МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

САЛОВА Татьяна Валентиновна

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель:	Сергеев Игорь Николаевич доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Попова Светлана Николаевна доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»
	Дементьев Юрий Игоревич кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет гражданской авиации»
Ведущая организация:	Институт математики НАН Беларуси

Защита диссертации состоится 04 сентября 2015 г. в 16 ч 45 мин на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su.

Автореферат разослан   июля 2015 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор   В.В. Власов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Представленная работа является исследованием в области качественной теории дифференциальных уравнений.

Особое место в качественной теории дифференциальных уравнений занимают линейные системы, которые служат базой для изучения нелинейных систем по их линейному приближению. Линейные нестационарные системы имеют многочисленные приложения, которые порождают ряд новых задач теоретического характера, требующих изучения асимптотических свойств решений системы.

Одним из главных направлений качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений является изучение характеристических показателей, которые были введены А.М. Ляпуновым[1] в связи с исследованием устойчивости по первому приближению, а также введенных позже показателей Перрона, Боля, Винограда, Миллионщикова и Изобова, отвечающих за разнообразные асимптотические свойства решений систем.

Изучением различных свойств самых разных показателей решений и систем занимались многие математики. Приведем далеко не полный список тех из них, кто внес значительный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград, Б.Ф. Былов, В.М. Миллионщиков, Ю.С. Богданов, Н.А. Изобов, М.И. Рахимбердиев, И.Н. Сергеев, Е.К. Макаров, С.Н. Попова, Е.А. Барабанов, О.И. Морозов, А.С. Фурсов, А.Н. Ветохин, В.В. Быков, Ю.И. Дементьев и другие. Исчерпывающую (на соответствующий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах[2,3] и монографиях[4,5].

Каждая система из m линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка (т. е. с m-мерным фазовым пространством) имеет ровно m *показателей Ляпунова*[4,6], занумерованных в порядке нестрогого

[1] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000.

[2] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.

[3] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. №12. С. 2034–2055.

[4] Былов Б.Ф. Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

[5] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

[6] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

возрастания. Если старший (m-й) показатель Ляпунова отрицателен, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво, а если положителен — то неустойчиво. Аналогично, i-й показатель характеризует условную устойчивость относительно i-мерного подпространства.

Из результатов работы О. Перрона[7] известно, что старший показатель Ляпунова, рассматриваемый как функционал на пространстве m-мерных систем с *равномерной* на положительной полуоси нормой, имеет точки разрыва. Вследствие этого, в теории характеристических показателей получило развитие целое направление, состоящее в исследовании устойчивости показателей Ляпунова при малых возмущениях коэффициентов системы.

Р.Э. Виноград ввел *верхний и нижний центральные* показатели[8], ограничивающие соответственно сверху и снизу подвижность показателей Ляпунова под действием равномерно малых возмущений системы. В.М. Миллионщиков с помощью разработанного им *метода поворотов* установил[9], что эти границы подвижности являются точными, т. е. они *достижимы* при сколь угодно малых возмущениях. Для каждого $i = 1, \dots, m$ точные нижняя и верхняя границы подвижности i-го показателя Ляпунова называются соответственно *минимальным и максимальным* i-ми показателями. Из упомянутых работ Р.Э. Винограда и В.М. Миллионщикова следует, что минимальный младший показатель совпадает с нижним центральным, а максимальный старший — с верхним центральным показателями системы.

Минимальные и максимальные показатели отвечают за *стабилизируемость* и *дестабилизируемость* системы. С одной стороны, если минимальный старший показатель системы неположителен, то она стабилизируема равномерно малыми возмущениями (т. е. в сколь угодно малой ее окрестности существует устойчивая система), а если положителен — не стабилизируема. С другой стороны, если максимальный старший показатель системы неотрицателен, то она дестабилизируема равномерно малыми возмущениями, а если отрицателен — не дестабилизируема. Аналогичную роль, но по отношению к условной устойчивости, играют остальные минимальные и максимальные

---

[7] Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd. 32, Hft. 5. S. 703–728.

[8] Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1957. **42**. №2. С. 207–222.

