определенную на W_a^{--} . Поскольку выполнено $H_0(V) = W_a^{--}$, то получаем, что $H_0|_V^{-1}(W_a^{--}) = V$ и $i^{-1}(W_a) = W_a^{--}$. Из свойства коммутативности следует, что для отображений $i \circ H_0|_V: V \rightarrow W_a$ и $H_0|_V \circ i: W_a^{--} \rightarrow W_a^{--}$ выполнено равенство

$$\text{ind}(i \circ H_0|_V) = \text{ind}(H_0|_V \circ i).$$

Поскольку $i \circ H_0|_V = H_0|_V$ и $H_0|_V \circ i = H_0|_{W_a^{--}}$, то, используя коммутативность индекса, получаем

$$\text{ind}(H_0|_V) = \text{ind}(H_0|_{W_a^{--}}) = \Lambda(H_0|_{W_a^{--}}) = \Lambda(m_a|_{W_a^{--}}).$$

Окончательно получаем

$$\text{ind}(\Phi_{(a,b-a)}|_U) = \Lambda(m_a) - \Lambda(m_a|_{W_a^{--}})$$

■

Глава 3

Системы с затухающими со временем возмущениями

Теория КАМ позволяет получать качественные выводы о динамике близких к интегрируемым гамильтоновым систем, если возмущение гамильтониана автономно или периодически по времени [1]. При определенных предположениях о невозмущенной системе большинство нерезонансных инвариантных торов не разрушится, а только слегка деформируется. Однако если размерность фазового пространства системы больше 4, то значение переменных действие в возмущенной системе может изменяться на величину порядка единицы при сколь угодно малом возмущении [2]. В главе рассматриваются системы с неавтономным и непериодическим по времени возмущением. В случае, когда величина возмущения мала и достаточно быстро стремится к нулю с течением времени, с помощью несложных оценок можно показать, что вдоль возмущенных решений значения функций первых интегралов невозмущенной системы изменяются на малую величину. В частности, если невозмущенная система интегрируема и невозмущенное движение происходит по компактному многообразию, то возмущенное решение, начавшееся на инвариантном торе, все время будет оставаться близким к этому тору. Приводятся

примеры механических систем, иллюстрирующие общие утверждения. Рассматривается шар на горизонтальной шероховатой плоскости, которая вращается с некоторой угловой скоростью. Изучается движение шара при наличии малого возмущения. В первом случае считаем, что угловая скорость движения плоскости постоянна и на центр масс шара действует малая заданная внешняя сила. Во втором случае рассматривается шар, который движется по вращающейся шероховатой плоскости, притом угловая скорость вращения плоскости почти постоянна. В третьем случае считаем, что в центре масс шара расположен ротор, вращающийся с заданной угловой скоростью вокруг оси, фиксированной «в теле», и задающий возмущение в системе. В первом случае находится достаточное условие на компоненты возмущающей силы, при котором траектория невозмущенного движения шара близка к траектории возмущенного движения, выходящего из тех же начальных условий. Во втором случае находится аналогичное условие на возмущение угловой скорости вращения плоскости. В третьем случае приводится аналогичное достаточное условие на закон движения ротора. Для случая, когда возмущение не является малым, находятся достаточные условия, при которых шар в своем движении по плоскости не уходит на бесконечность, а остается в ограниченной области.

3.1 Шар в поле внешней силы, зависящей только от времени

Вспомогательные леммы

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству вспомогательных утверждений, которые будут использоваться при рассмот-

рении примеров из механики, введем некоторые определения.

Определение. Гамильтоновой системой будем называть [12] тройку (M, ω^2, H) , где M — гладкое многообразие, $\dim(M) = 2n$, ω^2 — замкнутая невырожденная 2-форма на M ,

$$H = H(x, t) : M \times \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$$

— гладкая функция.

Через $\mathbb{R}^{\geq 0}$ мы обозначаем множество всех неотрицательных действительных чисел.

Динамика в системе (M, ω^2, H) задается уравнением

$$\dot{x} = \{x, H\},$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона двух функций на M , соответствующая 2-форме ω^2 . При вычислении скобки Пуассона переменная t , определяющая зависимость гамильтониана от времени, считается параметром. В координатах Дарбу $(p, q) = (p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$, в которых $\omega^2 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, скобка Пуассона двух функций $f(p, q)$ и $g(p, q, t)$ вычисляется по формуле

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(p, q)}{\partial q_i} \frac{\partial g(p, q, t)}{\partial p_i} - \frac{\partial f(p, q)}{\partial p_i} \frac{\partial g(p, q, t)}{\partial q_i} \right).$$

Определение. Пусть дана система (M, ω^2, H_0) , где H_0 не зависит от t , $H_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$. Такую систему мы будем называть невозмущенной. Соответствующую ей систему $(M, \omega^2, H_0 + \varepsilon H_1)$, где $H_1 : M \times \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, мы будем называть возмущенной.

Мы будем предполагать, что для всех начальных условий $x(0) = x_0 \in M$ при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ для системы $\dot{x} = \{x, H_0 + \varepsilon H_1\}$ существует решение $x(t) = x(t, x_0, \varepsilon)$, определенное для всех $t \geq 0$. Если $\varepsilon \neq 0$, то будем говорить о возмущенном

решении или о решении возмущенной системы. Соответственно, если $\varepsilon = 0$, то решение будем называть невозмущенным.

Определение. Пусть дана невозмущенная система, у которой существует k произвольных первых интегралов

$$F_1, F_2, \dots, F_k : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Через M_f будем обозначать множество их уровня

$$M_f = \{x \in M : F_i(x) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, k\},$$

здесь $f = (f_1, f_2, \dots, f_k) \in \mathbb{R}^k$.

Определение. Пусть $\delta > 0$, тогда через $U(\delta, M_f)$ будем обозначать подмножество фазового пространства

$$U(\delta, M_f) = \{x \in M : |F_i(x) - f_i| \leq \delta, \quad i = 1, 2, \dots, k\}.$$

F_1, F_2, \dots, F_k — первые интегралы невозмущенной системы.

Лемма 1 [33]. Пусть даны $(f_1, f_2, \dots, f_k) = f \in \mathbb{R}^k$ и возмущенная гамильтонова система, для которой выполнены следующие условия:

1. Соответствующая ей невозмущенная система имеет k первых интегралов $F_1, F_2, \dots, F_k : M \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Существует $\delta_0 > 0$ и функции $\mathcal{F}_i : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$ такие, что

(a) при всех $t \geq 0$

$$\mathcal{F}_i(t) \geq \sup_{x \in U(\delta_0, M_f)} |\{F_i, H_1\}(x, t)| \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

(b) конечны несобственные интегралы

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_i(\tau) d\tau < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.1.1)$$

Тогда для любого $\delta > 0$ и любой точки $x_0 \in M_f$ существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta, x_0) > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение возмущенной системы удовлетворяет условию

$$|F_i(x(t, x_0, \varepsilon)) - f_i| < \delta \quad \text{при всех } t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство. Доказательство будем вести от противного. Введем в рассмотрение величину

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \min\{\delta, \delta_0\}.$$

Предположим, что существует $\delta > 0$ и точка $x_0 \in M_f$ такие, что существует значение $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, момент времени $t_1 > 0$ и $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ такие, что выполнены следующие условия

$$\begin{aligned} |F_i(x(t, x_0, \varepsilon)) - f_i| &\leq \delta_1 < \delta \quad \text{при всех } t \in [0, t_1], \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ |F_m(x(t_1, x_0, \varepsilon)) - f_m| &= \delta_1 < \delta. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Здесь

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} \delta_1 \cdot \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_m(\tau) d\tau \right)^{-1}, & \text{если } \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_m(t) dt \neq 0, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Из условия (3.1.1) следует $\varepsilon_0 > 0$. Покажем, что наше предположение ведет к противоречию. Вычислим производную первого интеграла F_m в силу системы. Так как $\{F_m, H_0\} = 0$, то

$$\frac{d}{dt} F_m = \{F_m, H_0 + \varepsilon H_1\} = \varepsilon \{F_m, H_1\}.$$

Для любого решения $x(t, x_0, \varepsilon)$ верно следующее

$$\begin{aligned} F_m(x(t, x_0, \varepsilon)) &= F_m(x(0, x_0, \varepsilon)) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} F_m(x(\tau, x_0, \varepsilon)) d\tau = \\ &= F_m(x(0, x_0, \varepsilon)) + \varepsilon \int_0^t \{F_m, H_1\}(x(\tau, x_0, \varepsilon), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |F_m(x(t, x_0, \varepsilon)) - F_m(x(0, x_0, \varepsilon))| &= \left| \varepsilon \int_0^t \{F_m, H_1\}(x(\tau, x_0, \varepsilon), \tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq |\varepsilon| \int_0^t |\{F_m, H_1\}(x(\tau, x_0, \varepsilon), \tau)| d\tau. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

По предположению (3.1.2) выполнено $|F_i(x(t, x_0, \varepsilon)) - f_i| \leq \delta_1$, $i = 1, 2, \dots, k$, при $t \in [0, t_1]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\{F_m, H_1\}(x(t, x_0, \varepsilon), t)| &\leq \sup_{x \in U(\delta_1, M_f)} |\{F_m, H_1\}(x, t)| \leq \\ &\leq \sup_{x \in U(\delta_0, M_f)} |\{F_m, H_1\}(x, t)| \leq \mathcal{F}_m(t) \quad \text{при } t \in [0, t_1]. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Здесь мы использовали неравенство $\delta_1 < \delta_0$.

Используя (3.1.4) и (3.1.5) и то, что $F_m(x(0, x_0, \varepsilon)) = f_m$, получаем

$$\begin{aligned} |F_m(x(t_1, x_0, \varepsilon)) - F_m(x(0, x_0, \varepsilon))| &= |F_m(x(t_1, x_0, \varepsilon)) - f_m| \leq \\ &\leq |\varepsilon| \int_0^{t_1} \mathcal{F}_m(\tau) d\tau \leq |\varepsilon| \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_m(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Из чего для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ заключаем:

1. В случае, если $\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_m(t) dt \neq 0$:

$$\begin{aligned} |F_m(x(t_1, x_0, \varepsilon)) - f_m| &\leq \varepsilon \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_m(\tau) d\tau < \varepsilon_0 \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_m(\tau) d\tau = \\ &= \delta_1 \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_m(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_m(\tau) d\tau = \delta_1. \end{aligned}$$

2. В противном случае сразу получаем, что $|F_m(x(t_1, x_0, \varepsilon)) - f_m| = 0$.

