ФГБОУ ВПО “МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА”

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Васильева Анастасия Андреевна

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ПОПЕРЕЧНИКИ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления механико-математического факультета ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Царьков Игорь Германович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Калябин Геннадий Анатольевич, ФГБОУ ВПО “Самарский государственный университет”, профессор кафедры высшей математики и прикладной информатики
	доктор физико-математических наук, доцент Романов Александр Сергеевич, ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ведущий научный сотрудник лаборатории прикладного анализа
	доктор физико-математических наук, профессор Буслаев Александр Павлович, ФГБОУ ВПО “Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)”, профессор, заведующий кафедрой высшей математики
Ведущая организация:	ФГБУН “Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН”

Защита диссертации состоится 25 декабря 2015 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85, созданного на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8 этаж) и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su.

Автореферат разослан _____ ноября 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ
имени М.В. Ломоносова
доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Власов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теории поперечников и весовых функциональных пространств являются интенсивно развивающимися областями математики, имеющими важные приложения для дифференциальных уравнений[1, 2, 3, 4, 5, 6], теории вероятностей[7, 8, 9, 10] и численных методов.[11, 12]

Приведем определение весового класса Соболева и весового пространства Лебега.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область (т.е. открытое связное множество), g, $v : \Omega \to \mathbb{R}_+$ — измеримые функции. Для каждой измеримой векторнозначной функции $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\varphi = (\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$, и для каждого $p \in [1, \infty]$ положим $\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} = \left\| \max_{1\leqslant k\leqslant m} |\varphi_k| \right\|_{L_p(\Omega)}$.

Пусть $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{Z}_+^d := (\mathbb{N}\cup\{0\})^d$, $|\overline{\beta}| = \beta_1 + \ldots + \beta_d$. Для каждой обобщенной функции f на Ω обозначим $\nabla^r f = \left(\partial^r f / \partial x^{\overline{\beta}}\right)_{|\overline{\beta}|=r}$ (здесь частные производные берутся в обобщенном смысле), m_r — число компонент обобщенной вектор-функции $\nabla^r f$. Весовым классом

---

[1] *Л.Д. Кудрявцев*, Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений. — Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1959. Т. 55. С. 3–182.

[2] *Х. Трибель*, Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.

[3] *А.П. Буслаев, В.М. Тихомиров*, Спектры нелинейных дифференциальных уравнений и поперечники соболевских классов. — Мат. сборник. 1990. Т. 181, N 12. С. 1587–1606.

[4] *К. Мынбаев, М. Отелбаев*, Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988.

[5] *D.D. Haroske, L. Skrzypczak*, Spectral theory of some degenerate elliptic operators with local singularities. — J. Math. An. Appl. 2010. V. 371, N 1. P. 282–299.

[6] *H. Triebel*, Entropy and approximation numbers of limiting embeddings, an approach via Hardy inequalities and quadratic forms. — J. Approx. Theory. 2012. V. 164, N. 1. P. 31–46.

[7] *M.A. Lifshits, W. Linde*, Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion. Mem. Amer. Math. Soc. 2002. V. 157, N. 745. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[8] *W. Linde*, Kolmogorov numbers of Riemann – Liouville operators over small sets and applications to Gaussian processes. — J. Appr. Theory. 2004. V. 128, N 2. P. 207–233.

[9] *M.A. Lifshits, W. Linde, Shi Zhan*, Small deviations of Gaussian random fields in L_q-spaces. — Electronic J. Prob. 2006. V. 11, paper 46, P. 1204–1233.

[10] *M.A. Lifshits, W. Linde*, Compactness properties of weighted summation operators on trees. — Studia Math. 2011. V. 202, N 1. P. 17–47.

[11] *И.В. Бойков, А.Н. Тында*, Оптимальные по точности приближенные методы решения интегральных уравнений Вольтерра. — Диф. уравн. 2002. Т. 38, N 9. С. 1225–1232.