[9] Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирск. матем. журнал. 1969. **10**. №1. С. 99–104.

показатели.

В теории показателей Ляпунова наряду с равномерно малыми возмущениями рассматриваются еще и *бесконечно малые* (т. е. убывающие к нулю при неограниченном увеличении времени) возмущения. Известно[4,10], что все минимальные и максимальные (следовательно, и центральные) показатели инвариантны относительно бесконечно малых возмущений. При исследовании подвижности показателей Ляпунова любое бесконечно малое возмущение системы можно превратить в сколь угодно малое, но не наоборот. Тем не менее[11,12,13], в классе бесконечно малых возмущений также достижимы все максимальные и младшие (заведомо первый и второй) минимальные показатели.

Р.Э. Виноградом[4] установлена одновременная достижимость центральных показателей для диагональных систем при четном m. В работе Т.Е. Нуждовой[14] доказана одновременная их достижимость для систем общего вида, но лишь при $m = 2$. Окончательное же (при произвольном m) решение задачи об одновременной достижимости центральных показателей получено К.А. Дибом[15].

Пусть теперь m четно: здесь и далее, когда речь идет о четномерном фазовом пространстве, считаем $m = 2n$. Тогда в пространстве линейных систем дифференциальных уравнений можно выделить подпространство *линейных гамильтоновых систем*, играющих важную роль в механике. Такие системы возникают, в частности, как системы в вариациях вдоль решений произвольных (нелинейных) гамильтоновых систем.

---

[10]Сергеев И.Н. Инвариантность центральных показателей относительно возмущений, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №9. С. 1719.

[11]Сергеев И.Н. Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова системы дифференциальных уравнений и поведение показателей при возмущениях, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №3. С. 438–448.

[12]Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 9. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. С. 111–166.

[13]Сергеев И.Н. О достижимости минимальных показателей в классе бесконечно малых возмущений // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2000. №3. С. 61–63.

[14]Нуждова Т.Е. Одновременная достижимость центральных показателей двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1972. **8**. №8. С. 1416–1422.

[15]Диб К.А. Одновременная достижимость центральных показателей // Дифференц. уравнения. 1974. **10**. №12. С. 2125–2136.

В.М. Миллионщиковым была поставлена задача о достижимости в классе гамильтоновых систем центральных показателей, а также остальных максимальных и минимальных показателей. Достижимость центральных показателей гамильтоновой системы для произвольного n в классе равномерно малых гамильтоновых возмущений установил Фам Фу[16,17], а аналогичную достижимость произвольного максимального показателя — В.В. Веременюк[18].

Известно также, что любая гамильтонова система:

- $2n$-мерно стабилизируема и 1-мерно дестабилизируема *малыми в среднем* гамильтоновыми возмущениями[19];

- n-мерно дестабилизируема равномерно малыми гамильтоновыми возмущениями[20] и n-мерно же стабилизируема равномерно малыми гамильтоновыми возмущениями[21];

- содержит в любой своей окрестности гамильтонову систему, у которой n-й показатель Ляпунова отрицателен, а также имеет бесконечно мало возмущенную гамильтонову систему, у которой n-й показатель Ляпунова неположителен[22];

- при $n = 1$ замечательна тем, что все ее максимальные и минимальные показатели достижимы при равномерно малых гамильтоновых возмущениях[23] (т. е. по отношению к показателям Ляпунова гамильтоновы возмущения *эффективны*).

---

[16]Фам Фу. О достижимости центральных показателей линейной гамильтоновой системы. I // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №11. С. 2012–2022.

[17]Фам Фу. О достижимости центральных показателей линейной гамильтоновой системы. II // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №12. С. 2062–2176.

[18]Веременюк В.В. Критерий полунепрерывности сверху i-го показателя Ляпунова линейной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1982. **18**. №3. С. 371–383.

[19]Сергеев И.Н. Стабилизируемость линейных гамильтоновых систем // Успехи матем. наук, 1985. **40**. Вып. 5. С. 230.

[20]Морозов О.И., Сергеев И.Н. Дестабилизируемость линейных гамильтоновых систем // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 1986. №4. С. 38–41.