В обоих случаях мы видим, что $|F_m(x(t_1, x_0, \varepsilon)) - f_m| < \delta_1$, что противоречит предположению (3.1.2) ■

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\left(M = \mathbb{R}^2, dp \wedge dq, \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} - \varepsilon \frac{q \sin t}{(t+1)^\alpha} \right),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ — параметр. Система описывает динамику гармонического осциллятора во внешнем поле, притом в каждой точке пространства поле изменяется со временем и характер этого изменения задается параметром α . Инвариантные многообразия невозмущенной системы следующие

$$M_f = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p^2/2 + q^2/2 = f \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}.$$

Из леммы 1 найдем достаточное условие на α , при котором решение, начавшееся на M_f , останется близким к нему, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Легко показать, что это выполнено, если

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^\alpha} dt < \infty,$$

т.е. $\alpha > 1$. С другой стороны, мы можем явно выписать точное решение возмущенной системы

$$q(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + \\ + \varepsilon \frac{1}{2} \left(\sin t \int_0^t \frac{\sin 2\tau}{(\tau + 1)^\alpha} d\tau + \cos t \int_0^t \frac{\cos 2\tau}{(\tau + 1)^\alpha} d\tau - \cos t \int_0^t \frac{d\tau}{(\tau + 1)^\alpha} \right), \\ p(t) = \dot{q}(t),$$

из которого видно, что если $\alpha \leq 1$, то при любом $\varepsilon > 0$ все решения неограничены и, следовательно, покидают окрестность M_f при достаточно больших значениях t ; если $\alpha > 1$, то при достаточно малых значениях ε решения будут оставаться рядом с M_f . Таким образом, можно заключить, что для данного однопараметрического класса систем достаточное условие из леммы 1 совпадает с необходимым.

Лемма 2 [33]. Пусть даны $(f_1, f_2, \dots, f_k) = f \in \mathbb{R}^k$ и рассматривается возмущенная гамильтонова система, для которой выполнены следующие условия:

1. Соответствующая ей невозмущенная система имеет k первых интегралов $F_1, F_2, \dots, F_k : M \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Один из первых интегралов совпадает с функцией Гамильтона невозмущенной системы: $F_1 = H_0$.
3. Существует $\delta_0 > 0$ и функции $\mathcal{G}, \mathcal{F}_i : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 2, 3, \dots, k$ такие, что

(а) при всех $t \geq 0$

$$\mathcal{G}(t) \geq \sup_{x \in U(\delta_0, M_f)} \left| \frac{\partial H_1}{\partial t}(x, t) \right|, \\ \mathcal{F}_i(t) \geq \sup_{x \in U(\delta_0, M_f)} |\{F_i, H_1\}(x, t)| \quad i = 2, 3, \dots, k,$$

(b) конечны несобственные интегралы

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{G}(\tau) d\tau < \infty, \quad \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_i(\tau) d\tau < \infty, \quad i = 2, 3, \dots, k.$$

4. Функция H_1 такова, что $\sup_{x \in U(\delta_0, M_f), t \geq 0} |H_1(x, t)| < \infty$.

Тогда для любого $\delta > 0$ и любой точки $x_0 \in M_f$ существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta, x_0) > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение возмущенной системы удовлетворяет условию

$$|F_i(x(t, x_0, \varepsilon)) - f_i| < \delta \quad \text{при всех } t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство. Положим

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \min\{\delta, \delta_0\}.$$

Аналогично доказательству леммы 1 предположим, что существует $\delta > 0$ и точка $x_0 \in M_f$ такие, что существует $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $t_1 > 0$ и $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ такие, что выполнены два условия

$$\begin{aligned} |F_i(x(t, x_0, \varepsilon)) - f_i| &\leq \delta_1 \quad \text{при } t \in [0, t_1], \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ |F_m(x(t_1, x_0, \varepsilon)) - f_m| &= \delta_1. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Здесь $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, где

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \frac{\delta_1}{3} \left(|H_1(x_0, 0)| + \int_0^{+\infty} \mathcal{G}(\tau) d\tau \right)^{-1}, & \text{если } |H_1(x_0, 0)| + \int_0^{+\infty} \mathcal{G}(\tau) d\tau \neq 0, \\ 1, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} \frac{\delta_1}{3} \cdot \left(\sup_{x \in U(\delta_0, M_f), t \geq 0} |H_1(x, t)| \right)^{-1}, & \text{если } \sup_{x \in U(\delta_0, M_f), t \geq 0} |H_1(x, t)| \neq 0. \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} \delta_1 \cdot \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_m(\tau) d\tau \right)^{-1}, & \text{если } m \neq 1 \text{ и } \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_m(t) dt \neq 0, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Из условий утверждения следует, что $\varepsilon_0 > 0$. Покажем, что наше предположение (3.1.6) ведет к противоречию. Если $m \neq 1$, тогда рассуждения, приводящие к противоречию, совпадают с таковыми в лемме 1. Поэтому считаем, что $m = 1$.

Вычислим производную энергии возмущенной системы: $\frac{d}{dt}(H_0 + \varepsilon H_1) = \frac{\partial}{\partial t}(H_0 + \varepsilon H_1) = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial t}$. Для любого решения $x(t, x_0, \varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} H_0(x(t, x_0, \varepsilon)) + \varepsilon H_1(x(t, x_0, \varepsilon), t) &= H_0(x(0, x_0, \varepsilon)) + \varepsilon H_1(x(0, x_0, \varepsilon), 0) + \\ &+ \varepsilon \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial t}(x(\tau, x_0, \varepsilon), \tau) d\tau, \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} &|H_0(x(t, x_0, \varepsilon)) + \varepsilon H_1(x(t, x_0, \varepsilon), t) - H_0(x(0, x_0, \varepsilon))| = \\ &= \left| \varepsilon H_1(x(0, x_0, \varepsilon), 0) + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial t}(x(\tau, x_0, \varepsilon), \tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \varepsilon |H_1(x(0, x_0, \varepsilon), 0)| + \varepsilon \left| \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial t}(x(\tau, x_0, \varepsilon), \tau) d\tau \right| \leq \quad (3.1.7) \\ &\leq \varepsilon |H_1(x(0, x_0, \varepsilon), 0)| + \varepsilon \int_0^t \left| \frac{\partial H_1}{\partial t}(x(\tau, x_0, \varepsilon), \tau) \right| d\tau. \end{aligned}$$

По предположению (3.1.6), $|F_i(x(t, x_0, \varepsilon)) - f_i| \leq \delta_1$, $t \in [0, t_1]$, $i = 1, 2, \dots, k$, поэтому при $t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial H_1}{\partial t}(x(t, x_0, \varepsilon), t) \right| &\leq \sup_{x \in U(\delta_1, M_f)} \left| \frac{\partial H_1}{\partial t}(x(t, x_0, \varepsilon), t) \right| \leq \\ &\leq \sup_{x \in U(\delta_0, M_f)} \left| \frac{\partial H_1}{\partial t}(x(t, x_0, \varepsilon), t) \right| \leq \mathcal{G}(t). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Здесь мы пользуемся тем, что $\delta_1 < \delta_0$. Из (3.1.7) и (3.1.8) и того, что $\mathcal{G}(t) \geq 0$ и $x(0, x_0, \varepsilon) = x_0$ получаем

$$|H_0(x(t_1, x_0, \varepsilon)) + \varepsilon H_1(x(t_1, x_0, \varepsilon), t_1) - f_1| \leq \varepsilon |H_1(x_0, 0)| + \varepsilon \int_0^{+\infty} \mathcal{G}(\tau) d\tau.$$

Так как $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, то для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеем

$$|H_0(x(t_1, x_0, \varepsilon)) + \varepsilon H_1(x(t_1, x_0, \varepsilon), t_1) - f_1| < \frac{\delta_1}{3}. \quad (3.1.9)$$

Из того, что $\delta_1 < \delta_0$ следует

$$|H_1(x(t_1, x_0, \varepsilon), t_1)| \leq \sup_{x \in U(\delta_1, M_f), t \geq 0} |H_1(x, t)| \leq \sup_{x \in U(\delta_0, M_f), t \geq 0} |H_1(x, t)|, \quad (3.1.10)$$

поэтому из (3.1.9) и (3.1.10) и того, что $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_2$ для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ получаем

$$|H_0(x(t_1, x_0, \varepsilon)) - f_1| < \frac{\delta_1}{3} + \varepsilon |H_1(x(t_1, x_0, \varepsilon), t_1)| < \frac{2}{3}\delta_1, \text{ что противоречит предположению (3.1.6) } \blacksquare.$$

В случае, когда рассматриваемая система является интегрируемой и гамильтониан линеен по переменной действия, аналогично леммам 1 и 2 можно показать, что при наличии малого нелинейного в общем случае возмущения, которое достаточно быстро убывает со временем, возмущенное решение будет вечно оставаться близким к соответствующему невозмущенному решению. Точнее, верна следующая

Лемма 3. Пусть дана интегрируемая по Лиувиллю невозмущенная система и соответствующая ей возмущенная гамильтонова система, гамильтониан которой в переменных действие-угол записывается в виде

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 = \sum_{i=1}^n c_i I_i + \varepsilon H_1(I, \varphi),$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть $I_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_0 \in \mathbb{T}^n$. Пусть существует значение $\delta_0 > 0$ и существуют функции $\mathcal{F}_i : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_i : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ такие, что

1.

$$\mathcal{F}_i(t) \geq \sup_{\substack{\|I-I_0\| < \delta_0 \\ \varphi \in \mathbb{T}^n}} |\{I_i, H_1\}(I, \varphi, t)|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathcal{K}_i(t) \geq \sup_{\substack{\|I-I_0\| < \delta_0 \\ \varphi \in \mathbb{T}^n}} |\{\varphi_i, H_1\}(I, \varphi, t)|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2.

