МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

САЛОВА Татьяна Валентиновна

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор СЕРГЕЕВ Игорь Николаевич

Москва — 2015

Оглавление

Введение

Представленная работа является исследованием в области качественной теории дифференциальных уравнений.

Особое место в качественной теории дифференциальных уравнений занимают линейные системы, которые служат базой для изучения нелинейных систем по их линейному приближению. Линейные нестационарные системы имеют многочисленные приложения, которые порождают ряд новых задач теоретического характера, требующих изучения асимптотических свойств решений системы.

Актуальность темы исследования

Одним из главных направлений качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений является изучение характеристических показателей, которые были введены А.М. Ляпуновым [31] в связи с исследованием устойчивости по первому приближению, а также введенных позже показателей Перрона, Боля, Винограда, Миллионщикова и Изобова, отвечающих за разнообразные асимптотические свойства решений систем дифференциальных уравнений.

Изучением различных свойств перечисленых показателей решений и систем дифференциальных уравнений занимались многие математики. Приведем далеко не полный список тех из них, кто внес значительный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград [16, 17], Б.Ф. Былов [7, 9], В.М. Миллионщиков [34, 35, 36], Н.А. Изобов [23, 25, 26], М.И. Рахимбердиев [43, 44], И.Н. Сергеев [53, 59], В.В. Веременюк [11, 12], Е.К. Макаров [32, 33], С.Н. Попова [41, 42], Е.А. Барабанов [2, 3], О.И. Морозов [37, 38], А.С. Фурсов [66, 67], А.Н. Ветохин [14, 15], В.В. Быков [4, 5], Ю.И. Дементьев [19, 20] и другие. Здесь указаны лишь по 2–3 работы каждого автора, а исчерпывающую (на соответствующий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах [24, 27] и монографиях [6, 28].

Каждая система из m линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка (т. е. с m-мерным фазовым пространством) имеет ровно *m показателей Ляпунова* [6, 21], занумерованных в порядке нестрогого возрастания. Если старший (m-й) показатель Ляпунова отрицателен, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво, а если положителен — то неустойчиво. Аналогично, i-й показатель характеризует условную устойчивость относительно i-мерного подпространства.

Из результатов работы О. Перрона [70] известно, что старший показатель Ляпунова, рассматриваемый как функционал на пространстве m-мерных систем с *равномерной* на положительной полуоси нормой, имеет точки разрыва. Вследствие этого, в теории характеристических показателей получило развитие целое направление, состоящее в исследовании устойчивости показателей Ляпунова при малых возмущениях коэффициентов системы.

Р.Э. Виноград ввел *верхний и нижний центральные* показатели [17], ограничивающие соответственно сверху и снизу подвижность показателей Ляпунова под действием равномерно малых возмущений системы. В.М. Миллионщиков с помощью разработанного им *метода поворотов* установил [34], что эти границы подвижности являются точными, т. е. они *достижимы* при сколь угодно малых возмущениях. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ точные нижняя и верхняя границы подвижности i-го показателя Ляпунова называются соответственно *минимальным и максимальным* i-ми показателями. Из упомянутых работ Р.Э. Винограда и В.М. Миллионщикова следует, что минимальный младший показатель совпадает с нижним центральным, а максимальный старший — с верхним центральным показателями системы.

Минимальные и максимальные показатели отвечают за *стабилизируемость* и *дестабилизируемость* системы. С одной стороны, если минимальный старший показатель системы неположителен, то она стабилизируема равномерно малыми возмущениями (т. е. в сколь угодно малой ее окрестности существует устойчивая система), а если положителен — не стабилизируема. С другой стороны, если максимальный старший показатель системы неотрицателен, то она дестабилизируема равномерно малыми возмущениями, а если отрицателен — не дестабилизируема. Аналогичную роль, но по отношению к условной устойчивости, играют остальные минимальные и максимальные показатели.

В теории показателей Ляпунова наряду с равномерно малыми возмущениями рассматриваются еще и *бесконечно малые* (т. е. убывающие к нулю при неограниченном увеличении времени) возмущения. Известно [6, 52], что все минимальные и максимальные (следовательно, и центральные) показатели инвариантны относительно бесконечно малых возмущений. При исследовании подвижности показателей Ляпунова любое бесконечно малое возмущение системы можно превратить в сколь угодно малое, но не наоборот. Тем не менее [51, 53, 60], в классе бесконечно малых возмущений также достижимы все максимальные и младшие (заведомо первый и второй) минимальные показатели.

Р.Э. Виноградом [6, с. 180] установлена одновременная достижимость центральных показателей для диагональных систем при четном m. В работе [40] Т.Е. Нуждовой доказана одновременная их достижимость для систем общего вида, но лишь при $m = 2$. Окончательное же (при произвольном m) решение задачи об одновременной достижимости центральных показателей получено К.А. Дибом [22].

Пусть теперь m четно: здесь и далее, когда речь идет о четномерном фазовом пространстве, считаем $m = 2n$. Тогда в пространстве линейных систем дифференциальных уравнений можно выделить подпространство *линейных гамильтоновых систем*, играющих важную роль в механике. Такие системы возникают, в частности, как системы в вариациях вдоль решений произвольных (нелинейных) гамильтоновых систем.

В.М. Миллионщиковым была поставлена задача о достижимости в классе гамильтоновых систем центральных показателей, а также остальных максимальных и минимальных показателей. Достижимость центральных показателей гамильтоновой системы для произвольного n в классе равномерно малых гамильтоновых возмущений установил Фам Фу [63, 64], а аналогичную достижимость произвольного максимального показателя — В.В. Веременюк [12, 13].

Известно также, что любая гамильтонова система:

- $2n$-мерно стабилизируема и 1-мерно дестабилизируема *малыми в среднем* гамильтоновыми возмущениями [54];
- n-мерно дестабилизируема равномерно малыми гамильтоновыми возмущениями [39] и n-мерно же стабилизируема равномерно малыми гамильтоновыми возмущениями [56];
- содержит в любой своей окрестности гамильтонову систему, у которой n-й показатель Ляпунова отрицателен, а также имеет бесконечно мало возмущенную гамильтонову систему, у которой n-й показатель Ляпунова неположителен [57];
- при $n = 1$ замечательна тем, что все ее максимальные и минимальные показатели достижимы при равномерно малых гамильтоновых возмущениях [61] (т. е. по отношению к показателям Ляпунова гамильтоновы возмущения *эффективны*).

И.Н. Сергеевым были поставлены задачи об одновременной достижимости центральных показателей в классе гамильтоновых систем, об одновременной условной (относительно фазового подпространства половинной размерности) стабилизируемости и дестабилизируемости в классе гамильтоновых систем, а также об эффективности гамильтоновых возмущений (в работе [45] уже рассматривалась похожая задача об эффективности разрывных ортогональных преобразований координат).

Основные результаты диссертации

относятся к исследованию показателей Ляпунова и свойств устойчивости линейных гамильтоновых систем при гамильтоновых возмущениях их коэффициентов.

В *первой главе* настоящей работы даются необходимые понятия с описанием их общих свойств и доказываются вспомогательные утверждения, которые используются при доказательстве основных результатов. Для любой двумерной или четырехмерной линейной гамильтоновой системы доказана одновременная достижимость верхнего и нижнего центральных показателей показателями Ляпунова при сколь угодно малых и даже бесконечно малых возмущениях коэффициентов системы, не выводящих ее из класса линейных гамильтоновых систем.

При доказательстве этого факта использован метод поворотов В.М. Миллионщикова [34], адаптированный Фамом Фу [63] для гамильтоновых систем, а также идеи, заимствованные из работ И.Н. Сергеева [53, 55].

Во второй главе диссертационной работы доказано, что любая линейная гамильтонова система одновременно условно (относительно фазового подпространства половинной размерности) как стабилизируема, так и дестабилизируема бесконечно малыми гамильтоновыми возмущениями, а также одновременно условно *экспоненциально* стабилизируема и дестабилизируема равномерно малыми гамильтоновыми возмущениями.

Третья глава работы посвящена доказательству эффективности гамильтоновых возмущений по отношению к спектру какого-либо показателя (в частности, показателей Ляпунова). А именно, установлено совпадение множества всех предельных значений показателей решений линейной гамильтоновой системы при равномерно малых ее возмущениях с аналогичным множеством, получаемым при равномерно малых гамильтоновых возмущениях той же системы. Кроме того, установлено совпадение множества всех значений показателей решений линейной гамильтоновой системы при бесконечно малых ее возмущениях с аналогичным множеством, получаемым при бесконечно малых гамильтоновых ее возмущениях.

Таким образом, в диссертации получен частичный положительный ответ на вопрос об одновременной достижимости центральных показателей в классе гамильтоновых систем, решена задача об одновременной условной (относительно фазового подпространства половинной размерности) стабилизируемости и дестабилизируемости в классе гамильтоновых систем, а также о предельной эффективности гамильтоновых возмущений по отношению к спектру показателей Ляпунова.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах ее автора [46–50].

Автор глубоко признательна профессору Игорю Николаевичу Сергееву за научное руководство, постоянное внимание и помощь в работе. Автор также благодарна доценту Быкову Владимиру Владиславовичу за полезные замечания.

Формулировки основных результатов

Для заданного натурального числа m рассмотрим множество $\mathcal{M}^m$ линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной кусочно непрерывной оператор-функцией $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^m$. Множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^m$ обозначим через $S_*(A)$, а через $X_A(t, \tau)$, где $t, \tau \in \mathbb{R}^+$, будем обозначать ее *оператор Коши*.

Множество $\mathcal{M}^m$ наделим структурой линейного пространства с естественными для оператор-функций операциями сложения и умножения на действительное число. Пространство $\mathcal{M}^m$ превратим в нормированное пространство, введя в нем равномерную на полупрямой $\mathbb{R}^+$ норму

$$\|A\| = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t)\|,$$

где

$$\|A(t)\| = \sup_{|x|=1} |A(t)x|, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m).$$

Определение I [21, с. 125]. Пусть функция $x(t)$, определенная на полуоси $t \in \mathbb{R}^+$, не принимает нулевых значений. Назовем *характеристическим показателем Ляпунова* этой функции величину

$$\chi(x) \equiv \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|.$$

Для функции, принимающей нулевые значения, понятие характеристического показателя Ляпунова будем считать неопределенным.

Определение II [31, 36]. Назовем *показателями Ляпунова* системы $A \in \mathcal{M}^m$ числа

$$\lambda_i(A) \equiv \inf_{F \in \mathcal{G}^i} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln \|X_A|_F(t, 0)\|, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\mathcal{G}^i$ — множество i-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^m$, а $X_A|_F$ — сужение оператора Коши системы A на подпространство $F \subset \mathbb{R}^m$.

Из формулы следует, что показатели Ляпунова занумерованы в порядке нестрогого возрастания

$$\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m(A).$$

Определение III [6, с. 116]. *Верхним* $\Omega(A)$ и соответственно *нижним* $\omega(A)$ *центральными показателями* системы $A \in \mathcal{M}^m$ называются числа

$$\Omega(A) \equiv \inf_{T>0} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X_A(sT,(s-1)T)\|,$$

$$\omega(A) \equiv \sup_{T>0} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X_A((s-1)T,sT)\|^{-1}.$$

Показатели Ляпунова, а также верхний и нижний центральные показатели систем из пространства $\mathcal{M}^m$ будем рассматривать как определенные на нем функционалы

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \Omega, \omega : \mathcal{M}^m \to \mathbb{R}.$$

Если m четно и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ задан ортогональный кососимметрический оператор J (т. е. $J^{-1} = J^* = -J$), то в пространстве $\mathcal{M}^m$ можно выделить линейное нормированное подпространство $\mathcal{H}^m$ так называемых *линейных гамильтоновых систем*, отличающихся тем, что для каждой из них оператор $JA(t)$ симметричен при каждом $t \in \mathbb{R}^+$.

Определение IV [53]. Для всякой системы $A \in \mathcal{M}^m$ ($A \in \mathcal{H}^m$) обозначим:

a) через $\mathcal{M}_\varepsilon(A)$ ($\mathcal{H}_\varepsilon(A)$) — множество систем $B \in \mathcal{M}^m$ ($B \in \mathcal{H}^m$), удовлетворяющих условию $\|B - A\| < \varepsilon$, а возмущения такого типа будем называть *равномерно малыми*;

b) через $\mathcal{M}_0(A)$ ($\mathcal{H}_0(A)$) — множество систем $B \in \mathcal{M}^m$ ($B \in \mathcal{H}^m$), удовлетворяющих условию $\|B(t) - A(t)\| \to 0$, $t \to \infty$, при выполнении которого возмущение $B - A$ назовем *бесконечно малым.*

Теорема I (теорема 1 в п. 1.3). *При $m = 2, 4$ для любой системы $A \in \mathcal{H}^m$ существует система $B \in \mathcal{H}_0(A)$, удовлетворяющая равенствам*

$$\lambda_1(B) = \omega(A), \quad \lambda_m(B) = \Omega(A).$$

Теорема II (следствие 1 в п. 1.3). *При $m = 2, 4$ для любой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и любого $\varepsilon > 0$ существует система $B_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$, удовлетворяющая равенствам*

$$\lambda_1(B_\varepsilon) = \omega(A), \quad \lambda_m(B_\varepsilon) = \Omega(A).$$

Определение V. Система $A \in \mathcal{M}^m$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ называется:

1) *k-мерно устойчивой*, если существует такое k-мерное подпространство S решений системы A, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, при котором любое решение $x \in S$, удовлетворяющее неравенству $|x(0)| < \delta$, удовлетворяет и неравенству $|x(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$;

2) *k-мерно неустойчивой*, если существуют такое k-мерное подпространство S решений системы A и такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $T \in \mathbb{R}^+$, при котором любое решение $x \in S$, удовлетворяющее равенству $|x(0)| = \delta$, удовлетворяет и неравенству

$$\sup_{t \in [0,T]} |x(t)| > \varepsilon;$$

3) *k-мерно экспоненциально устойчивой (неустойчивой)*, если существует такое k-мерное подпространство S решений системы A, что любое ненулевое решение $x \in S$ имеет отрицательный (положительный) характеристический показатель Ляпунова.

Теорема III (теорема 2 в п. 2.2). *Для любой системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$ существует система $B \in \mathcal{H}_0(A)$, которая одновременно и n-мерно устойчива, и n-мерно неустойчива.*

Теорема IV (теорема 3 в п. 2.3). *Для любой системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует система $B \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$, которая одновременно и n-мерно экспоненциально устойчива, и n-мерно экспоненциально неустойчива.*

Пусть задан какой-либо *показатель*

$$\varkappa : S_* \to \mathbb{R}, \quad S_* \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^m} S_*(A),$$

определенный на ненулевых решениях всевозможных линейных систем.

Определение VI [62]. *Спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \{\varkappa(x) \mid x \in S_*(A)\}.$$

Определение VII. *Равномерно предельным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \operatorname*{Lim}_{\mathcal{M}^m \ni B \to A} \mathrm{Sp}_\varkappa(B)$$

таких значений $\mu \in \mathbb{R}$, для каждого из которых при любом $\varepsilon > 0$ найдутся система $B \in \mathcal{M}_\varepsilon(A)$ и ее решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие неравенству $|\varkappa(x) - \mu| < \varepsilon$. Кроме того, в случае четного m назовем *гамильтоново равномерно предельным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{H}^m$ аналогичное (с заменой всюду $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}$) множество

$$\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \operatorname*{Lim}_{\mathcal{H}^m \ni B \to A} \mathrm{Sp}_\varkappa(B).$$

Определение VIII. *Бесконечно мало возмущенным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \bigcup_{B \in \mathcal{M}_0(A)} \mathrm{Sp}_\varkappa(B)$$

таких значений $\mu \in \mathbb{R}$, для каждого из которых найдутся система $B \in \mathcal{M}_0(A)$ и ее решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие равенству $\varkappa(x) = \mu$. Кроме того, в случае четного m назовем *гамильтоново бесконечно мало возмущенным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{H}^m$ аналогичное (с заменой всюду $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}$) множество

$$\mathcal{H}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \bigcup_{B \in \mathcal{H}_0(A)} \mathrm{Sp}_\varkappa(B).$$

Лемма I (лемма 15 в п. 3.2). *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для* *любой системы $B \in \mathcal{M}_\delta(A)$ и любого решения $x \in S_*(B)$ существует система $C \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$, также имеющая решение $x \in S_*(C)$.*

Лемма II (лемма 16 в п. 3.2). *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$, любой системы $B \in \mathcal{M}_0(A)$ и любого решения $x \in S_*(B)$ существует система $C \in \mathcal{H}_0(A)$, также имеющая решение $x \in S_*(C)$.*

Теорема V (теорема 5 в п. 3.2). *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и любого показателя $\varkappa$ имеет место равенство*

$$\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) = \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_\varkappa(A).$$

Теорема VI (теорема 6 в п. 3.2). *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и любого показателя $\varkappa$ имеет место равенство*

$$\mathcal{H}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A) = \mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A).$$

Теорема VII (следствие 2 в п. 3.2). *Равенства из теорем* V и VI *справедливы, в частности, когда показатель $\varkappa$ является:*

1) *характеристическим показателем Ляпунова χ (верхним);*

2) *нижним показателем Перрона π* [28, §2] (о спектре нижних показателей Перрона линейной системы см. работы [23, 2]);

3) *верхней (нижней) полной σ или векторной ζ частотами* [62];

4) *верхней (нижней) скоростью блуждания μ* [62];

5) *верхним (нижним) показателем блуждаемости ρ или блуждания η* [62].

Определение IX [53]. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ назовем i-тый показатель Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$ *устойчивым при равномерно малых возмущениях*, если функционал λ_i непрерывен в точке $A \in \mathcal{M}^m$.

Определение X [53]. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ назовем i-тый показатель Ляпунова системы $A \in \mathcal{H}^m$ *инвариантным относительно бесконечно малых (гамильтоновых) возмущений*, если для любой системы $B \in \mathcal{M}_0(A)$ (соответственно, $B \in \mathcal{H}_0(A)$) справедливо равенство $\lambda_i(B) = \lambda_i(A)$.

Непосредственно из теоремы V вытекает следующее утверждение (см. теорему 7 в §3.2), выводимое также и из работ [8, 35, 11]: *для* *любого четного числа m все одновременно показатели Ляпунова гамильтоновой системы $A \in \mathcal{H}^m$ устойчивы при равномерно малых возмущениях тогда и только тогда, когда все они устойчивы при равномерно малых возмущениях в классе гамильтоновых систем.*

Теорема VIII (теорема 8 в п. 3.2). *Для любого четного m все одновременно показатели Ляпунова системы $A \in \mathcal{H}^m$ инвариантны относительно бесконечно малых возмущений тогда и только тогда, когда все они инвариантны относительно бесконечно малых гамильтоновых возмущений.*

Используемые обозначения

В главах диссертации принята двойная нумерация формул (первое число обозначает номер главы, второе число — номер формулы), сквозная нумерация определений, свойств, лемм, теорем и их следствий.

Приведем список наиболее часто используемых в работе обозначений:

- $m,\ n$ — натуральные числа;
- $\mathbb{N},\ \mathbb{R}$ — множества натуральных и действительных чисел соответственно;
- $\mathbb{R}^+ = [0; \infty)$ — временна́я полуось;
- $\mathcal{M}^m$ — множество линейных систем m-го порядка с ограниченными кусочно непрерывными на полупрямой $\mathbb{R}^+$ оператор-функциями;
- $\mathcal{H}^m$ — множество линейных гамильтоновых систем m-го порядка с ограниченными кусочно непрерывными на полупрямой $\mathbb{R}^+$ оператор-функциями;
- $S_*(A)$ — множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^m$;
- $\operatorname{End}\mathbb{R}^m$ — множество всех линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$;
- $\|A\| = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t)\|$ — равномерная норма в пространстве $\mathcal{M}^m$;

- $X_A(t,\tau)$ — оператор Коши системы $A \in \mathcal{M}^m$;
- $\lambda_i(A)$ — i-й показатель Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$;
- $\Omega(A),\ \omega(A)$ — верхний и нижний центральные показатели системы $A \in \mathcal{M}^m$ соответственно;
- σ_i — i-е сингулярное число невырожденного линейного оператора $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$;
- δ_i — i-е логарифмическое сингулярное число невырожденного линейного оператора $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$;
- $\chi_\tau^t(x)$ — рост функции x от τ до t;
- $\chi(x)$ — характеристический показатель Ляпунова функции x;
- $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — ортогональный кососимметрический оператор;
- $\langle x, y \rangle$ — симплектическое произведение $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$;
- $\mathcal{M}_\varepsilon(A)$ — множество систем $B \in \mathcal{M}^m$, удовлетворяющих условию $\|B - A\| < \varepsilon$;
- $\mathcal{H}_\varepsilon(A)$ — множество систем $B \in \mathcal{H}^m$, удовлетворяющих условию $\|B - A\| < \varepsilon$;
- $\mathcal{M}_0(A)$ — множество систем $B \in \mathcal{M}^m$, удовлетворяющих условию $\|B(t) - A(t)\| \to 0,\ t \to \infty$;
- $\mathcal{H}_0(A)$ — множество систем $B \in \mathcal{H}^m$, удовлетворяющих условию $\|B(t) - A(t)\| \to 0,\ t \to \infty$;
- $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$ — линейная оболочка векторов $e_1, \ldots, e_k$ некоторого векторного пространства;
- $\mathcal{L}^\perp(e_1, \ldots, e_k)$ — ортогональное дополнение к $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$;
- $I_n, I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — тождественный оператор;
- P_G — ортогональный проектор на подпространство $G \subset \mathbb{R}^m$;
- $\measuredangle(x, y) \in [0, \pi]$ — угол между ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{R}^m$;
- $\measuredangle(M, N) \equiv \inf\limits_{x \in M,\ y \in N} \measuredangle(x, y)$ — угол между множествами $M, N \subset \mathbb{R}^m$;

- $\varkappa : S_* \to \mathbb{R}$ — показатель, определенный на $S_* \equiv \bigcup\limits_{A\in\mathcal{M}^m} S_*(A)$;
- $\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \{\varkappa(x) | x \in S_*(A)\}$ — спектр показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{M}^m$;
- $\mathrm{L}_\mathcal{M}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \operatorname*{Lim}\limits_{\mathcal{M}^m \ni B \to A} \mathrm{Sp}_\varkappa(B)$ — равномерно предельный спектр показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{M}^m$;
- $\mathrm{L}_\mathcal{H}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \operatorname*{Lim}\limits_{\mathcal{H}^{2n} \ni B \to A} \mathrm{Sp}_\varkappa(B)$ — гамильтоново равномерно предельный спектр показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$;
- $\mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A)$ — бесконечно мало возмущенный спектр показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{M}^m$;
- $\mathcal{H}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A)$ — гамильтоново бесконечно мало возмущенный спектр показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$.

Глава 1

Одновременная достижимость центральных показателей маломерных линейных гамильтоновых систем

Основным результатом настоящей главы является доказательство одновременной достижимости центральных показателей двумерных и четырехмерных линейных гамильтоновых систем в классе равномерно малых и бесконечно малых возмущений.

1.1 Основные понятия и факты

Для заданного натурального числа m рассмотрим множество $\mathcal{M}^m$ линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

с ограниченными кусочно непрерывными на полупрямой $\mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty)$ оператор-функциями

$$A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^m.$$

В дальнейшем, пользуясь вольностью речи, будем отождествлять систему (1.1) с оператор-функцией A, фигурирующей в записи этой системы.

Множество $\mathcal{M}^m$ наделим структурой линейного пространства с естественными для оператор-функций операциями сложения и умножения на действительное число.

Пространство $\mathcal{M}^m$ превратим в нормированное пространство, введя в нем равномерную на полупрямой $\mathbb{R}^+$ норму

$$\|A\| = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A(t)\|,$$

где

$$\|A(t)\| = \sup_{|x|=1} |A(t)x|,$$

$$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Так как оператор-функция $A \in \mathcal{M}^m$ ограничена на полупрямой $\mathbb{R}^+$, то ее норма

$$a_A \equiv \|A\| = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A(t)\| \tag{1.2}$$

конечна.

Для всякой системы $A \in \mathcal{M}^m$ условимся обозначать через $X_A(t,\tau)$, где $t, \tau \in \mathbb{R}^+$, ее *оператор Коши*, т. е. линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$ и для каждого решения x системы A удовлетворяющий условию

$$X_A(t,\tau)x(\tau) = x(t).$$

Существование и единственность такого оператора доказана в [21, с. 72].

Определение 1 [31, 36]. Назовем *показателями Ляпунова* системы $A \in \mathcal{M}^m$ числа

$$\lambda_i(A) \equiv \inf_{F\in\mathcal{G}^i} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|X_A|_F(t,0)\|, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.3}$$

где $\mathcal{G}^i$ — множество i-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^m$, а $X_A|_F$ — сужение оператора Коши системы A на подпространство $F \subset \mathbb{R}^m$.