[21]Сергеев И.Н. Условная стабилизируемость линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 1992. **28**. №11. С. 2007.

[22]Сергеев И.Н. О подвижности знаков показателей Ляпунова линейных гамильтоновых систем // Успехи матем. наук. 1993. **48**. Вып. 4. С. 204–205.

[23]Сергеев И.Н. Об эффективности возмущений в классе линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2003. **39**. №6. С. 856.

И.Н. Сергеевым были поставлены задачи об одновременной достижимости центральных показателей в классе гамильтоновых систем, об одновременной условной (относительно фазового подпространства половинной размерности) стабилизируемости и дестабилизируемости в классе гамильтоновых систем, а также об эффективности гамильтоновых возмущений (в работе[24] уже рассматривалась похожая задача об эффективности разрывных ортогональных преобразований координат).

Цель работы

Настоящая диссертация посвящена исследованию показателей Ляпунова и свойств устойчивости линейных гамильтоновых систем при гамильтоновых возмущениях их коэффициентов.

Методы исследования

В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, в частности, методы теории показателей Ляпунова и теории линейных гамильтоновых систем, в том числе метод поворотов В.М. Миллионщикова[9], адаптированный Фамом Фу[16] для гамильтоновых систем, а также идеи из работ И.Н. Сергеева[12,25].

Научная новизна работы

В диссертации получены следующие новые результаты:

- для любой двумерной или четырехмерной линейной гамильтоновой системы доказана одновременная достижимость верхнего и нижнего центральных показателей показателями Ляпунова при сколь угодно малых и даже бесконечно малых возмущениях коэффициентов системы, не выводящих ее из класса линейных гамильтоновых систем;

- доказано, что любая линейная гамильтонова система одновременно условно (относительно фазового подпространства половинной размерности) как стабилизируема, так и дестабилизируема бесконечно малыми гамильтоновыми возмущениями;

[24]Салова Т.В. К вопросу о предельной эффективности разрывных ортогональных преобразований координат // Дифференц. уравнения. 2001. **37**. №11. С. 1579.

[25]Сергеев И.Н. Точные границы подвижности показателей Ляпунова линейных гамильтоновых систем при малых в среднем возмущениях // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 14. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. С. 125–139.

- доказано, что любая линейная гамильтонова система одновременно условно (относительно фазового подпространства половинной размерности) экспоненциально стабилизируема и дестабилизируема равномерно малыми гамильтоновыми возмущениями;

- установлено совпадение множества всех предельных значений показателей решений линейной гамильтоновой системы при равномерно малых ее возмущениях с аналогичным множеством, получаемым при равномерно малых гамильтоновых возмущениях той же системы;

- установлено совпадение множества всех значений показателей решений линейной гамильтоновой системы при бесконечно малых ее возмущениях с аналогичным множеством, получаемым при бесконечно малых гамильтоновых ее возмущениях.

Таким образом, в диссертации получен частичный положительный ответ на вопрос об одновременной достижимости центральных показателей в классе гамильтоновых систем, решена задача об одновременной условной (относительно фазового подпространства половинной размерности) стабилизируемости и дестабилизируемости в классе гамильтоновых систем, а также о предельной эффективности гамильтоновых возмущений по отношению к спектру показателей Ляпунова.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных семинарах:

1) семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ под рук. проф. И.В. Асташовой, проф. А.В. Боровских, проф. Н.Х. Розова, проф. И.Н. Сергеева (2006 г., многократно 2014 г.);

2) семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» механико-математического факультета МГУ под рук. академика РАН, проф. В.А. Садовничего (2014 г.);

3) семинар «Бесконечномерный анализ и его приложения» механико-математического факультета МГУ под рук. проф. О.Г. Смолянова, проф. Е.Т. Шавгулидзе, проф. Н.Н. Шамарова (2015 г.).

Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

1) Международная конференция «Научное наследие Владимира Михайловича Миллионщикова» (г. Москва, декабрь 2014 г.);

2) Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова (г. Ижевск, июнь 2015 г.).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 6 работ, в том числе 5 статей в журналах, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 90 страниц. Библиография включает 70 наименований.