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_i(\tau) d\tau < \infty, \quad \int_0^{+\infty} \mathcal{K}_i(\tau) d\tau < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\delta, I_0, \varphi_0) > 0$, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и любом начальном условии

$$(J_0, \psi_0) \in O_\varepsilon(I_0, \varphi_0)$$

будут верны неравенства

$$|I_i(t, J_0, \psi_0, \varepsilon) - I_i(t, I_0, \varphi_0, 0)| < \delta \quad \text{при всех } t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$|\varphi_i(t, J_0, \psi_0, \varepsilon) - \varphi_i(t, I_0, \varphi_0, 0)| < \delta \quad \text{при всех } t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

т.е. возмущенное решение будет все время оставаться близким к невозмущенному решению.

Лемма 4 [34]. Пусть дана возмущенная система $(M, \omega^2, H_0 + H_1)$, такая, что выполнены следующие условия:

1. Соответствующая ей невозмущенная система имеет k первых интегралов $F_1, F_2, \dots, F_k : M \rightarrow \mathbb{R}$,

2. Существуют функции

$$\delta(x) : M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad \Phi_i(t, \delta, x) : \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0} \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

и подмножество $N \subset M$, удовлетворяющие для любого $x \in N$ при всех $i = 1, 2, \dots, k$ двум условиям

$$(a) \quad \Phi_i(t, \delta(x), x) \geq \sup_{y \in U(\delta(x), M_{F(x)})} |\{F_i, H_1\}(y, t)|, \quad t \in \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$(b) \quad \int_0^{\infty} \Phi_i(t, \delta(x), x) dt < \delta(x).$$

Тогда вдоль любого решения возмущенной системы $x(t, x_0)$ с начальным условием $x_0 \in N$ значения функций F_1, F_2, \dots, F_k изменятся по сравнению с начальным моментом времени менее, чем на $\delta(x_0)$.

Лемма 5 [34]. Пусть дана возмущенная система $(M, \omega^2, H_0 + H_1)$ такая, что выполнены следующие условия:

1. Соответствующая ей невозмущенная система имеет k первых интегралов $F_1, F_2, \dots, F_k : M \rightarrow \mathbb{R}$. При этом $F_1 = H_0$,

2. Существуют функции $\delta(x) : M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $\Gamma(t, \delta, x)$, $\Phi_i(t, \delta, x) : \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0} \times M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 2, 3, \dots, k$ удовлетворяющие для любого $x \in N$ при всех $i = 2, 3, \dots, k$ условиям

$$(a) \quad \Phi_i(t, \delta(x), x) \geq \sup_{y \in U(\delta(x), M_{F(x)})} |\{F_i, H_1\}(y, t)|, \quad t \in \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$(b) \quad \int_0^{\infty} \Phi_i(t, \delta(x), x) dt < \delta(x),$$

$$(c) \quad \Gamma(t, \delta(x), x) \geq \sup_{y \in U(\delta(x), M_{F(x)})} \left| \frac{\partial H_1(y, t)}{\partial t} \right|, \quad t \in \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$(d) \quad \sup_{\substack{y \in U(\delta(x), M_{F(x)}) \\ t \geq 0}} |H_1(y, t)| + |H_1(x, 0)| + \int_0^{\infty} \Gamma(t, \delta(x), x) dt < \delta(x).$$

Тогда вдоль решения возмущенной системы $x(t, x_0)$ с начальным условием $x_0 \in N$ значения функций $F_1 = H_0, F_2, \dots, F_k$ изменятся по сравнению с начальным моментом времени менее, чем на $\delta(x_0)$.

Основные утверждения

Рассмотрим систему, состоящую из однородного шара,двигающегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости, которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью. Считаем, что к центру шара приложена горизонтально направленная возмущающая сила, величина и направление которой зависят от времени.

Пусть $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ — репер, неподвижный в пространстве; ось \mathbf{e}_z направлена вертикально вверх, \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y ортогональны и лежат в горизонтальной плоскости. Плоскость, на которой находится шар, вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega \mathbf{e}_z$. Пусть R — радиус шара, m_b — масса шара, $\mathbf{r}_C = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ — координаты центра масс шара, $\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y + F_z\mathbf{e}_z$ — реакция опоры, действующая на шар, $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_x + q\mathbf{e}_y + r\mathbf{e}_z$ — угловая скорость шара, $\mathbf{f}(t) = \varepsilon f_x(t)\mathbf{e}_x + \varepsilon f_y(t)\mathbf{e}_y$ — внешняя сила, приложенная к центру масс шара, $f_x(t) : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_y(t) : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, ε — параметр, который может быть выбран сколь угодно малым. Если $\varepsilon = 0$, то возмущение в системе отсутствует. Выпишем систему уравнений, описывающих движение шара. Кинематическое условие непроскальзывания:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + [\boldsymbol{\omega}, CA] = [\Omega \mathbf{e}_z, \mathbf{r}_A]. \quad (3.1.11)$$

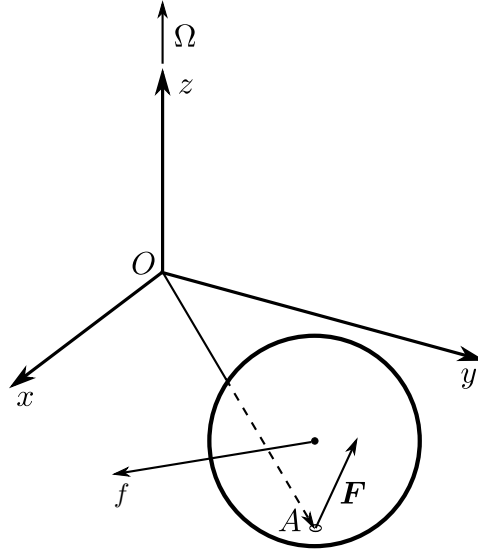


Рис. 3.1: Шар на вращающейся плоскости.

Уравнение движения центра масс шара:

$$m_b \ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F} + \mathbf{f} - m_b g \mathbf{e}_z. \quad (3.1.12)$$

Изменение кинетического момента относительно центра масс:

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{M}_C, \quad (3.1.13)$$

здесь $\mathbf{K}_C = \frac{2}{5} m_b R^2 (p \mathbf{e}_x + q \mathbf{e}_y + r \mathbf{e}_z)$, $\mathbf{M}_C = [-R \mathbf{e}_z, \mathbf{F}]$.

Из (3.1.11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) + [p \mathbf{e}_x + q \mathbf{e}_y + r \mathbf{e}_z, -R \mathbf{e}_z] &= [\Omega \mathbf{e}_z, x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y] = \\ \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z + p R \mathbf{e}_y - R q \mathbf{e}_x &= \Omega x \mathbf{e}_y - \Omega y \mathbf{e}_x. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Из (3.1.12) следует

$$m_b \ddot{x} \mathbf{e}_x + m_b \ddot{y} \mathbf{e}_y + m_b \ddot{z} \mathbf{e}_z = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z + \varepsilon f_x \mathbf{e}_x + \varepsilon f_y \mathbf{e}_y - m_b g \mathbf{e}_z. \quad (3.1.15)$$

Из (3.1.13) получаем

$$\frac{2}{5} m_b R^2 (\dot{p} \mathbf{e}_x + \dot{q} \mathbf{e}_y + \dot{r} \mathbf{e}_z) = [-R \mathbf{e}_z, F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z] = -R F_x \mathbf{e}_y + R F_y \mathbf{e}_x. \quad (3.1.16)$$

Из (3.1.14), (3.1.15) и (3.1.16) получаем следующий набор уравнений:

$$\Omega x = pR + \dot{y}, \quad (3.1.17)$$

$$-\Omega y = -Rq + \dot{x}, \quad (3.1.18)$$

$$\dot{z} = 0, \quad (3.1.19)$$

$$m_b \ddot{x} = F_x + \varepsilon f_x, \quad (3.1.20)$$

$$m_b \ddot{y} = F_y + \varepsilon f_y, \quad (3.1.21)$$

$$m_b \ddot{z} = F_z - m_b g, \quad (3.1.22)$$

$$\dot{p} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m_b R} \cdot F_y, \quad (3.1.23)$$

$$\dot{q} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m_b R} \cdot F_x, \quad (3.1.24)$$

$$\dot{r} = 0.$$

Эти уравнения описывают движение шара, если $F_z > 0$, что следует из (3.1.19) и (3.1.22).

Утверждение 1. Пусть существуют первообразные \mathcal{F}_x и \mathcal{F}_y

$$\dot{\mathcal{F}}_x = f_x, \quad \dot{\mathcal{F}}_y = f_y,$$

и выполнены условия

$$\int_0^{\infty} |\mathcal{F}_x| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} |\mathcal{F}_y| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} |f_x| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} |f_y| dt < \infty.$$

Тогда для заданных начальных условий и любого $\delta > 0$ существует такое ε_0 , что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ координаты центра масс шара в возмущенном случае будут отличаться от соответствующих координат в невозмущенном случае при тех же начальных условиях меньше, чем на δ во все моменты времени $t \geq 0$

Доказательство. Подставляя значения F_x и F_y из (3.1.20) и (3.1.21)

в (3.1.23) и (3.1.24), получаем

$$\dot{p} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m_b R} \cdot (m_b \dot{y} - \varepsilon f_y), \quad (3.1.25)$$

$$\dot{q} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m_b R} \cdot (m_b \dot{x} - \varepsilon f_x). \quad (3.1.26)$$

Проинтегрируем уравнения (3.1.25) и (3.1.26) по времени от 0 до t . Если функции $p(t)$, $q(t)$, $y(t)$, $x(t)$ удовлетворяют уравнениям (3.1.25) и (3.1.26), то они удовлетворяют и уравнениям

$$p - p_0 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m_b R} \cdot \left(m_b (y - y_0) - \int_0^t \varepsilon f_y dt \right), \quad (3.1.27)$$

$$q - q_0 = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m_b R} \cdot \left(m_b (x - x_0) - \int_0^t \varepsilon f_x dt \right), \quad (3.1.28)$$