Из формулы (1.3) следует, что показатели Ляпунова занумерованы в порядке нестрогого возрастания

$$\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m(A).$$

Определение 2 [6, с. 116]. *Верхним* $\Omega(A)$ и соответственно *нижним* $\omega(A)$ *центральными показателями* системы $A \in \mathcal{M}^m$ называются числа

$$\Omega(A) \equiv \inf_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X_A(sT, (s-1)T)\|, \tag{1.4}$$

$$\omega(A) \equiv \sup_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X_A((s-1)T, sT)\|^{-1}. \qquad (1.5)$$

Показатели Ляпунова, а также верхний и нижний центральные показатели систем из пространства $\mathcal{M}^m$ будем рассматривать как определенные на нем функционалы

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \Omega, \omega : \mathcal{M}^m \to \mathbb{R}.$$

Определение 3. *Сингулярными числами* невырожденного линейного оператора $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ называются собственные числа оператора $\sqrt{A^*A}$.

Обозначим их $\sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_m$. Заметим, что все они положительны в силу невырожденности оператора A.

Определение 4. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ назовем *i-м сингулярным числом* невырожденного линейного оператора $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ число

$$\sigma'_i \equiv \inf_{L \in \mathcal{G}^i} \max_{\substack{x \in L \\ |x|=1}} |Ax|,$$

где $\mathcal{G}^i$ — множество всех i-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^m$. Заметим, что $\sigma'_1 \leqslant \sigma'_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma'_m$.

Утверждение 1. *Определения 3 и 4 эквивалентны.*

Доказательство. Докажем вначале, что

$$\sigma'_i \leqslant \sigma_i. \qquad (1.6)$$

Выберем произвольный невырожденный оператор $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. По определению нормы

$$\inf_{L \in \mathcal{G}^i} \max_{\substack{x \in L \\ |x|=1}} |Ax| = \inf_{L \in \mathcal{G}^i} \max_{\substack{x \in L \\ |x|=1}} \sqrt{(A^*Ax, x)}.$$

Оператор A, согласно теореме о полярном разложении невырожденного линейного оператора [18, с. 174], допускает полярное разложение $A = US$, где U — ортогональный оператор, а S — положительный симметрический оператор. По теореме о собственном базисе симметрического оператора [18, с. 156] матрица оператора S в этом базисе диагональна, т. е. $S = Q^{-1}DQ$, где матрица D — диагональная, а Q — ортогональная. Поскольку матрица Q действительная и ортогональная, для нее выполнено $Q^* = Q^{-1}$. Тогда справедливы равенства

$$S = Q^{-1}DQ = Q^*DQ, \quad A = UQ^*DQ, \quad A^* = Q^*D^*QU^*.$$

Учитывая, что $D^* = D$, получим $A^* = Q^*DQU^*$. Тогда

$$A^*A = Q^*DQU^*UQ^*DQ = Q^*D^2Q.$$

С учетом последнего равенства получаем цепочку:

$$\sigma_i' = \inf_{L\in\mathcal{G}^i} \max_{\substack{x\in L\\ |x|=1}} \sqrt{(A^*Ax,x)} = \inf_{L\in\mathcal{G}^i} \max_{\substack{x\in L\\ |x|=1}} \sqrt{(Q^*D^2Qx,x)} =$$

$$= \inf_{L\in\mathcal{G}^i} \max_{\substack{x\in L\\ |x|=1}} \sqrt{(D^2Qx,Qx)} = \inf_{QL\in\mathcal{G}^i} \max_{\substack{Qx\in QL\\ |Qx|=1}} \sqrt{(D^2Qx,Qx)} =$$

$$= \inf_{L\in\mathcal{G}^i} \max_{\substack{y\in L\\ |y|=1}} \sqrt{(D^2y,y)} = \inf_{L\in\mathcal{G}^i} \max_{\substack{y\in L\\ |y|=1}} \sqrt{\sum_{k=1}^m \sigma_k^2 y_k^2} \leqslant \max_{\substack{y\in L_0\\ |y|=1}} \sqrt{\sum_{k=1}^m \sigma_k^2 y_k^2} = \sigma_i,$$

где в качестве подпространства L_0 берется $L_0 = \{y : y = (y_1, ..., y_i, 0, ..., 0)\}$.

С другой стороны, рассмотрим собственный ортонормированный базис $e_1, ..., e_m$, состоящий из собственных векторов D, соответствующих собственным значениям $\sigma_1, ..., \sigma_m$. Для произвольного $k \in \{1, \dots, m\}$ рассмотрим подпространства $R^{m-k+1} = \mathcal{L}(e_k, ..., e_m)$ и произвольное k-мерное подпространство L^k. Возьмем $y \in R^{m-k+1}$, тогда для некоторого набора $\xi_i \in \mathbb{R},\ i = k, \dots, m$, справедливо равенство $y = \xi_k e_k + ... + \xi_m e_m$. Вычислим

$$(D^2y,y) = (\xi_k\sigma_k^2 e_k + ... + \xi_m\sigma_m^2 e_m, \xi_k e_k + ... + \xi_n e_m) =$$
$$= \xi_k^2\sigma_k^2 + ... + \xi_m^2\sigma_m^2 \geqslant \sigma_k^2(y,y).$$

Учитывая, что $L^k \bigcap R^{m-k+1} \neq \{0\}$, существует $x_0 \in L^k \bigcap R^{m-k+1}$, $x_0 \neq 0$. Не ограничивая общности будем считать $|x_0| = 1$. Тогда

$$(D^2x_0, x_0) \geqslant \sigma_k^2(x_0,x_0) = \sigma_k^2.$$

Следовательно,

$$\max_{\substack{x\in L^k\\ |x|=1}} (D^2x,x) \geqslant \sigma_k^2,$$

а значит
$$\max_{\substack{x\in L^k\\ |x|=1}} \sqrt{(D^2x,x)} \geqslant \sigma_k.$$
Так как L^k бралось произвольное, то
$$\sigma'_k = \inf_{L\in\mathcal{G}^k} \max_{\substack{x\in L\\ |x|=1}} \sqrt{(D^2x,x)} \geqslant \sigma_k. \tag{1.7}$$
Учитывая (1.6) и (1.7), получаем
$$\sigma_i = \inf_{L\in\mathcal{G}^i} \max_{\substack{x\in L\\ |x|=1}} |Ax|.$$
Утверждение 1 доказано.

Замечание 1. *В определении 4 нижняя грань достигается, т. е.*
$$\sigma'_i \equiv \min_{L\in\mathcal{G}^i} \max_{\substack{x\in L\\ |x|=1}} |Ax|.$$

Доказательство. Будем пользоваться обозначениями из доказательства утверждения 1.

Рассмотрим непрерывную функцию (D^2x,x), $x\in\mathbb{R}^m$, которая на единичной сфере (компакт) достигает максимума $(\sigma'_m)^2$ в некоторой точке x', где $|x'|=1$. Следовательно, для всех $x\in\mathbb{R}^m$, для которых $|x|=1$, выполнено неравенство $(D^2x,x)\leqslant(\sigma'_m)^2$, причем $(D^2x',x')=(\sigma'_m)^2$.

Из того, что для произвольного x справедливо
$$(D^2x,x)\leqslant(\sigma'_m)^2(x,x),$$
следует, что
$$(D^2x-(\sigma'_m)^2x,x)\leqslant 0,$$
причем
$$(D^2x'-(\sigma'_m)^2x',x')=0.$$

Дальнейшему доказательству предпошлем лемму 1.

Лемма 1. *Пусть $B\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ — самосопряженный оператор и для любого $x\in\mathbb{R}^m$ справедливо*
$$(Bx,x)\leqslant 0. \tag{1.8}$$

Тогда если для некоторого вектора $l \in \mathbb{R}^m$ верно равенство

$$(Bl, l) = 0, \tag{1.9}$$

то и $Bl = 0$.

Доказательство. Покажем, что для любого вектора $h \in \mathbb{R}^m$ имеем $(Bl, h) = 0$. Для этого положим вектор $x = l + th$, где t — произвольное действительное число. Тогда в силу условия (1.8) будем иметь

$$(B(l + ht), l + ht) = (Bl, l) + t(Bl, h) + t(Bh, l) + t^2(Bh, h) \leqslant 0.$$

Так как B — самосопряженный, то

$$(Bl, h) = (l, B^*h) = (l, Bh).$$

С учетом этого и (1.9), получим неравенство

$$2t(Bl, h) + t^2(Bh, h) \leqslant 0, \tag{1.10}$$

которое должно выполняться для любого t и любого h. Это парабола (если $(Bh, h) < 0$) с ветвями, направленными вниз, так как $(Bh, h) \leqslant 0$ по условию. Следовательно, неравенство будет выполнено для любого t и любого h только в том случае, если $(Bl, h) = 0$, а значит $Bl = 0$.

Если же $(Bh, h) = 0$, то неравенство (1.10) примет вид $2t(Bl, h) \leqslant 0$, для любого t и любого h, а значит $(Bl, h) = 0$, откуда следует, что $Bl = 0$.

Лемма 1 доказана.

Следовательно,

$$D^2x' - (\sigma'_m)^2x' = 0,$$

а значит $(\sigma'_m)^2$ — собственное значение D^2. Следовательно, $\sigma'_m = \sigma_m$.

Возьмем ортогональное дополнение к вектору x'. Получим L^{m-1} — $(m-1)$-мерное подпространство, инвариантное относительно D^2. Достигаем максимума на L^{m-1}. Продолжая этот процесс далее, получим $\sigma'_i = \sigma_i,\ i = 1, \ldots, m$. Таким образом, построены i-мерные подпространства $L^i,\ i = 1, \ldots, m$, на которых реализуются σ'_i.

Замечание 1 доказано.

Определение 5. Назовем числа $\delta_i = \ln \sigma_i,\ i = 1, \ldots, m$, *логарифмическими сингулярными числами* невырожденного линейного оператора $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Дадим эквивалентное определение.

Определение 6. Числа

$$\delta_i = \min_{L \in \mathcal{G}^i} \max_{\substack{x \in L \\ |x|=1}} \ln |Ax|, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\mathcal{G}^i$ — множество всех i-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^m$, назовем *логарифмическими сингулярными числами* невырожденного линейного оператора $A \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^m$ (заметим, что они удовлетворяют неравенствам $\delta_1 \leqslant \ldots \leqslant \delta_m$).

Замечание 2. *Эквивалентность определений 5 и 6 следует из эквивалентности определений 3 и 4.*

Пусть на некотором подмножестве R числовой оси заданы числа $t \neq \tau$ и вектор-функция x, принимающая ненулевые значения в нормированном пространстве.

Определение 7 [53]. Назовем *ростом функции* x от τ до t число

$$\chi_\tau^t(x) \equiv \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{|x(t)|}{|x(\tau)|}. \tag{1.11}$$

Определение 8 [53]. Пусть функция $x(t)$, определенная на полуоси $t \in \mathbb{R}^+$, не принимает нулевых значений. Назовем *характеристическим показателем Ляпунова* этой функции величину (см. формулу (1.11))

$$\chi(x) \equiv \varlimsup_{t \to \infty} \chi_0^t(x).$$

Для функции, принимающей нулевые значения, понятие характеристического показателя Ляпунова и понятие роста будем считать неопределенными.

Отметим некоторые свойства функции χ_τ^t, вытекающие из формулы (1.11) [53].

1°. Верно равенство $\chi_\tau^t(x) = \chi_t^\tau(x)$.

2°. Если c — ненулевая константа, то

$$\chi_\tau^t(cx) = \chi_\tau^t(x).$$

Если x — ненулевое решение уравнения $A \in \mathcal{M}^m$, то имеют место следующие оценки (вытекающие из ограниченности (1.2) оператор-функции A):

3°. $-a_A \leqslant \chi_\tau^t(x) \leqslant a_A$.

4°. $|\chi_\tau^t(x) - \chi_\sigma^s(x)| \leqslant \frac{2a_A(|t-s|+|\tau-\sigma|)}{|t-\tau|}$.

Пусть m четно: здесь и далее, когда речь идет о четномерном фазовом пространстве, считаем $m = 2n$. И пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ задан ортогональный кососимметрический оператор J (т. е. $J^{-1} = J^* = -J$). Тогда для некоторого базиса в $\mathbb{R}^{2n}$ матрица оператора J будет иметь вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 9 [1, 21, 30]. *Гамильтоновой (канонической)* называется система вида

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(t,q,p)}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(t,q,p)}{\partial q} \end{cases}, \quad (t,q,p) \in G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad H : G \to \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \operatorname{colon}\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial q_n}\right), \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \operatorname{colon}\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right).$$

Гамильтоновы системы играют важдую роль в механике, где переменные $q_1, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты, $p_1, \ldots, p_n$ — обобщенные импульсы, t — время, $H(t,q,p)$ — гамильтониан, а в автономном случае — первый интеграл (обобщенный интеграл энергии).

Если для канонической системы положить $x = (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ и взять

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

то гамильтоновость системы означает, что она записывается в виде

$$\dot{x} = J\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Определение 10. *Линейной гамильтоновой* называется линейная система вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где оператор-функция $JA(t)$ симметрична при каждом $t \in \mathbb{R}^+$.

Линейную гамильтонову систему также можно записывать в виде

$$\dot{x} = JB(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1.12}$$

где оператор-функция $B(t)$ симметрична при каждом $t \in \mathbb{R}^+$.

Ввиду того, что в явном виде в общедоступной литературе по теории показателей Ляпунова не доказана корректность определения 10, приведем доказательство.

Утверждение 2. *Система является линейной гамильтоновой тогда и только тогда, когда она линейна и гамильтонова.*

Доказательство. Пусть дана линейная гамильтонова система (1.12). Линейность следует из определения, а гамильтоновость доказана в [21, с. 209].

Рассмотрим теперь произвольную линейную систему (заметим, что всякую произвольную линейную систему можно записать в виде $\dot{x} = JB(t)x,\ x \in \mathbb{R}^{2n},\ t \in \mathbb{R}^+$) и посмотрим, когда она будет являться гамильтоновой. Для этого должна найтись такая функция $H(t,x)$, что выполнены условия

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{2n} b_{1k}(t)x_k = \frac{\partial H(t,x)}{\partial x_1} \\ \sum\limits_{k=1}^{2n} b_{2k}(t)x_k = \frac{\partial H(t,x)}{\partial x_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{k=1}^{2n} b_{2n,k}(t)x_k = \frac{\partial H(t,x)}{\partial x_{2n}}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Проинтегрируем по x_1 первое уравнение системы (1.13), получим

$$H(t,x) = \frac{b_{11}(t)}{2}x_1^2 + \sum_{k=2}^{2n} b_{1k}(t)x_k x_1 + \varphi_1(x_2,\dots,x_{2n},t), \tag{1.14}$$

где $\varphi_1(x_2,\dots,x_{2n},t)$ — некоторая функция. Продифференцируем по x_2 равенство (1.14) и подставим во второе уравнение системы (1.13). Будем иметь

$$\sum_{k=1}^{2n} b_{2k}(t)x_k = b_{12}(t)x_1 + \frac{\partial \varphi_1(x_2,\dots,x_{2n},t)}{\partial x_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi_1(x_2,\dots,x_{2n},t)}{\partial x_2} = (b_{21}(t) - b_{12}(t))x_1 + \sum_{k=2}^{2n} b_{2k}(t)x_k. \tag{1.15}$$

Левая часть равенства (1.15) не зависит от x_1. Чтобы равенство (1.15) выполнялось, правая часть тоже не должна зависеть от x_1, а это выполнено тогда и только тогда, когда $b_{21}(t) = b_{12}(t),\ t \in \mathbb{R}^+$. Значит, (1.15) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \varphi_1(x_2, \ldots, x_{2n}, t)}{\partial x_2} = \sum_{k=2}^{2n} b_{2k}(t) x_k. \tag{1.16}$$

Проинтегрируем по x_2 равенство (1.16) и подставим в выражение (1.14):

$$H(t,x) = \frac{b_{11}(t)}{2} x_1^2 + \frac{b_{22}(t)}{2} x_2^2 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{2n} b_{1k}(t) x_k x_1 + \sum_{k=3}^{2n} b_{2k}(t) x_k x_2 + \varphi_2(x_3, \ldots, x_{2n}, t),$$

где $\varphi_2(x_3, \ldots, x_{2n}, t)$ — некоторая функция. Далее продифференцируем по x_3 последнее равенство и подставим в третье уравнение системы (1.13). Получим

$$\sum_{k=1}^{2n} b_{3k}(t) x_k = b_{13}(t) x_1 + b_{23}(t) x_2 + \frac{\partial \varphi_2(x_3, \ldots, x_{2n}, t)}{\partial x_3},$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi_2(x_3, \ldots, x_{2n}, t)}{\partial x_3} = (b_{31}(t) - b_{13}(t)) x_1 + (b_{32}(t) - b_{23}(t)) x_2 + \sum_{k=3}^{2n} b_{3k}(t) x_k.$$

Аналогично получаем

$$b_{31}(t) = b_{13}(t), \quad b_{32}(t) = b_{23}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Продолжая этот процесс далее, получим

$$b_{ij}(t) = b_{ji}(t), \quad i, j = 1, \ldots, 2n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

т. е. оператор-функция $B(t)$ симметрична при каждом $t \in \mathbb{R}^+$.

Утверждение 2 доказано.

Перечислим основные понятия и свойства, используемые в дальнейшем (см. [1, 21, 55, 63, 64]).

В пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ задается *симплектическое произведение* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, связанное со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ формулой

$$\langle x, y \rangle = (Jx, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Симплектическое произведение является билинейной кососимметрической невырожденной формой. Билинейность вытекает из билинейности скалярного произведения и линейности оператора J, а кососимметричность следует из кососимметричности оператора J :

$$\langle x, y\rangle = (Jx, y) = (x, J^* y) = -(Jy, x) = -\langle y, x\rangle.$$

Векторное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с заданным на нём симплектическим произведением называется *симплектическим векторным пространством.*

Подпространство, инвариантное относительно оператора J, называется *симплектическим* (с индуцированным симплектическим произведением).

Базис $e_1, \ldots, e_{2n}$ в $\mathbb{R}^{2n}$ называется *симплектическим*, если

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0, & i+j \neq 2n+1, \\ 1, & i+j = 2n+1, \quad i<j. \end{cases} \tag{1.17}$$

Оператор X называется *симплектическим*, если он сохраняет симплектическое произведение

$$\langle Xx, Xy\rangle = \langle x, y\rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Наконец, отметим некоторые свойства симплектической структуры.

5°. Справедливы равенства $\langle x, y\rangle = -\langle y, x\rangle$ и $\langle x, x\rangle = 0$.

6°. Существуют ортогональные симплектические базисы (содержащие в качестве первого вектора любой наперед заданный ненулевой вектор), причем каждый из них можно нормировать с сохранением симплектичности.

7°. Если операторы X, Y симплектичны, то таковыми являются и операторы X^*, X^{-1}, XY, причем $\det X = 1$.

8°. Линейная система (1.1) с ограниченной кусочно непрерывной оператор-функцией A гамильтонова тогда и только тогда, когда ее оператор Коши $X_A(t,s)$ симплектичен при всех $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Из свойства 8° вытекает свойство

9°. Для любых двух решений x и y линейной гамильтоновой системы остается постоянным их симплектическое произведение

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \text{const}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Определение 11. Если вектор-функции a и b не принимают нулевого значения и для некоторого числа $T > 0$ удовлетворяют условиям

$$a(0) \perp b(0), \quad a(T) \perp b(T), \quad \gamma = \chi_0^T(a), \quad \beta = \chi_0^T(b),$$

а функция $u \equiv c_1 a + c_2 b$, $(c_1, \ c_2 \in \mathbb{R})$ такова, что $\measuredangle(u(0), a(0)) = \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, то назовем величину $l(\gamma, \varphi, \beta) \equiv \chi_0^T(u)$ *промежуточным ростом* (между γ и β) функции u от 0 до T.

Отметим свойства промежуточного роста, используемые в дальнейшем.

10°. Функция $l(\gamma, \varphi, \beta)$ возрастает по γ.

11°. Функция $l(\gamma, \varphi, \beta)$ возрастает по β.

12°. Если $\gamma < \beta$, то функция $l(\gamma, \varphi, \beta)$ возрастает по $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

13°. Для любого $\Delta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$l(\gamma + \Delta, \varphi, \beta + \Delta) = l(\gamma, \varphi, \beta) + \Delta.$$

Свойства 10° и 11° доказываются совершенно аналогично, поэтому приведем доказательство только для свойства 10°. Без ограничения общности можно считать, что $|a(0)| = |b(0)| = |u(0)| = 1$.

Пусть $\gamma_1 < \gamma_2$. Покажем, что $l(\gamma_1, \varphi, \beta) < l(\gamma_2, \varphi, \beta)$. По определению решения u

$$u(0) = a(0)\cos\varphi + b(0)\sin\varphi, \quad u(T) = a(T)\cos\varphi + b(T)\sin\varphi.$$

Поскольку

$$\chi_0^T(a(t)) = \frac{1}{T}\ln|a(T)| = \gamma,$$

то $|a(T)| = e^{\gamma T}$. Аналогично $|b(T)| = e^{\beta T}$. Тогда

$$l(\gamma_1, \varphi, \beta) = \frac{1}{T}\ln\sqrt{e^{2\gamma_1 T}\cos^2\varphi + e^{2\beta T}\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2T}\ln e^{2\beta T}((e^{2(\gamma_1-\beta)T}-1)\cos^2\varphi+1) = \beta + \frac{1}{2T}\ln((e^{2(\gamma_1-\beta)T}-1)\cos^2\varphi+1).$$

Аналогично получаем

$$l(\gamma_2, \varphi, \beta) = \beta + \frac{1}{2T}\ln((e^{2(\gamma_2-\beta)T} - 1)\cos^2\varphi + 1).$$

Отсюда, в силу возрастания экспонеты и логарифма, следует требуемое неравенство $l(\gamma_1,\varphi,\beta) < l(\gamma_2,\varphi,\beta)$.

Докажем свойство 12°. Пусть $\varphi_1 < \varphi_2$. Покажем, что $l(\gamma,\varphi_1,\beta) < l(\gamma,\varphi_2,\beta)$.

$$l(\gamma,\varphi_1,\beta) = \frac{1}{T}\ln\sqrt{e^{2\gamma T}\cos^2\varphi_1 + e^{2\beta T}\sin^2\varphi_1} =$$

$$= \gamma + \frac{1}{2T}\ln(1-\sin^2\varphi_1 + e^{2(\beta-\gamma)T}\sin^2\varphi_1) =$$

$$= \gamma + \frac{1}{2T}\ln(1+(e^{2(\beta-\gamma)T}-1)\sin^2\varphi_1).$$

Аналогично получаем

$$l(\gamma,\varphi_2,\beta) = \gamma + \frac{1}{2T}\ln(1+(e^{2(\beta-\gamma)T}-1)\sin^2\varphi_2).$$

Поскольку $\gamma < \beta$ по условию, то $e^{2(\beta-\gamma)T}-1 > 0$. Учитывая возрастание логарифма и возрастание синуса на $(0,\frac{\pi}{2})$, получаем

$$l(\gamma,\varphi_1,\beta) < l(\gamma,\varphi_2,\beta).$$

Докажем свойство 13°.

$$l(\gamma+\Delta,\varphi,\beta+\Delta) = \frac{1}{2T}\ln(e^{2(\gamma+\Delta)T}\cos^2\varphi + e^{2(\beta+\Delta)T}\sin^2\varphi) =$$

$$= \Delta + \frac{1}{2T}\ln(e^{2\gamma T}\cos^2\varphi + e^{2\beta T}\sin^2\varphi) = \Delta + l(\gamma,\varphi,\beta).$$

Определение 12 [53]. Для всякой системы $A \in \mathcal{M}^m$ ($A \in \mathcal{H}^m$) обозначим:

a) через $\mathcal{M}_\varepsilon(A)$ ($\mathcal{H}_\varepsilon(A)$) — множество систем $B \in \mathcal{M}^m$ ($B \in \mathcal{H}^m$), удовлетворяющих условию $\|B-A\| < \varepsilon$, а возмущения такого типа будем называть *равномерно малыми*;

b) через $\mathcal{M}_0(A)$ ($\mathcal{H}_0(A)$) — множество систем $B \in \mathcal{M}^m$ ($B \in \mathcal{H}^m$), удовлетворяющих условию $\|B(t)-A(t)\| \to 0$, $t \to \infty$, при выполнении которого возмущение $B-A$ назовем *бесконечно малым.*

1.2 Вспомогательные утверждения

Лемма 2. *Для любых $\varepsilon, T > 0$ и любой системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$ существует система $C_T^\varepsilon \in \mathcal{H}^{2n}$, удовлетворяющая условиям:*

1) $\delta_1' \leqslant \delta_1 - \varepsilon T$ *и* $\delta_{2n}' \geqslant \delta_{2n} + \varepsilon T$, *где* δ_1, δ_{2n} *— логарифмические сингулярные числа оператора* $X_A(T,0)$, *а* δ_1', δ_{2n}' *— логарифмические сингулярные числа оператора* $X_{C_T^\varepsilon}(T,0)$;

2) $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \|A(t) - C_T^\varepsilon(t)\| \leqslant 2\varepsilon$.