[12] *И.В. Бойков, А.Н. Тында, П.С. Краснощеков*, Оптимальные по точности методы решения некоторых классов слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра. — Изв. высш. уч. завед. Поволжский рег. Физ.-мат. наук. Математика. 2013. Т. 2 (26). С. 87–107.

Соболева назовем множество функций

$$W^r_{p,g}(\Omega) = \left\{f:\ \Omega \to \mathbb{R} \middle| \ \exists \varphi:\ \Omega \to \mathbb{R}^{m_r}:\ \|\varphi\|_{L_p(\Omega)} \leqslant 1,\ \nabla^r f = g\cdot\varphi\right\}$$

$\Big($соответствующую функцию φ будем обозначать через $\dfrac{\nabla^r f}{g}$; для определенности полагаем $\dfrac{\nabla^r f(x)}{g(x)} = 0$ в точках $x \in \Omega$ таких, что $g(x) = 0\Big)$. Линейную оболочку этого множества назовем весовым пространством Соболева.

Обозначим $\|f\|_{L_{q,v}(\Omega)}{=}\|f\|_{q,v}{=}\|fv\|_{L_q(\Omega)}$, $L_{q,v}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} | \ \|f\|_{q,v} < \infty\}$.

Отметим, что множество $W^r_{p,g}(\Omega)$ содержит подпространство полиномов степени не выше $r-1$ (обозначим его через $\mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$).

Различные свойства весовых пространств Соболева и их обобщений изложены в книгах Х. Трибеля[2] [13], А. Куфнера[14], В.Г. Мазьи,[15] Б.О. Турессона[16], Д.Е. Эдмундса и Х. Трибеля[17], Д.Е. Эдмундса и В.Д. Эванса[18] и в обзорной статье Л.Д. Кудрявцева и С.М. Никольского[19]. Достаточные условия ограниченности и компактности вложения весового пространства Соболева в весовое пространство L_q были получены Л.Д. Кудрявцевым[1], Й. Нечасом[20], А. Куфнером[21], Х. Трибелем[2], В.Г. Мазьей,[15] П.И. Лизоркиным и М.О. Отелбае-

[13] *H. Triebel*, Theory of function spaces III. — Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[14] *A. Kufner*, Weighted Sobolev spaces. — Teubner-Texte Math., 31. Leipzig: Teubner, 1980.

[15] *В.Г. Мазья*, Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 415 с.

[16] *B.O. Turesson*, Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces. — Lecture Notes in Mathematics, 1736. Springer, 2000.

[17] *D.E. Edmunds, H. Triebel*, Function spaces, entropy numbers, differential operators. — Cambridge Tracts in Mathematics, V. 120 (1996). Cambridge University Press.

[18] *D.E. Edmunds, W.D. Evans*, Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings. — Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[19] *Л.Д. Кудрявцев, С.М. Никольский*, Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения. — В кн. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 26. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). М., 1988. С. 5–157.

[20] *J. Nečas*, Sur une méthode pour résoudre les equations aux dérivées partielles dy type elliptique, voisine de la varitionelle. — Ann. Scuola Sup. Pisa. 1962. V. 16, N. 4. P. 305–326.

[21] *A. Kufner*, Imbedding theorems for general Sobolev weight spaces. — Ann. Scuola Sup. Pisa. 1969. V. 23. P. 373–386.

вым,[22, 23] П. Гуркой и Б. Опицем,[24, 25, 26] О.В. Бесовым,[27, 28, 29] Л.К. Кусаиновой,[30] В. Гольдштейном и А. Ухловым,[31] Л. Казо и Р. Д'Амброзио[32] и другими авторами. Отметим, что в этих работах в определении весовых классов Соболева присутствовало ограничение не только на производные порядка r, но и на младшие производные.

Пусть X — нормированное пространство, $n \in \mathbb{Z}_+$. Через $\mathcal{L}_n(X)$ обозначим совокупность подпространств в X размерности не выше n. Обозначим через $L(X, Y)$ пространство линейных непрерывных операторов из X в нормированное пространство Y, через $\operatorname{rk} A$ обозначим размерность образа оператора $A : X \to Y$, а через $\|A\|_{X\to Y}$ — его норму. Через X^* обозначим сопряженное пространство к X, через B_X — единичный шар в X.