где $p_0 = p(0)$, $q_0 = q(0)$, $y_0 = y(0)$ и $x_0 = x(0)$. Выразим p и q из (3.1.27) и (3.1.28) и подставим значения в (3.1.17) и (3.1.18)

$$\begin{aligned} \Omega x &= \frac{7}{2} \dot{y} - R \int \varepsilon f_y dt + R p_0 - \frac{5}{2} \dot{y}_0, \\ -\Omega y &= \frac{7}{2} \dot{x} + R \int \varepsilon f_x dt - R q_0 - \frac{5}{2} \dot{x}_0. \end{aligned}$$

Получаем систему

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\left(\frac{2\Omega}{7}\right)^2 x - R \frac{2}{7} \varepsilon f_x + \frac{4}{49} \Omega \left(R p_0 - \frac{5}{2} \dot{y}_0 \right) + \frac{4\Omega R}{49} \int_0^t \varepsilon f_y dt, \\ \ddot{y} &= -\left(\frac{2\Omega}{7}\right)^2 y + R \frac{2}{7} \varepsilon f_y + \frac{4}{49} \Omega \left(R q_0 + \frac{5}{2} \dot{x}_0 \right) + \frac{4\Omega R}{49} \int_0^t \varepsilon f_x dt. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

С помощью замены переменных

$$\begin{aligned} x &= \xi + \frac{1}{\Omega^2} \Omega \left(R p_0 - \frac{5}{2} \dot{y}_0 \right), \\ y &= \eta + \frac{1}{\Omega^2} \Omega \left(R q_0 + \frac{5}{2} \dot{x}_0 \right), \end{aligned}$$

можем записать систему (3.1.29) в следующем виде

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\left(\frac{2\Omega}{7}\right)^2 \xi + \varepsilon \left(-R\frac{2}{7}f_x + \frac{4\Omega R}{49} \int_0^t f_y dt \right), \\ \ddot{\eta} &= -\left(\frac{2\Omega}{7}\right)^2 \eta + \varepsilon \left(R\frac{2}{7}f_y + \frac{4\Omega R}{49} \int_0^t f_x dt \right).\end{aligned}\tag{3.1.30}$$

Поскольку

$$\int_0^t f_x dt = \mathcal{F}_x(t) - \mathcal{F}_x(0), \quad \int_0^t f_y dt = \mathcal{F}_y(t) - \mathcal{F}_y(0).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\left(\frac{2\Omega}{7}\right)^2 \xi + \varepsilon \left(-R\frac{2}{7}f_x + \frac{4\Omega R}{49}(\mathcal{F}_x(t) - \mathcal{F}_x(0)) \right), \\ \ddot{\eta} &= -\left(\frac{2\Omega}{7}\right)^2 \eta + \varepsilon \left(R\frac{2}{7}f_y + \frac{4\Omega R}{49}(\mathcal{F}_y(t) - \mathcal{F}_y(0)) \right).\end{aligned}\tag{3.1.31}$$

Рассмотрим также систему

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\left(\frac{2\Omega}{7}\right)^2 \xi + \varepsilon \left(-R\frac{2}{7}f_x + \frac{4\Omega R}{49}\mathcal{F}_x(t) \right), \\ \ddot{\eta} &= -\left(\frac{2\Omega}{7}\right)^2 \eta + \varepsilon \left(R\frac{2}{7}f_y + \frac{4\Omega R}{49}\mathcal{F}_y(t) \right).\end{aligned}\tag{3.1.32}$$

Если функции $(\xi(t), \eta(t))$ задают решение системы (3.1.32) с начальными условиями $\xi_0 + \varepsilon\frac{R}{\Omega}\mathcal{F}_x(0)$, $\dot{\xi}_0$, $\eta_0 + \varepsilon\frac{R}{\Omega}\mathcal{F}_y(0)$, $\dot{\eta}_0$, то функции $(\xi(t) - \varepsilon\frac{R}{\Omega}\mathcal{F}_x(0), \eta(t) - \varepsilon\frac{R}{\Omega}\mathcal{F}_y(0))$ задают решение системы (3.1.31) с начальными условиями ξ_0 , $\dot{\xi}_0$, η_0 , $\dot{\eta}_0$.

Запишем (3.1.32) в гамильтоновой форме. Пусть

$$M = \mathbb{R}^4, \quad \omega^2 = dp_\xi \wedge d\xi + dp_\eta \wedge d\eta, \quad H = H_0^\xi + H_0^\eta + \varepsilon H_1, \tag{3.1.33}$$

где

$$\begin{aligned} H_0^\xi &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^2 \frac{p_\xi^2}{2} + \frac{\xi^2}{2}, \\ H_0^\eta &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^2 \frac{p_\eta^2}{2} + \frac{\eta^2}{2}, \\ H_1 &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^{-2} \left(R\frac{2}{7}f_x\xi - \xi\frac{4\Omega R}{49}\mathcal{F}_y - R\frac{2}{7}f_y\eta - \eta\frac{4\Omega R}{49}\mathcal{F}_x \right). \end{aligned}$$

Заметим, что система $(M, \omega^2, H_0^\xi + H_0^\eta + \varepsilon H_1)$ эквивалентна двум системам $(\mathbb{R}^2, dp_\xi \wedge d\xi, H_0^\xi + \varepsilon H_1^\xi)$ и $(\mathbb{R}^2, dp_\eta \wedge d\eta, H_0^\eta + \varepsilon H_1^\eta)$, где

$$\begin{aligned} H_1^\xi &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^{-2} \left(R\frac{2}{7}f_x\xi - \xi\frac{4\Omega R}{49}\mathcal{F}_y \right), \\ H_1^\eta &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^{-2} \left(-R\frac{2}{7}f_y\eta - \eta\frac{4\Omega R}{49}\mathcal{F}_x \right). \end{aligned} \tag{3.1.34}$$

В системе (3.1.33) перейдем к новым каноническим переменным $I_\xi, \varphi_\xi, I_\eta, \varphi_\eta$:

$$\begin{aligned} p_\xi &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^{-1/2} \cdot \sqrt{2I_\xi} \cdot \cos \varphi_\xi, \\ \xi &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^{1/2} \cdot \sqrt{2I_\xi} \cdot \sin \varphi_\xi, \\ p_\eta &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^{-1/2} \cdot \sqrt{2I_\eta} \cdot \cos \varphi_\eta, \\ \eta &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^{1/2} \cdot \sqrt{2I_\eta} \cdot \sin \varphi_\eta. \end{aligned}$$

В них гамильтониан принимает следующий вид

$$H = H_0^\xi + H_0^\eta + \varepsilon \cdot H_1^\xi + \varepsilon \cdot H_1^\eta,$$

где

$$\begin{aligned} H_0^\xi &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right) \cdot I_\xi, & H_0^\eta &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right) \cdot I_\eta; \\ H_1^\xi &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^{-3/2} \left(R\frac{2}{7}f_x - \frac{4\Omega R}{49}\mathcal{F}_y \right) \sqrt{2I_\xi} \sin \varphi_\xi, \\ H_1^\eta &= \left(\frac{2\Omega}{7}\right)^{-3/2} \left(-R\frac{2}{7}f_y - \frac{4\Omega R}{49}\mathcal{F}_x \right) \sqrt{2I_\eta} \sin \varphi_\eta. \end{aligned}$$

Можно применить лемму 3 ■

Пусть теперь в системе (3.1.30) параметр ε фиксирован равным единице, т.е. она принимает вид

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= - \left(\frac{2\Omega}{7} \right)^2 \xi + \left(-R \frac{2}{7} f_x + \frac{4\Omega R}{49} \int_0^t f_y dt \right), \\ \ddot{\eta} &= - \left(\frac{2\Omega}{7} \right)^2 \eta + \left(R \frac{2}{7} f_y + \frac{4\Omega R}{49} \int_0^t f_x dt \right).\end{aligned}\tag{3.1.35}$$

Найдем достаточные условия, при которых решения этой системы не будут уходить на бесконечность даже в случае неограниченной величины возмущающей силы. Применим лемму 5 для доказательства следующего утверждения.

Утверждение 2. Пусть функции $f_x: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_y: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что

$$\int_0^{\infty} |\dot{f}_x| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} |\dot{f}_y| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} |f_x| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} |f_y| dt < \infty.$$

Тогда решения возмущенной системы при $\varepsilon = 1$ ограничены.

Доказательство. Покажем, что для любого заданного начального условия существует такая величина δ , зависящая от начальных условий, что выполнены условия леммы. Поскольку уравнения независимы, то будем рассматривать уравнение

$$\ddot{\xi} = - \left(\frac{2\Omega}{7} \right)^2 \xi + \left(-R \frac{2}{7} f_x + \frac{4\Omega R}{49} \int_0^t f_y dt \right).\tag{3.1.36}$$

Случай уравнения для координаты η аналогичен.

Невозмущенный гамильтониан

$$H_0 = \frac{p_{\xi}^2}{2} + \frac{4\Omega^2}{49} \frac{\xi^2}{2}.$$

Возмущение

$$H_1 = R\xi \frac{2}{7} f_x - \xi \frac{4\Omega R}{49} \int_0^t f_y dt.$$

Поскольку функция H_0 зависит квадратичным образом от ξ , p_ξ , а H_1 — линейным, то в случае, если δ достаточно велико, то, учитывая абсолютную интегрируемость функций f_x , f_y , \dot{f}_x , \dot{f}_y , существует функция $\Gamma(t, \delta, x)$ такая, что

$$\Gamma(t, \delta, x) \geq \sup_{y \in U(\delta, M_{F(x)})} \left| \frac{\partial H_1(y, t)}{\partial t} \right|, \quad t \in \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$\sup_{\substack{y \in U(\delta, M_{F(x)}) \\ t \geq 0}} |H_1(y, t)| + |H_1(x, 0)| + \int_0^\infty \Gamma(t, \delta, x) dt < \delta.$$

Можно применить лемму 5.