Краткое содержание диссертации

Введение

В кратком введении описывается история вопроса и постановка задач. Формулируются основные результаты диссертации и указывается их место в современной теории показателей Ляпунова.

Глава 1

В разделе **1.1** вводятся необходимые определения и понятия с описанием их общих свойств.

Для заданного натурального числа m рассмотрим множество $\mathcal{M}^m$ линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной кусочно непрерывной оператор-функцией $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^m$. Множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^m$ обозначим через $S_*(A)$, а через $X_A(t,\tau)$, где $t,\tau \in \mathbb{R}^+$, будем обозначать ее *оператор Коши.*

Множество $\mathcal{M}^m$ наделим структурой линейного пространства с естественными для оператор-функций операциями сложения и умножения на действительное число. Пространство $\mathcal{M}^m$ превратим в нормированное пространство, введя в нем равномерную на полупрямой $\mathbb{R}^+$ норму

$$\|A\| = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A(t)\|,$$

где

$$\|A(t)\| = \sup_{|x|=1} |A(t)x|, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m).$$

Определение I[6]. Пусть функция $x(t)$, определенная на полуоси $t \in \mathbb{R}^+$, не принимает нулевых значений. Назовем *характеристическим показателем Ляпунова* этой функции величину

$$\chi(x) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|.$$

Для функции, принимающей нулевые значения, понятие характеристического показателя Ляпунова будем считать неопределенным.

Определение II[1,26]. Назовем *показателями Ляпунова* системы $A \in \mathcal{M}^m$ числа

$$\lambda_i(A) \equiv \inf_{F\in\mathcal{G}^i} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|X_A|_F(t,0)\|, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\mathcal{G}^i$ — множество i-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^m$, а $X_A|_F$ — сужение оператора Коши системы A на подпространство $F \subset \mathbb{R}^m$.

Из формулы следует, что показатели Ляпунова занумерованы в порядке нестрогого возрастания $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m(A)$.

Определение III[4]. *Верхним* $\Omega(A)$ и соответственно *нижним* $\omega(A)$ *центральными показателями* системы $A \in \mathcal{M}^m$ называются числа

$$\Omega(A) \equiv \inf_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X_A(sT,(s-1)T)\|,$$

[26] Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №8. С. 1408–1416.

$$\omega(A) \equiv \sup_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X_A((s-1)T, sT)\|^{-1}.$$

Показатели Ляпунова, а также верхний и нижний центральные показатели систем из пространства $\mathcal{M}^m$ будем рассматривать как определенные на нем функционалы $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \Omega, \omega : \mathcal{M}^m \to \mathbb{R}$.

Если m четно и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ задан ортогональный кососимметрический оператор J (т. е. $J^{-1} = J^* = -J$), то в пространстве $\mathcal{M}^m$ можно выделить линейное нормированное подпространство $\mathcal{H}^m$ так называемых *линейных гамильтоновых систем*, отличающихся тем, что для каждой из них оператор $JA(t)$ симметричен при каждом $t \in \mathbb{R}^+$.

Определение IV[12]. Для всякой системы $A \in \mathcal{M}^m$ ($A \in \mathcal{H}^m$) обозначим:

a) через $\mathcal{M}_\varepsilon(A)$ ($\mathcal{H}_\varepsilon(A)$) — множество систем $B \in \mathcal{M}^m$ ($B \in \mathcal{H}^m$), удовлетворяющих условию $\|B - A\| < \varepsilon$, а возмущения такого типа будем называть *равномерно малыми*;

b) через $\mathcal{M}_0(A)$ ($\mathcal{H}_0(A)$) — множество систем $B \in \mathcal{M}^m$ ($B \in \mathcal{H}^m$), удовлетворяющих условию $\|B(t) - A(t)\| \to 0$, $t \to \infty$, при выполнении которого возмущение $B - A$ назовем *бесконечно малым.*

В разделе **1.2** доказываются вспомогательные утверждения, которые используются при доказательстве основных результатов.