Колмогоровским n-поперечником множества $M \subset X$ в пространстве X называется величина

$$d_n(M, X) = \inf_{L\in\mathcal{L}_n(X)} \sup_{x\in M} \inf_{y\in L} \|x - y\|_X,$$

линейным n-поперечником — величина

$$\lambda_n(M, X) = \inf_{A\in L(X, X),\, \mathrm{rk} A\leqslant n} \sup_{x\in M} \|x - Ax\|_X,$$

[22] *П.И. Лизоркин, М.О. Отелбаев*, Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами. I. — Мат. сборник, 1979. Т. 108, N 3. С. 358–377.

[23] *П.И. Лизоркин, М.О. Отелбаев*, Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами. II. — Мат. сборник. 1980. Т. 112, N. 1. С. 56–85.

[24] *P. Gurka, B. Opic*, Continuous and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces. I. — Czech. Math. J. 1988. V. 38(113), N 4. P. 730–744.

[25] *P. Gurka, B. Opic*, Continuous and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces. II. — Czech. Math. J. 1989. V. 39(114), N 1. P. 78–94.

[26] *P. Gurka, B. Opic*, Continuous and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces. III. — Czech. Math. J. 1991. V. 41(116), N 2. P. 317–341.

[27] *О.В. Бесов*, О компактности вложений весовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей. — Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 72–93.

[28] *О.В. Бесов*, Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей. — Матем. сборник. 2001. Т. 192, N 3. С. 3–26.

[29] *О.В. Бесов*, Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях. — Матем. сб. 2010. Т. 201, N 12. С. 69–82.

[30] *Л.К. Кусаинова*, О вложении весового пространства Соболева $W^l_p(\Omega; v)$ в пространство $L_p(\Omega;\omega)$. — Матем. сб. 2000. Т. 191, N 2. С. 132–148.

[31] *V. Gol'dshtein, A. Ukhlov*, Weighted Sobolev spaces and embedding theorems. — Trans. AMS. 2009. V. 361, N 7. P. 3829–3850.

[32] *L. Caso, R. D'Ambrosio*, Weighted spaces and weighted norm inequalities on irregular domains. — J. Appr. Theory. 2013. V. 167. P. 42–58.

гельфандовским n-поперечником — величина

$$d^n(M,\,X)=\inf_{x_1^*,\,\ldots,\,x_n^*\in X^*}\sup\{\|x\|:\ x\in M,\ x_j^*(x)=0,\ 1\leqslant j\leqslant n\}.$$

Колмогоровские поперечники впервые появились в 1936 г. в работе А.Н. Колмогорова[33]. Понятие линейного и гельфандовского поперечника было введено В.М. Тихомировым[34].

А. Пич[35] ввел понятие s-чисел для линейных операторов. Примерами s-чисел являются числа Колмогорова, числа Гельфанда и аппроксимативные числа. Числа Колмогорова оператора $A\in L(X,\,Y)$ определяются как $d_n(A:X\to Y)=d_n(A(B_X),\,Y)$, аппроксимативные числа — как $a_n(A:X\to Y)=\inf\{\|A-A_n\|_{X\to Y}:\operatorname{rk}A_n\leqslant n\}$, числа Гельфанда — как

$$c_n(A:X\to Y)=\inf_{\{x_j^*\}_{j=1}^n\subset X^*}\sup\{\|Ax\|:\ x\in\cap_{j=1}^n\ker x_j^*,\ \|x\|\leqslant 1\}.$$

Если Id — компактный оператор вложения пространства X в пространство Y, то из результатов Хейнриха[36] следует, что

$$a_n(\mathrm{Id}:X\to Y)=\lambda_n(A(B_X),\,Y),\quad c_n(\mathrm{Id}:X\to Y)=d^n(A(B_X),\,Y).$$

Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$. Обозначим через l_p^n линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|(x_1,\,\ldots,\,x_n)\|_{l_p^n}=\left\{\begin{array}{ll}(|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p}, & p<\infty,\\ \max\{|x_1|,\,\ldots,\,|x_n|\}, & p=\infty,\end{array}\right.$$

через B_p^n обозначим единичный шар в l_p^n.