■

3.2 Шар на плоскости, вращающейся с почти постоянной угловой скоростью

Вспомогательные леммы

Утверждение леммы 3 может быть без труда обобщено на случай негамильтоновых возмущений, а именно верна следующая

Лемма 6. Пусть дана система

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon v_I(t, I, \varphi, x), \\ \dot{\varphi} &= c + \varepsilon v_\varphi(t, I, \varphi, x), \\ \dot{x} &= v_x(t, I, \varphi, x, \varepsilon). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Здесь $\varphi \in \mathbb{T}^n$, $I \in D \subset \mathbb{R}^m$, D — область, $c \in \mathbb{R}^n$ — некоторые постоянные, $x \in M$, M — гладкое многообразие, $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Считаем, что

v_I, v_φ, v_x — гладкие функции. Пусть $I_0 \in D, \varphi_0 \in \mathbb{T}^n$ и существует $\rho > 0$ и функции $\mathcal{V}_I: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathcal{V}_\varphi: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что

1.

$$\mathcal{V}_I(t) \geq \sup_{I \in O_\rho(I_0), \varphi \in \mathbb{T}^n, x \in M} \|v_I(I, \varphi, x, t)\|$$

$$\mathcal{V}_\varphi(t) \geq \sup_{I \in O_\rho(I_0), \varphi \in \mathbb{T}^n, x \in M} \|v_\varphi(I, \varphi, x, t)\|$$

2.

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{V}_I dt < \infty, \quad \int_0^{+\infty} \mathcal{V}_\varphi dt < \infty.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое ε_0 , что для любых

$$J_0 \in O_{\varepsilon_0}(I_0), \quad \psi_0 \in O_{\varepsilon_0}(\varphi_0)$$

и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ при всех $t \geq 0$ выполнено

$$\|I(t, J_0, \psi_0, \varepsilon) - I_0\| < \delta,$$

$$\|\varphi(t, J_0, \psi_0, \varepsilon) - \varphi(t, I_0, \varphi_0, 0)\| < \delta$$

Доказательство. Расхождение между возмущенным и невозмущенным решениями может быть оценено следующим образом

$$\|I(t, J_0, \psi_0, \varepsilon) - I_0\| \leq \|J_0 - I_0\| + \int_0^t \varepsilon \left\| \frac{d}{d\tau} I(\tau, J_0, \psi_0, \varepsilon) \right\| d\tau <$$

$$< \varepsilon_0 + \varepsilon \int_0^\infty \mathcal{V}_I d\tau.$$

Выберем ε_0 таким, чтобы выполнялись условия

$$\varepsilon_0 < \delta/2, \quad \varepsilon_0 \int_0^\infty \mathcal{V}_I d\tau < \delta/2.$$

Тогда получаем, что при всех $t \geq 0$

$$\|I(t, J_0, \psi_0, \varepsilon) - I_0\| < \delta.$$

Случай координаты φ рассматривается аналогично ■

Основные утверждения

Рассмотрим систему, состоящую из однородного шара,двигающегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости, которая в свою очередь вращается с почти постоянной угловой скоростью, т.е. угловая скорость задается функцией времени $\Omega + \varepsilon\Omega_1$.

Пусть $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ — репер, неподвижный в пространстве; ось \mathbf{e}_z направлена вертикально вверх, \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y ортогональны и лежат в горизонтальной плоскости. Плоскость, на которой находится шар, вращается угловой скоростью $\Omega\mathbf{e}_z + \varepsilon\Omega_1(t)\mathbf{e}_z$, где $\Omega_1(t)$ — функция времени. Пусть R — радиус шара, m_b — масса шара, $\mathbf{r}_C = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ — координаты центра масс шара, $\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y + F_z\mathbf{e}_z$ — реакция опоры, действующая на шар, $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_x + q\mathbf{e}_y + r\mathbf{e}_z$ — угловая скорость шара, ε — параметр, который может быть выбран сколь угодно малым. Если $\varepsilon = 0$, то возмущение в системе отсутствует. Выпишем

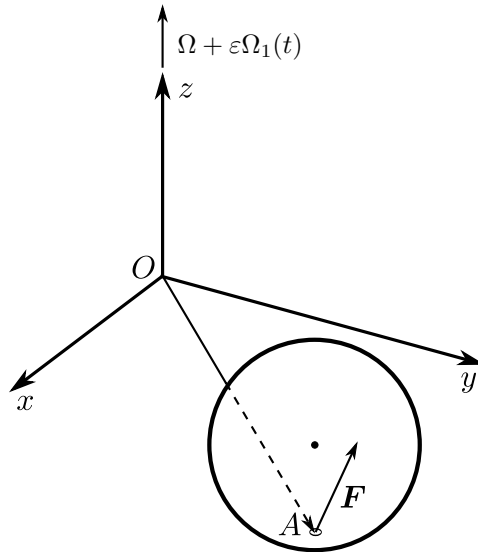


Рис. 3.2: Шар на вращающейся плоскости.

систему уравнений, описывающих движение шара. Кинематическое

условие непроскальзывания:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + [\boldsymbol{\omega}, CA] = [\Omega \mathbf{e}_z + \varepsilon \Omega_1(t) \mathbf{e}_z, \mathbf{r}_A]. \quad (3.2.2)$$

Уравнение движения центра масс шара:

$$m_b \ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F} - m_b g \mathbf{e}_z. \quad (3.2.3)$$

Изменение кинетического момента относительно центра масс:

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{M}_C, \quad (3.2.4)$$

здесь

$$\mathbf{K}_C = \frac{2}{5} m_b R^2 (p \mathbf{e}_x + q \mathbf{e}_y + r \mathbf{e}_z), \quad \mathbf{M}_C = [-R \mathbf{e}_z, \mathbf{F}]$$

Из (3.2.2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) + [p \mathbf{e}_x + q \mathbf{e}_y + r \mathbf{e}_z, -R \mathbf{e}_z] = \\ = [\Omega \mathbf{e}_z + \varepsilon \Omega_1(t) \mathbf{e}_z, x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y] = \\ = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z + p R \mathbf{e}_y - R q \mathbf{e}_x = \\ = (\Omega + \varepsilon \Omega_1(t)) x \mathbf{e}_y - (\Omega + \varepsilon \Omega_1(t)) y \mathbf{e}_x. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Из (3.2.3) следует

$$m_b \ddot{x} \mathbf{e}_x + m_b \ddot{y} \mathbf{e}_y + m_b \ddot{z} \mathbf{e}_z = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z - m_b g \mathbf{e}_z. \quad (3.2.6)$$

Из (3.2.4) получаем

$$\frac{2}{5} m_b R^2 (\dot{p} \mathbf{e}_x + \dot{q} \mathbf{e}_y + \dot{r} \mathbf{e}_z) = [-R \mathbf{e}_z, F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z] = -R F_x \mathbf{e}_y + R F_y \mathbf{e}_x. \quad (3.2.7)$$

Из (3.2.5), (3.2.6) и (3.2.7) получаем следующий набор уравнений:

$$(\Omega + \varepsilon\Omega_1)x = pR + \dot{y}, \quad (3.2.8)$$

$$-(\Omega + \varepsilon\Omega_1)y = -Rq + \dot{x}, \quad (3.2.9)$$

$$\dot{z} = 0, \quad (3.2.10)$$

$$m_b\ddot{x} = F_x, \quad (3.2.11)$$

$$m_b\ddot{y} = F_y, \quad (3.2.12)$$

$$m_b\ddot{z} = F_z - m_bg, \quad (3.2.13)$$

$$\dot{p} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m_bR} \cdot F_y, \quad (3.2.14)$$

$$\dot{q} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m_bR} \cdot F_x, \quad (3.2.15)$$

$$\dot{r} = 0.$$

Эти уравнения описывают движение шара, если $F_z > 0$, что следует из (3.2.10) и (3.2.13).

Подставляя значения F_x и F_y из (3.2.11) и (3.2.12) в (3.2.14) и (3.2.15), получаем

$$\dot{p} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m_bR} \cdot (m_b\ddot{y}), \quad (3.2.16)$$

$$\dot{q} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m_bR} \cdot (m_b\ddot{x}). \quad (3.2.17)$$

Проинтегрируем уравнения (3.2.16) и (3.2.17) по времени от 0 до t . Если функции $p(t)$, $q(t)$, $y(t)$, $x(t)$ удовлетворяют уравнениям (3.2.16) и (3.2.17), то они удовлетворяют и уравнениям

$$p - p_0 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot (y - y_0), \quad (3.2.18)$$

$$q - q_0 = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot (x - x_0), \quad (3.2.19)$$

где $p_0 = p(0)$, $q_0 = q(0)$, $y_0 = y(0)$ и $x_0 = x(0)$. Выразим p и q из

(3.2.18) и (3.2.19) и подставим значения в (3.2.8) и (3.2.9)

$$\begin{aligned}(\Omega + \varepsilon\Omega_1)x &= R \left(p_0 + \frac{5}{2} \frac{1}{R} (\dot{y} - \dot{y}_0) \right) + \dot{y} = \frac{7}{2} \dot{y} + Rp_0 - \frac{5}{2} \dot{y}_0, \\ -(\Omega + \varepsilon\Omega_1)y &= -R \left(q_0 - \frac{5}{2} \frac{1}{R} (\dot{x} - \dot{x}_0) \right) + \dot{x} = -Rq_0 + \frac{7}{2} \dot{x} - \frac{5}{2} \dot{x}_0.\end{aligned}$$

Если функция $\Omega_1(t)$ ограничена, то при малых по модулю значениях ε можем записать

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} \cdot \left(\frac{7}{2} \dot{y} + Rp_0 - \frac{5}{2} \dot{y}_0 \right), \\ y &= -\frac{1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} \cdot \left(-Rq_0 + \frac{7}{2} \dot{x} - \frac{5}{2} \dot{x}_0 \right).\end{aligned}$$

