

О Т З Ы В

официального оппонента С. Н. Поповой
о диссертации Татьяны Валентиновны Саловой
«О показателях Ляпунова линейных гамильтоновых систем»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Актуальность темы диссертации

В диссертации Т. В. Саловой изучаются свойства показателей Ляпунова, рассматриваемых как функционалы на множестве линейных гамильтоновых систем.

Идея качественного описания устойчивости решений системы дифференциальных уравнений путем введения на множестве всех ее решений специальных функционалов восходит к работам А. М. Ляпунова. Определенные им в конце XIX века характеристические числа, впоследствии поменявшие знак и получившие название «показатели Ляпунова», открыли целое направление в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Но еще в начале XX века немецкий математик О. Перрон установил, что старший показатель Ляпунова, рассматриваемый как функционал на пространстве линейных систем с топологией равномерной сходимости коэффициентов на положительной полуоси, имеет точки разрыва. По этой причине стало важным исследование поведения показателей Ляпунова линейных систем при малых возмущениях их коэффициентов. Одним из разделов данного направления является изучение границ подвижности показателей Ляпунова при различных типах возмущений. В разное время такими задачами занимались Р. Э. Виноград, В. М. Миллионщиков, Б. Ф. Былов, Н. А. Изобов, И. Н. Сергеев, К. А. Диб, Т. Е. Нуждова и многие другие.

С другой стороны, один из интересных (с точки зрения приложений в механике) классов дифференциальных систем образуют так называемые гамильтоновы системы. Подвижность показателей Ляпунова и стабилизируемость в классе линейных гамильтоновых систем изучалась ранее в работах Фама Фу, В. В. Веремеюка, И. Н. Сергеева, О. И. Морозова.

Несмотря на значительное число работ по данной тематике, до сих пор остается нерешенной задача об одновременной достижимости верхнего и нижнего центральных показателей (которые являются точными границами подвижности показателей Ляпунова при малых возмущениях) линейных гамильтоновых систем произвольной размерности при малых гамильтоновых возмущениях. Работа Т. В. Саловой как раз и посвящена решению этой задачи для гамильтоновых систем малой размерности. Кроме того, в диссертации рассмотрены вопросы об одновременной условной (относительно подпространства половинной размерности) стабилизируемости и дестабилизируемости линейных гамильтоновых систем, а также исследована эффективность гамильтоновых возмущений по отношению к возмущениям общего вида.

Таким образом, диссертационное исследование Т. В. Саловой представляется вполне актуальным.

Основные результаты диссертации

В представленной диссертации Т. В. Саловой решены следующие задачи:

1) установлена одновременная достижимость центральных показателей двумерной и четырехмерной линейной гамильтоновой системы показателями Ляпунова во множестве равномерно малых и бесконечно малых гамильтоновых возмущений;

2) доказана одновременная условная стабилизируемость и дестабилизируемость любой линейной гамильтоновой системы бесконечно малыми гамильтоновыми возмущениями. Также доказана одновременная условная экспоненциальная стабилизируемость и дестабилизируемость произвольной линейной гамильтоновой системы равномерно малыми гамильтоновыми возмущениями;

3) установлена эффективность гамильтоновых возмущений по отношению к множеству значений произвольного показателя (в частности, показателя Ляпунова) на решениях данной системы и близких к ней систем. Доказано, что множество всех предельных значений показателей решений линейной гамильтоновой системы при равномерно малых ее возмущениях совпадает с аналогичным множеством, получаемым при гамильтоновых возмущениях. Кроме того, доказано совпадение множества всех значений показателей решений линейной гамильтоновой системы при бесконечно малых ее возмущениях с аналогичным множеством, получаемым при гамильтоновых возмущениях.

Замечания

Существенных недостатков диссертационная работа не содержит. Имеются следующие замечания, не влияющие на общее положительное впечатление от работы.

1. На стр. 9 и 18 диссертации утверждается, что нижний центральный показатель

$$\omega(A) \doteq \sup_{T>0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^k \|X_A((s-1)T, sT)\|^{-1} \quad (1)$$

был введен в книге Б. Ф. Былова, Р. Э. Винограда, Д. М. Гробмана и В. В. Немыцкого «Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости» (ссылка [6] из списка литературы диссертации). В действительности в [6] нижним центральным показателем названа величина

$$\omega(A) \doteq \sup_{T>0} \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^k \|X_A((s-1)T, sT)\|^{-1},$$

играющая ключевую роль в поведении нижних показателей линейных систем при малых возмущениях. Показатель (1) был введен В.М.Миллионщиковым в статье [34], и именно этот показатель является точной нижней границей подвижности младшего показателя Ляпунова при малых возмущениях.

2. В утверждении 1 и замечании 1 на стр. 18–21 диссертации доказывается, что сингулярные числа матрицы A могут быть найдены по формуле

$$\sigma_i(A) = \min_{L \in \mathcal{G}^i} \max_{\substack{x \in L, \\ |x|=1}} |Ax|. \quad (2)$$

Но равенство (2) доказано в общедоступной литературе, например, его можно найти в книге Р. Хорна и Ч. Джонсона «Матричный анализ» (теорема 7.3.10).

Выводы

Диссертация Т. В. Саловой представляет собой научно-квалификационную работу, в которой содержится решение задачи о границах подвижности показателей линейных гамильтоновых систем. Эта задача имеет существенное значение для развития качественной теории дифференциальных уравнений. Основные результаты диссертации являются новыми, они четко сформулированы и строго доказаны. Результаты прошли апробацию на известных научных семинарах и конференциях, и опубликованы в 6 работах автора, 5 из которых — в журналах из перечня ВАК.

Автореферат диссертации правильно и полно отражает ее содержание, а также историю исследований по выбранной тематике.

Считаю, что диссертация Т. В. Саловой «О показателях Ляпунова линейных гамильтоновых систем» удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор, Татьяна Валентиновна Салова, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Профессор кафедры дифференциальных уравнений
Удмуртского государственного университета,
доктор физико-математических наук

С. Н. Попова

20 июля 2015 года

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Удмуртский государственный университет»,
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1,
e-mail: ps@uni.udm.ru, тел. +7(3412)916092.

Подпись С. Н. Поповой заверяю.