В 60–80-е годы XX века изучались задачи об оценках поперечников функциональных классов в пространстве L_q (см. работы В.М. Тихомирова,[34] С.Б. Бабаджанова и В.М. Тихомирова,[37] А.П. Буслаева и

[33] *A.N. Kolmogorov*, Über die beste Annäherung von Funktion einer gegebenen funktionenklasse. — Ann. Math. 1936. V. 37. P. 107–110.

[34] *В.М. Тихомиров*, Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений. — Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, N. 3. С. 81–120.

[35] *A. Pietsch*, s-numbers of operators in Banach space. — Studia Math. 1974. V. 51. P. 201–223.

[36] *S. Heinrich*, On the relation between linear n-widths and approximation numbers. — J. Approx. Theory. 1989. V. 58, N 3. P. 315–333.

[37] *С.Б. Бабаджанов, В.М. Тихомиров*, О поперечниках одного класса в пространстве L^p. — Изв. АН Узб. ССР, сер. физ.-мат. 1967. Т. 11, N 2. С. 24–30.

В.М. Тихомирова,[3] Р.С. Исмагилова,[38] Ю.И. Маковоза,[39] В.Е. Майорова,[40] Б.С. Кашина,[41, 42] В.Н. Темлякова,[43, 44, 45] Э.М. Галеева,[46, 47] Е.Д. Куланина,[48], Р. ДеВора, Р. Шарпли и С. Рименшнайдера,[49] а также книги В.М. Тихомирова[50], А. Пинкуса[51] и обзорную статью В.М. Тихомирова[52]) и конечномерных шаров B_p^n в l_q^n. Для $p \geqslant q$ А. Пич[35] и М.И. Стесин[53] нашли точные значения величин $d_n(B_p^\nu, l_q^\nu)$ и $\lambda_n(B_p^\nu, l_q^\nu)$. В случае $p < q$ точное значение поперечника $d_n(B_p^\nu, l_q^\nu)$ известно только при $p = 1$, $q = 2$ (см. работы А.Н. Колмогорова, А.А. Петрова и Ю.М. Смирнова[54] и С.Б. Стечкина[55]). Для произвольных $p < q$ (кроме некоторых критических случаев) в работах Б.С. Ка-

[38] *Р.С. Исмагилов*, Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение тригонометрическими многочленами. — УМН. 1974. Т. 29, N 3. С. 161–178.

[39] *Ю.И. Маковоз*, Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве. — Мат. сборник. 1972. Т. 87 (129), N 1. С. 136–142.

[40] *В.Е. Майоров*, Дискретизация задачи о поперечниках. — УМН. 1975. Т. 30, N 6. С. 179–180.

[41] *Б.С. Кашин*, Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций. — Изв. АН СССР, сер. мат. 1977. Т. 41, N 2. С. 334–351.

[42] *Б.С. Кашин*, О поперечниках классов Соболева малой гладкости. — Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1981. Т. 5. С. 50–54.

[43] *В.Н. Темляков*, О приближении периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью. — ДАН СССР. 1980. Т. 253, N 3. С. 544–548.

[44] *В.Н. Темляков*, Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных. — ДАН СССР. 1982. Т. 267, N 2. С. 314–317.

[45] *В.Н. Темляков*, Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций. — Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т 46, N 1. С. 171–186.

[46] *Э.М. Галеев*, Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $\widetilde{L}_p$. — Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, N 4. С. 251–252.

[47] *Э.М. Галеев*, Приближение суммами Фурье класса функций с несколькими ограниченными производными. — Мат. заметки. 1978. Т. 23, N 2. С. 197–212.