Получаем систему

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= - \left(\frac{2}{7} \right)^2 (\Omega + \varepsilon\Omega_1)^2 x + \left(\frac{2}{7} \right)^2 (\Omega + \varepsilon\Omega_1) Rp_0 - \\ &\quad - \frac{5}{2} \dot{y}_0 \left(\frac{2}{7} \right)^2 (\Omega + \varepsilon\Omega_1) - \left(\frac{2}{7} \right)^2 \dot{x} \frac{\varepsilon\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} - \\ &\quad - \frac{5}{2} \dot{x}_0 \left(\frac{2}{7} \right)^2 \dot{x}_0 \frac{\varepsilon\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} - \left(\frac{2}{7} \right)^2 Rq_0 \dot{x} \frac{\varepsilon\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1}, \\ \ddot{y} &= - (\Omega + \varepsilon\Omega_1)^2 \left(\frac{2}{7} \right)^2 y + \frac{5}{2} \left(\frac{2}{7} \right)^2 \dot{x}_0 (\Omega + \varepsilon\Omega_1) + \\ &\quad + Rq_0 \left(\frac{2}{7} \right)^2 (\Omega + \varepsilon\Omega_1) + Rp_0 \varepsilon \dot{\Omega}_1 \left(\frac{2}{7} \right)^2 \frac{1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} + \\ &\quad + \frac{\varepsilon\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} \left(\frac{2}{7} \right)^2 \dot{y} - \frac{5}{2} \left(\frac{2}{7} \right)^2 y_0 \frac{\varepsilon\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1}.\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

С помощью замены переменных

$$\begin{aligned}x &= \xi + \frac{1}{\Omega} \Omega \left(Rp_0 - \frac{5}{2} y_0 \right), \\ y &= \eta + \frac{1}{\Omega} \Omega \left(Rq_0 + \frac{5}{2} x_0 \right),\end{aligned}$$

можем записать систему (3.2.20) в следующем виде

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= - \left(\frac{2}{7}\right)^2 (\Omega + \varepsilon\Omega_1)^2 \xi + \varepsilon \left(\frac{2}{7}\right)^2 \Omega_1 R p_0 - \varepsilon \frac{5}{2} \dot{y}_0 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \Omega_1 - \\
&\quad - \varepsilon \left(\frac{2}{7}\right)^2 \dot{\xi} \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} - \varepsilon \frac{5}{2} \dot{x}_0 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{\Omega_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} - \varepsilon \left(\frac{2}{7}\right)^2 R q_0 \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1}, \\
\ddot{\eta} &= - \left(\frac{2}{7}\right)^2 (\Omega + \varepsilon\Omega_1)^2 \eta + \varepsilon \frac{5}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^2 \dot{x}_0 \Omega_1 + \varepsilon R q_0 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \Omega_1 + \\
&\quad + \varepsilon R p_0 \dot{\Omega}_1 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} + \varepsilon \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} \frac{2}{7} \dot{\eta} - \varepsilon \frac{5}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{\Omega_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1}.
\end{aligned}$$

Эту систему можно записать в виде гамильтоновой системы с негамильтоновым возмущением:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= p_\xi, \\
\dot{p}_\xi &= - \left(\frac{2}{7}\right)^2 (\Omega + \varepsilon\Omega_1)^2 \xi + \varepsilon \left(\frac{2}{7}\right)^2 \Omega_1 R p_0 - \varepsilon \frac{5}{2} \dot{y}_0 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \Omega_1 - \\
&\quad - \varepsilon \left(\frac{2}{7}\right)^2 \dot{\xi} \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} - \varepsilon \frac{5}{2} \dot{x}_0 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{\Omega_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} - \varepsilon \left(\frac{2}{7}\right)^2 R q_0 \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1}, \\
\dot{\eta} &= p_\eta, \\
\dot{p}_\eta &= - \left(\frac{2}{7}\right)^2 (\Omega + \varepsilon\Omega_1)^2 \eta + \varepsilon \frac{5}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^2 \dot{x}_0 \Omega_1 + \varepsilon R q_0 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \Omega_1 + \\
&\quad + \varepsilon R p_0 \dot{\Omega}_1 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} + \varepsilon \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1} \frac{2}{7} \dot{\eta} - \varepsilon \frac{5}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{\Omega_1}{\Omega + \varepsilon\Omega_1}.
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

К этой системе можем применить лемму 6, из которой следует

Утверждение 2. Пусть функция $\Omega_1 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и удовлетворяет условиям

$$\int_0^{+\infty} |\Omega_1(t)| dt < \infty, \quad \int_0^{+\infty} \left| \dot{\Omega}_1(t) \right| dt < \infty.$$

Тогда для заданных начальных условий и любого $\delta > 0$ существует такое ε_0 , что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ координаты центра масс шара в возмущенном случае будут отличаться от соответствующих координат

в невозмущенном случае при тех же начальных условиях меньше, чем на δ во все моменты времени $t \geq 0$

3.3 Шар с ротором на вращающейся поверхности

Пусть однородный шар массы m_b движется без проскальзывания по горизонтальной плоскости, равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω . Считаем, что шар однородный и в его центре масс расположен сферический однородный ротор с осью вращения \mathbf{e}_μ , фиксированной «в теле» и заданной угловой скоростью вращения вокруг этой оси такой, что кинетический момент относительно центра масс в осях Кенига записывается следующим образом

$$\mathbf{K} = \frac{2}{5}m_b R^2(p\mathbf{e}_x + q\mathbf{e}_y + r\mathbf{e}_z) + \varepsilon\mu\mathbf{e}_\mu.$$

Здесь p, q, r — компоненты угловой скорости шара «в пространстве», т.е. угловая скорость шара имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_x + q\mathbf{e}_y + r\mathbf{e}_z.$$

Пусть ось \mathbf{e}_z направлена вертикально вверх, \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y неподвижны и лежат в горизонтальной плоскости; точка с координатами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ является неподвижной точкой вращающейся плоскости.

На шар действуют следующие силы:

1. Сила реакции со стороны плоскости, приложенная к шару:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y + F_z\mathbf{e}_z.$$

2. Сила тяжести $-mg\mathbf{e}_z$.

Радиус-вектор центра масс шара имеет следующий вид

$$\mathbf{r}_C = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z.$$

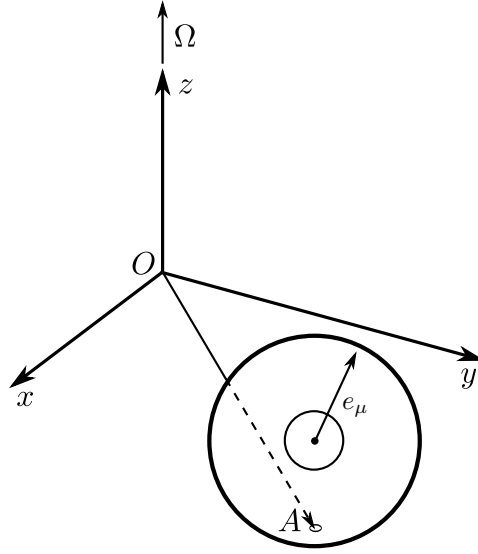


Рис. 3.3: Шар на вращающейся плоскости с ротором.

Выпишем уравнения, которым подчиняется движение нашей системы.

Уравнение движения центра масс шара:

$$m_b \ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F} - m_b g \mathbf{e}_z.$$

Из которого следует три скалярных уравнения

$$m_b \ddot{x} = F_x, \quad (3.3.1)$$

$$m_b \ddot{y} = F_y, \quad (3.3.2)$$

$$m_b \ddot{z} = F_z - m_b g. \quad (3.3.3)$$

Изменение кинетического момента шара относительно его центра масс:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{2}{5} m_b R^2 (p \mathbf{e}_x + q \mathbf{e}_y + r \mathbf{e}_z) + \varepsilon \mu \mathbf{e}_\mu = \\ &= \frac{2}{5} m_b R^2 (p \mathbf{e}_x + q \mathbf{e}_y + r \mathbf{e}_z) + \varepsilon \mu (\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x + \varepsilon \mu (\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y + \varepsilon \mu (\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = [-R \varepsilon \mu \dot{z}, F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z] = -R F_x \mathbf{e}_y + R F_y \mathbf{e}_x,$$

что эквивалентно следующим уравнениям

$$\frac{2}{5}m_b R^2 \dot{p} + \varepsilon \dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x) + \varepsilon \mu(\dot{\mathbf{e}}_\mu, \mathbf{e}_x) = R F_y, \quad (3.3.4)$$

$$\frac{2}{5}m_b R^2 \dot{q} + \varepsilon \dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y) + \varepsilon \mu(\dot{\mathbf{e}}_\mu, \mathbf{e}_y) = -R F_x, \quad (3.3.5)$$

$$\frac{2}{5}m_b R^2 \dot{r} + \varepsilon \dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_z) + \varepsilon \mu(\dot{\mathbf{e}}_\mu, \mathbf{e}_z) = 0. \quad (3.3.6)$$

Кинематическое условие непроскальзывания, заключающееся в равенстве скорости точки шара, соприкасающейся с плоскостью, скорости соответствующей точки плоскости:

$$[\Omega \mathbf{e}_z, x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y] = [p \mathbf{e}_x + q \mathbf{e}_y + r \mathbf{e}_z, -R \mathbf{e}_z] + \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z,$$

что эквивалентно следующим уравнениям

$$\Omega x = pR + \dot{y}, \quad (3.3.7)$$

$$-\Omega y = -Rq + \dot{x}, \quad (3.3.8)$$

$$\dot{z} = 0. \quad (3.3.9)$$

Отметим, что наши уравнения описывают движение шара только в том случае, если он находится на плоскости ($z = R$), т.е. когда выполнено условие

$$m_b g = R_z > 0.$$

Учитывая связь между компонентам угловой скорости и изменением углов, задающих ориентацию шара в пространстве, из 9 уравнений: (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8), (3.3.9), можно найти значения 9 неизвестных: $F_x, F_y, F_z, x, y, z, p, q, r$.