Доказательство. Оператор Коши системы A, согласно лемме 2.2 из [55], допускает полярное разложение $X_A(T,0) = US$, в котором как ортогональный оператор U, так и положительный симметрический оператор S являются симплектическими. По лемме 2.1 из [55] S имеет собственный ортонормированный симплектический базис $\{e_i\}$ $(i = 1, ..., 2n)$ с собственными значениями вида $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_n^{-1}, ..., \alpha_1^{-1}$ соответственно. Без ограничения общности будем считать, что

$$\alpha_1 \leqslant ... \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_n^{-1} \leqslant ... \leqslant \alpha_1^{-1}.$$

Следовательно, $\|S\| = |Se_{2n}|$, а в силу ортогональности оператора U логарифмические сингулярные числа оператора $X_A(T,0)$ *симметричны* относительно нуля, причем векторы $X_A(T,0)e_i$ $(i = 1, ..., 2n)$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{R}^{2n}$ и $\|X_A(T,0)\| = |X_A(T,0)e_{2n}|$. Базис $\{e_i\}$ $(i = 1, ..., 2n)$ назовем *сингулярным базисом* оператора $X_A(T,0)$, а через x_i обозначим решения, для которых $x_i(0) = e_i$.

Рассмотрим возмущение

$$Q_\varepsilon(t) = -\varepsilon P_{\mathcal{L}(x_1(t))} + \varepsilon P_{\mathcal{L}(Jx_1(t))}, \quad t \in [0,T].$$

Положим

$$C_T^\varepsilon(t) = A(t) - \varepsilon P_{\mathcal{L}(x_1(t))} + \varepsilon P_{\mathcal{L}(Jx_1(t))}, \quad t \in [0,T]. \tag{1.18}$$

Докажем, что $C_T^\varepsilon \in \mathcal{H}^{2n}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы JQ_ε являлся симметрическим оператором, т. е. чтобы для любых вектор-функций x и y выполнялось равенство

$$(JQ_\varepsilon x(t), y(t)) = (x(t), JQ_\varepsilon y(t)), \quad t \in [0,T].$$

Рассмотрим произвольные вектор-функции $x(t)$, $y(t)$, $t \in [0,T]$. Зафиксируем произвольное $t \in [0,T]$. Тогда

$$x(t) = \widetilde{\alpha}_1 z_1(t) + \widetilde{\alpha}_2 J z_1(t) + \widetilde{\alpha}_3 z_2(t), \quad y(t) = \widetilde{\beta}_1 z_1(t) + \widetilde{\beta}_2 J z_1(t) + \widetilde{\beta}_3 z_3(t),$$

где

$$z_1(t) \in \mathcal{L}(x_1(t)), \quad z_2(t),\ z_3(t) \in \mathcal{L}^\perp(x_1(t), Jx_1(t)),$$

$$|z_1(t)| = |z_2(t)| = |z_3(t)| = 1, \quad \widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3, \widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \widetilde{\beta}_3 \in \mathbb{R}.$$

Для упрощения записи аргумент t будем опускать:

$$(JQ_\varepsilon x, y) = (J(-\varepsilon P_{\mathfrak{L}(x_1)} + \varepsilon P_{\mathfrak{L}(Jx_1)})(\widetilde{\alpha}_1 z_1 + \widetilde{\alpha}_2 J z_1 + \widetilde{\alpha}_3 z_2), y) =$$
$$= (-\varepsilon\widetilde{\alpha}_1 J z_1 - \varepsilon\widetilde{\alpha}_2 z_1, \widetilde{\beta}_1 z_1 + \widetilde{\beta}_2 J z_1 + \widetilde{\beta}_3 z_3) =$$
$$= -\varepsilon\widetilde{\alpha}_1\widetilde{\beta}_2 - \varepsilon\widetilde{\alpha}_2\widetilde{\beta}_1 = -\varepsilon(\widetilde{\alpha}_1\widetilde{\beta}_2 + \widetilde{\alpha}_2\widetilde{\beta}_1),$$

так как $z_1 \perp z_2$, $z_1 \perp z_3$, $z_1 \perp J z_1$, $J z_1 \perp z_2$, $J z_1 \perp z_3$.

Аналогично

$$(x, JQ_\varepsilon y) = (x, J(-\varepsilon P_{\mathfrak{L}(x_1)} + \varepsilon P_{\mathfrak{L}(Jx_1)})(\widetilde{\beta}_1 z_1 + \widetilde{\beta}_2 J z_1 + \widetilde{\beta}_3 z_3)) =$$
$$= (\widetilde{\alpha}_1 z_1 + \widetilde{\alpha}_2 J z_1 + \widetilde{\alpha}_3 z_2, -\varepsilon\widetilde{\beta}_1 J z_1 - \varepsilon\widetilde{\beta}_2 z_1) =$$
$$= -\varepsilon\widetilde{\alpha}_1\widetilde{\beta}_2 - \varepsilon\widetilde{\alpha}_2\widetilde{\beta}_1 = -\varepsilon(\widetilde{\alpha}_1\widetilde{\beta}_2 + \widetilde{\alpha}_2\widetilde{\beta}_1).$$

Получили равенство $(JQ_\varepsilon x, y) = (x, JQ_\varepsilon y)$. Следовательно, $C_T^\varepsilon \in \mathcal{H}^{2n}$, $t \in [0, T]$.

Легко убедиться в том, что вектор-функция $y_1(t) = e^{-\varepsilon t} x_1(t)$ является решением возмущенной системы (1.18). Проверим это, подставив вектор-функцию y_1 в возмущенную систему (1.18)

$$(e^{-\varepsilon t} x_1)' = (A - \varepsilon P_{\mathfrak{L}(x_1)} + \varepsilon P_{\mathfrak{L}(Jx_1)}) e^{-\varepsilon t} x_1.$$

Раскрывая обе части равенства и учитывая, что x_1 является решением системы A, получаем верное равенство:

$$-\varepsilon e^{-\varepsilon t} x_1 + e^{-\varepsilon t} \dot{x}_1 = e^{-\varepsilon t} A x_1 - \varepsilon e^{-\varepsilon t} x_1.$$

Следовательно, у системы C_T^ε есть такое решение y_1, что

$$\chi_0^T(y_1) = \chi_0^T(x_1) - \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что $\delta_1' \leqslant \delta_1 - \varepsilon T$, а в силу симметрии $\delta_{2n}' \geqslant \delta_{2n} + \varepsilon T$. Таким образом, утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Из равенства (1.18) и свойств нормы следует, что

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|A(t) - C_T^\varepsilon(t)\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любых последовательностей* $0 \equiv t_0 < t_1 < \dots$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots > 0$ *и любой системы* $A \in \mathcal{H}^2$ *существует система* $C \in \mathcal{H}^2$, *удовлетворяющая при каждом* $j = 1, 2, \dots$ *условиям:*

1) $\delta'_1(j) \leqslant \delta_1(j) - \varepsilon_j(t_j - t_{j-1})$ и $\delta'_2(j) \geqslant \delta_2(j) + \varepsilon_j(t_j - t_{j-1})$, *где* $\delta_1(j)$, $\delta_2(j)$ — *логарифмические сингулярные числа оператора* $X_A(t_j, t_{j-1})$, *а* $\delta'_1(j)$, $\delta'_2(j)$ — *логарифмические сингулярные числа оператора* $X_C(t_j, t_{j-1})$;

2) $\sup\limits_{t_{j-1} < t \leqslant t_j} \|A(t) - C(t)\| \leqslant 2\varepsilon_j$.

Доказательство. При $t = 0$ положим $C(0) = A(0)$. Далее, на каждом промежутке $(t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2, \dots$, положим

$$C(t) \equiv C^{\varepsilon_j}_{t_j - t_{j-1}}(t - t_{j-1}),$$

где оператор-функция C^ε_T описана в лемме 2. Утверждения леммы непосредственно следуют из леммы 2.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любых* $\varepsilon, T > 0$ *и любой системы* $A \in \mathcal{H}^4$ *существует система* $C^\varepsilon_T \in \mathcal{H}^4$, *удовлетворяющая условиям*:

1) $\delta'_2 > \delta'_1 + \frac{\varepsilon}{2}T$ *и* $\delta'_3 < \delta'_4 - \frac{\varepsilon}{2}T$, *где* δ'_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — *логарифмические сингулярные числа оператора* $X_{C^\varepsilon_T}(T, 0)$;

2) $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|A(t) - C^\varepsilon_T(t)\| \leqslant 2\varepsilon$.

Доказательство. В качестве системы C^ε_T возьмем систему, построенную в лемме 2. Будем использовать обозначения, введенные в лемме 2, с поправкой на размерность системы. Далее во всех рассуждениях считаем, что $t \in [0, T]$.

1. Заметим, что если решения возмущенной системы C^ε_T, равно как и невозмущенной системы A, начинались во множестве $\mathcal{L}^\perp(Jx_1(0))$, то они для любого t остаются во множестве $\mathcal{L}^\perp(Jx_1(t))$. Докажем это сначала для системы A.

Пусть x — такое произвольное решение системы A, что $x(0) \in \mathcal{L}^\perp(Jx_1(0))$. Поскольку для любых двух решений линейной гамильтоновой системы остается постоянным их симплектическое произведение (см. свойство 9°), то

$$\langle x_1(t), x(t)\rangle = \langle x_1(0), x(0)\rangle = 0.$$

С учетом этого равенства с другой стороны получаем

$$\langle x_1(t), x(t)\rangle = (Jx_1(t), x(t)) = 0,$$

т. е. $x(t) \perp Jx_1(t)$, а значит $x(t) \in \mathcal{L}^{\perp}(Jx_1(t))$.

Пусть y — такое произвольное решение системы C_T^{ε}, что $y(0) \in \mathcal{L}^{\perp}(Jx_1(0))$. Решение системы C_T^{ε}, которое начиналось в $x_1(0)$, будет иметь вид $e^{-\varepsilon t}x_1(t)$ (см. доказательство леммы 2). Тогда

$$0 = \langle x_1(0), y(0)\rangle = \langle e^{-\varepsilon t}x_1(t), y(t)\rangle =$$
$$= e^{-\varepsilon t}\langle x_1(t), y(t)\rangle = e^{-\varepsilon t}(Jx_1(t), y(t)),$$

т. е. $y(t) \perp Jx_1(t)$, а значит $y(t) \in \mathcal{L}^{\perp}(Jx_1(t))$.

2. Кроме того, любая двумерная плоскость в $\mathcal{L}^{\perp}(Jx_1(t))$, проходящая через вектор $x_1(t)$, не поворачивается возмущением. Другими словами, если x и y — такие решения систем A и C_T^{ε} соответственно, что $x(0) = y(0) \in \mathcal{L}^{\perp}(Jx_1(0))$, то $y(t) \in \mathcal{L}(x_1(t), x(t))$.

Более того,

$$y(t) = x(t) + \alpha(t)x_1(t),$$

где $\alpha(t)$ — некоторая такая скалярная функция, что $\alpha(0) = 0$. Подставим выражение для y в возмущенную систему

$$(x + \alpha x_1)' = (A - \varepsilon P_{\mathcal{L}(x_1)} + \varepsilon P_{\mathcal{L}(Jx_1)})(x + \alpha x_1).$$

Учитывая доказанное в п. 1, получаем равенство

$$\dot{x} + \dot{\alpha}x_1 + \alpha\dot{x}_1 = Ax - \varepsilon P_{\mathcal{L}(x_1)}x + \alpha A x_1 - \varepsilon\alpha x_1.$$

Поскольку

$$P_{\mathcal{L}(x_1)}x = \frac{(x, x_1)}{(x_1, x_1)}x_1,$$

то будем иметь

$$\left(\dot{\alpha} + \varepsilon\alpha + \varepsilon\frac{(x, x_1)}{(x_1, x_1)}\right)x_1 = 0.$$

Так как $x_1(t) \neq 0$ для всех t, то это равносильно равенству

$$\dot{\alpha} + \varepsilon\alpha = f, \quad \alpha(0) = 0, \tag{1.19}$$

где $f \equiv -\varepsilon\frac{(x,x_1)}{(x_1,x_1)}$ — непрерывная по t функция. Получили задачу Коши (1.19) для функции α, которая при $t \in [0, T]$ имеет решение, причем единственное [65, с. 34].

3. Введем обозначения:

$$H(t) \equiv \mathcal{L}(x_1(t), Jx_1(t)),\ M(t) \equiv H^{\perp}(t).$$

Покажем, что любое решение x' возмущенной системы C_T^{ε}, начинающееся в $M(0)$, растет не медленнее, чем соответствующее (с тем же начальным значением) решение x системы A, т. е.

$$\chi_0^T(x') \geqslant \chi_0^T(x),$$

если $x'(0) = x(0) \in M(0)$.

По доказанному в п. 2

$$x'(t) = x(t) + \alpha(t)x_1(t).$$

Тогда $P_{M(t)}x(t) = P_{M(t)}x'(t)$. Поскольку $x(0) \in M(0)$, то $x(0) \perp x_1(0)$, $x(0) \perp Jx_1(0)$. Так как $\{e_i\}$ — сингулярный базис, то $x(T) \perp x_1(T)$, $x(T) \perp Jx_1(T)$. Поэтому $P_{M(T)}x(T) = x(T) = P_{M(T)}x'(T)$, следовательно, $|x'(T)| \geqslant |x(T)|$. Тогда из определения роста (1.11) следует, что

$$\chi_0^T(x') \geqslant \chi_0^T(x).$$

Так как для любого решения x системы A, удовлетворяющего условию $x(0) \in M(0)$, верно неравенство

$$\chi_0^T(x) \geqslant \frac{\delta_2}{T},$$

то

$$\chi_0^T(x') \geqslant \frac{\delta_2}{T}. \tag{1.20}$$

Отметим, что свойства, доказанные в пп. 1—3, справедливы для гамильтоновой системы произвольной размерности, начиная с четырех.

4. Здесь и далее будем рассматривать четырехмерные гамильтоновы системы.

Пусть $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ — сингулярный базис оператора $X_{C_T^{\varepsilon}}(T,0)$. Докажем, что для $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ имеет место неравенство

$$\delta_2' > \delta_1' + \alpha T.$$

Предположим противное: $\delta_2' \leqslant \delta_1' + \alpha T$. Пусть тогда $\delta_2' = \delta_1' + \alpha_0 T, \quad \alpha_0 \in [0, \alpha]$.

а) Тогда существует такая двумерная плоскость $P(t)$, что $P(0) = \mathcal{L}(a_1, a_2)$ (натянутая на два самых медленных вектора a_1 и a_2 сингулярного базиса), в которой для любого значения t симплектическое произведение любых двух векторов равно нулю, а росты всех ее решений лежат на отрезке

$$\left[\frac{\delta_1'}{T}, \frac{\delta_2'}{T}\right] = \left[\frac{\delta_1'}{T}, \frac{\delta_1'}{T} + \alpha_0\right].$$

При этом росты всех решений, начинающихся в плоскости $JP(0) = \mathcal{L}(a_3, a_4)$ (натянутой на два самых быстрых вектора a_3 и a_4 сингулярного базиса), лежат на отрезке

$$\left[\frac{\delta_3'}{T}, \frac{\delta_4'}{T}\right] = \left[\frac{\delta_3'}{T}, \frac{\delta_3'}{T} + \alpha_0\right].$$

б) Решение x_1' системы C_T^ε такое, что $x_1'(0) = x_1(0)$, в момент времени $t = 0$ образует с плоскостью P угол

$$\phi_1 \equiv \measuredangle(x_1'(0), P(0)) = \measuredangle(x_1'(0), g_1) \geqslant \measuredangle(x_1'(0), G_1) = \measuredangle(H(0), G_1),$$

где $g_1 \in P(0), \quad G_1 = \mathcal{L}(g_1, Jg_1)$.

Докажем последнее равенство.

Обозначим через $\varphi \equiv \measuredangle(x_1'(0), G_1)$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, и покажем, что $\measuredangle(H(0), G_1) = \varphi$. Для этого достаточно доказать неравенство

$$\measuredangle(x_1'(0), G_1) \leqslant \measuredangle(H(0), G_1).$$

Пусть

$$\measuredangle(x_1'(0), G_1) = \measuredangle(x_1'(0), \tilde{g}_1),$$

где $\tilde{g}_1 \in G_1$, $|\tilde{g}_1| = 1$. Тогда

$$|Jx_1'(0)| = 1, \quad |J\tilde{g}_1| = 1, \quad (Jx_1'(0), J\tilde{g}_1) = (x_1'(0), \tilde{g}_1) = \cos\varphi$$

в силу ортогональности оператора J. Возьмем произвольные единичные векторы $u \in H(0)$, $v \in G_1$. Тогда для некоторых $\psi, \theta \in [0, 2\pi)$ справедливы равенства

$$u = x_1'(0)\cos\psi + Jx_1'(0)\sin\psi, \quad v = \tilde{g}_1\cos\theta + J\tilde{g}_1\sin\theta.$$

Вычислим косинус угла между векторами u и v.

$$\cos\angle(u, v) = (u, v) = (x_1'(0)\cos\psi + Jx_1'(0)\sin\psi, \tilde{g}_1\cos\theta + J\tilde{g}_1\sin\theta) =$$

$$= (x_1'(0), \tilde{g}_1)\cos\psi\cos\theta + (Jx_1'(0), J\tilde{g}_1)\sin\psi\sin\theta +$$
$$+ (Jx_1'(0), \tilde{g}_1)\sin\psi\cos\theta + (x_1'(0), J\tilde{g}_1)\cos\psi\sin\theta =$$
$$= (x_1'(0), \tilde{g}_1)\cos\psi\cos\theta + (x_1'(0), \tilde{g}_1)\sin\psi\sin\theta -$$
$$- (x_1'(0), J\tilde{g}_1)\sin\psi\cos\theta + (x_1'(0), J\tilde{g}_1)\cos\psi\sin\theta =$$
$$= \cos(\psi - \theta)\cos\varphi + (x_1'(0), J\tilde{g}_1)\sin(\theta - \psi).$$

Покажем, что
$$(x_1'(0), J\tilde{g}_1) = 0.$$

Представим
$$x_1'(0) = \tilde{g}_1\cos\varphi + h,$$
где $h \in \mathcal{L}^{\perp}(\tilde{g}_1, J\tilde{g}_1)$. Тогда справедлива цепочка равенств
$$(x_1'(0), J\tilde{g}_1) = (\tilde{g}_1\cos\varphi + h, J\tilde{g}_1) = (\tilde{g}_1, J\tilde{g}_1)\cos\varphi + (h, J\tilde{g}_1) = 0.$$

Так как $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то $\cos\varphi \geqslant 0$. Следовательно,
$$\cos\measuredangle(u, v) = \cos(\psi - \theta)\cos\varphi \leqslant \cos\varphi, \quad \psi, \theta \in [0, 2\pi),$$
а значит $\angle(u, v) \geqslant \varphi$, т. е. $\angle(x_1'(0), G_1) \leqslant \measuredangle(H(0), G_1)$. Таким образом, равенство $\measuredangle(x_1'(0), G_1) = \measuredangle(H(0), G_1)$ доказано.

в) Пусть $g_2 \in P(0)$ и $g_2 \perp g_1$, $|g_2| = 1$. Обозначим $G_2 \equiv \mathcal{L}(g_2, Jg_2)$. Докажем, что
$$\measuredangle(H(0), G_1) = \measuredangle(M(0), G_2). \tag{1.21}$$

Вспомним, что $M(0) = H^{\perp}(0)$, и заметим, что $G_2 = G_1^{\perp}$. Обозначим
$$\gamma \equiv \measuredangle(M(0), G_2), \quad \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Тогда найдутся такие векторы $g_m \in M(0)$, $|g_m| = 1$, $\tilde{g}_2 \in G_2$, $|\tilde{g}_2| = 1$, что $\gamma = \measuredangle(g_m, \tilde{g}_2)$.

Выберем в пространстве $\mathbb{R}^4$ ортонормированный базис x_1, Jx_1, g_m, Jg_m, где $x_1 \equiv x_1'(0) = x_1(0)$. Выше доказано, что
$$\measuredangle(x_1'(0), G_1) = \measuredangle(H(0), G_1) = \measuredangle(x_1'(0), \tilde{g}_1) = \varphi,$$
где $\tilde{g}_1 \in G_1$, $|\tilde{g}_1| = 1$. Тогда $(\tilde{g}_1, x_1) = \cos\varphi$ и векторы x_1 и $P_{H(0)}\tilde{g}_1$ коллинеарны. Следовательно, для некоторых $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ справедливо представление
$$\tilde{g}_1 = x_1\cos\varphi + c_1 g_m + c_2 Jg_m, \quad \cos^2\varphi + c_1^2 + c_2^2 = 1.$$

Так как $(\tilde{g}_2, g_m) = \cos\gamma$ и векторы g_m и $P_{M(0)}\tilde{g}_2$ коллинеарны, то для некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ справедливо представление

$$\tilde{g}_2 = k_1 x_1 + k_2 J x_1 + g_m \cos\gamma, \quad k_1^2 + k_2^2 + \cos^2\gamma = 1.$$

Поскольку $G_2 = G_1^{\perp}$, то $(\tilde{g}_2, \tilde{g}_1) = 0$ и $(J\tilde{g}_2, \tilde{g}_1) = 0$. Поэтому

$$(k_1 x_1 + k_2 J x_1 + g_m \cos\gamma, x_1 \cos\varphi + c_1 g_m + c_2 J g_m) = k_1 \cos\varphi + c_1 \cos\gamma = 0,$$

$$(k_1 J x_1 - k_2 x_1 + J g_m \cos\gamma, x_1 \cos\varphi + c_1 g_m + c_2 J g_m) = -k_2 \cos\varphi + c_2 \cos\gamma = 0.$$

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} k_1 \cos\varphi + c_1 \cos\gamma = 0 \\ -k_2 \cos\varphi + c_2 \cos\gamma = 0 \\ \cos^2\varphi + c_1^2 + c_2^2 = 1 \\ k_1^2 + k_2^2 + \cos^2\gamma = 1, \end{cases} \tag{1.22}$$

которая должна иметь решение. Из нее следует система

$$\begin{cases} k_1^2 \cos^2\varphi = c_1^2 \cos^2\gamma \\ k_2^2 \cos^2\varphi = c_2^2 \cos^2\gamma \\ 1 - \cos^2\varphi = c_1^2 + c_2^2 \\ 1 - \cos^2\gamma = k_1^2 + k_2^2. \end{cases}$$

Прибавив второе уравнение к первому и подставив выражения для $c_1^2 + c_2^2$ и $k_1^2 + k_2^2$ из третьего и четвертого уравнений, преобразуем систему

$$\begin{cases} (1 - \cos^2\gamma) \cos^2\varphi = (1 - \cos^2\varphi) \cos^2\gamma \\ k_2^2 \cos^2\varphi = c_2^2 \cos^2\gamma \\ 1 - \cos^2\varphi = c_1^2 + c_2^2 \\ 1 - \cos^2\gamma = k_1^2 + k_2^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $\cos^2\gamma = \cos^2\varphi$. Поскольку $\varphi, \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$, имеем единственное решение $\gamma = \varphi$. Несложно проверить, что при $\gamma = \varphi$ исходная система (1.22) имеет решение. Равенство (1.21) доказано.

г) Докажем, что

$$\varphi = \measuredangle(M(0), G_2) = \measuredangle(M(0), g_2). \tag{1.23}$$

Заметим, что

$$M(0) = \mathcal{L}^{\perp}(x_1(0), Jx_1(0)) = \mathcal{L}(g_m, Jg_m).$$

Легко заметить, что справедливо неравенство

$$\measuredangle(M(0), G_2) \leqslant \measuredangle(M(0), g_2).$$

Покажем, что найдется такой вектор $\tilde{g_m} \in M(0)$, $|\tilde{g_m}| = 1$, что $\measuredangle(\tilde{g_m}, g_2) = \varphi$. Так как $g_2, \tilde{g}_2 \in G_2$, G_2 — симплектическая плоскость, то для некоторых $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ справедливо представление

$$g_2 = q_1\tilde{g}_2 + q_2 J\tilde{g}_2, \quad q_1^2 + q_2^2 = 1.$$

Рассмотрим вектор

$$\tilde{g_m} = q_1 g_m + q_2 J g_m, \quad \tilde{g_m} \in M(0).$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$(\tilde{g_m}, g_2) = (q_1 g_m + q_2 J g_m, q_1\tilde{g}_2 + q_2 J\tilde{g}_2) =$$

$$= q_1^2(g_m, \tilde{g}_2) + q_2^2(Jg_m, J\tilde{g}_2) + q_1q_2(g_m, J\tilde{g}_2) + q_1q_2(Jg_m, \tilde{g}_2) =$$
$$= q_1^2(g_m, \tilde{g}_2) + q_2^2(Jg_m, J\tilde{g}_2) + q_1q_2\langle\tilde{g}_2, g_m\rangle + q_1q_2\langle g_m, \tilde{g}_2\rangle =$$
$$= (q_1^2 + q_2^2)\cos\varphi = \cos\varphi,$$

а это и означает, что $\measuredangle(\tilde{g_m}, g_2) = \varphi$. Таким образом, равенство (1.23) доказано.