[48] *Е.Д. Куланин*, Оценки поперечников функциональных классов малой гладкости: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 1986. 68 с.

[49] *R.A. DeVore, R.C. Sharpley, S.D. Riemenschneider*, n-widths for C_p^α spaces. — Anniversary volume on approximation theory and functional analysis (Oberwolfach, 1983). P. 213–222. Internat. Schriftenreihe Numer. Math., **65**, Birkhäuser, Basel, 1984.

[50] *В.М. Тихомиров*, Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.

[51] *A. Pinkus*, n-widths in approximation theory. Berlin: Springer, 1985.

[52] *В.М. Тихомиров*, Теория приближений. — В кн. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). М., 1987. С. 103–260.

[53] *М.И. Стесин*, Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций. — ДАН СССР. 1975. Т. 220, N 6. С. 1278–1281.

[54] *А.Н. Колмогоров, А.А. Петров, Ю.М. Смирнов*, Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов. — Изв. АН СССР, сер. мат. 1947. Т. 11, N 6. С. 561–566.

[55] *С.Б. Стечкин*, О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами. — УМН. 1954. Т. 9, N 1(53). С. 133–134.

шина,[41] Е.Д. Глускина[56,57] и А.Ю. Гарнаева и Е.Д. Глускина[58] найдены порядковые оценки поперечников конечномерных шаров с точностью до мультипликативных констант, зависящих только от p и q. Для колмогоровских поперечников порядковые оценки не получены в случае $p < 2$, $q = \infty$, для гельфандовских поперечников — в случае $p = 1$, $q > 2$, для линейных поперечников — в случае $p = 1$, $q = \infty$. При $p < 2$, $q = \infty$ Б.С. Кашиным[59, 60] получены оценки колмогоровских поперечников, точные в степенной шкале.

Порядковые оценки поперечников невесовых классов Соболева получены в работах В.М. Тихомирова,[34] С.Б. Бабаджанова и В.М. Тихомирова[37] (случай $d = 1$, $p = q$), М.Ш. Бирмана и М.З. Соломяка[61] (оценка сверху в случае $d \geqslant 2$, $p \leqslant q \leqslant 2$), Ю.И. Маковоза[39] (случай $d = 1$, $p \geqslant q$), Р.С. Исмагилова[38] (случай $d = 1$, $p \leqslant q \leqslant 2$), В.Е. Майорова[40] (задача сведена к оценке поперечников конечномерных шаров), Б.С. Кашина[41] (случай $d = 1$, $p < q$, $q > 2$, $r > \frac{1}{p}$), Р. ДеВора, Р. Шарпли и С. Рименшнайдера[49] (получен окончательный результат при $d \geqslant 2$, кроме некоторых критических случаев). Некоторые обобщения этих пространств на торе изучались в работах Б.С. Кашина,[42] В.Н. Темлякова,[43, 44, 45] Э.М. Галеева,[46, 47] Е.Д. Куланина[48] и других авторов.

О.В. Бесовым[62] была рассмотрена область типа пика:

$$K_\sigma = \{(x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d) : \ |(x_1, \ldots, x_{d-1})|^{1/\sigma} < x_d < 1\},$$

где $\sigma > 1$. В этом случае условием компактности вложения $W^r_p(K_\sigma)$ в $L_q(K_\sigma)$ является соотношение $r - [\sigma(d-1)+1]\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ > 0$. Было показано, что в этом случае

$$d_n(W^r_p(K_\sigma), L_q(K_\sigma)) \underset{p,q,r,d,\sigma}{\asymp} d_n(W^r_p([0, 1]^d), L_q([0, 1]^d))$$

[56] *Е.Д. Глускин*, О некоторых конечномерных задачах теории поперечников. — Вестн. ЛГУ. 1981. Т. 13. С. 5–10.

[57] *Е.Д. Глускин*, Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств. — Мат. сборник. 1983. Т. 120 (162), N 2. С. 180–189.