Поскольку вектор \mathbf{e}_μ постоянный в системе координат, жестко связанной с шаром, то

$$\dot{\mathbf{e}}_\mu = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu].$$

С учетом этого равенства, уравнения (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6) запишутся следующим образом

$$\frac{2}{5}m_bR^2\dot{p} + \varepsilon\dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x) + \varepsilon\mu([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_x) = RF_y, \quad (3.3.10)$$

$$\frac{2}{5}m_bR^2\dot{q} + \varepsilon\dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y) + \varepsilon\mu([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_y) = -RF_x, \quad (3.3.11)$$

$$\frac{2}{5}m_bR^2\dot{r} + \varepsilon\dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_z) + \varepsilon\mu([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_z) = 0. \quad (3.3.12)$$

Из уравнений (3.3.7), (3.3.8) имеем

$$\Omega\dot{x} = \dot{p}R + \ddot{y}, \quad (3.3.13)$$

$$-\Omega\dot{y} = -R\dot{q} + \ddot{x}. \quad (3.3.14)$$

Поскольку

$$\dot{p} = -\frac{5}{2m_bR^2}(\varepsilon\dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x) + \varepsilon\mu([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_x) - Rm\ddot{y}), \quad (3.3.15)$$

$$\dot{q} = -\frac{5}{2m_bR^2}(\varepsilon\dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y) + \varepsilon\mu([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_y) + Rm\ddot{x}), \quad (3.3.16)$$

то

$$\Omega\dot{x} = -\frac{5}{2m_bR}(\varepsilon\dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x) + \varepsilon\mu([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_x) - Rm_b\ddot{y}) + \ddot{y},$$

$$-\Omega\dot{y} = \frac{5}{2m_bR}(\varepsilon\dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y) + \varepsilon\mu([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_y) + Rm_b\ddot{x}) + \ddot{x}.$$

Для краткости обозначений будем считать, что далее

$$\chi_x = \dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x) + \mu([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_x), \quad (3.3.17)$$

$$\chi_y = \dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y) + \mu([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_y), \quad (3.3.18)$$

$$\chi_z = \dot{\mu}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_z) + \mu([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_z). \quad (3.3.19)$$

Заметим, что при интегрировании вдоль решений имеем

$$\int_0^t \chi_x dt = \mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x)|_{t=0} - \mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x) = \lambda_x, \quad (3.3.20)$$

$$\int_0^t \chi_y dt = \mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y)|_{t=0} - \mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y) = \lambda_y, \quad (3.3.21)$$

$$\int_0^t \chi_z dt = \mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_z)|_{t=0} - \mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_z) = \lambda_z. \quad (3.3.22)$$

С учетом этих соотношений можем записать

$$\Omega x - \Omega x_0 = -\frac{5\varepsilon\lambda_x}{2m_b R} + \frac{7}{2}(\dot{y} - \dot{y}_0), \quad (3.3.23)$$

$$-\Omega y + \Omega y_0 = \frac{5\varepsilon\lambda_y}{2m_b R} + \frac{7}{2}(\dot{x} - \dot{x}_0). \quad (3.3.24)$$

Сделаем замену

$$\xi = x - x_0 + \frac{7}{2\Omega}\dot{y}_0, \quad (3.3.25)$$

$$\eta = -y + y_0 + \frac{7}{2\Omega}\dot{x}_0. \quad (3.3.26)$$

В новых переменных система запишется следующим образом

$$\xi = -\frac{5\varepsilon\lambda_x}{2m_b R\Omega} - \frac{7}{2\Omega}\dot{\eta}, \quad (3.3.27)$$

$$\eta = -\frac{5\varepsilon\lambda_y}{2m_b R\Omega} + \frac{7}{2\Omega}\dot{\xi}.$$

Получаем

$$\ddot{\xi} = -\frac{4\Omega^2}{49}\xi - \frac{4\Omega^2}{49}\frac{5\varepsilon\lambda_x}{2m_b R\Omega} + \frac{2\Omega}{7}\frac{5\varepsilon\chi_y}{2m_b R\Omega}, \quad (3.3.28)$$

$$\ddot{\eta} = -\frac{4\Omega^2}{49}\eta - \frac{4\Omega^2}{49}\frac{5\varepsilon\lambda_y}{2m_b R\Omega} - \frac{2\Omega}{7}\frac{5\varepsilon\chi_x}{2m_b R\Omega}.$$

Невозмущенная система имеет следующий простой вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -\frac{4\Omega^2}{49}\xi, \\ \ddot{\eta} &= -\frac{4\Omega^2}{49}\eta. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Рассмотрим полную систему уравнений, задающих динамику системы, в которой уравнения (3.3.28) заменены на следующие

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\frac{4\Omega^2}{49}\xi + \frac{4\Omega^2}{49} \frac{5\varepsilon\mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x)}{2m_b R\Omega} + \frac{2\Omega}{7} \frac{5\varepsilon\chi_y}{2m_b R\Omega}, \\ \ddot{\eta} &= -\frac{4\Omega^2}{49}\eta + \frac{4\Omega^2}{49} \frac{5\varepsilon\mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y)}{2m_b R\Omega} - \frac{2\Omega}{7} \frac{5\varepsilon\chi_x}{2m_b R\Omega}.\end{aligned}\tag{3.3.30}$$

Если функции $(\xi(t), \eta(t))$ задают решение полной системы с уравнениями (3.3.30) с начальными условиями по соответствующим переменным $\xi_0 + \frac{5\varepsilon\mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x)|_{t=0}}{2m_b R\Omega}$, $\dot{\xi}_0$, $\eta_0 + \frac{5\varepsilon\mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y)|_{t=0}}{2m_b R\Omega}$, $\dot{\eta}_0$, то при условии совпадения остальных начальных данных, функции $\xi(t) - \frac{5\varepsilon\mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x)|_{t=0}}{2m_b R\Omega}$, $\eta(t) - \frac{5\varepsilon\mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y)|_{t=0}}{2m_b R\Omega}$ будут задавать решение полной системы с уравнениями (3.3.28) с начальными условиями по соответствующим переменным ξ_0 , $\dot{\xi}_0$, η_0 , $\dot{\eta}_0$.

Поскольку величины $\mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_x)$ и $\mu(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_y)$ ограничены, то к системе с уравнениями (3.3.30) применима лемма 6. Получаем, что верно следующее

Утверждение 3. Пусть функция $\mu : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^{+\infty} |\mu| dt < \infty, \quad \int_0^{+\infty} |\dot{\mu}| dt < \infty.$$

Тогда для заданных начальных условий и любого $\delta > 0$ существует такое ε_0 , что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ координаты центра масс шара в возмущенном случае будут отличаться от соответствующих координат в невозмущенном случае при тех же начальных условиях меньше, чем на δ во все моменты времени $t \geq 0$

Заключение

Рассматриваются примеры неавтономных голономных и неголономных механических систем, в которых показывается, что существует решения без падений, также показывается, что существуют периодические решения без падений, если неавтономное возмущение периодическое. Рассматриваются примеры, в которых неавтономное возмущение убывает со временем и мало.

- Рассматривается классическая задача о перевернутом маятнике на подвижном основании. Для нее строго обосновывается, что всегда существуют начальные условия, при которых будет происходить движение без падений. В том числе можно выбрать начальные условия с нулевой скоростью маятника. Аналогичное показывается для сферического маятника и для системы, которая обобщает предыдущие случаи — точка движется по поверхности без трения, при этом поверхность пересекает горизонтальную плоскость перпендикулярно и также движется по заданному закону. В качестве дальнейшего обобщения задачи о перевернутом маятнике рассматривается задача о качении диска с присоединенной массой по подвижной плоскости без проскальзывания. Присоединенная масса считается вечно находящейся в пересечении плоскости диска и опорной плоскости на фиксированном расстоянии от центра диска. Механически такую связь можно осуществить, рассмотрев треугольную невесомую раму, одна из вершин которой находится в центре диска, а две другие движутся по опорной плоскости без трения. Массивную точку

тогда можно разместить, например, в одной из вершин рамы, отличной от центра диска. Для данной неголономной системы показывается, что при заданном горизонтальном движении опорной плоскости всегда существуют такие начальные условия, что диск будет вечно двигаться без падений. Рассматривается задача о движении без падений велосипеда, руль которого зафиксирован таким образом, чтобы оба колеса принадлежали одной плоскости. В данном случае плоскость опять предполагается совершающей движение по заданному закону, а взаимодействие между колесами велосипеда и плоскостью осуществляется посредством силы вязкого трения. Также показывается, что существует решение без падений.

- Для задачи о перевернутом маятнике на подвижном основании показывается, что в случае, когда закон движения точки подвеса маятника является периодическим, существует периодическое решение, которое дополнительно является решением вдоль которого движение маятника происходит без падений. Аналогичное показывается и для системы, в которой массивная точка движется с трением по кривой, которая аналогично случаю перевернутого маятника пересекает перпендикулярно некоторую горизонтальную плоскость в двух точках, а между ними находится над этой плоскостью (в случае маятника этак кривая — полуокружность). Тогда, если закон горизонтального движения кривой периодический, то в системе существует периодическое решение, которое происходит без падений на горизонтальную плоскость. Также показывается, что периодическое движение без падений существует для перевернутого сферического маят-

ника с вязким трением, точка подвеса которого совершает периодическое движение в горизонтальной плоскости. Доказательства основаны на применении методов алгебраической топологии.

- Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми неавтономными возмущениями, используя простые аналитические оценки, найдены достаточные условия, при которых значения функций первых интегралов невозмущенной системы мало меняются при движении по траекториям возмущенной системы. Приводятся различные модификации этих утверждений в том числе для гамильтоновых систем. Приводится пример, для которого достаточные условия совпадают с необходимыми. Также рассматриваются следующие системы. Рассматривается шар на горизонтальной шероховатой плоскости, которая вращается с некоторой угловой скоростью. Изучается движение шара при наличии малого возмущения. В первом случае считаем, что угловая скорость движения плоскости постоянна и на центр масс шара действует малая заданная внешняя сила. Во втором случае рассматривается шар, который движется по вращающейся шероховатой плоскости, притом угловая скорость вращения плоскости почти постоянна. В третьем случае считаем, что в центре масс шара расположен ротор, вращающийся с заданной угловой скоростью вокруг оси, фиксированной «в теле», и задающий возмущение в системе. В первом случае находится достаточное условие на компоненты возмущающей силы, при котором траектория невозмущенного движения шара близка к траектории возмущенного движения, выходящего из тех же начальных усло-

вий. Во втором случае находится аналогичное условие на возмущение угловой скорости вращения плоскости. В третьем случае приводится аналогичное достаточное условие на закон движения ротора. Для случая, когда возмущение не является малым, находятся достаточные условия, при которых шар в своем движении по плоскости не уходит на бесконечность, а остается в ограниченной области.