д) Поскольку $g_2 \in P(0)$, то справедливо неравенство

$$\measuredangle(\tilde{g_m}, g_2) \geqslant \measuredangle(\tilde{g_m}, P(0)) = \measuredangle(\tilde{g_m}, g_3)$$

для некоторого $g_3 \in P(0)$.

Если взять такое решение x' системы C_T^{ε}, что $x'(0) = \tilde{g_m} \in M(0)$, то, используя результаты, полученные в пп. б)–г), будем иметь

$$\phi_1 = \measuredangle(x_1'(0), g_1) \geqslant \measuredangle(x'(0), g_3) \equiv \phi.$$

Решение x' начинается в плоскости двух начальных векторов $y(0) = g_3 \perp z(0)$, решение x_1' — в плоскости двух начальных векторов $y_1(0) = g_1 \perp z_1(0)$, где $y(0), y_1(0) \in P(0)$, $z(0), z_1(0) \in JP(0)$. Пусть y, y_1, z, z_1 — решения системы C_T^{ε}, начинающиеся в векторах $y(0)$, $y_1(0)$, $z(0)$, $z_1(0)$ соответственно.

Тогда

$$\chi_0^T(x') = l(\chi_0^T(y), \phi, \chi_0^T(z)), \quad \chi_0^T(x_1') = l(\chi_0^T(y_1), \phi_1, \chi_0^T(z_1)).$$

Учитывая п. а), имеем

$$\chi_0^T(y), \chi_0^T(y_1) \in \left[\frac{\delta_1'}{T}, \frac{\delta_1'}{T} + \alpha_0\right], \quad \chi_0^T(z), \chi_0^T(z_1) \in \left[\frac{\delta_3'}{T}, \frac{\delta_3'}{T} + \alpha_0\right].$$

Пусть v_1, v_2, v_3, v_4 — решения, начинающиеся в векторах a_1, a_2, a_3, a_4 сингулярного базиса оператора $X_{C_T^\varepsilon}(T, 0)$ соответственно. Тогда для них справедливы неравенства

$$\chi_0^T(v_1) \leqslant \chi_0^T(v_2) \leqslant \chi_0^T(v_3) \leqslant \chi_0^T(v_4),$$

причем из леммы 2 следует, что хотя бы одно из них строгое, а учитывая, что система гамильтонова, имеем

$$\chi_0^T(v_1) < \chi_0^T(v_3).$$

Следовательно,

$$\chi_0^T(y), \chi_0^T(y_1) \in [\chi_0^T(v_1), \chi_0^T(v_2)], \quad \chi_0^T(z), \chi_0^T(z_1) \in [\chi_0^T(v_3), \chi_0^T(v_4)].$$

Тогда, используя свойства 10°–13°, получаем цепочку соотношений

$$\chi_0^T(x_1') = l(\chi_0^T(y_1), \phi_1, \chi_0^T(z_1)) \geqslant l(\chi_0^T(v_1), \phi_1, \chi_0^T(v_3)) \geqslant$$
$$\geqslant l(\chi_0^T(v_1), \phi, \chi_0^T(v_3)) = l(\chi_0^T(v_1) + \alpha_0, \phi, \chi_0^T(v_3) + \alpha_0) - \alpha_0 =$$
$$= l(\chi_0^T(v_2), \phi, \chi_0^T(v_4)) - \alpha_0 \geqslant l(\chi_0^T(y), \phi, \chi_0^T(z)) - \alpha_0 =$$
$$= \chi_0^T(x') - \alpha_0 \geqslant \chi_0^T(x') - \alpha.$$

Следовательно,

$$\chi_0^T(x') \leqslant \chi_0^T(x_1') + \alpha = \frac{\delta_1}{T} - \varepsilon + \alpha = \frac{\delta_1}{T} - \alpha < \frac{\delta_2}{T},$$

что неверно, так как решение x' начинается в $M(0)$, а значит

$$\chi_0^T(x') \geqslant \frac{\delta_2}{T}.$$

Получили противоречие с (1.20). Поэтому

$$\delta_2' > \delta_1' + \frac{\varepsilon}{2}T,$$

а в силу симметрии верно неравенство

$$\delta_3' < \delta_4' - \frac{\varepsilon}{2}T.$$

Утверждение 2) леммы 4 следует из леммы 2.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для любых последовательностей* $0 \equiv t_0 < t_1 < \ldots$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots > 0$ *и любой системы* $A \in \mathcal{H}^4$ *существует система* $C \in \mathcal{H}^4$, *удовлетворяющая при каждом* $j = 1, 2, \ldots$ *условиям:*

1) $\delta_1'(j) \leqslant \delta_1(j) - \varepsilon_j(t_j - t_{j-1})$ и $\delta_4'(j) \geqslant \delta_4(j) + \varepsilon_j(t_j - t_{j-1})$, *где* $\delta_i(j)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *— логарифмические сингулярные числа оператора* $X_A(t_j, t_{j-1})$, *а* $\delta_i'(j)$ *— логарифмические сингулярные числа оператора* $X_C(t_j, t_{j-1})$;

2) $\delta_2'(j) > \delta_1'(j) + \frac{\varepsilon_j}{2}(t_j - t_{j-1})$ и $\delta_3'(j) < \delta_4'(j) - \frac{\varepsilon_j}{2}(t_j - t_{j-1})$;

3) $\sup\limits_{t_{j-1} < t \leqslant t_j} \|A(t) - C(t)\| \leqslant 2\varepsilon_j$.

Доказательство. При $t = 0$ положим $C(0) = A(0)$. Далее, на каждом промежутке $(t_{j-1}, t_j]$, $\quad j = 1, 2, \ldots$, положим

$$C(t) \equiv C_{t_j - t_{j-1}}^{\varepsilon_j}(t - t_{j-1}),$$

где оператор-функция C_T^ε описана в лемме 2. Утверждения леммы непосредственно следуют из лемм 2 и 4.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для любых* $\varepsilon, T > 0$ *и любой системы* $A \in \mathcal{H}^{2n}$ *существует система* $C_T^\varepsilon \in \mathcal{H}^{2n}$, *удовлетворяющая условиям*:

1) $\delta_n' \leqslant \delta_{n+1}' - 2\varepsilon T$, *где* δ_n', δ_{n+1}' *— логарифмические сингулярные числа оператора* $X_{C_T^\varepsilon}(T, 0)$;

2) $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|A(t) - C_T^\varepsilon(t)\| \leqslant 2\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\{e_i\}$ $(i = 1, ..., 2n)$ — сингулярный базис оператора Коши $X_A(T, 0)$, описанный в лемме 2, а x_i — решения, для которых $x_i(0) = e_i$.

Рассмотрим возмущение

$$Q_\varepsilon(t) = -\varepsilon P_{\mathcal{L}(x_1(t), \ldots, x_n(t))} + \varepsilon P_{\mathcal{L}^\perp(x_1(t), \ldots, x_n(t))}, \quad t \in [0, T].$$

Положим

$$C_T^\varepsilon(t) = A(t) - \varepsilon P_{\mathcal{L}(x_1(t), \ldots, x_n(t))} + \varepsilon P_{\mathcal{L}^\perp(x_1(t), \ldots, x_n(t))}, \quad t \in [0, T]. \quad (1.24)$$

Докажем, что $C_T^\varepsilon \in \mathcal{H}^{2n}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы JQ_ε являлся симметрическим оператором, т. е. чтобы для любых вектор-функций x и y выполнялось равенство

$$(JQ_\varepsilon(t)x(t), y(t)) = (x(t), JQ_\varepsilon(t)y(t)), \quad t \in [0,T].$$

Рассмотрим произвольные вектор-функции $x(t),\ y(t),\ t \in [0,T]$. Зафиксируем произвольное $t \in [0,T]$. Тогда

$$x(t) = z_x^1(t) + z_x^2(t), \quad y(t) = z_y^1(t) + z_y^2(t),$$

где

$$z_x^1(t), z_y^1(t) \in \mathcal{L}(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad z_x^2(t), z_y^2(t) \in \mathcal{L}^\perp(x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Для упрощения записи аргумент t будем опускать:

$$\begin{aligned}(JQ_\varepsilon x, y) = (J(-\varepsilon P_{\mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n)} + \varepsilon P_{\mathcal{L}^\perp(x_1,\ldots,x_n)})(z_x^1 + z_x^2), z_y^1 + z_y^2) =\\ = (-\varepsilon J z_x^1 + \varepsilon J z_x^2, z_y^1 + z_y^2) = \varepsilon\langle -z_x^1 + z_x^2, z_y^1 + z_y^2\rangle =\\ = \varepsilon(-\langle z_x^1, z_y^1\rangle - \langle z_x^1, z_y^2\rangle + \langle z_x^2, z_y^1\rangle + \langle z_x^2, z_y^2\rangle).\end{aligned}$$

Поскольку $x_1(t), \ldots, x_{2n}(t)$ — симплектический базис для всех $t \in [0,T]$ (см. (1.17)), то для любого $t \in [0,T]$ $\mathcal{L}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — *нулевая плоскость*, т. е. в ней симплектическое произведение любых двух векторов равно нулю. $\mathcal{L}^\perp(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \mathcal{L}(Jx_1(t), \ldots, Jx_n(t))$ — тоже нулевая плоскость. Учитывая это, получим

$$(JQ_\varepsilon x, y) = \varepsilon\langle z_x^2, z_y^1\rangle + \varepsilon\langle z_y^2, z_x^1\rangle.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}(x, JQ_\varepsilon y) = (z_x^1 + z_x^2, J(-\varepsilon P_{\mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n)} + \varepsilon P_{\mathcal{L}^\perp(x_1,\ldots,x_n)})(z_y^1 + z_y^2)) =\\ = (z_x^1 + z_x^2, -\varepsilon J z_y^1 + \varepsilon J z_y^2) = \varepsilon\langle -z_y^1 + z_y^2, z_x^1 + z_x^2\rangle =\\ = \varepsilon(-\langle z_y^1, z_x^1\rangle - \langle z_y^1, z_x^2\rangle + \langle z_y^2, z_x^1\rangle + \langle z_y^2, z_x^2\rangle) = \varepsilon\langle z_x^2, z_y^1\rangle + \varepsilon\langle z_y^2, z_x^1\rangle.\end{aligned}$$

Получили $(JQ_\varepsilon x, y) = (x, JQ_\varepsilon y)$. Следовательно, $C_T^\varepsilon \in \mathcal{H}^{2n}$, $t \in [0,T]$.

Легко убедиться, что вектор-функции $y_i(t) = e^{-\varepsilon t}x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, являются решениями возмущенной системы (1.24). Следовательно, у системы C_T^ε есть такие решения $y_i,\ i = 1, \ldots, n$, что

$$\chi_0^T(y_i) = \chi_0^T(x_i) - \varepsilon,$$

поэтому $\delta'_i \leqslant \delta_i - \varepsilon T,\ i = 1, \ldots, n$, где δ_j — логарифмические сингулярные числа оператора $X_A(T, 0)$, δ'_j — логарифмические сингулярные числа оператора $X_{C^\varepsilon_T}(T, 0),\ j = 1, \ldots, 2n$. А в силу симметрии верно $\delta'_i \geqslant \delta_i + \varepsilon T,\ i = n+1, \ldots, 2n$. Тогда из неравенств

$$\delta'_n \leqslant \delta_n - \varepsilon T, \quad \delta'_{n+1} \geqslant \delta_{n+1} + \varepsilon T$$

следует, что

$$\delta'_n + \varepsilon T \leqslant \delta_n \leqslant \delta_{n+1} \leqslant \delta'_{n+1} - \varepsilon T,$$

а значит $\delta'_n \leqslant \delta'_{n+1} - 2\varepsilon T$. Утверждение 1) леммы 6 доказано.

Утверждение 2) следует из (1.24) и свойств нормы.

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Для любых последовательностей* $0 \equiv t_0 < t_1 < \ldots,$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots > 0$ *и любой системы* $A \in \mathcal{H}^{2n}$ *существует система* $C \in \mathcal{H}^{2n}$, *удовлетворяющая при каждом* $j = 1, 2, \ldots$ *условиям:*

1) $\delta'_n(j) \leqslant \delta'_{n+1}(j) - 2\varepsilon_j(t_j - t_{j-1})$, *где* $\delta'_n(j),\ \delta'_{n+1}(j)$ — *логарифмические сингулярные числа оператора* $X_C(t_j, t_{j-1})$;

2) $\sup\limits_{t_{j-1} < t \leqslant t_j} \|A(t) - C(t)\| \leqslant 2\varepsilon_j$.

Доказательство. При $t = 0$ положим $C(0) = A(0)$. Далее, на каждом промежутке $(t_{j-1}, t_j],\ j = 1, 2, \ldots,$ положим

$$C(t) \equiv C^{\varepsilon_j}_{t_j - t_{j-1}}(t - t_{j-1}),$$

где оператор-функция C^ε_T описана в лемме 6. Утверждения леммы непосредственно следуют из леммы 6.

Лемма 7 доказана.

Лемма 8 [53]. *Пусть решения* a, b *и* $c \in \mathcal{L}(a, b)$ *системы* $A \in \mathcal{M}^m$ *удовлетворяют соотношениям:*

$$a(\tau) \perp b(\tau), \quad a(t) \perp b(t)$$

для некоторых $t, \tau \in \mathbb{R}^+$, *где* $t - \tau \equiv T$. *Рассмотрим следующие условия:*

1) $\measuredangle(c(\tau), \mathcal{L}(b(\tau))) \geqslant \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$;

2) $\chi^t_\tau(a) - \chi^t_\tau(b) \geqslant \delta > 0$;

3) $[\chi^t_\tau(a) - \chi^t_\tau(c)] \operatorname{sgn} T \leqslant \varepsilon \in (0, \infty)$;

4) $\measuredangle(c(t), \mathcal{L}(a(t))) \leqslant \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Тогда выполнены следующие утверждения:

А) *для любых* α, ε *существует такое число* $\theta^1(\alpha, \varepsilon)$, *что при* $|T| \geqslant \theta^1(\alpha, \varepsilon)$ *из условия 1) вытекает условие 3);*

Б) *для любых* α, β, δ *существует такое число* $\theta^2(\alpha, \beta, \delta)$, *что при* $T \geqslant \theta^2(\alpha, \beta, \delta)$ *из условий 1) и 2) вытекает условие 4).*

Лемма 9. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^{2n}$ — *ненулевые векторы, причем* $\measuredangle(a, b) = \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $|a| = |b|$. *Тогда существует ортогональное симплектическое преобразование (поворот)* Z, *переводящее вектор* a *в вектор* b, *удовлетворяющее неравенству* $\|Z - I\| \leqslant 2\varphi$.

Утверждение этой леммы следует из утверждений 1, 2, 3 [63].

Обозначим

$$\sigma(\chi(x), t, T, k) \equiv \frac{1}{k} \sum_{s=1}^{k} \chi_{t+(s-1)T}^{t+sT}(x), \quad kT \neq 0,$$

$$D_{\tau}^{t}(A) \equiv \frac{1}{t - \tau} \ln \|X_A(t, \tau)\|, \quad t \neq \tau, \tag{1.25}$$

$$d_{\tau}^{t}(A) \equiv \frac{1}{t - \tau} \ln \|X_A(\tau, t)\|^{-1}, \quad t \neq \tau. \tag{1.26}$$

Отметим некоторые полезные свойства только что введенных функций [53].

14°. $\sigma(\chi(x), t, T, k) = \chi_t^{t+kT}(x)$.

15°. $\sigma(d, t, T, k) \leqslant d_t^{t+kT}$ при $kT > 0$.

Теперь верхний $\Omega(A)$ и нижний $\omega(A)$ центральные показатели системы A задаются соответственно формулами:

$$\Omega(A) \equiv \inf_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \, \sigma(D(A), t_0, T, k), \tag{1.27}$$

$$\omega(A) \equiv \sup_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \, \sigma(d(A), t_0, T, k). \tag{1.28}$$

Обозначим для некоторого $k \in \{1, \ldots, 2n\}$

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_k, \alpha, t) \equiv \{y \in \mathbb{R}^{2n} | \measuredangle(\mathcal{L}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)), y) \leqslant \alpha\},$$

$$V_A(x_1, x_2, \ldots, x_k, \alpha, \tau, t) \equiv X_A(\tau, t) U(x_1, x_2, \ldots, x_k, \alpha, t).$$

Лемма 10. *Пусть заданы последовательности положительных чисел* $\{\varepsilon_j\}$, $\{\Delta_j\}$ *при* $j = 1, 2, \ldots,$ *и* $\{\alpha_j\}$, $\alpha_j < \frac{1}{39}$, *при* $j = 0, 1, \ldots,$ *а также последовательность*

$$0 \equiv t_0 < t_1 < t_2 < \ldots,$$

удовлетворяющая при каждом $j = 1, 2, \ldots$ *неравенству*

$$t_j - t_{j-1} > \max\{1, \theta^1(\alpha_{j-1}, \varepsilon_j), \theta^1(\alpha_j, \varepsilon_j), \\ \theta^2(\alpha_{j-1}, \alpha_j, \Delta_j), \theta^2(\alpha_j, \alpha_{j-1}, \Delta_j)\}, \tag{1.29}$$

где функции θ^1 *и* θ^2 *описаны в лемме 8. Тогда для любой системы* $C \in \mathcal{H}^{2n}$, *такой, что*

$$\delta_2(j) > \delta_1(j) + \Delta_j(t_j - t_{j-1}), \quad \delta_{2n-1}(j) < \delta_{2n}(j) - \Delta_j(t_j - t_{j-1}), \tag{1.30}$$

где $\delta_i(j)$ *— логарифмические сингулярные числа оператора* $X_C(t_j, t_{j-1})$, $i = 1, \ldots, 2n$, *существует система* $B \in \mathcal{H}^{2n}$, *удовлетворяющая при каждом* $j = 1, 2, \ldots$ *условиям:*

1) *найдется такое решение* b *этой системы, что*

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(b) \geqslant D_{t_{j-1}}^{t_j}(C) - \varepsilon_j,$$

2) *найдется такое решение* s *этой системы, что*

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(s) \leqslant d_{t_{j-1}}^{t_j}(C) + \varepsilon_j,$$

3) $\sup\limits_{t_{j-1} < t \leqslant t_j} \|B(t) - C(t)\| < 20\pi\alpha_j(2a_C + 1).$

Доказательство. 1. Пусть $e_1(t_{j-1}), \ldots, e_{2n}(t_{j-1})$ — сингулярный базис оператора Коши $X_C(t_j, t_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots$, описанный в лемме 2, $f_i(t_j) \equiv X_C(t_j, t_{j-1})e_i(t_{j-1})$, $i = 1, \ldots, 2n$.

Будем строить возмущенную систему B со следующими свойствами, выполненными при каждом $j = 1, 2, \ldots$:

$$V_B\left(e_{2n}(t_{j-1}), \frac{\pi}{2} - \alpha_{j-1}, t_j, t_{j-1}\right) \subseteq U\left(e_{2n}(t_j), \frac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j\right); \tag{1.31}$$

$$U\left(e_1(t_j), \alpha_j, t_j\right) \subseteq U\left(\widetilde{f}_1(t_j), \frac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j\right), \tag{1.32}$$

где $\widetilde{f}_1(t_j) = X_B(t_j, t_{j-1})e_1(t_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots$;

$$V_B\left(\widetilde{f}_1(t_{j+1}), \frac{\pi}{2} - \alpha_{j+1}, t_j, t_{j+1}\right) \subseteq U\left(\widetilde{f}_1(t_j), \frac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j\right). \tag{1.33}$$

Заметим, что в силу условий (1.30), выбора длин отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ (1.29) и леммы 8 справедливы включения

$$V_C\left(e_{2n}(t_{j-1}), \frac{\pi}{2} - \alpha_{j-1}, t_j, t_{j-1}\right) \subseteq U(f_{2n}(t_j), \alpha_j, t_j),$$

$$V_C\left(f_1(t_j),\frac{\pi}{2}-\alpha_j,t_{j-1},t_j\right)\subseteq U(e_1(t_{j-1}),\alpha_{j-1},t_{j-1}).$$

При $t=0$ положим $B=C$. Будем строить возмущенную систему B на промежутках $(t_{j-1},t_j]$ с помощью индукции по номеру промежутка $j=1,2,\ldots$

При $j=1$ рассмотрим промежуток $(t_0,t_1]$ и построим на нем возмущенную систему $B\equiv B(t_0,\alpha_0,t_1,\alpha_1)$.

2. а) Рассмотрим отдельно случай $n=1$. Заметим, что для него выполнено равенство

$$\measuredangle(f_2(t_1),\mathcal{L}(e_2(t_1)))=\measuredangle(f_1(t_1),\mathcal{L}(e_1(t_1))), \tag{1.34}$$

поскольку $e_1(t_1)\perp e_2(t_1),\ f_1(t_1)\perp f_2(t_1)$.

Возможен один из двух случаев:

1) $\measuredangle(f_2(t_1),\mathcal{L}(e_2(t_1)))\leqslant\frac{\pi}{2}-2\alpha_1$.

Следовательно, справедливы включения

$$V_C\left(e_2(t_0),\frac{\pi}{2}-\alpha_0,t_1,t_0\right)\subseteq U(f_2(t_1),\alpha_1,t_1)\subseteq U\left(e_2(t_1),\frac{\pi}{2}-\alpha_1,t_1\right)$$

и, в силу равенства (1.34), включение

$$U\left(e_1(t_1),\alpha_1,t_1\right)\subseteq U(f_1(t_1),\frac{\pi}{2}-\alpha_1,t_1).$$

Тогда положим $Z=I$.

2) $\measuredangle(f_2(t_1),\mathcal{L}(e_2(t_1)))>\frac{\pi}{2}-2\alpha_1$.

Тогда поворачиваем вектор $f_2(t_1)$ в сторону $\mathcal{L}(e_2(t_1))$ на угол φ с помощью поворота Z в плоскости $\mathcal{L}(e_1(t_1),e_2(t_1))\equiv\mathcal{L}(e_1(t_1),Je_1(t_1))$ так, чтобы

$$\measuredangle(Zf_2(t_1),\mathcal{L}(e_2(t_1)))\leqslant\frac{\pi}{2}-2\alpha_1. \tag{1.35}$$

Согласно утверждению 1 из [63], поворот Z является симплектическим, причем $\|Z-I\|\leqslant\varphi$. Заметим, что при этом всегда найдется угол $\varphi\leqslant 2\alpha_1$, удовлетворяющий условию (1.35). Следовательно, выполнено неравенство $\|Z-I\|\leqslant 2\alpha_1$.

Учитывая, что ортогональное преобразование сохраняет углы между векторами и равенство (1.34), получим включения

$$\begin{gathered}ZV_C\left(e_2(t_0),\tfrac{\pi}{2}-\alpha_0,t_1,t_0\right)\subseteq ZU(f_2(t_1),\alpha_1,t_1)=\\=U(Zf_2(t_1),\alpha_1,t_1)\subseteq U\left(e_2(t_1),\tfrac{\pi}{2}-\alpha_1,t_1\right),\end{gathered}$$

$$U\left(e_1(t_1),\alpha_1,t_1\right) \subseteq ZU\left(f_1(t_1),\frac{\pi}{2}-\alpha_1,t_1\right) = U\left(Zf_1(t_1),\frac{\pi}{2}-\alpha_1,t_1\right).$$

б) При $n \geqslant 2$ возможен один из двух случаев:

1) $\measuredangle(f_{2n}(t_1),\mathcal{L}(e_{2n}(t_1))) \leqslant \frac{\pi}{2}-4\alpha_1$.

Следовательно,

$$\begin{gathered} V_C\left(e_{2n}(t_0),\tfrac{\pi}{2}-\alpha_0,t_1,t_0\right) \subseteq U(f_{2n}(t_1),\alpha_1,t_1) \subseteq \\ \subseteq U\left(e_{2n}(t_1),\tfrac{\pi}{2}-\alpha_1,t_1\right) \end{gathered} \tag{1.36}$$

с «запасом $2\alpha_1$». Тогда положим $Z' = I$.

2) $\measuredangle(f_{2n}(t_1),\mathcal{L}(e_{2n}(t_1))) > \frac{\pi}{2}-4\alpha_1$.