[58] *А.Ю. Гарнаев, Е.Д. Глускин*, О поперечниках евклидового шара. — ДАН СССР. 1984. Т. 277, N 5. С. 1048–1052.

[59] *Б.С. Кашин*, О колмогоровских поперечниках октаэдров. — ДАН СССР. 1974. Т. 214, N 5. С. 1024–1026.

[60] *Б.С. Кашин*, О поперечниках октаэдров. — УМН. 1975. Т. 30, N 4. С. 251–252.

[61] *М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк*, Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W^α_p. — Матем. сборник. 1967. Т. 73, N 3. С. 331–355.

[62] *О.В. Бесов*, О колмогоровских поперечниках классов Соболева на нерегулярной области. — Тр. МИАН. 2013. Т. 280. С. 41–52.

(если $p < q$ и $q > 2$, то дополнительно требовалось выполнение условия $\frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right\} \neq \frac{q\delta}{2d}$).

Для $r = 1$, $p = q$ и более общих областей с особенностями оценки аппроксимативных чисел оператора вложения были получены В.Д. Эвансом и Д.Дж. Харрисом.[63]

Первые результаты об оценках поперечников весовых классов Соболева появились в 60-70е годы XX века в работах М.Ш. Бирмана и М.З. Соломяка,[61] А. Эль Колли[64] и Х. Трибеля[2]. Интенсивно эта задача стала изучаться с 90-х годов.

Случай $d = 1$ рассматривался в работах В.Н. Коновалова и Д. Левиатана,[65] М.А. Лифшица и В. Линде,[7] Д.Е. Эдмундса и Я. Ланга,[66] Я. Ланга,[67] Е.Н. Ломакиной и В.Д. Степанова[68, 69] и других авторов. В статье В.Н. Коновалова и Д. Левиатана были получены порядковые оценки поперечников в случае степенных весов. Было показано, что для таких весов в случае компактного вложения $W^r_{p,g}[0, 1]$ в $L_{q,v}[0, 1]$ поперечники имеют такие же порядки убывания, как для $g \equiv 1$, $v \equiv 1$. В работах М.А. Лифшица, В. Линде, Д.Е. Эдмундса, Я. Ланга, Е.Н. Ломакиной и В.Д. Степанова были получены различные достаточные условия на веса g и v, при которых порядки поперечников такие же, как для $g \equiv 1$, $v \equiv 1$.

Задачи об оценках поперечников и аппроксимативных чисел операторов вложения весовых классов Соболева на метрических деревьях изучались в работах В.Д. Эванса, Д.Дж. Харриса, Я. Ланга[70] и

---

[63] *W.D. Evans, D.J. Harris*, Fractals, trees and the Neumann Laplacian. — Math. Ann. 1993. V. 296, N. 3. P. 493–527.

[64] *A. El Kolli*, n-ième épaisseur dans les espaces de Sobolev. — J. Approx. Theory. 1974. V. 10. P. 268–294.

[65] *V.N. Konovalov, D. Leviatan*, Kolmogorov and linear widths of weighted Sobolev-type classes on a finite interval. — Anal. Math. 2002. V. 28, N 4. P. 251–278.

[66] *D.E. Edmunds, J. Lang*, Approximation numbers and Kolmogorov widths of Hardy-type operators in a non-homogeneous case. — Math. Nachr. 2006. V. 297, N 7. P. 727–742.

[67] *J. Lang*, Improved estimates for the approximation numbers of Hardy-type operators. — J. Appr. Theory. 2003. V. 121, N 1. P. 61–70.

[68] *E.N. Lomakina, V.D. Stepanov*, On asymptotic behavior of the approximation numbers and estimates of Schatten–von Neumann norms of the Hardy-type integral operators. — In: Function Spaces and Applications (Proceedings of Delhi Conference, 1997), Narosa Publishing House, New Delhi, 2000. P. 153–187.