В разделе **1.3** для любой двумерной или четырехмерной линейной гамильтоновой системы доказана одновременная достижимость верхнего и нижнего центральных показателей показателями Ляпунова при сколь угодно равномерно малых и даже бесконечно малых возмущениях коэффициентов системы, не выводящих ее из класса линейных гамильтоновых систем.

Теорема I. *При $m = 2, 4$ для любой системы $A \in \mathcal{H}^m$ существует система $B \in \mathcal{H}_0(A)$, удовлетворяющая равенствам*

$$\lambda_1(B) = \omega(A), \quad \lambda_m(B) = \Omega(A).$$

Теорема II. *При $m = 2, 4$ для любой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и любого $\varepsilon > 0$ существует система $B_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$, удовлетворяющая равенствам*

$$\lambda_1(B_\varepsilon) = \omega(A), \quad \lambda_m(B_\varepsilon) = \Omega(A).$$

Глава 2

В разделе **2.1** даются определения условной устойчивости и неустойчивости линейной системы, а также определения условной экспоненциальной устойчивости и неустойчивости.

Определение V. Система $A \in \mathcal{M}^m$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ называется:

1) *k-мерно устойчивой*, если существует такое k-мерное подпространство S решений системы A, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, при котором любое решение $x \in S$, удовлетворяющее неравенству $|x(0)| < \delta$, удовлетворяет и неравенству $|x(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$;

2) *k-мерно неустойчивой*, если существуют такое k-мерное подпространство S решений системы A и такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $T \in \mathbb{R}^+$, при котором любое решение $x \in S$, удовлетворяющее равенству $|x(0)| = \delta$, удовлетворяет и неравенству $\sup\limits_{t \in [0,T]} |x(t)| > \varepsilon$;

3) *k-мерно экспоненциально устойчивой (неустойчивой)*, если существует такое k-мерное подпространство S решений системы A, что любое ненулевое решение $x \in S$ имеет отрицательный (положительный) характеристический показатель Ляпунова.

В разделе **2.2** доказывается одновременная условная стабилизируемость и дестабилизируемость линейной гамильтоновой системы бесконечно малыми гамильтоновыми возмущениями.

Теорема III. *Для любой системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$ существует система $B \in \mathcal{H}_0(A)$, которая одновременно и n-мерно устойчива, и n-мерно неустойчива.*

В разделе **2.3** доказывается одновременная условная экспоненциальная стабилизируемость и дестабилизируемость линейной гамильтоновой системы равномерно малыми гамильтоновыми возмущениями.

Теорема IV. *Для любой системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует система $B \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$, которая одновременно и n-мерно экспоненциально устойчива, и n-мерно экспоненциально неустойчива.*

Глава 3

В разделе **3.1** даются определения спектра, равномерно предельного спектра и гамильтоново равномерно предельного спектра, бесконечно мало возмущенного спектра и гамильтоново бесконечно мало возмущенного спектра, а также доказываются вспомогательные утверждения.

Пусть задан какой-либо *показатель*

$$\varkappa : S_* \to \mathbb{R}, \quad S_* \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^m} S_*(A),$$

определенный на ненулевых решениях всевозможных линейных систем.

Определение VI[27]. *Спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \{\varkappa(x) \mid x \in S_*(A)\}.$$

Определение VII. *Равномерно предельным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathrm{L}_\mathcal{M}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \operatorname*{Lim}_{\mathcal{M}^m \ni B \to A} \mathrm{Sp}_\varkappa(B)$$

таких значений $\mu \in \mathbb{R}$, для каждого из которых при любом $\varepsilon > 0$ найдутся система $B \in \mathcal{M}_\varepsilon(A)$ и ее решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие неравенству $|\varkappa(x) - \mu| < \varepsilon$. Кроме того, в случае четного m назовем *гамильтоново равномерно предельным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{H}^m$ аналогичное (с заменой всюду $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}$) множество

$$\mathrm{L}_\mathcal{H}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \operatorname*{Lim}_{\mathcal{H}^m \ni B \to A} \mathrm{Sp}_\varkappa(B).$$

Определение VIII. *Бесконечно мало возмущенным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \bigcup_{B \in \mathcal{M}_0(A)} \mathrm{Sp}_\varkappa(B)$$

таких значений $\mu \in \mathbb{R}$, для каждого из которых найдутся система $B \in \mathcal{M}_0(A)$ и ее решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие равенству $\varkappa(x) = \mu$. Кроме того, в случае четного m назовем *гамильтоново бесконечно мало возмущенным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{H}^m$ аналогичное (с заменой всюду $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}$) множество

$$\mathcal{H}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \bigcup_{B \in \mathcal{H}_0(A)} \mathrm{Sp}_\varkappa(B).$$

[27] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия матем. 2012. Т.76. №1. С. 149–172.