Тогда поворачиваем вектор $f_{2n}(t_1)$ в сторону $\mathcal{L}(e_{2n}(t_1))$ на угол φ с помощью поворота Z', который, согласно лемме 9, всегда можно сделать симплектическим, так, чтобы

$$\measuredangle(Z'f_{2n}(t_1),\mathcal{L}(e_{2n}(t_1))) \leqslant \frac{\pi}{2}-4\alpha_1. \tag{1.37}$$

Заметим, что при этом всегда найдется угол $\varphi \leqslant 4\alpha_1$, удовлетворяющий условию (1.37). Тогда по лемме 9 выполнено неравенство $\|Z'-I\| \leqslant 8\alpha_1$. Учитывая, что ортогональное преобразование сохраняет углы между векторами, получим включение

$$\begin{gathered} Z'V_C\left(e_{2n}(t_0),\tfrac{\pi}{2}-\alpha_0,t_1,t_0\right) \subseteq Z'U(f_{2n}(t_1),\alpha_1,t_1) = \\ = U(Z'f_{2n}(t_1),\alpha_1,t_1) \subseteq U\left(e_{2n}(t_1),\tfrac{\pi}{2}-\alpha_1,t_1\right) \end{gathered}$$

с «запасом $2\alpha_1$». При этом $f_1(t_1)$ тоже, вообще говоря, повернется и перейдет в $Z'f_1(t_1) \equiv f_1'(t_1)$.

При этом возможен один из двух случаев:

1) $\measuredangle(f_1'(t_1),\mathcal{L}(e_1(t_1))) \leqslant \frac{\pi}{2}-2\alpha_1$.

Следовательно,

$$U(e_1(t_1),\alpha_1,t_1) \subseteq U\left(f_1'(t_1),\frac{\pi}{2}-\alpha_1,t_1\right). \tag{1.38}$$

Тогда положим $Z'' = I$.

2) $\measuredangle(f_1'(t_1),\mathcal{L}(e_1(t_1))) > \frac{\pi}{2}-2\alpha_1$.

Тогда поворачиваем вектор $f_1'(t_1)$ в сторону $\mathcal{L}(e_1(t_1))$ на угол ψ с помощью поворота Z'', который, согласно лемме 9, всегда можно сделать симплектическим, так, чтобы

$$\measuredangle(Z''f_1'(t_1),\mathcal{L}(e_1(t_1))) \leqslant \frac{\pi}{2}-2\alpha_1. \tag{1.39}$$

Заметим, что при этом всегда найдется угол $\psi \leqslant 2\alpha_1$, удовлетворяющий условию (1.39). Тогда по лемме 9 выполнено неравенство $\|Z'' - I\| \leqslant 4\alpha_1$. Поскольку первый поворот Z' был сделан с «запасом $2\alpha_1$», то, применив композицию поворотов $Z \equiv Z''Z'$, получим, что

$$Z''Z'V_C\left(e_{2n}(t_0), \frac{\pi}{2} - \alpha_0, t_1, t_0\right) \subseteq U\left(e_{2n}(t_1), \frac{\pi}{2} - \alpha_1, t_1\right),$$

$$U\left(e_1(t_1), \alpha_1, t_1\right) \subseteq Z''Z'U\left(f_1(t_1), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_1, t_1\right) = \\ = U\left(Z''Z'f_1(t_1), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_1, t_1\right).$$

При этом

$$\|Z - I\| = \|Z''Z' - I\| = \|Z''Z' - Z' + Z' - I\| \leqslant$$

$$\leqslant \|Z'' - I\| \cdot \|Z'\| + \|Z' - I\| \leqslant 4\alpha_1 + 8\alpha_1 = 12\alpha_1 < 13\alpha_1.$$

3. По теореме 2.5 из [55] для любого ортогонального симплектического оператора Z существует непрерывно дифференцируемая оператор-функция $Z(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

1) оператор $Z(\tau)$ ортогонален и симплектичен при каждом $\tau \in [0, 1]$;

2) $Z(0) = I$, $Z(1) = Z$;

3) некоторое число $\phi \in [0, \pi]$ осуществляет оценку $\|\dot{Z}(\tau)\| \leqslant \phi$ и, если

$$\|Z - I\| < \theta < \frac{1}{3},$$

удовлетворяет неравенству

$$\phi < \arcsin 3\theta.$$

Поскольку по условию $\alpha_j < \frac{1}{39}$ (для случая $n = 1$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_j < \frac{1}{9}$, поскольку $\|Z - I\| \leqslant 2\alpha_1 < 3\alpha_1$), то

$$\|Z - I\| < 13\alpha_1 < \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$\|\dot{Z}(\tau)\| \leqslant \phi < \arcsin 3\theta = \arcsin 39\alpha_1 < 39\alpha_1 \cdot \frac{\pi}{2} < 20\pi\alpha_1.$$

Кроме того, по теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\|Z(\tau) - I\| \leqslant \phi < 20\pi\alpha_1.$$

Для случая $n = 1$ будут справедливы оценки $\|Z(\tau) - I\| < 5\pi\alpha_1$ и $\|\dot{Z}(\tau)\| < 5\pi\alpha_1$.

Положим

$$B(t) = \begin{cases} C(t), & t \in (t_0, t_1 - 1), \\ Z(\tau)C(t)Z^{-1}(\tau) + \dot{Z}(\tau)Z^{-1}(\tau), & t \in [t_1 - 1, t_1], \end{cases}$$

где $\tau = t - t_1 + 1$. Тогда операторы Коши $X_C(t, t_0)$ и $X_B(t, t_0)$, $t \in (t_0, t_1]$, систем C и B соответственно связаны следующим образом:

$$X_B(t, t_0) = \begin{cases} X_C(t, t_0), & t \in (t_0, t_1 - 1), \\ Z(\tau)X_C(t, t_0), & t \in [t_1 - 1, t_1], \end{cases}$$

причем из симплектичности операторов $X_C(t, t_0)$ и $Z(\tau)$ следует симплектичность оператора $X_B(t, t_0)$, $t \in (t_0, t_1]$, следовательно, $B \in \mathcal{H}^{2n}$, $t \in (t_0, t_1]$. При $t \in (t_0, t_1]$, учитывая ортогональность $Z(\tau)$, имеем

$$\|B(t) - C(t)\| \leqslant \|Z(\tau)C(t)Z^{-1}(\tau) - C(t) + \dot{Z}(\tau)Z^{-1}(\tau)\| =$$
$$= \|Z(\tau)C(t)Z^{-1}(\tau) - C(t)Z^{-1}(\tau) + C(t)Z^{-1}(\tau) - C(t)Z^{-1}(\tau)Z(\tau) +$$
$$+ \dot{Z}(\tau)Z^{-1}(\tau)\| = \|(Z(\tau) - I)C(t)Z^{-1}(\tau) + C(t)Z^{-1}(\tau)(I - Z(\tau)) +$$
$$+ \dot{Z}(\tau)Z^{-1}(\tau)\| \leqslant \|Z(\tau) - I\|\|C(t)\|\|Z^{-1}(\tau)\| +$$
$$+ \|C(t)\|\|Z^{-1}(\tau)\|\|I - Z(\tau)\| + \|\dot{Z}(\tau)\|\|Z^{-1}(\tau)\| < 20\pi\alpha_1(2a_C + 1).$$

Для случая $n = 1$ будем иметь оценку

$$\|B(t) - C(t)\| < 5\pi\alpha_1(2a_C + 1).$$

Таким образом, построена такая возмущенная система B на отрезке $[t_0, t_1]$, что выполнены условия (1.31), (1.32) и условие 3) леммы.

Далее, пусть для некоторого $j \geqslant 1$ уже построена возмущенная система B на промежутке $(t_{j-1}, t_j]$. Согласно предположению индукции, на этом промежутке построена система, удовлетворяющая условиям (1.31), (1.32) и условию 3) леммы.

На промежутке $(t_j, t_{j+1}]$ положим возмущенную систему

$$B \equiv B(t_j, \alpha_j, t_{j+1}, \alpha_{j+1}).$$

На этом индукционный переход, а с ним и построение возмущенной системы B закончены.

Поскольку при построении возмущенной системы B использовались только повороты, то для каждого $j = 1, 2, \ldots$ сингулярный базис $e_1(t_{j-1}), \ldots, e_{2n}(t_{j-1})$ оператора Коши $X_C(t_j, t_{j-1})$ будет являться и сингулярным базисом оператора Коши $X_B(t_j, t_{j-1})$ с теми же логарифмическими сингулярными числами, и справедливо равенство

$$\|X_C(t_j, t_{j-1})\| = \|X_B(t_j, t_{j-1})\|.$$

Тогда из условий (1.30), выбора длин отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ (1.29), леммы 8 и включений (1.32) вытекает выполнение условий (1.33).

4. Возьмем такое произвольное решение b системы B, что

$$b(t_0) \in U\left(e_{2n}(t_0), \frac{\pi}{2} - \alpha_0, t_0\right).$$

Тогда по построению системы B для всех $j = 1, 2, \ldots$ имеет место включение

$$b(t_j) \in U\left(e_{2n}(t_j), \frac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j\right).$$

Для каждого $j = 1, 2, \ldots$ обозначим через $e_1^{j-1}(t), \ldots, e_{2n}^{j-1}(t)$ такие решения системы B, для которых выполнены условия $e_1^{j-1}(t_{j-1}) = e_1(t_{j-1}), \ldots, e_{2n}^{j-1}(t_{j-1}) = e_{2n}(t_{j-1})$.

Поскольку длины отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ удовлетворяют условию (1.29), то из леммы 8 следует оценка

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(e_{2n}^{j-1}) - \chi_{t_{j-1}}^{t_j}(b) \leqslant \varepsilon_j.$$

Учитывая вышеперечисленное, получаем соотношения

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(b) \geqslant \chi_{t_{j-1}}^{t_j}(e_{2n}^{j-1}) - \varepsilon_j = \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \ln \|X_B(t_j, t_{j-1})\| - \varepsilon_j =$$

$$= \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \ln \|X_C(t_j, t_{j-1})\| - \varepsilon_j = D_{t_{j-1}}^{t_j}(C) - \varepsilon_j.$$

5. По построению системы B для всех $j = 1, 2, \ldots$ справедливы включения

$$V_B\left(\widetilde{f}_1(t_{j+1}), \frac{\pi}{2} - \alpha_{j+1}, t_j, t_{j+1}\right) \subseteq U\left(\widetilde{f}_1(t_j), \frac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j\right).$$

Рассмотрим множества

$$K_j \equiv \left\{ \frac{y}{|y|} \;\middle|\; y \in X_B(t_0, t_j) U \left(\widetilde{f}_1(t_j), \frac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j \right),\ y \neq 0 \right\}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

являющиеся вложенными компактами: $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ По теореме о пересечении вложенных компактов [68, с.141]

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset.$$

Следовательно, существует по крайней мере одно решение s системы B, удовлетворяющее условию

$$s(t_0) \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Поскольку длины отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ удовлетворяют условию (1.29), то из леммы 8 следует оценка

$$\chi_{t_j}^{t_{j-1}}(s) - \chi_{t_j}^{t_{j-1}}(e_1^{j-1}) \leqslant \varepsilon_j.$$

Учитывая, что $e_1(t_{j-1}), \ldots, e_{2n}(t_{j-1})$ — сингулярный базис операторов Коши $X_C(t_j, t_{j-1}),\ X_B(t_j, t_{j-1})$, равенство

$$\|X_C(t_{j-1}, t_j)\| = \|X_B(t_{j-1}, t_j)\|$$

и свойство 1°, получаем соотношения

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(s) \leqslant \chi_{t_j}^{t_{j-1}}(e_1^{j-1}) + \varepsilon_j = \frac{1}{t_{j-1} - t_j} \ln \|X_B(t_{j-1}, t_j)\| + \varepsilon_j =$$

$$= \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \ln \|X_C(t_{j-1}, t_j)\|^{-1} + \varepsilon_j = d_{t_{j-1}}^{t_j}(C) + \varepsilon_j.$$

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Пусть задано $n \in \mathbb{N}$ и заданы последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_j\}$, $\{\Delta_j\}$ при $j = 1, 2, \ldots$ и $\{\alpha_j\}$, $\alpha_j < \frac{1}{6n+3}$, при $j = 0, 1, \ldots$, а также последовательность*

$$0 \equiv t_0 < t_1 < t_2 < \ldots,$$

удовлетворяющая при каждом $j = 1, 2, \ldots$ неравенству

$$\begin{gathered} t_j - t_{j-1} > \max\{1, \theta^1(\alpha_{j-1}, \varepsilon_j), \theta^1(\alpha_j, \varepsilon_j), \\ \theta^2(\alpha_{j-1}, \alpha_j, \Delta_j), \theta^2(\alpha_j, \alpha_{j-1}, \Delta_j)\}, \end{gathered} \tag{1.40}$$

где функции θ^1 и θ^2 описаны в лемме 8. Тогда для любой системы $C \in \mathcal{H}^{2n}$, такой, что для каждого $j = 1, 2, \ldots$

$$\delta_n(j) \leqslant \delta_{n+1}(j) - \Delta_j(t_j - t_{j-1}), \tag{1.41}$$

где $\delta_i(j)$ — логарифмические сингулярные числа оператора $X_C(t_j, t_{j-1})$, $i = 1, \ldots, 2n$, существует система $B \in \mathcal{H}^{2n}$, удовлетворяющая при каждом $j = 1, 2, \ldots$ условиям:

1) пространство решений системы B представимо в виде $E(B) = E_1^n(B) \oplus E_2^n(B)$, $\dim E_1^n(B) = \dim E_2^n(B) = n$, причем

а) для любого ненулевого решения $s \in E_1^n(B)$ выполнено

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(s) \leqslant \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \delta_n(j) + \varepsilon_j;$$

б) для любого ненулевого решения $b \in E_2^n(B)$ выполнено

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(b) \geqslant \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \delta_{n+1}(j) - \varepsilon_j;$$

2) $\sup\limits_{t_{j-1} < t \leqslant t_j} \|B(t) - C(t)\| < (3n+2)\pi\alpha_j(2a_C + 1)$.

Доказательство. Заметим, что для $n = 1$ утверждения лемм 10 и 11 (с учетом оценок для случая $n = 1$, приведенных в доказательстве леммы 10) совпадают. Поэтому достаточно доказать лемму 11 для $n \geqslant 2$.

1. Пусть $e_1(t_{j-1}), \ldots, e_{2n}(t_{j-1})$ — сингулярный базис оператора Коши $X_C(t_j, t_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots$, описанный в лемме 2, $f_i(t_j) \equiv X_C(t_j, t_{j-1}) e_i(t_{j-1})$, $i = 1, \ldots, 2n$.

Будем строить возмущенную систему B со следующими свойствами, выполненными при каждом $j = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{gathered} V_B\left(e_{n+1}(t_{j-1}), \ldots, e_{2n}(t_{j-1}), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_{j-1}, t_j, t_{j-1}\right) \subseteq \\ \subseteq U\left(e_{n+1}(t_j), \ldots, e_{2n}(t_j), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j\right); \end{gathered} \tag{1.42}$$

$$\begin{gathered} U\left(e_1(t_j), \ldots, e_n(t_j), \alpha_j, t_j\right) \subseteq \\ \subseteq U\left(\widetilde{f}_1(t_j), \ldots, \widetilde{f}_n(t_j), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j\right), \end{gathered} \tag{1.43}$$

где для каждого $j = 1, 2, \ldots$ $\widetilde{f}_i(t_j) = X_B(t_j, t_{j-1}) e_i(t_{j-1})$, $i = 1, \ldots, n$;

$$\begin{gathered} V_B\left(\widetilde{f}_1(t_{j+1}), \ldots, \widetilde{f}_n(t_{j+1}), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_{j+1}, t_j, t_{j+1}\right) \subseteq \\ \subseteq U\left(\widetilde{f}_1(t_j), \ldots, \widetilde{f}_n(t_j), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j\right). \end{gathered} \tag{1.44}$$

Заметим, что в силу условий (1.41), выбора длин отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ (1.40) и леммы 8 справедливы включения

$$\begin{gathered}V_C\left(e_{n+1}(t_{j-1}), \ldots, e_{2n}(t_{j-1}), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_{j-1}, t_j, t_{j-1}\right) \subseteq \\ \subseteq U(f_{n+1}(t_j), \ldots, f_{2n}(t_j), \alpha_j, t_j),\end{gathered} \tag{1.45}$$

$$\begin{gathered}V_C\left(f_1(t_j), \ldots, f_n(t_j), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_j, t_{j-1}, t_j\right) \subseteq \\ \subseteq U(e_1(t_{j-1}), \ldots, e_n(t_{j-1}), \alpha_{j-1}, t_{j-1}).\end{gathered}$$

При $t = 0$ положим $B = C$. Будем строить возмущенную систему B на промежутках $(t_{j-1}, t_j]$ с помощью индукции по номеру промежутка $j = 1, 2, \ldots$

При $j = 1$ рассмотрим промежуток $(t_0, t_1]$ и построим на нем возмущенную систему $B \equiv B(t_0, \alpha_0, t_1, \alpha_1)$.

Обозначим $\Phi_i(t_1) \equiv \mathcal{L}(e_i(t_1), Je_i(t_1)) = \mathcal{L}(e_i(t_1), e_{2n+1-i}(t_1))$, $i = 1, \ldots, n$, — двумерные симплектические плоскости, инвариантные относительно оператора J (отметим, что они попарно ортогональны и $\mathbb{R}^{2n} = \Phi_1 \oplus \ldots \oplus \Phi_n$). Для каждого $i = 1, \ldots, n$ рассмотрим

$$G_i(t_1) \equiv \mathcal{L}(f_{n+1}(t_1), \ldots, f_{2n}(t_1)) \cap \Phi_i(t_1).$$

Допустим, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\dim G_i(t_1) = 2$. Тогда $G_i(t_1) = \Phi_i(t_1)$. Заметим, что если $x \in G_i(t_1)$, то и $Jx \in G_i(t_1)$, а значит $x, Jx \in \mathcal{L}(f_{n+1}(t_1), \ldots, f_{2n}(t_1))$. Но $\mathcal{L}(f_{n+1}(t_1), \ldots, f_{2n}(t_1))$ — нулевая плоскость (это следует из определения симплектического базиса (1.17)). Получили противоречие.

Случай $\dim G_i(t_1) = 0$ также невозможен. Это следует из того, что $\dim \mathcal{L}(f_{n+1}(t_1), \ldots, f_{2n}(t_1)) = n$, а тогда нашелся бы такой номер $k \in \{1, \ldots, n\}$, что $\dim G_k(t_1) = 2$, что невозможно.

Следовательно, для всех $i = 1, \ldots, n$ $\dim G_i(t_1) = 1$, т. е. $G_i(t_1) = \mathcal{L}(g_i(t_1))$, где $g_i(t_1) \in \Phi_i(t_1)$, $|g_i(t_1)| = 1$. Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{L}(f_{n+1}(t_1), \ldots, f_{2n}(t_1)) = \mathcal{L}(g_1(t_1), \ldots, g_n(t_1)). \tag{1.46}$$

При этом для каждого $i = 1, \ldots, n$ возможен один из двух случаев.

1) $\measuredangle(g_i(t_1), \mathcal{L}(Je_i(t_1))) \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\alpha_1$.

Тогда положим $Z_i = I$.

2) $\measuredangle(g_i(t_1), \mathcal{L}(Je_i(t_1))) > \frac{\pi}{2} - 2\alpha_1$.

Тогда поворачиваем вектор $g_i(t_1)$ в плоскости $\mathcal{L}(e_i(t_1), Je_i(t_1))$ на угол φ_i с помощью поворота Z_i, единичного на $\mathcal{L}^{\perp}(e_i(t_1), Je_i(t_1))$, так, чтобы

$$\measuredangle(Z_i g_i(t_1), \mathcal{L}(Je_i(t_1))) \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\alpha_1. \tag{1.47}$$

Заметим, что при этом всегда найдется угол $\varphi_i \leqslant 2\alpha_1$, удовлетворяющий условию (1.47). Согласно утверждению 1 [63] преобразование Z_i является симплектическим и выполнено $\|Z_i - I\| \leqslant 2\alpha_1$.

Докажем, что, применив поворот $Z = Z_n \cdots Z_1$ и учитывая, что ортогональное преобразование сохраняет углы между векторами, мы получим

$$\begin{gathered} ZV_C\left(e_{n+1}(t_0), \ldots, e_{2n}(t_0), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_0, t_1, t_0\right) \subseteq \\ \subseteq U\left(e_{n+1}(t_1), \ldots, e_{2n}(t_1), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_1, t_1\right). \end{gathered} \tag{1.48}$$

В силу (1.45) и (1.46) достаточно доказать, что

$$\begin{gathered} ZU(g_1(t_1), \ldots, g_n(t_1), \alpha_1, t_1) \subseteq \\ \subseteq U\left(e_{n+1}(t_1), \ldots, e_{2n}(t_1), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_1, t_1\right). \end{gathered} \tag{1.49}$$

Возьмем произвольный вектор

$$g(t_1) = a_1 Z g_1(t_1) + \ldots + a_n Z g_n(t_1) \in Z\mathcal{L}(g_1(t_1), \ldots, g_n(t_1)),$$

где $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\quad a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1$. По построению поворота Z для каждого $i = 1, \ldots, n$ имеем

$$\measuredangle(Z g_i(t_1), \mathcal{L}(Je_i(t_1))) \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\alpha_1.$$

Не ограничивая общности можем считать

$$\measuredangle(Z g_i(t_1), \mathcal{L}(Je_i(t_1))) = \measuredangle(Z g_i(t_1), Je_i(t_1))$$

(в противном случае $g_i(t_1)$ можно домножить на -1, что никак не отразится на доказательстве). А поскольку $\measuredangle(Z g_i(t_1), Je_i(t_1)) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то

$$\cos\measuredangle(Z g_i(t_1), Je_i(t_1)) \geqslant \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha_1).$$

Рассмотрим вектор

$$e(t_1) = a_1 Je_1(t_1) + \ldots + a_n Je_n(t_1) \in \mathcal{L}(e_{n+1}(t_1), \ldots, e_{2n}(t_1)).$$

Докажем, что

$$\measuredangle(g(t_1), e(t_1)) \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\alpha_1.$$

Действительно,

$$\cos\measuredangle(g(t_1), e(t_1)) =$$
$$= (a_1 Zg_1(t_1) + \ldots + a_n Zg_n(t_1), a_1 Je_1(t_1) + \ldots + a_n Je_n(t_1)) =$$
$$= a_1^2(Zg_1(t_1), Je_1(t_1)) + \ldots + a_n^2(Zg_n(t_1), Je_n(t_1)) \geqslant$$
$$\geqslant (a_1^2 + \ldots + a_n^2)\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha_1\right),$$

а значит

$$\measuredangle(g(t_1), e(t_1)) \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\alpha_1.$$

Следовательно,

$$Z\mathcal{L}(g_1(t_1), \ldots, g_n(t_1)) \subseteq U\left(e_{n+1}(t_1), \ldots, e_{2n}(t_1), \frac{\pi}{2} - \alpha_1, t_1\right)$$

с «запасом α_1», а значит будет выполнено условие (1.49).

Заметим, что $\mathcal{L}(f_1(t_1), \ldots, f_n(t_1)) = \mathcal{L}^{\perp}(f_{n+1}(t_1), \ldots, f_{2n}(t_1))$ — нулевая плоскость и $\mathcal{L}(f_1(t_1), \ldots, f_n(t_1)) \cap \Phi_i(t_1) = \mathcal{L}(Jg_i)$. Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{L}(f_1(t_1), \ldots, f_n(t_1)) = \mathcal{L}(Jg_1(t_1), \ldots, Jg_n(t_1)).$$

Так как для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется неравенство

$$\measuredangle(Zg_i(t_1), Je_i(t_1)) \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\alpha_1,$$

то справедлива оценка

$$\measuredangle(ZJg_i(t_1), \mathcal{L}(e_i(t_1))) \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\alpha_1.$$

Тогда по доказанному ранее получим, что условие

$$\begin{gathered} U\left(e_1(t_1), \ldots, e_n(t_1), \alpha_1, t_1\right) \subseteq \\ \subseteq ZU\left(f_1(t_1), \ldots, f_n(t_1), \tfrac{\pi}{2} - \alpha_1, t_1\right) \end{gathered} \tag{1.50}$$

будет выполнено.