[69] *Е.Н. Ломакина, В.Д. Степанов*, Асимптотические оценки аппроксимативных и энтропийных чисел одновесового оператора Римана–Лиувилля. — Матем. труды. 2006. Т. 9, N 1. С. 52–100.

[70] *W.D. Evans, D.J. Harris, J. Lang*, The approximation numbers of Hardy-type operators on trees. — Proc. London Math. Soc. 2001. V. 83, N. 2. P. 390–418.

М.З. Соломяка[71] (метрическое дерево — это дерево, в котором ребра рассматриваются как отрезки заданной длины).

Для весов общего вида верхние и нижние оценки колмогоровских и линейных поперечников весовых классов Соболева в весовое пространство L_q были получены П.И. Лизоркиным, М.О. Отелбаевым,[72, 73] М.С. Айтеновой и Л.К. Кусаиновой.[74, 75] Здесь в определение весового класса Соболева также входило ограничение на саму функцию (и это условие существенно использовалось).

В работе Х. Трибеля[76] в случае $p = q$ получены верхняя и нижняя оценки аппроксимативных чисел класса $W^r_{p,g}(B)$ на шаре B в пространстве $L_q(B)$ с весом $g(x) = |x|^{-r}|\log|x||^{-\alpha}$. При малых $\alpha > 0$ оценки сверху и снизу различались.

Для некоторых пересечений весовых классов Соболева на кубе с весами, являющимися степенью расстояния до границы, порядковые оценки поперечников были получены И.В. Бойковым.[77, 78]

Определение. Пусть $w : \mathbb{R}^d \to (0, +\infty)$ — локально интегрируемая функция, $1 < p < \infty$. Скажем, что w принадлежит классу Макенхаупта $\mathcal{A}_p$, если существует константа $A > 0$ такая, что для любого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ выполнено следующее неравенство:

$$\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w^{-p'/p}(x)\,dx\right)^{1/p'} \leqslant A.$$

Положим $\mathcal{A}_\infty = \cup_{p>1}\mathcal{A}_p$.

Пусть $w : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$, $0 < p < \infty$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — измеримая

[71] *M. Solomyak*, On approximation of functions from Sobolev spaces on metric graphs. — J. Approx. Theory. 2003. V. 121, N. 2. P. 199–219.

[72] *П.И. Лизоркин, М.О. Отелбаев*, Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения для пространств соболевского типа с весами. — Труды МИАН. 1984. Т. 170. С. 213–232.

[73] *М.О. Отелбаев*, Оценки поперечников по Колмогорову для одного класса весовых пространств. — Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, N 6. С. 1270–1273.

[74] *М.С. Айтенова, Л.К. Кусаинова*, Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. I. — Мат. журн. Алматы. 2002. Т. 2, N. 1. С. 3–9.

[75] *М.С. Айтенова, Л.К. Кусаинова*, Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. II. — Мат. журн. Алматы. 2002. Т. 2, N. 2 С. 7–14.

[76] *H. Triebel*, Entropy and approximation numbers of limiting embeddings, an approach via Hardy inequalities and quadratic forms. — J. Approx. Theory. 2012. V. 164, N. 1. P. 31–46.

[77] *И.В. Бойков*, Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами. — Ж. выч. мат. мат. физ. 1998. Т. 38, N 1. С. 25–33.

[78] *I.V. Boykov*, Optimal approximation and Kolmogorov widths estimates for certain singular classes related to equations of mathematical physics. — arXiv:1303.0416v1.

функция. Обозначим $\|f\|_{L_p(w)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p}$, $\|f\|_{L_\infty(w)} = \|f\|_{L_\infty}$.

Будем обозначать через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ соответственно пространство Шварца и его сопряженное. Для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ обозначим через $\mathcal{F}(f)$ преобразование Фурье функции f.

Пусть функция $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ такова, что

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{y \in \mathbb{R}^d : |y| < 2\}, \quad \varphi(x) = 1 \text{ для } |x| \leqslant 1,$$

$\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_j(x) = \varphi(2^{-j}x) - \varphi(2^{-j+1}x)$, $j \in \mathbb{N}$.