В разделе **3.2** установлено совпадение множества всех предельных значений показателей решений линейной гамильтоновой системы при равномерно малых ее возмущениях с аналогичным множеством, получаемым при равномерно малых гамильтоновых возмущениях той же системы. Кроме того, установлено совпадение множества всех значений показателей решений линейной гамильтоновой системы при бесконечно малых ее возмущениях с аналогичным множеством, получаемым при бесконечно малых гамильтоновых ее возмущениях.

Лемма I. *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой системы $B \in \mathcal{M}_\delta(A)$ и любого решения $x \in S_*(B)$ существует система $C \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$, также имеющая решение $x \in S_*(C)$.*

Лемма II. *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$, любой системы $B \in \mathcal{M}_0(A)$ и любого решения $x \in S_*(B)$ существует система $C \in \mathcal{H}_0(A)$, также имеющая решение $x \in S_*(C)$.*

Теорема V. *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и любого показателя $\varkappa$ имеет место равенство*

$$\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) = \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_\varkappa(A).$$

Теорема VI. *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и любого показателя $\varkappa$ имеет место равенство*

$$\mathcal{H}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A) = \mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A).$$

Теорема VII. *Равенства из теорем* V и VI *справедливы, в частности, когда показатель $\varkappa$ является:*

1) *характеристическим показателем Ляпунова χ (верхним);*
2) *характеристическим показателем Перрона*[5] *π (нижним);*
3) *верхней (нижней) полной σ или векторной ζ частотой*[27]*;*
4) *верхней (нижней) скоростью блуждания μ*[27]*;*
5) *верхним (нижним) показателем блуждаемости ρ или блуждания η*[27]*.*

Определение IX[12]. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ назовем i-тый показатель Ляпунова системы $A \in \mathcal{H}^m$ *инвариантным относительно бесконечно малых (гамильтоновых) возмущений*, если для любой системы $B \in \mathcal{M}_0(A)$ (соответственно, $B \in \mathcal{H}_0(A)$) справедливо равенство $\lambda_i(B) = \lambda_i(A)$.

Теорема VIII. *Для любого четного m все одновременно показатели Ляпунова системы $A \in \mathcal{H}^m$ инвариантны относительно бесконечно малых возмущений тогда и только тогда, когда все они инвариантны относительно бесконечно малых гамильтоновых возмущений.*

Автор глубоко признательна научному руководителю профессору Игорю Николаевичу Сергееву за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе. Автор также благодарна доценту Быкову Владимиру Владиславовичу за полезные замечания.

Работы автора по теме диссертации

[1] Салова Т.В. Одновременная достижимость центральных показателей четырехмерных гамильтоновых систем при бесконечно малых гамильтоновых возмущениях // Дифференц. уравнения. 2014. **50**. №11. С. 1441–1454.

[2] Салова Т.В. Одновременная достижимость центральных показателей маломерных линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2014. **50**. №10. С. 1412.

[3] Салова Т.В. Об одновременной условной стабилизируемости и дестабилизируемости линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2014. **50**. №12. С. 1676–1677.

[4] Салова Т.В. Об эффективности возмущений в классе линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2015. **51**. №1. С. 141–142.

[5] Салова Т.В. Об одновременной достижимости центральных показателей двумерных линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2006. **42**. №6. С. 854–855.

[6] Салова Т.В. Об эффективности гамильтоновых равномерно малых и бесконечно малых возмущений линейных систем / Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова (Ижевск, 9–11 июня 2015 г.). — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2015. С. 119–121.