При этом

$$\|Z - I\| = \|Z_n \cdots Z_1 - I\| = \|Z_n \cdots Z_1 - Z_{n-1} \cdots Z_1 + \ldots + Z_1 - I\| \leqslant$$
$$\leqslant \|Z_{n-1} \cdots Z_1\|\|Z_1 - I\| + \ldots + \|Z_1 - I\| \leqslant 2n\alpha_1 < (2n+1)\alpha_1.$$

По теореме 2.5 из [55] для любого ортогонального симплектического оператора Z существует непрерывно дифференцируемая оператор-функция $Z(\tau), \tau \in [0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

1) оператор $Z(\tau)$ ортогонален и симплектичен при каждом $\tau \in [0,1]$;

2) $Z(0) = I,\ Z(1) = Z$;

3) некоторое число $\phi \in [0,\pi]$ осуществляет оценку $\|\dot{Z}(\tau)\| \leqslant \phi$ и, если

$$\|Z - I\| < \theta < \frac{1}{3},$$

удовлетворяет неравенству

$$\phi < \arcsin 3\theta.$$

Поскольку по условию $\alpha_j < \frac{1}{6n+3}$, то

$$\|Z - I\| < (2n+1)\alpha_1 < \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$\|\dot{Z}(\tau)\| \leqslant \phi \leqslant \arcsin 3\theta = \arcsin(6n+3)\alpha_1 < (6n+3)\alpha_1 \cdot \frac{\pi}{2} < (3n+2)\pi\alpha_1.$$

Кроме того, по теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\|Z(\tau) - I\| \leqslant \phi < (3n+2)\pi\alpha_1.$$

Положим

$$B(t) = \begin{cases} C(t), & t \in (t_0, t_1 - 1), \\ Z(\tau)C(t)Z^{-1}(\tau) + \dot{Z}(\tau)Z^{-1}(\tau), & t \in [t_1 - 1, t_1], \end{cases}$$

где $\tau = t - t_1 + 1$. Тогда операторы Коши $X_C(t,t_0)$ и $X_B(t,t_0)$, $t \in (t_0, t_1]$, систем C и B соответственно связаны следующим образом:

$$X_B(t,t_0) = \begin{cases} X_C(t,t_0), & t \in (t_0, t_1 - 1), \\ Z(\tau)X_C(t,t_0), & t \in [t_1 - 1, t_1], \end{cases}$$

причем из симплектичности операторов $X_C(t,t_0)$ и $Z(\tau)$ следует симплектичность оператора $X_B(t,t_0)$, $t \in (t_0, t_1]$, следовательно, $B \in \mathcal{H}^{2n}$, $t \in (t_0, t_1]$. При $t \in (t_0, t_1]$, учитывая ортогональность $Z(\tau)$, имеем

$$\|B(t) - C(t)\| \leqslant \|Z(\tau)C(t)Z^{-1}(\tau) - C(t) + \dot{Z}(\tau)Z^{-1}(\tau)\| =$$

$$= \|Z(\tau)C(t)Z^{-1}(\tau) - C(t)Z^{-1}(\tau) + C(t)Z^{-1}(\tau) - C(t)Z^{-1}(\tau)Z(\tau) +$$

$$+\dot{Z}(\tau)Z^{-1}(\tau)\| = \|(Z(\tau)-I)C(t)Z^{-1}(\tau)+C(t)Z^{-1}(\tau)(I-Z(\tau))+$$
$$+\dot{Z}(\tau)Z^{-1}(\tau)\| \leqslant \|Z(\tau)-I\|\|C(t)\|\|Z^{-1}(\tau)\|+$$
$$+\|C(t)\|\|Z^{-1}(\tau)\|\|I-Z(\tau)\|+\|\dot{Z}(\tau)\|\|Z^{-1}(\tau)\| < (3n+2)\pi\alpha_1(2a_C+1).$$

Таким образом, построена такая возмущенная система B на отрезке $[t_0, t_1]$, что выполнено условие 2) леммы и условия (1.48), (1.50), из которых следуют условия (1.42), (1.43) соответственно.

Далее, пусть для некоторого $j \geqslant 1$ уже построена возмущенная система B на промежутке $(t_{j-1}, t_j]$.

На промежутке $(t_j, t_{j+1}]$ положим возмущенную систему

$$B \equiv B(t_j, \alpha_j, t_{j+1}, \alpha_{j+1}).$$

На этом индукционный переход, а с ним и построение возмущенной системы B закончены.

Поскольку при построении возмущенной системы B использовались только повороты, то для каждого $j = 1, 2, \ldots$ сингулярный базис $e_1(t_{j-1}), \ldots, e_{2n}(t_{j-1})$ оператора Коши $X_C(t_j, t_{j-1})$ будет являться и сингулярным базисом оператора Коши $X_B(t_j, t_{j-1})$ с теми же логарифмическими сингулярными числами. Тогда из условий (1.41), выбора длин отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ (1.40), леммы 8 и включений (1.43) вытекает выполнение условий (1.44).

2. Рассмотрим *грассманово многообразие* $\mathcal{G}_{2n}^n$ [69, с.25] n-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$. Наделим компактное грассманово многообразие $\mathcal{G}_{2n}^n$ метрикой

$$\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max_{x\in\Gamma_1} \min_{y\in\Gamma_2} \measuredangle(x, y), \quad \Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{G}_{2n}^n,$$

инвариантной относительно ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда

$$U\left(f_1(t_j), \ldots, f_n(t_j), \tfrac{\pi}{2}-\alpha_j, t_j\right) =$$
$$= \left\{\Gamma \in \mathcal{G}_{2n}^n \mid \rho(\Gamma, \mathcal{L}(f_1(t_j), \ldots, f_n(t_j))) \leqslant \tfrac{\pi}{2}-\alpha_j\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

По построению системы B для всех $j = 1, 2, \ldots$ справедливо включение (1.44). Рассмотрим множества

$$K_j \equiv \left\{\Gamma \in \mathcal{G}_{2n}^n \mid \Gamma \in X_B(t_0, t_j)U\left(\widetilde{f}_1(t_j), \ldots, \widetilde{f}_n(t_j), \frac{\pi}{2}-\alpha_j, t_j\right)\right\},$$

$j = 1, 2, \ldots$, являющиеся убывающей последовательностью непустых замкнутых множеств $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ компактного пространства. По теореме Кантора [68, с.141]

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset.$$

Следовательно, существует по крайней мере одно такое n-мерное подпространство решений $E_1^n(B)$, что

$$E_1^n(B)(t_0) \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Возьмем такое произвольное ненулевое решение s системы B, что $s \in E_1^n(B)$. Тогда, по построению системы B, для всех $j = 1, 2, \ldots$

$$s(t_j) \in U\left(\widetilde{f}_1(t_j), \ldots, \widetilde{f}_n(t_j), \frac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j\right).$$

Для каждого $j = 1, 2, \ldots$ обозначим через $e_1^{j-1}(t), \ldots, e_{2n}^{j-1}(t)$ такие решения системы B, для которых выполнены условия $e_1^{j-1}(t_{j-1}) = e_1(t_{j-1}), \ldots, e_{2n}^{j-1}(t_{j-1}) = e_{2n}(t_{j-1})$.

Поскольку длины отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ удовлетворяют условию (1.40), то из леммы 8 следуют неравенства

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(s) \leqslant \chi_{t_{j-1}}^{t_j}(e_n^{j-1}) + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Учитывая вышеперечисленное, получим оценки

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(s) \leqslant \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \delta_n(j) + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

3. Возьмем такое произвольное ненулевое решение b системы B, что

$$b(t_0) \in U\left(e_{n+1}(t_0), \ldots, e_{2n}(t_0), \frac{\pi}{2} - \alpha_0, t_0\right).$$

Тогда, по построению системы B, для всех $j = 1, 2, \ldots$ справедливо включение

$$b(t_j) \in U\left(e_{n+1}(t_j), \ldots, e_{2n}(t_j), \frac{\pi}{2} - \alpha_j, t_j\right).$$

Поскольку длины отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ удовлетворяют условию (1.40), то по лемме 8 имеем оценки

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(b) \geqslant \chi_{t_{j-1}}^{t_j}(e_{n+1}^{j-1}) - \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Учитывая, что $e_1(t_{j-1}), ..., e_{2n}(t_{j-1})$ — сингулярный базис операторов Коши $X_C(t_j, t_{j-1}),\ X_B(t_j, t_{j-1})$ и равенство логарифмических сингулярных чисел операторов Коши $X_C(t_j, t_{j-1}),\ X_B(t_j, t_{j-1})$, получим оценки

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(b) \geqslant \frac{1}{t_j - t_{j-1}}\delta_{n+1}(j) - \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Тогда в качестве подпространства $E_2^n(B)$ возьмем

$$E_2^n(B)(t) = \mathcal{L}(e_{n+1}^0(t), \ldots, e_{2n}^0(t)), \quad \dim E_2^n(B) = n.$$

Лемма 11 доказана.

1.3 Одновременная достижимость центральных показателей двумерных и четырехмерных систем

Определение 13 [53]. Функционал λ, определенный на пространстве $\mathcal{M}^m$, назовем *остаточным*, если для каждой пары оператор-функций $A(t),\ B(t) \in \mathcal{M}^m$, совпадающих на всей полуоси $t \in \mathbb{R}^+$, кроме, быть может, некоторого отрезка конечной длины, выполнено равенство

$$\lambda(A) = \lambda(B).$$

Заметим, что показатели Ляпунова, а также верхний и нижний центральные показатели являются остаточными.

Следующая лемма показывает, что бесконечно малые возмущения можно считать равномерно малыми, когда речь идет о каких-либо остаточных функционалах.

Лемма 12 [53]. *Пусть $B \in \mathcal{M}_0(A)$, а λ — остаточный функционал. Тогда для любого положительного числа ε существует такая система $B_\varepsilon \in \mathcal{M}^m$, что*

$$\|A - B_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon, \quad \lambda(B_\varepsilon) = \lambda(B).$$

Из доказательства леммы следует, что она справедлива и в случае, когда $B \in \mathcal{H}_0(A)$, а $B_\varepsilon \in \mathcal{H}^{2n}$.

Утверждение изложенной ниже теоремы, возможно, распространяется и на линейные гамильтоновы системы произвольного порядка.

Теорема 1. *При $n = 1,2$ для любой системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$ существует система $B \in \mathcal{H}_0(A)$, удовлетворяющая равенствам*

$$\lambda_1(B) = \omega(A), \quad \lambda_{2n}(B) = \Omega(A).$$

Доказательство теоремы использует технику доказательства теоремы 8.1 [53].

Выберем произвольно число $0 < \varepsilon < \frac{1}{39}$ и числа T_k, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} T_k > \max\{1, \theta^1\left(\tfrac{\varepsilon}{2^{k-1}}, \tfrac{\varepsilon}{2^k}\right), \theta^1\left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}, \tfrac{\varepsilon}{2^k}\right), \\ \theta^2\left(\tfrac{\varepsilon}{2^{k-1}}, \tfrac{\varepsilon}{2^k}, \tfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right), \theta^2\left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}, \tfrac{\varepsilon}{2^{k-1}}, \tfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)\}, \end{gathered} \tag{1.51}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, так, чтобы для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ число T_{k+1} было кратно числу T_k.

Будем строить последовательность $\{t_j\}$ наборами по нескольку чисел с помощью индукции по номеру набора $k = 0, 1, 2, \ldots$.

При $k = 0$ набор состоит из одного числа $t_0 = 0$. Пусть уже построено $k \geqslant 0$ наборов, т. е. заданы числа $t_0, t_1, \ldots, t_{j_k}$. Тогда положим

$$t_{j_k+m} \equiv t_{j_k} + mT_k,$$

где m пробегает значения $1, 2, \ldots, m_{k_1}$, а число $m_{k_1} \geqslant 1$ определяется из условия

$$\begin{gathered} \sigma(D(A), t_{j_k}, T_k, m_{k_1}) \geqslant \\ \geqslant \Omega(A) - \tfrac{\varepsilon}{2^k} + \tfrac{t_{j_k}}{t_{j_k+m_{k_1}}} \cdot 2(a_A + \varepsilon(2 + 20\pi(2a_A + 4\varepsilon + 1))). \end{gathered} \tag{1.52}$$

Выбор такого m_{k_1} возможен, поскольку верхний предел левой части неравенства (1.52) при $m_{k_1} \to \infty$ согласно формуле (1.27) не меньше $\Omega(A)$, а предел правой части равен $\Omega(A) - \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Выберем число $l_k \in \mathbb{N}$ из условия, чтобы для всех $l \geqslant l_k$

$$\begin{gathered} \sigma(d(A), t_{j_k}, T_{k+1}, l) \leqslant \\ \leqslant \omega(A) + \tfrac{\varepsilon}{2^k} - \tfrac{t_{j_k}+T_{k+1}}{t_{j_k}+lT_{k+1}} \cdot 2(a_A + \varepsilon(2 + 20\pi(2a_A + 4\varepsilon + 1))). \end{gathered} \tag{1.53}$$

Выбор такого l_k возможен, так как верхний предел в левой части неравенства (1.53) при $l \to \infty$ согласно формуле (1.28) не превышает $\omega(A)$, а предел правой части равен $\omega(A) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Положим

$$m_{k_2} \equiv \frac{T_{k+1}}{T_k} l_k.$$

Возьмем $m_k \in \mathbb{N}$ такое, что $m_k \geqslant \max\{m_{k_1}, m_{k_2}\}$ и $\frac{m_k T_k}{T_{k+1}} \equiv l'_k \in \mathbb{N}$ (заметим, что $l'_k \geqslant l_k$). Теперь положим

$$t_{j_{k+1}} \equiv t_{j_k+m_k} = t_{j_k} + m_k T_k = t_{j_k} + l'_k T_{k+1}.$$

На этом индукционный переход, а с ним и построение последовательности $\{t_j\}$ закончены.

Применяя к построенной последовательности $\{t_j\}$ лемму 5, взяв $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^k}$, $j_k < j \leqslant j_{k+1}$, и учитывая обозначения (1.25), получим существование такой системы $C \in \mathcal{H}^{2n}$, что для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены условия:

$$\sup_{t_{j_k} < t \leqslant t_{j_{k+1}}} \|C(t) - A(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k-1}},$$

$$D^{t_j}_{t_{j-1}}(C) \geqslant D^{t_j}_{t_{j-1}}(A) + \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad d^{t_j}_{t_{j-1}}(C) \leqslant d^{t_j}_{t_{j-1}}(A) - \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad j_k < j \leqslant j_{k+1},$$

причем система C удовлетворяет условиям леммы 10. Тогда по лемме 10, учитывая неравенства (1.51) и взяв $\varepsilon_j = \alpha_j = \frac{\varepsilon}{2^k}$, $j_k < j \leqslant j_{k+1}$, получим существование системы $B \in \mathcal{H}^{2n}$ и решений b и s этой системы, что для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены условия:

$$\sup_{t_{j_k} < t \leqslant t_{j_{k+1}}} \|B(t) - C(t)\| \leqslant 20\pi \frac{\varepsilon}{2^k}(2a_C + 1),$$

$$\chi^{t_j}_{t_{j-1}}(b) \geqslant D^{t_j}_{t_{j-1}}(C) - \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad \chi^{t_j}_{t_{j-1}}(s) \leqslant d^{t_j}_{t_{j-1}}(C) + \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad j_k < j \leqslant j_{k+1}.$$

Тогда, учитывая неравенство $a_C \leqslant a_A + 2\varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} \sup_{t_{j_k} < t \leqslant t_{j_{k+1}}} \|A(t) - B(t)\| &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2^k}(2 + 20\pi(2a_C + 1)) \leqslant \\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2^k}(2 + 20\pi(2a_A + 4\varepsilon + 1)), \end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\chi^{t_j}_{t_{j-1}}(b) \geqslant D^{t_j}_{t_{j-1}}(A), \quad j_k < j \leqslant j_{k+1}, \tag{1.55}$$

$$\chi^{t_j}_{t_{j-1}}(s) \leqslant d^{t_j}_{t_{j-1}}(A), \quad j_k < j \leqslant j_{k+1}. \tag{1.56}$$

Тогда из неравенств (1.54) следует, что $B \in \mathcal{H}_0(A)$, $a_B \leqslant a_A + \varepsilon(2 + 20\pi(2a_A + 4\varepsilon + 1))$. Из свойств 4°, 14°, имеем для решения b

$$\begin{gathered} \chi_0^{t_{j_{k+1}}}(b) \geqslant \chi^{t_{j_{k+1}}}_{t_{j_k}}(b) - \tfrac{2a_B t_{j_k}}{t_{j_{k+1}}} \geqslant \\ \geqslant \sigma(\chi(b), t_{j_k}, T_k, m_k) - \tfrac{t_{j_k}}{t_{j_{k+1}}} \cdot 2(a_A + \varepsilon(2 + 20\pi(2a_A + 4\varepsilon + 1))). \end{gathered}$$

Далее, учитывая неравенства (1.52), (1.55), получаем

$$\chi_0^{t_{j_{k+1}}}(b) \geqslant \sigma(D(A), t_{j_k}, T_k, m_k) -$$
$$- \tfrac{t_{j_k}}{t_{j_{k+1}}} \cdot 2(a_A + \varepsilon(2 + 20\pi(2a_A + 4\varepsilon + 1))) \geqslant \Omega(A) - \tfrac{\varepsilon}{2^k}$$

для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$, а значит,

$$\Omega(A) \leqslant \chi(b) \leqslant \lambda_{2n}(B).$$

Докажем теперь, что для любого числа t, удовлетворяющего условию $t \in [t_{j_{k+1}}, t_{j_{k+2}})$ при некотором $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, выполнено неравенство

$$\chi_0^t(s) \leqslant \omega(A) + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{1.57}$$

Действительно, выберем такое число $m \in \{1, 2, \dots, m_{k+1}\}$, что $t_{j_{k+1}+m-1} \leqslant t < t_{j_{k+1}+m}$.

Обозначим

$$\tau_l \equiv t_{j_k} + lT_{k+1},$$

где $l = 0, 1, 2, \dots, l'_k + m$. Тогда если $l < l'_k$, то $\tau_l \in [t_{j_k}, t_{j_{k+1}})$, а вследствие свойств 14°, 15° и неравенств (1.56) получаем

$$\chi_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}(s) = \sigma(\chi(s), \tau_l, T_k, \frac{T_{k+1}}{T_k}) \leqslant \sigma(d(A), \tau_l, T_k, \frac{T_{k+1}}{T_k}) \leqslant d_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}(A).$$

Если же $l \geqslant l'_k$, то $\tau_l \geqslant t_{j_{k+1}}$ и из неравенств (1.56) также имеем

$$\chi_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}(s) \leqslant d_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}(A).$$

Из этих оценок для решения s, применяя свойства 4°, 14°, получаем

$$\chi_0^t(s) \leqslant \sigma(\chi(s), \tau_0, T_{k+1}, l'_k + m) + \frac{2a_B(\tau_0 + T_{k+1})}{t} \leqslant$$
$$\leqslant \sigma(d(A), t_{j_k}, T_{k+1}, l'_k + m) +$$
$$+ \frac{t_{j_k} + T_{k+1}}{t_{j_k} + (l'_k + m - 1)T_{k+1}} \cdot 2(a_A + \varepsilon(2 + 20\pi(2a_A + 4\varepsilon + 1))).$$

Теперь неравенство (1.57) вытекает из оценки (1.53). Таким образом, из оценок (1.57) вытекает, что

$$\omega(A) \geqslant \chi(s) \geqslant \lambda_1(B).$$

Теорема 1 доказана полностью.

Из теоремы 1 с учетом остаточности показателей Ляпунова и леммы 12 вытекает

Следствие 1. *При* $n = 1, 2$ *для любой системы* $A \in \mathcal{H}^{2n}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует система* $B_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$, *удовлетворяющая равенствам*

$$\lambda_1(B_\varepsilon) = \omega(A), \quad \lambda_{2n}(B_\varepsilon) = \Omega(A).$$

Глава 2

Условная стабилизируемость и дестабилизируемость линейных гамильтоновых систем

Настоящая глава посвящена доказательству того, что любая линейная гамильтонова система одновременно условно (относительно подпространства половинной размерности) стабилизируема и дестабилизируема бесконечно малыми гамильтоновыми возмущениями, а также одновременно условно экспоненциально стабилизируема и дестабилизируема равномерно малыми возмущениями.

2.1 Определения условной стабилизируемости и дестабилизируемости

Определение 14. Система $A \in \mathcal{M}^m$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ называется:

1) *k-мерно устойчивой*, если существует такое k-мерное подпространство S решений системы A, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, при котором любое решение $x \in S$, удовлетворяющее неравенству $|x(0)| < \delta$, удовлетворяет и неравенству $|x(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$;

2) *k-мерно неустойчивой*, если существуют такое k-мерное подпространство S решений системы A и такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $T \in \mathbb{R}^+$, при котором любое решение $x \in S$, удовлетворяющее равенству $|x(0)| = \delta$, удовлетворяет и неравенству

$$\sup_{t \in [0,T]} |x(t)| > \varepsilon.$$

Определение 15. Система $A \in \mathcal{M}^m$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ называется:

1) *k-мерно устойчивой*, если существует такое k-мерное подпространство S решений системы A, что любое решение $x \in S$ ограничено на полупрямой $\mathbb{R}^+$;

2) *k-мерно неустойчивой*, если существуют такое k-мерное подпространство S решений системы A и такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ и каждого ненулевого решения $x \in S$, удовлетворяющего неравенству $|x(0)| < \delta$, найдется такое $t \in \mathbb{R}^+$, при котором выполнено неравенство

$$|x(t)| > \varepsilon. \tag{2.1}$$

Утверждение 3. Определения 14 и 15 эквивалентны, т. е. для линейных систем требования на подпространство S в п. 1) или п. 2) определения 14 эквивалентны тому, что сразу все ненулевые решения $x \in S$ просто ограничены или неограничены соответственно.

Доказательство. Легко заметить, что из определения 14 следует определение 15.

1. Докажем, что из п. 1) определения 15 следует п. 1) определения 14.

Выберем такую систему решений $x_1, \ldots, x_k$ из подпространства S системы A, что $x_1(0), \ldots, x_k(0)$ попарно ортогональны и $|x_1(0)| = \ldots = |x_k(0)| = 1$. Из ограниченности любого решения подпространства S следует, что для каждого решения x_i $(i = 1, \ldots, k)$ из выбраной системы решений найдется такое число $M_i \in \mathbb{R}$, что $|x_i(t)| < M_i,\ t \in \mathbb{R}^+$. Обозначим $M = \max\{M_1, \ldots, M_k\}$.

Рассмотрим такое произвольное решение $x \in S$, что $|x(0)| = 1$. Тогда для него справедливо равенство

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \ldots + \alpha_k x_k(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

причем

$$x(0) = \alpha_1 x_1(0) + \ldots + \alpha_k x_k(0), \quad {\alpha_1}^2 + \ldots + {\alpha_k}^2 = 1.$$

Следовательно,

$$|x(t)| \leqslant |\alpha_1| M_1 + \ldots + |\alpha_k| M_k \leqslant kM \equiv \widetilde{M}.$$

С другой стороны,

$$x(t) = X_A|_{S(0)}(t,0)x(0), \quad |x(0)| = 1.$$

В силу произвольности $x(t)$ получим $\|X_A|_{S(0)}(t,0)\| \leqslant \widetilde{M},\ t \in \mathbb{R}^+$.

Аналогично, произвольное решение $y \in S$ может быть представлено в виде

$$y(t) = X_A|_{S(0)}(t,0)y(0), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Отсюда получаем

$$|y(t)| \leqslant \|X_A|_{S(0)}(t,0)\|\,|y(0)| \leqslant \widetilde{M}|y(0)| < \varepsilon,$$

если только

$$|y(0)| < \frac{\varepsilon}{\widetilde{M}} = \delta.$$

А это и есть п. 1) определения 14.

2. Для доказательства того, что из п. 2) определения 15 следует п. 2) определения 14 воспользуемся идеей доказательства леммы 5.2 п. Б из [53].

Предположим противное, что п. 2) определения 14 не выполнен, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$, возрастающая последовательность $t_j \to \infty,\ j = 1, 2, \ldots,$ и последовательность ненулевых решений $\{x_j\} \in S,\ j = 1, 2, \ldots,$ удовлетворяющих условию $|x_j(0)| = \delta$, что выполнено неравенство

$$\sup_{t \in [0, t_j]} |x_j(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Обозначим $S_\delta(0) = \{x \in S(0) \,|\, |x| = \delta\}$. Заметим, что $S_\delta(0)$ — компакт. Тогда из последовательности векторов $x_j(0) \in S_\delta(0)$ выберем подпоследовательность, сходящуюся к ненулевому вектору $a \in S_\delta(0)$ (по теореме 2 [29, с.99] это можно сделать в силу компактности множества $S_\delta(0)$) и сохраним для этой последовательности обозначение $\{x_j\} \quad j = 1, 2, \ldots$.

Решение $x \in S$ с начальным условием $x(0) = a$ удовлетворяет для каждого $k = 1, 2, \ldots$ неравенству

$$\sup_{t \in [0, t_k]} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{2.2}$$

так как этому неравенству удовлетворяют все решения x_j с номерами $j \geqslant k$, а поскольку $\xi \mapsto |X_A(t,0)\xi|$ — непрерывная функция, то оценка не нарушится, если перейти к пределу при $j \to \infty$. Тогда из неравенства (2.2) вытекает неравенство $|x(t)| \leqslant \varepsilon,\ t \in \mathbb{R}^+$, которое противоречит условию (2.1). Получили противоречие с нашим предположением.

Утверждение 3 доказано.