Литература

- [1] Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, УМН, 18:5(113), 13-40, 1963
- [2] Арнольд В. И. О неустойчивости динамической системы со многими степенями свободы, Докл. АН СССР, 156:1, 9-12, 1964
- [3] Арнольд В. И. Что такое математика — М.: МЦНМО, 2002, — 104 с.
- [4] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985, 304 стр.
- [5] Афонин А. А., Козлов В. В. Задача о падении диска, движущегося по горизонтальной плоскости, Изв. РАН. Механика твердого тела, 1997, № 1, 7–13
- [6] Болсинов, А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Бифуркационный анализ и индекс Конли в механике. Нелинейная динамика 7.3 (2011): 649-681.
- [7] Борсук К. Теория ретрактов, М.: Мир, 1971.
- [8] Буров А. А., Карапетян А. В. О существовании и устойчивости инвариантных множеств динамических систем // ППМ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 905–913.

- [9] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 472 с., 1967.
- [10] Дольд А. Лекции по алгебраической топологии, — М.: Мир, 1976. 463 с.
- [11] Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 4-е, испр. — М.: МЦНМО, 2002, 664 с.
- [12] Трещев Д. В. Лекционные курсы НОЦ / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). Вып. 4: Гамильтонова механика, 64 с., М.: МИАН, 2006
- [13] Карапетян А. В. Теорема Рауса и ее модификации // Труды Тбилисского ун-та. Сер. мат., мех., физ., астрон. 1988. Т. 25. С. 65–88.
- [14] Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений. М.: «Эдиториал УРСС», 1998. — 168 с.
- [15] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.
- [16] Козлов В. В. Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
- [17] Козлов В. В., Колесников Н. Н. О теоремах динамики. Прикл. мат. мех 42.1 (1978): 28-33.
- [18] Козлов В. В. Избранные работы по математике, механике и математической физике, ISBN: 978-5-93972-799-0, НИИ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010
- [19] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.

- [20] Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М.: Мир, 1968, 168 с.
- [21] Ленский А.В., Формальский А.М. Двухколесный робот-велосипед с гиросtabilизатором. Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003, №3, с. 176-183.
- [22] Ленский А.В., Формальский А.М. Гироскопическая стабилизация двухколесного робота-велосипеда. ДАН, Т. 399, № 3, 2004, с. 319-324.
- [23] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
- [24] Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Харьков: Изд-во Харьковского мат. об-ва, 1888. 54 с.
- [25] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения, Гостехиздат 1952., М. — Л., 431.
- [26] Малкин И. Г. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ПММ, т. VIII, вып. 3, 1944.
- [27] Маркеев А.П. Некоторые задачи динамики тяжелого твердого тела с вибрирующим подвесом, Вестник научно-технического развития, №10(26)б 2009.
- [28] Мозер Ю. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды, УМН, 24:2(146) (1969), 165–211.
- [29] Мозер Ю. КАМ-теория и проблемы устойчивости, — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 448 стр.

- [30] Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики, М.: Наука, 400 с.
- [31] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949.
- [32] Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым, УМН, 32:6(198) (1977), 5–66.
- [33] Полехин И. Ю. О конечном изменении первых интегралов автономных гамильтоновых систем при наличии неавтономного возмущения, Проблемы машиностроения и автоматизации, №3, 2011 г., с. 58-62.
- [34] Полехин И. Ю. О гамильтоновых системах с малыми неавтономными возмущениями, Вестник МГУ, сер. мех., №1, 2012, с. 47–53.
- [35] Полехин И. Ю. Примеры использования топологических методов в задаче о перевернутом маятнике на подвижном основании, Нелинейная динамика, 2014, Том 10, № 4, с. 465-472
- [36] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: Изд-во МГУ, 1984, 296 с.
- [37] Пожарицкий Г. К. О построении функций Ляпунова из интегралов возмущенного движения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 145-154.
- [38] Прасолов В. В. Элементы теории гомологий, Москва, Издательство МЦНМО, 2006. 448 с.

- [39] Прасолов В. В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, Издательство МЦНМО, 2004. 352 с.
- [40] Рейссиг Р., Конти Г., Сансоне Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1974, 320 стр.
- [41] Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений // Теор. и прил. мех. 1974. Т. 5. №1. С. 67–69.
- [42] Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 922-933.
- [43] Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников // М.: ВЦ АН СССР, 1966. 141 с.
- [44] Савченко А. Я., Игнатъев А. О. АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики. — Киев: Наук. думка, 1989, 208 с.
- [45] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений, изд. 8-е, Физматгиз, 1959 г.
- [46] Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 477 с., 1964.
- [47] Четаев Н. Г. Устойчивость движения, 3 изд., М.: Наука, 1965, 208 с.
- [48] Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
- [49] Brown R. F., Furi M., Górniewicz L., Jiang B. Handbook of Topological Fixed Point Theory, ISBN-13 978-1-4020-3221-9 (HB), Springer, 2005. 971 p.

- [50] Cañada, A., Drábek, P., Fonda, A. Handbook of differential equations, Ordinary differential equations: Vol. 1, ISBN 0444511288, Elsevier, 2004, p. 698.
- [51] Chas M. Minimum periods of homeomorphisms of orientable surfaces, <http://arxiv.org/1204.0023v1>, 161 p.
- [52] Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. Vol. 38. American Mathematical Soc., 1978.
- [53] Conley C., Easton R. Isolated invariant sets and isolating blocks. Transactions of the American Mathematical Society (1971): 35-61.
- [54] Courant R., Robbins H. What is Mathematics? New York // Oxford. — 1941. — T. 194. №. 1. — C. 346.
- [55] Fiedler B. Handbook of dynamical systems. Vol. 2. Gulf Professional Publishing, 2002.
- [56] Garay B. M. Some remarks on Wazewski's retract principle. ZESZYTY NAUKOWE-UNIwersytetu Jagiellonskiego-ALL SERIES- 1223 (1998): 97-106.
- [57] Granas A., Dugunji J. Fixed Point Theory, ISBN-10 0-387-00173-5, Springer-Verlag New York, Inc., 2003. 690 p.
- [58] Halanay A. Points singulière et solutions periodiques, (9). Acad. R. P. Romine, Bui. Sti. Mat. Fiz., 7 (1955), 319-324.
- [59] Hartman P. Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., 1964, 612 pp.
- [60] Hatcher A. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002, 606 p.

- [61] Hopf H. A new proof of the Lefschetz formula on invariant points, Proc. NAS USA 14, 1928, P. 149–153.
- [62] Hopf H. Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten, Math. Z. 29, 1929, 493–524.
- [63] Jezierski J., Marzantowicz W. Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Points Theory // ISBN-13 978-1-4020-3930-1 (HB), Springer, 2006. 319 p.
- [64] Karapetyan A. V. The Routh theorem and its extensions // Colloq. Math. János Bolyai. 53. Qualit. theory of diff. eq. Amsterdam — New York: North Holland, 1990. P. 271–290.
- [65] Lagoda V., Parasyuk I. Wazewski Topological Principle and V-bounded Solutions of Nonlinear Systems,
<http://arxiv.org/abs/0901.0234>
- [66] Lagoda V., Parasyuk I. Existence of V-bounded solutions for nonautonomous nonlinear systems via the Wazewski topological principle,
<http://arxiv.org/abs/0911.4643>
- [67] Lefschetz S. Intersections and transformations of complexes and manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. V. 28. P. 1–49.
- [68] Lefschetz S. Continuous transformations of manifolds, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 9.3, 1923: 90.
- [69] Lefschetz S. Manifolds with a boundary and their transformations. Transactions of the American Mathematical Society 29.2, 1927, P. 429–462.

- [70] Levi-Civita T. Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires // Prace mat.-fis. 1906. V. 17. P. 1–140.
- [71] Munkres J. R. Elements of Algebraic Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984. 454 p.
- [72] Ortega R. Retracts, fixed point index and differential equations. RACSAM-Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas 102.1 (2008): 89-100.
- [73] Polekhin I. Inverted pendulum with moving pivot point: examples of topological approach, <http://arxiv.org/abs/1407.4787>
- [74] Polekhin I. Periodic and falling-free motion of inverted spherical pendulum with moving pivot point, <http://arxiv.org/abs/1411.1585>
- [75] Robbin J. W., Salamon D. Dynamical systems, shape theory and the Conley index, Ergodic Theory Dynam. Systems 8.Charles Conley Memorial Issue (1988): 375-393.
- [76] Routh E. J. A treatise on the stability of a given state of motion. London: MacMillan and Co., 1877. 108 p.
- [77] Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: MacMillan and Co., 1884. 343 p.
- [78] Salamon D. Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets. Transactions of the American Mathematical Society 291.1 (1985): 1-41.

- [79] Salvadori L. Un'osservazione su di un criterio di stabilità del Routh // Rend. Accad. Sci. fis. e math. Soc. naz. sci. lett. ed arti. Napoli. 1953. V. 20. P. 269–273.
- [80] Salvadori L. Sull'estensione ai sistemi dissipative del criterio di stabilità del Routh // Ric. mat. 1966. V. 15. P. 162–167.
- [81] Salvadori L. Sulla stabilità del movimento // Matematiche. Catania. 1969. V. 24. P. 218–239.
- [82] Spanier E. Algebraic topology. Vol. 55. No. 1. Springer, 1994.
- [83] Srzednicki R., Wójcik K. A geometric method for detecting chaotic dynamics, Journal of differential equations 135.1, 1997, p. 66–82
- [84] Thomson W., Tait P. Treatise on natural philosophy. V. 1. London: MacMillan and Co., 1867. 727 p.
- [85] Ważewski T. Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires, Ann. Soc. Polon. Math, 20 (1947), 279-313.
- [86] Wójcik K., Zgliczyński P. Isolating segments, fixed point index, and symbolic dynamics, Journal of Differential Equations 161.2 (2000): 245-288.
- [87] Wójcik K., Zgliczyński P. Isolating Segments, Fixed Point Index, and Symbolic Dynamics II. Homoclinic Solutions. Journal of Differential Equations 172.1 (2001): 189-211.
- [88] Wójcik K., Zgliczyński P. Isolating Segments, Fixed Point Index, and Symbolic Dynamics: III. Applications. Journal of Differential Equations 183.1 (2002): 262-278.