Определение 16. Система $A \in \mathcal{M}^m$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ называется:

1) *k-мерно экспоненциально устойчивой (неустойчивой)*, если существует такое k-мерное подпространство S решений системы A, что любое ненулевое решение $x \in S$ имеет отрицательный (положительный) характеристический показатель Ляпунова;

2) *k-мерно стабилизируемой (k-мерно дестабилизируемой) в* некотором *классе* $\mathcal{H}(A)$, если существует k-мерно устойчивая (k-мерно неустойчивая) система $B \in \mathcal{H}(A)$.

2.2 Одновременная условная стабилизируемость и дестабилизируемость бесконечно малыми возмущениями

Теорема 2. *Для любой системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$ существует система $B \in \mathcal{H}_0(A)$, которая одновременно и n-мерно устойчива, и n-мерно неустойчива.*

Доказательство теоремы использует технику доказательства теоремы 8.1 [53].

Выберем произвольное число $0 < \varepsilon < \frac{1}{2(6n+3)}$ и числа T_k, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} T_k > \max\{1, \theta^1\left(\tfrac{\varepsilon}{2^{k-1}}, \tfrac{\varepsilon}{2^k}\right), \theta^1\left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}, \tfrac{\varepsilon}{2^k}\right), \\ \theta^2\left(\tfrac{\varepsilon}{2^{k-1}}, \tfrac{\varepsilon}{2^k}, \tfrac{\varepsilon}{2^{k-2}}\right), \theta^2\left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}, \tfrac{\varepsilon}{2^{k-1}}, \tfrac{\varepsilon}{2^{k-2}}\right)\}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, так, чтобы для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ число T_{k+1} было кратно числу T_k.

Будем строить последовательность $\{t_j\}$ наборами по нескольку чисел с помощью индукции по номеру набора $k = 0, 1, 2, \ldots$.

При $k = 0$ набор состоит из одного числа $t_0 = 0$. Пусть уже построено $k \geqslant 0$ наборов, т. е. заданы числа $t_0, t_1, \ldots, t_{j_k}$. Тогда положим

$$t_{j_k+m} \equiv t_{j_k} + mT_k,$$

где m пробегает значения $1, 2, \dots, m_{k_1}$, а число $m_{k_1} \geqslant 1$ определяется из условий:

$$\frac{t_{j_k}}{t_{j_k+m_{k_1}}} \cdot 2(a_A + \varepsilon(4 + (3n+2)\pi(2a_A + 8\varepsilon + 1))) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \qquad (2.4)$$

$$t_{j_k} + m_{k_1} T_k > 2^{2k+2}. \qquad (2.5)$$

Выбор такого m_{k_1} возможен, поскольку предел левой части неравенства (2.4) при $m_{k_1} \to \infty$ равен 0, а предел левой части неравенства (2.5) при $m_{k_1} \to \infty$ равен ∞.

Выберем число $l_k \in \mathbb{N}$ из условия, чтобы для всех $l \geqslant l_k$

$$\frac{t_{j_k} + T_{k+1}}{t_{j_k} + lT_{k+1}} \cdot 2(a_A + \varepsilon(4 + (3n+2)\pi(2a_A + 8\varepsilon + 1))) < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}. \qquad (2.6)$$

Выбор такого l_k возможен, так как предел левой части неравенства (2.6) при $l \to \infty$ равен 0. Положим $m_{k_2} \equiv \frac{T_{k+1}}{T_k} l_k$. Возьмем $m_k \in \mathbb{N}$ такое, что $m_k \geqslant \max\{m_{k_1}, m_{k_2}\}$ и $\frac{m_k T_k}{T_{k+1}} \equiv l'_k \in \mathbb{N}$ (заметим, что $l'_k \geqslant l_k$). Теперь положим

$$t_{j_{k+1}} \equiv t_{j_k+m_k} = t_{j_k} + m_k T_k = t_{j_k} + l'_k T_{k+1}.$$

На этом индукционный переход, а с ним и построение последовательности $\{t_j\}$ закончены.

Применяя к построенной последовательности $\{t_j\}$ лемму 7, взяв $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$, $j_k < j \leqslant j_{k+1}$, получим существование такой системы $C \in \mathcal{H}^{2n}$, что для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнены условия:

1) $\delta_n(j) \leqslant \delta_{n+1}(j) - \frac{\varepsilon}{2^{k-2}} T_k$,

а значит

$$\delta_n(j) \leqslant -\frac{\varepsilon T_k}{2^{k-1}}, \quad \delta_{n+1}(j) \geqslant \frac{\varepsilon T_k}{2^{k-1}}, \quad j_k < j \leqslant j_{k+1}, \qquad (2.7)$$

где $\delta_n(j)$, $\delta_{n+1}(j)$ — логарифмические сингулярные числа оператора $X_C(t_j, t_{j-1})$;

2) $\sup\limits_{t_{j_k} < t \leqslant t_{j_{k+1}}} \|A(t) - C(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k-2}}$.

Отметим сразу, что $a_C \leqslant a_A + 4\varepsilon$, причем система C удовлетворяет условиям леммы 11. Тогда по лемме 11, учитывая неравенства (2.3) и взяв $\alpha_0 = 2\varepsilon$, $\varepsilon_j = \alpha_j = \frac{\varepsilon}{2^k}$, $j_k < j \leqslant j_{k+1}$, получим существование такой системы $B \in \mathcal{H}^{2n}$, что для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнены условия:

1) пространство решений системы B представимо в виде $E(B) = E_1^n(B) \oplus E_2^n(B)$, $\dim E_1^n(B) = \dim E_2^n(B) = n$, причем

а) для любого решения $s \in E_1^n(B)$ выполнено

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(s) \leqslant \frac{\delta_n(j)}{T_k} + \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad j_k < j \leqslant j_{k+1}, \tag{2.8}$$

б) для любого решения $b \in E_2^n(B)$ выполнено

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(b) \geqslant \frac{\delta_{n+1}(j)}{T_k} - \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad j_k < j \leqslant j_{k+1}, \tag{2.9}$$

2) $\sup\limits_{t_{j_k} < t \leqslant t_{j_{k+1}}} \|C(t) - B(t)\| < (3n+2)\pi \frac{\varepsilon}{2^k}(2a_C + 1)$.

Тогда получим

$$\sup_{t_{j_k} < t \leqslant t_{j_{k+1}}} \|A(t) - B(t)\| < \frac{\varepsilon}{2^{k-2}} + (3n+2)\pi\frac{\varepsilon}{2^k}(2a_C + 1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k-2}} + (3n+2)\pi\frac{\varepsilon}{2^k}(2a_A + 8\varepsilon + 1) = \frac{\varepsilon}{2^k}(4 + (3n+2)\pi(2a_A + 8\varepsilon + 1)),$$

а это означает, что $B \in \mathcal{H}_0(A)$, причем справедлива оценка

$$a_B \leqslant a_A + \varepsilon(4 + (3n+2)\pi(2a_A + 8\varepsilon + 1)).$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что для любого ненулевого решения $s \in E_1^n(B)$ выполнено неравенство

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(s) \leqslant -\frac{\varepsilon}{2^k}, \quad j_k < j \leqslant j_{k+1}. \tag{2.10}$$

Докажем теперь, что для любого числа t, удовлетворяющего условию $t \in [t_{j_{k+1}}, t_{j_{k+2}})$ при некотором $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, выполнено неравенство

$$\chi_0^t(s) \leqslant -\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Действительно, выберем такое число $m \in \{1, 2, \ldots, m_{k+1}\}$, что $t_{j_{k+1}+m-1} \leqslant t < t_{j_{k+1}+m}$. Обозначим

$$\tau_l \equiv t_{j_k} + lT_{k+1},$$

где $l = 0, 1, 2, \ldots, l'_k + m$. Если $l < l'_k$, то $\tau_l \in [t_{j_k}, t_{j_{k+1}})$. Тогда из (2.10) и свойства 14° имеем

$$\chi_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}(s) \leqslant -\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Если же $l \geqslant l'_k$, то $\tau_l \geqslant t_{j_{k+1}}$ и из неравенств (2.7) и (2.8) следует

$$\chi_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}(s) \leqslant -\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Из этих оценок для решения s, применяя свойство 4° и учитывая (2.6), получаем

$$\chi_0^t(s) \leqslant \chi_{t_{j_k}}^{t_{j_k}+(l'_k+m)T_{k+1}}(s) + 2a_B\frac{t_{j_k}+T_{k+1}}{t} \leqslant \chi_{t_{j_k}}^{t_{j_k}+(l'_k+m)T_{k+1}}(s)+$$

$$+2(a_A+\varepsilon(4+(3n+2)\pi(2a_A+8\varepsilon+1)))\frac{t_{j_k}+T_{k+1}}{t_{j_k}+(l'_k+m-1)T_{k+1}} <$$

$$< -\frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} = -\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Тогда, учитывая (2.5), имеем

$$|s(t)| < |s(0)|\exp(-\varepsilon 2^k).$$

Если же $t \in [0, t_{j_1})$, то из свойства 3° следует оценка

$$|s(t)| \leqslant |s(0)|\exp(a_B t_{j_1}).$$

Тогда существует n-мерное подпространство решений $E_1^n(B)$, что для любого $\tilde{\varepsilon} > 0$ найдется $\delta > 0$ ($\delta = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\exp(a_B t_{j_1})}$), что для всех $s \in E_1^n(B)$, таких что $|s(0)| < \delta$, выполняется $|s(t)| < \tilde{\varepsilon}$, $t \in \mathbb{R}^+$, т. е. система B является n-мерно устойчивой.

Из (2.7) и (2.9) следует, что для любого ненулевого решения $b \in E_2^n(B)$ выполнены неравенства

$$\chi_{t_{j-1}}^{t_j}(b) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad j_k < j \leqslant j_{k+1}.$$

Из свойства 4°, учитывая (2.4) и свойство 14°, имеем

$$\chi_0^{t_{j_{k+1}}}(b) \geqslant \chi_{t_{j_k}}^{t_{j_{k+1}}}(b) - \frac{2a_B t_{j_k}}{t_{j_{k+1}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon}{2^k} - \frac{t_{j_k}}{t_{j_{k+1}}}\cdot 2(a_A+\varepsilon(4+(3n+2)\pi(2a_A+8\varepsilon+1))) > \frac{\varepsilon}{2^k} - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Отсюда, учитывая (2.5), получим оценку

$$|b(t_{j_{k+1}})| > |b(0)|\exp(\varepsilon 2^{k+1}).$$

Следовательно, существует n-мерное подпространство решений $E_2^n(B)$ и $\tilde{\varepsilon} = 1$, что для любого $\delta > 0$ и всех $b \in E_2^n(B)$, таких что $|b(0)| = \delta$, найдется $t = t_{j_{k+1}} \in \mathbb{R}^+$, где $k \in \mathbb{N}$ определяется из условия

$$2^{k+1} > -\frac{\ln \delta}{\varepsilon},$$

что выполнено неравенство $|b(t_{j_{k+1}})| > 1$, т. е. система B является n-мерно неустойчивой.

Теорема 2 доказана полностью.

2.3 Одновременная условная экспоненциальная стабилизируемость и дестабилизируемость равномерно малыми возмущениями

Теорема 3. *Для любой системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует система $B \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$, которая одновременно и n-мерно экспоненциально устойчива, и n-мерно экспоненциально неустойчива.*

Доказательство. Для произвольной системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ положим для каждого $j = 1, 2, \ldots$

$$\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{6}, \quad \alpha \equiv \alpha_0 = \alpha_j = \frac{\varepsilon}{(3n+2)\pi(6a_A + 2\varepsilon + 3)} < \frac{1}{6n+3}.$$

И пусть последовательность $0 \equiv t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ удовлетворяет при каждом $j = 1, 2, \ldots$ условию

$$T \equiv t_j - t_{j-1} > \max\left\{1, \theta^1\left(\alpha, \frac{\varepsilon}{12}\right), \theta^2\left(\alpha, \alpha, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right\}, \tag{2.11}$$

где функции θ^1 и θ^2 описаны в лемме 8. Применяя к последовательностям $\{\varepsilon_j\}, \{t_j\}$ лемму 7, получаем существование такой системы $C \in \mathcal{H}^{2n}$, что для каждого $j = 1, 2, \ldots$ выполнены условия:

1) $\delta_n(j) \leqslant \delta_{n+1}(j) - \frac{\varepsilon}{3}T$, где $\delta_n(j)$, $\delta_{n+1}(j)$ — логарифмические сингулярные числа оператора $X_C(t_j, t_{j-1})$ (заметим сразу, что справедливы неравенства $\delta_n(j) \leqslant -\frac{\varepsilon}{6}T$, $\delta_{n+1}(j) \geqslant \frac{\varepsilon}{6}T$);

2) $\|A - C\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ (значит, $a_A - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant a_C \leqslant a_A + \frac{\varepsilon}{3}$).

При этом система C удовлетворяет условиям леммы 11. Тогда по лемме 11, учитывая (2.11), для этой системы $C \in \mathcal{H}^{2n}$ существует система $B \in \mathcal{H}^{2n}$, удовлетворяющая при каждом $j = 1, 2, \ldots$ условиям:

1) пространство решений системы B представимо в виде $E(B) = E_1^n(B) \oplus E_2^n(B)$, $\dim E_1^n(B) = \dim E_2^n(B) = n$, причем

а) для любого ненулевого решения $s \in E_1^n(B)$ выполнено неравенство
$$\chi_{(j-1)T}^{jT}(s) \leqslant \frac{1}{T}\delta_n(j) + \frac{\varepsilon}{12};$$

б) для любого ненулевого решения $b \in E_2^n(B)$ выполнено неравенство
$$\chi_{(j-1)T}^{jT}(b) \geqslant \frac{1}{T}\delta_{n+1}(j) - \frac{\varepsilon}{12};$$

2) $\|C - B\| < \frac{\varepsilon(2a_C+1)}{6a_A+2\varepsilon+3} \leqslant \frac{\varepsilon}{6a_A+2\varepsilon+3}\left(2a_A + \frac{2\varepsilon}{3} + 1\right) = \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда по свойству нормы
$$\|A - B\| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Покажем, что для любого ненулевого решения $s \in E_1^n(B)$ верно неравенство
$$\chi(s) \leqslant -\frac{\varepsilon}{12}.$$
Используя равенства
$$\chi(s) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln|s(t)| =$$
$$= \varlimsup_{\substack{k\to\infty,\\ t\in[kT,(k+1)T]}} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{|s(T)|}{|s(0)|}\cdot\frac{|s(2T)|}{|s(T)|}\cdot\ldots\cdot\frac{|s(kT)|}{|s((k-1)T)|}\cdot\frac{|s(t)|}{|s(kT)|}\right),$$
где $k \in \mathbb{N}$, получим оценки
$$\chi(s) = \varlimsup_{\substack{k\to\infty,\\ t\in[kT,(k+1)T]}} \frac{T}{t}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{T}\ln\frac{|s(jT)|}{|s((j-1)T)|} + \frac{1}{T}\ln\frac{|s(t)|}{|s(kT)|}\right) =$$
$$= \varlimsup_{\substack{k\to\infty,\\ t\in[kT,(k+1)T]}} \frac{T}{t}\left(\sum_{j=1}^{k}\chi_{(j-1)T}^{jT}(s) + \chi_{kT}^{t}(s)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{\substack{k\to\infty,\\ t\in[kT,(k+1)T]}} \frac{T}{t}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{T}\delta_n(j) + \frac{\varepsilon}{12}\right) + \chi_{kT}^{t}(s)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{\substack{k\to\infty,\\ t\in[kT,(k+1)T]}} \frac{T}{t}\left(-\frac{\varepsilon k}{12}+\chi_{kT}^{t}(s)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{\substack{k\to\infty,\\ t\in[kT,(k+1)T]}} \frac{kT}{t}\left(-\frac{\varepsilon}{12}\right)+\varlimsup_{\substack{k\to\infty,\\ t\in[kT,(k+1)T]}} \frac{T}{t}\chi_{kT}^{t}(s) = -\frac{\varepsilon}{12},$$

поскольку $\chi_{kT}^{t}(s)$ ограничен (см. свойство 3°). Значит, все решения (кроме нулевого) из подпространства $E_1^n(B)$ имеют отрицательный характеристический показатель Ляпунова.

Покажем, что для любого ненулевого решения $b \in E_2^n(B)$ верно неравенство

$$\chi(b) \geqslant \frac{\varepsilon}{12}.$$

Несложно заметить, что

$$\chi(b) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln|b(t)| \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT}\ln|b(kT)|,$$

где $k \in \mathbb{N}$, откуда получаем оценки

$$\chi(b) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT}\ln\left(\frac{|b(T)|}{|b(0)|}\cdot\frac{|b(2T)|}{|b(T)|}\cdot\ldots\cdot\frac{|b(kT)|}{|b((k-1)T)|}\right) =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{T}\ln\frac{|b(jT)|}{|b((j-1)T)|} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\chi_{(j-1)T}^{jT}(b) \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{T}\delta_{n+1}(j)-\frac{\varepsilon}{12}\right) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\varepsilon}{6}-\frac{\varepsilon}{12}\right) = \frac{\varepsilon}{12}.$$

Значит, все решения (кроме нулевого) из подпространства $E_2^n(B)$ имеют положительный характеристический показатель Ляпунова. Следовательно, для любой системы $A \in \mathcal{H}^{2n}$ нашлась система $B \in \mathcal{H}_{\varepsilon}(A)$, являющаяся одновременно n-мерно экспоненциально устойчивой и n-мерно экспоненциально неустойчивой.

Теорема 3 доказана.

Глава 3

Об эффективности возмущений в классе линейных гамильтоновых систем

Установлено совпадение множества всех предельных значений показателей решений линейной гамильтоновой системы при равномерно малых ее возмущениях с аналогичным множеством, получаемым при равномерно малых гамильтоновых возмущениях той же системы. Кроме того, установлено совпадение множества всех значений показателей решений линейной гамильтоновой системы при бесконечно малых ее возмущениях с аналогичным множеством, получаемым при бесконечно малых гамильтоновых ее возмущениях.

3.1 Спектры показателей

Обозначим через $S_*(A)$ множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^m$.

Пусть задан какой-либо *показатель*

$$\varkappa : S_* \to \mathbb{R}, \quad S_* \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^m} S_*(A), \tag{3.1}$$

определенный на ненулевых решениях всевозможных линейных систем.

Определение 17 [62]. *Спектром* показателя $\varkappa$ (3.1) системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \equiv \{\varkappa(x) \mid x \in S_*(A)\}.$$

Определение 18. *Равномерно предельным спектром* показателя $\varkappa$ (3.1) системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \equiv \operatorname*{Lim}_{\mathcal{M}^m \ni B \to A} \mathrm{Sp}_{\varkappa}(B) \tag{3.2}$$

таких значений $\mu \in \mathbb{R}$, для каждого из которых при любом $\varepsilon > 0$ найдутся система $B \in \mathcal{M}_{\varepsilon}(A)$ и ее решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие неравенству $|\varkappa(x) - \mu| < \varepsilon$. Кроме того, в случае четного m назовем *гамильтоново равномерно предельным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{H}^m$ аналогичное (с заменой всюду $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}$) множество

$$\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \equiv \operatorname*{Lim}_{\mathcal{H}^m \ni B \to A} \mathrm{Sp}_{\varkappa}(B). \tag{3.3}$$

Наряду с введенным выше понятием равномерно предельного спектра будем рассматривать бесконечно мало возмущенный спектр.

Определение 19. *Бесконечно мало возмущенным спектром* показателя $\varkappa$ (3.1) системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \equiv \bigcup_{B \in \mathcal{M}_0(A)} \mathrm{Sp}_{\varkappa}(B) \tag{3.4}$$

таких значений $\mu \in \mathbb{R}$, для каждого из которых найдутся система $B \in \mathcal{M}_0(A)$ и ее решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие равенству $\varkappa(x) = \mu$. Кроме того, в случае четного m назовем *гамильтоново бесконечно мало возмущенным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{H}^m$ аналогичное (с заменой всюду $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}$) множество

$$\mathcal{H}_0\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \equiv \bigcup_{B \in \mathcal{H}_0(A)} \mathrm{Sp}_{\varkappa}(B). \tag{3.5}$$

Лемма 13. *В случае, когда $\varkappa \equiv \chi$ — характеристический показатель Ляпунова, множество (3.2) или (3.3) совпадает с объединением по $i = 1, \ldots, m$ множеств $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\lambda_i(A)$ или $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\lambda_i(A)$ всех предельных значений в точке $A \in \mathcal{M}^m$ или $A \in \mathcal{H}^m$ в отдельности каждого из показателей Ляпунова $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$, рассматриваемых как функционалы в пространстве $\mathcal{M}^m$ или $\mathcal{H}^m$ соответственно.*

Доказательство. Докажем, что

$$X \equiv \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\lambda_i(A) \equiv \Lambda$$

(аналогично доказывается равенство $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathrm{L}_{\mathcal{H}}\lambda_i(A)$). Включение $X \supseteq \Lambda$ выполнено в силу того, что $\lambda_i(A) \in \mathrm{Sp}_{\chi}(A)$ при любом $i = 1, \ldots, m$. Докажем включение $X \subseteq \Lambda$. Возьмем произвольное $\mu \in X$. По определению равномерно предельного спектра для любого $\varepsilon > 0$ найдутся система $B \in \mathcal{M}_{\varepsilon}(A)$ и ее решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие неравенству $|\chi(x) - \mu| < \varepsilon$. Возьмем бесконечно убывающую последовательность $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k} > 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся система $B_k \in \mathcal{M}_{\varepsilon_k}(A)$ и ее решение $x_k \in S_*(B_k)$, удовлетворяющие неравенству $|\chi(x_k) - \mu| < \varepsilon_k$. Поскольку число показателей Ляпунова системы B_k конечно, то найдутся такие $i \in \{1, \ldots, m\}$ и подпоследовательность индексов k_l $(l \in \mathbb{N})$, что выполнено неравенство $|\lambda_i(B_{k_l}) - \mu| < \varepsilon_{k_l}$, а это означает, что $\mu \in \Lambda$. Следовательно, включение $X \subseteq \Lambda$ также выполнено.

Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *В случае, когда $\varkappa \equiv \chi$ — характеристический показатель Ляпунова, множество (3.4) или (3.5) совпадает с объединением по $i = 1, \ldots, m$ множеств $\mathcal{M}_0\lambda_i(A)$ или $\mathcal{H}_0\lambda_i(A)$ всех бесконечно мало возмущенных значений в точке $A \in \mathcal{M}^m$ или $A \in \mathcal{H}^m$ в отдельности каждого из показателей Ляпунова $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$, рассматриваемых как функционалы в пространстве $\mathcal{M}^m$ или $\mathcal{H}^m$ соответственно.*

Доказательство леммы 14 аналогично доказательству леммы 13.

3.2 Эффективность гамильтоновых возмущений

Лемма 15. *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой системы $B \in \mathcal{M}_{\delta}(A)$ и любого решения $x \in S_*(B)$ существует система $C \in \mathcal{H}_{\varepsilon}(A)$, также имеющая решение $x \in S_*(C)$.*

Доказательство. Положим $m = 2n$. Зафиксируем произвольное решение $x \in S_*(B)$. Обозначим

$$\frac{x(t)}{|x(t)|} = e(t) \equiv (e_1(t), \ldots, e_{2n}(t)).$$

Из того, что решение $x \in S_*(B)$ и $x(t)$ непрерывно по $t \in \mathbb{R}^+$, следует непрерывность $e_i(\cdot)$ на $\mathbb{R}^+$ для каждого $i = 1, \ldots, 2n$, причем $|e(t)| = 1,\ t \in \mathbb{R}^+$. Поэтому для каждого $t \in \mathbb{R}^+$ найдется такой номер $i(t) \in \{1, \ldots, 2n\}$, что $|e_{i(t)}(t)| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2n}}$, и найдется такое число $\delta(t) > 0$, что $|e_{i(t)}(\tau)| > \frac{1}{2\sqrt{2n}},\ \tau \in U_{\delta(t)}(t)$.

Зададим произвольно $T > 0$. Тогда $\mathbb{R}^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, где $I_k = [(k-1)T, kT]$. Для произвольного $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим отрезок I_k. Он покрывается системой интервалов $U_{\delta(t)}(t),\ t \in I_k$, для которых выполнено

$$|e_{i(t)}(\tau)| > \frac{1}{2\sqrt{2n}},\ \tau \in U_{\delta(t)}(t).$$

По лемме о конечном покрытии из всякой бесконечной системы интервалов, покрывающей отрезок числовой прямой, можно выбрать конечное подпокрытие. Следовательно, найдется $m_k \in \mathbb{N}$, что $I_k \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m_k} I_{k,j}$. Концы интервалов $I_{k,j},\ j = 1, \ldots, m_k$, задают конечное разбиение отрезка I_k. Тогда $\mathbb{R}^+ = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} [t_{j-1}, t_j)$, где $t_0 = 0$, причем для каждого промежутка $[t_{j-1}, t_j),\ j = 1, 2, \ldots$, найдется такой номер $i(j) \in \{1, \ldots, 2n\}$, что $|e_{i(j)}(\tau)| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2n}},\ t \in [t_{j-1}, t_j)$. Не ограничивая общности для каждого $j = 1, 2, \ldots$ будем считать $i(j) = 1$.

Для каждого $j = 1, 2, \ldots$ рассмотрим промежуток $[t_{j-1}, t_j)$ и построим на нем кусочно непрерывную систему $C \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$. Для упрощения записи аргумент $t \in [t_{j-1}, t_j)$ будем опускать. Поскольку мы строим систему C, для которой x является решением, то должно выполняться равенство

$$(C - A)e = (B - A)e, \tag{3.6}$$

где $C - A \in \mathcal{H}^{2n}$, а значит,

$$C - A = \begin{pmatrix} D & F \\ G & -D^* \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где F и G — симметричные $n \times n$ матрицы, D — произвольная $n \times n$ матрица. Из симметричности F и G получаем

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad g_{ij} = g_{ji}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{3.8}$$

Обозначим $s \equiv (B-A)e$. Из условий $B \in \mathcal{M}_\delta(A)$ и $|e| = 1$ следует, что $|s| < \delta$, а значит $|s_i| < \delta$, $i = 1, \ldots, 2n$.

Из (3.6), учитывая (3.7) и (3.8), получаем систему из $2n$ уравнений с $2n^2 + n$ неизвестными

$$\begin{cases} d_{11}e_1 + \ldots + d_{1n}e_n + f_{11}e_{n+1} + \ldots + f_{1n}e_{2n} = s_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n1}e_1 + \ldots + d_{nn}e_n + f_{1n}e_{n+1} + \ldots + f_{nn}e_{2n} = s_n \\ g_{11}e_1 + \ldots + g_{1n}e_n - d_{11}e_{n+1} - \ldots - d_{n1}e_{2n} = s_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{1n}e_1 + \ldots + g_{nn}e_n - d_{1n}e_{n+1} - \ldots - d_{nn}e_{2n} = s_{2n}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Записав систему (3.9) в матричном виде, несложно убедиться, что ранг матрицы равен $2n$ (поскольку $e_1 \neq 0$ по нашему предположению) и совпадает с рангом расширенной матрицы, а значит система совместна. Из системы (3.9) получим:

$$\begin{cases} d_{j1} = \frac{1}{e_1}\left(s_j - \sum\limits_{i=2}^{n} e_i d_{ji} - \sum\limits_{i=1}^{n} e_{n+i} f_{ji}\right), \quad j = 1, \ldots, n, \\ (f_{ij} = f_{ji}, \quad i,j = 1, \ldots, n,) \\ g_{1j} = \frac{1}{e_1}\left(s_{n+j} - \sum\limits_{i=2}^{n} e_i g_{ji} + \sum\limits_{i=1}^{n} e_{n+i} d_{ij}\right), \quad j = 2, \ldots, n, \\ (g_{ij} = g_{ji}, \quad i,j = 1, \ldots, n,) \\ g_{11} = \frac{1}{e_1}\left(s_{n+1} - \sum\limits_{i=2}^{n} e_i g_{1i} + \sum\limits_{i=1}^{n} e_{n+i} d_{i1}\right), \end{cases}$$

где d_{ij} $(i = 1, \ldots, n, \quad j = 2, \ldots, n)$, f_{ij} $(f_{ij} = f_{ji}, \quad i,j = 1, \ldots, n)$, g_{ij} $(g_{ij} = g_{ji}, \quad i,j = 2, \ldots, n,)$ произвольные. Положим все их равными нулю. Получим:

$$\begin{cases} d_{j1} = \frac{s_j}{e_1}, \quad j = 1, \ldots, n, \\ g_{1j} = \frac{s_{n+j}}{e_1}, \quad g_{1j} = g_{j1}, \quad j = 2, \ldots, n, \\ g_{11} = \frac{1}{e_1}\left(s_{n+1} - \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{s_{n+i}}{e_1} e_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{s_i}{e_1} e_{n+i}\right). \end{cases}$$

Преобразуем g_{11}:

$$g_{11} = \frac{1}{e_1^2}\left(s_{n+1}e_1 - \sum_{i=2}^{n} s_{n+i}e_i + \sum_{i=1}^{n} s_i e_{n+i}\right) = \frac{1}{e_1^2}(\tilde{s}, e),$$

где вектор $\tilde{s} \equiv (s_{n+1}, -s_{n+2}, \ldots, -s_{2n}, s_1, \ldots, s_n)$ (отметим, что $|\tilde{s}| = |s| < \delta$). Учитывая, что $|e| = 1$ и $|e_1| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2n}}$, получим оценки

$$|g_{11}| \leqslant \frac{1}{e_1^2}|s| < 8n\delta.$$

Тогда

$$\begin{cases} |d_{j1}| < 2\sqrt{2n}\delta, \quad j = 1, \ldots, n, \\ |g_{1j}| < 2\sqrt{2n}\delta, \quad g_{1j} = g_{j1}, \quad j = 2, \ldots, n, \\ |g_{11}| < 8n\delta. \end{cases}$$

Покажем, что из условия

$$\max_{i,j=1,\ldots,2n} |c_{ij} - a_{ij}| < \frac{\varepsilon}{4n} \tag{3.10}$$

следует оценка $\|C - A\| < \varepsilon$. Для произвольного вектора $|x| = 1$ рассмотрим величину

$$|(C - A)x| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2n}(c_{1i} - a_{1i})x_i\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{2n}(c_{2n,i} - a_{2n,i})x_i\right)^2}.$$

Для каждого $j = 1, \ldots, 2n$ обозначим вектор $(c_{j1} - a_{j1}, \ldots, c_{j,2n} - a_{j,2n}) = c_j - a_j$. Заметим сразу, что из условия (3.10) следует неравенство

$$|c_j - a_j| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2n}}.$$

Тогда справедливы оценки

$$|(C - A)x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{2n}(c_j - a_j, x)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{2n}|c_j - a_j|^2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|C - A\| = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{|x|=1} |(C(t) - A(t))x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а качестве δ можно взять

$$\delta = \frac{\varepsilon}{32n^2} = \frac{\varepsilon}{8m^2}.$$

Лемма 15 доказана.

Лемма 16. *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$, любой системы $B \in \mathcal{M}_0(A)$ и любого решения $x \in S_*(B)$ существует система $C \in \mathcal{H}_0(A)$, также имеющая решение $x \in S_*(C)$.*

Доказательство. В качестве системы C возьмем систему, построенную в лемме 15 и покажем, что $C \in \mathcal{H}_0(A)$. Учитывая, что $B \in \mathcal{M}_0(A)$, для каждого $j = 1, 2, \ldots$ получим

$$\sup_{t \in [t_{j-1}, t_j)} \|A(t) - B(t)\| = \delta_j,$$

причем

$$\lim_{j \to \infty} \delta_j = 0.$$

Из доказательства леммы 15 имеем

$$\sup_{t \in [t_{j-1}, t_j)} \|A(t) - C(t)\| < 8m^2 \delta_j,$$

а значит

$$\lim_{t \to \infty} \|A(t) - C(t)\| = 0,$$

т. е. $C \in \mathcal{H}_0(A)$.

Лемма 16 доказана.

Замечание 3. Леммы 15 и 16 остаются верны, если система A будет неограниченной.

Определение 20 [53]. Скажем, что разбиение пространства решений системы A в прямую сумму подпространств

$$E(A) = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_r, \quad \dim E_j > 0, \quad j = 1, \ldots, r$$

для некоторого числа r *интегрально разделено*, если найдутся такие положительные константы a и T, что

$$\chi_\tau^t(x_i) - \chi_\tau^t(x_j) \geqslant a$$

для всех решений $x_i \in E_i,\ x_j \in E_j$ $(1 \leqslant j < i \leqslant r)$ и всех $t - \tau > T$.

Пусть в пространстве решений $E(A)$ выбрано подпространство F. Тогда можно определить *сужение* X_F оператора Коши на подпространство F, а также *верхний* Ω_F и *нижний* ω_F *центральные показатели* этого *подпространства* по следующим формулам [53]:

$$X_F(t, \tau) \equiv X(t, \tau)\mid_{F(\tau)}, \quad t, \tau \in \mathbb{R}^+,$$

$$\Omega_F \equiv \inf_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X_F(sT,(s-1)T)\|, \tag{3.11}$$

$$\omega_F \equiv \sup_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X_F((s-1)T,sT)\|^{-1}. \tag{3.12}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21 [53]. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ назовем i-тый показатель Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$ *устойчивым при равномерно малых возмущениях*, если функционал λ_i непрерывен в точке $A \in \mathcal{M}^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22 [53]. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ назовем i-тый показатель Ляпунова системы $A \in \mathcal{H}^m$ *инвариантным относительно бесконечно малых (гамильтоновых) возмущений*, если для любой системы $B \in \mathcal{M}_0(A)$ (соответственно, $B \in \mathcal{H}_0(A)$) справедливо равенство $\lambda_i(B) = \lambda_i(A)$.

В следующей теореме, доказанной в работе [53], приводятся необходимые и достаточные условия устойчивости k младших показателей Ляпунова.

ТЕОРЕМА 4 [53]. *Для любого $k \in \{1, \ldots, m\}$ и любой системы $A \in \mathcal{M}^m$ следующие три условия эквивалентны.*

1. *Показатели $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(A)$ устойчивы при равномерно малых возмущениях.*

2. *Показатели $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(A)$ инвариантны относительно бесконечно малых возмущений.*

3. *Существует интегрально разделенное разбиение*

$$E(A) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r \oplus E_{r+1},$$

обладающее свойствами:

а) $\omega_{E_j} = \Omega_{E_j}$ *для каждого* $j = 1, 2, \ldots, r$;

б) $\dim E_1 + \ldots + \dim E_r \geqslant k$.

ЛЕММА 17. *Спектр характеристического показателя Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$ устойчив при равномерно малых возмущениях (т. е. $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_\chi(A) = \mathrm{Sp}_\chi(A)$) тогда и только тогда, когда все одновременно показатели Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$ устойчивы при равномерно малых возмущениях.*

Доказательство. Пусть спектр характеристического показателя системы A устойчив, т. е.

$$\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) = \mathrm{Sp}_{\chi}(A) \equiv \{\lambda_1(A), \ldots, \lambda_m(A)\}. \qquad (3.13)$$

1. Из равенства (3.13) следует устойчивость показателя λ_1 системы A. Действительно, если значения верхнего и нижнего пределов показателя λ_1 в точке A не совпадают, то все его частичные пределы в этой точке заполняют целый отрезок с концами в этих двух значениях (см. [58]), что противоречит конечности предельного спектра $\mathrm{Sp}_{\chi}(A)$ (3.13).

2. Отсюда согласно теореме 4 имеем, что существует интегрально разделенное разбиение пространства решений

$$E(A) = E_1(A) \oplus E_2(A),$$

причем $\omega_{E_1} = \Omega_{E_1}$. Тогда если $\dim E_1(A) = k \geqslant 1$, то

$$\omega_{E_1} = \lambda_1(A) = \ldots = \lambda_k(A) = \Omega_{E_1}$$

и показатели $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ системы A устойчивы, причем

$$0 \leqslant \dim E_2(A) = n - k < n.$$

3. Если $k < n$, то, согласно свойству 2.9° из [53], будем иметь

$$\Omega_{E_1} < \omega_{E_2} \leqslant \lambda_{k+1}(A).$$

Аналогично, из равенства (3.13) следует устойчивость показателя λ_{k+1} системы A, так как если значения верхнего и нижнего пределов показателя λ_{k+1} (который теперь играет роль младшего показателя для подпространства $E_2(B)$, и поэтому к нему применима теорема из работы [58]) в точке A не совпадают, то все частичные пределы в этой точке заполняют целый отрезок с концами в этих двух значениях, что опять противоречит конечности предельного спектра (3.13).

4. Рассуждая так и далее, в итоге получим устойчивость всех одновременно показателей Ляпунова системы A.

В обратную сторону утверждение леммы 17 верно, поскольку из равенств

$$\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\lambda_i(A) = \{\lambda_i(A)\}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

означающих устойчивость показателей Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$, вытекает цепочка

$$\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\lambda_i(A) = \bigcup_{i=1}^{m} \{\lambda_i(A)\} = \mathrm{Sp}_{\chi}(A)$$

(см. лемму 13), а значит, и устойчивость ее спектра характеристического показателя.

Лемма 17 доказана.

Лемма 18. *Спектр характеристического показателя Ляпунова любой системы $A \in \mathcal{M}^m$ инвариантен относительно бесконечно малых возмущений (т. е. $\mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_{\chi}(A) = \mathrm{Sp}_{\chi}(A)$) тогда и только тогда, когда все одновременно показатели Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$ инвариантны относительно бесконечно малых возмущений.*

Доказательство леммы 18 аналогично доказательству леммы 17.

Теорема 5. *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и любого показателя $\varkappa$ (3.1) имеет место равенство*

$$\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) = \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A). \tag{3.14}$$

Доказательство. Включение $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \subseteq \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$ является прямым следствием включения $\mathcal{H}^m \subset \mathcal{M}^m$. Докажем включение $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \supseteq \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$.

Возьмем произвольные $\mu \in \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$ и $\varepsilon > 0$. Для данного ε возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{8m^2} > 0$ (см. доказательство леммы 15). По определению равномерно предельного спектра для данного δ найдутся система $B \in \mathcal{M}_\delta(\mathcal{A})$ и решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие неравенству $|\varkappa(x) - \mu| < \delta$.

Согласно лемме 15, для любой системы $B \in \mathcal{M}_\delta(A)$ и любого решения $x \in S_*(B)$ существует система $C \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$, также имеющая решение $x \in S_*(C)$.

Получили, что для произвольного ε нашлись система $C \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$ и решение $x \in S_*(C)$, удовлетворяющие неравенству $|\varkappa(x) - \mu| < \delta < \varepsilon$. Отсюда вытекает условие $\mu \in \mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$, а с ним и доказываемое включение.

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и любого показателя $\varkappa$ (3.1) имеет место равенство*

$$\mathcal{H}_0\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) = \mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A). \tag{3.15}$$

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

Следствие 2. *Равенства* (3.14) и (3.15) *справедливы, в частности, если $\varkappa$ является:*

1) *характеристическим показателем Ляпунова χ (верхним);*

2) *нижним показателем Перрона π* [28, §2] (о спектре нижних показателей Перрона линейной системы см. работы [23, 2]);

3) *верхней (нижней) полной σ или векторной ζ частотами* [62];

4) *верхней (нижней) скоростью блуждания μ* [62];

5) *верхним (нижним) показателем блуждаемости ρ или блуждания η* [62].

Теорема 7. *Для любого четного числа m все одновременно показатели Ляпунова гамильтоновой системы $A \in \mathcal{H}^m$ устойчивы при равномерно малых возмущениях тогда и только тогда, когда они устойчивы при равномерно малых возмущениях в классе гамильтоновых систем.*

Доказательство. Из включения $\mathcal{H}^m \subset \mathcal{M}^m$ следует, что если показатели Ляпунова гамильтоновой системы $A \in \mathcal{H}^m$ устойчивы при равномерно малых возмущениях, то они устойчивы и при равномерно малых возмущениях в классе гамильтоновых систем.

Докажем, что из того, что все одновременно показатели Ляпунова гамильтоновой системы $A \in \mathcal{H}^m$ устойчивы при равномерно малых возмущениях в классе гамильтоновых систем следует, что они устойчивы и при равномерно малых возмущениях. Предположим противное: найдется такое $i \in \{1, \ldots, m\}$, что $\lambda_i(A)$ не устойчив в классе равномерно малых возмущений. Тогда по лемме 17 $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) \neq \mathrm{Sp}_{\chi}(A)$, а по теореме 5 $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) = \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A)$. Следовательно, $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) \neq \mathrm{Sp}_{\chi}(A)$. Получили противоречие с тем, что показатели Ляпунова системы устойчивы при равномерно малых возмущениях в классе гамильтоновых систем. Значит, все $\lambda_i(A)$ устойчивы при равномерно малых возмущениях.

Теорема 7 доказана.

Замечание 4. Теорему 7 можно получить и из явно сформулированных критериев устойчивости всех показателей Ляпунова в общем [8, 35] и в гамильтоновом [10, 11] случаях (подчеркнем, что в работе последнего автора этот критерий доказан логически независимо от предыдущих).

Теорема 8. *Для любого четного m все одновременно показатели Ляпунова системы $A \in \mathcal{H}^m$ инвариантны относительно бесконечно малых возмущений тогда и только тогда, когда все они инвариантны относительно бесконечно малых гамильтоновых возмущений.*

Доказательство теоремы 8 аналогично доказательству теоремы 7.

Литература

[1] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС, 2000.

[2] Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. **22**. №11. С. 1843–1853.

[3] Барабанов Е.А. О вычислении показателей решений линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. №12. С. 1592–1600.

[4] Быков В.В. Некоторые свойства минорант показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. 1996. **51**. Вып. 5. С. 186.

[5] Быков В.В. Классификация Бэра σ-показателей Изобова // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. №11. С. 1574.

[6] Былов Б.Ф. Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

[7] Былов Б.Ф. Почти приводимые системы. Автореф. дисс... докт. физ.-мат. наук. Мн.: АН БССР, 1966.

[8] Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференц. уравнения. 1969. **5**. №10. С. 1794–1803.

[9] Былов Б.Ф. Приведение к блочно-треугольному виду и необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1970. **6**. №2. С. 243–252.

[10] Веременюк В.В. Критерий устойчивости показателей Ляпунова линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 1982. **17**. №11. С. 2106–2107.

[11] Веременюк В.В. Некоторые вопросы теории устойчивости показателей Ляпунова линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 1982. **18**. №2. С. 205–219.

[12] Веременюк В.В. Критерий полунепрерывности сверху i-го показателя Ляпунова линейной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1982. **18**. №3. С. 371–383.

[13] Веременюк В.В. Необходимые и достаточные условия полунепрерывности сверху любого показателя Ляпунова линейной гамильтоновой системы // Дифференц. уравнения. 1982. **18**. №6. С. 1094–1095.

[14] Ветохин А.Н. О классах Бэра остаточных функционалов // Дифференц. уравнения. 1995. **31**. №5. С. 909–910.

[15] Ветохин А.Н. Точный класс Бэра экспоненциального показателя Изобова в равномерной топологии // Дифференц. уравнения. 1999. **35**. №11. С. 1578–1579.

[16] Виноград Р.Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. **91**. №5. С. 999–1002.

[17] Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1957. **42**. №2. С. 207–222.

[18] Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Добросвет МЦНМО, 1998.

[19] Дементьев Ю.И. О классах Бэра старшего показателя Ляпунова систем, линейно зависящих от параметра // Научный вестник МГТУ ГА. Серия Математика. 1999. №16. С. 5–10.

[20] Дементьев Ю.И. Подвижность показателей Ляпунова под действием бесконечно малых возмущений // Дифференц. уравнения. 2001. **37**. №11. С. 1575.

[21] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

[22] Диб К.А. Одновременная достижимость центральных показателей // Дифференц. уравнения. 1974. **10**. №12. С. 2125–2136.

[23] Изобов Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. **1**. №4. С. 469–477.

[24] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.

[25] Изобов Н.А. Минимальный показатель двумерной диагональной системы // Дифференц. уравнения. 1976. **12**. №11. С. 1954–1966.

[26] Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. 1982. **26**. №1. С. 5–8.

[27] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. №12. С. 2034–2055.

[28] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

[29] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

[30] Леви-Чивита Т., Альмади У. Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Издательство иностранной литературы, 1951.

[31] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000.

[32] Макаров Е.К. О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. 1989. **25**. №2. С. 209–212.

[33] Макаров Е.К. О реализации частичных показателей решений линейных дифференциальных систем на геометрических прогрессиях // Дифференц. уравнения. 1996. **32**. №12. С. 1710–1711.

[34] Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирск. матем. журнал. 1969. **10**. №1. С. 99–104.

[35] Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. **5**. № 10. С. 1775–1784.

[36] Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №8. С. 1408–1416.

[37] Морозов О.И. Критерий полуустойчивости сверху старшего показателя Ляпунова неоднородной линейной системы // Дифференц. уравнения. 1990. **26**. №12. С. 2181.

[38] Морозов О.И. Достаточные условия полуустойчивости сверху показателей Ляпунова неоднородных систем // Дифференц. уравнения. 1991. **27**. №11. С. 2012.

[39] Морозов О.И., Сергеев И.Н. Дестабилизируемость линейных гамильтоновых систем // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 1986. №4. С. 38–41.

[40] Нуждова Т.Е. Одновременная достижимость центральных показателей двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1972. **8**. №8. С. 1416–1422.

[41] Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. №2. С. 226–235.

[42] Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 2007. **43**. №8. С. 1048–1054.

[43] Рахимбердиев М.И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1982. **31**. №6. С. 925–931.

[44] Рахимбердиев М.И. О центральных показателях линейных систем // Дифференц. уравнения. 1983. **19**. №2. С. 253–259.

[45] Салова Т.В. К вопросу о предельной эффективности разрывных ортогональных преобразований координат // Дифференц. уравнения. 2001. **37**. №11. С. 1579.

[46] Салова Т.В. Об одновременной достижимости центральных показателей двумерных линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2006. **42**. №6. С. 854–855.

[47] Салова Т.В. Одновременная достижимость центральных показателей маломерных линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2014. **50**. №10. С. 1412. (Salova T.V. Simultaneous Attainability of the Central Exponents of Small-Dimensional Linear Hamiltonian Systems // Differential Equations. 2014. Vol. 50. №10. P. 1407.)

[48] Салова Т.В. Одновременная достижимость центральных показателей четырехмерных гамильтоновых систем при бесконечно малых гамильтоновых возмущениях // Дифференц. уравнения. 2014. **50**. №11. С. 1441–1454. (Salova T.V. Simultaneous Attainability of Central Exponents of Four-Dimensional Hamiltonian Systems under Infinitesimal Hamiltonian Perturbations // Differential Equations. 2014. Vol. 50. №11. P. 1435–1448.)

[49] Салова Т.В. Об одновременной условной стабилизируемости и дестабилизируемости линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2014. **50**. №12. С. 1676–1677. (Salova T.V. On the Simultaneous Conditional Stabilizability and Destabilizability of Linear Hamiltonian Systems // Differential Equations. 2014. Vol. 50. №12. P. 1681–1682.)

[50] Салова Т.В. Об эффективности возмущений в классе линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2015. **51**. №1. С. 141–142. (Salova T.V. On the Effectiveness of Perturbations in the Class of Linear Hamiltonian Systems // Differential Equations. 2015. Vol. 51. №1. P. 144–145.)

[51] Сергеев И.Н. Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова системы дифференциальных уравнений и поведение показателей при возмущениях, стремящихся к нулю на

бесконечности // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №3. С. 438–448.

[52] Сергеев И.Н. Инвариантность центральных показателей относительно возмущений, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №9. С. 1719.

[53] Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 9. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. С. 111–166.

[54] Сергеев И.Н. Стабилизируемость линейных гамильтоновых систем // Успехи матем. наук, 1985. **40**. Вып. 5. С. 230.

[55] Сергеев И.Н. Точные границы подвижности показателей Ляпунова линейных гамильтоновых систем при малых в среднем возмущениях // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 14. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. С. 125–139.

[56] Сергеев И.Н. Условная стабилизируемость линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 1992. **28**. №11. С. 2007.

[57] Сергеев И.Н. О подвижности знаков показателей Ляпунова линейных гамильтоновых систем // Успехи матем. наук. 1993. **48**. Вып. 4. С. 204–205.

[58] Сергеев И.Н. Частичные пределы показателей Ляпунова линейной системы и вопросы их достижимости // Дифференциальные уравнения. 1999. **35**. №6. С. 858.

[59] Сергеев И.Н. Формула для вычисления минимального показателя трехмерной системы // Дифференц. уравнения. 2000. **36**. №3. С. 345–354.

[60] Сергеев И.Н. О достижимости минимальных показателей в классе бесконечно малых возмущений // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2000. №3. С. 61–63.

[61] Сергеев И.Н. Об эффективности возмущений в классе линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2003. **39**. №6. С. 856.

[62] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия матем. 2012. Т.76. №1. С. 149–172.

[63] Фам Фу. О достижимости центральных показателей линейной гамильтоновой системы. I // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №11. С. 2012–2022.

[64] Фам Фу. О достижимости центральных показателей линейной гамильтоновой системы. II // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №12. С. 2062–2176.

[65] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

[66] Фурсов А.С. Критерий существования решения с малым ростом у линейной неоднородной системы // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. №11. С. 2011–2012.

[67] Фурсов А.С. Размерность пространства решений медленного роста линейной неоднородной системы // Успехи матем. наук. 1994. **49**. Вып. 4. С. 143.

[68] Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: Едиториал УРСС, 2004.

[69] Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.

[70] Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd. 32, Hft. 5. S. 703–728.