Определение. Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $w \in \mathcal{A}_\infty$. Весовым пространством Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d, w)$ называется множество обобщенных функций $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ таких, что норма

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d,\, w)} := \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \mathcal{F} f)\|^q_{L_p(w)}\right)^{1/q}$$

конечна. В случае $q = \infty$ определение меняется стандартным образом.

Свойства пространств Бесова с весом $w \equiv 1$ описаны в монографиях Х. Трибеля.[2,13,79] В книгах Д.Е. Эдмундса и Х. Трибеля[17] и Д.Д. Хароске[80] рассмотрены пространства Бесова с допустимыми весами. Примерами таких весов являются функции $w(x) = (1 + \|x\|_2^2)^{\alpha/2}$, где $\|\cdot\|_2$ — стандартная евклидова норма на $\mathbb{R}^d$. Случай $w \in \mathcal{A}_\infty$ впервые был изучен в работе Буи.[81] В работах Д.Д. Хароске и И. Пиотровской,[82] Д.Д. Хароске и К. Шнайдер,[83] Д.Д. Хароске и Л. Скрыпчака[84] изучались различные характеристики пространств Бесова с весами Макенхаупта (например, атомарные разложения, описание с помощью всплесков, оценки роста).

[79] *H. Triebel*, Fractals and spectra. Birkhäuser, Basel, 1997.

[80] *D.D. Haroske*, Envelopes and sharp embeddings of function spaces. Volume 437 of Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.

[81] *H.-Q. Bui*, Weighted Besov and Triebel spaces: Interpolation by the real method. — Hiroshima Math. J. 1982. V. 12, N 3. P. 581–605.

[82] *D.D. Haroske, I. Piotrowska*, Atomic decompositions of function spaces with Muckenhoupt weights, and some relation to fractal analysis. — Math. Nachr. 2008. V. 281, N 10. P. 1476–1494.

[83] *D.D. Haroske, C. Schneider*, Besov spaces with positive smoothness on $\mathbb{R}^n$, embeddings and growth envelopes. — J. Approx. Theory. 2009. V. 161. P. 723–747.

[84] *D.D. Haroske, L. Skrzypczak*, Entropy and approximation numbers of function spaces with Muckenhoupt weights. — Rev. Mat. Complut. 2008. V. 21, N 1. P. 135–177.

Задачи об оценке энтропийных и аппроксимативных чисел операторов вложения весовых пространств Бесова изучались в работах Д.Д. Хароске и Х. Трибеля,[85, 86] А.М. Кетано,[87] Л. Скрыпчака,[88] Д.Д. Хароске и Л. Скрыпчака, [84, 89, 90] Т. Кюна,[91, 92] Т. Кюна, Х.-Г. Леопольда, В. Зикеля, Л. Скрыпчака.[93, 94, 95, 96] Колмогоровские и гельфандовские поперечники рассматривались в работах А. Гасиоровской и Л. Скрыпчака[97] (там также изучались числа Вейля), Шунь Чжана и Гэньсунь Фана[98] и Шунь Чжана, Гэньсунь Фана и Фанлунь Хуана.[99] Кроме того, порядковые оценки колмогоровских, гельфандовских и линейных поперечников операторов вложения невесовых пространств Бесова на ограниченной области получены в работе Яна Выбирала[100].

Цель работы. Основной целью работы является решение ряда открытых давно стоящих задач о вложениях и оценках поперечников

---

[85] *D.D. Haroske, H. Triebel*, Entropy numbers in weighted function spaces and eigenvalue distribution of some degenerate pseudodifferential operators I. — Math. Nachr. 1994. V. 167. P. 131–156.

[86] *D.D. Haroske, H. Triebel*, Wavelet bases and entropy numbers in weighted function spaces. — Math. Nachr. 2005. V. 278, N. 1–2. P. 108–132.

[87] *A.M. Caetano*, About approximation numbers in function spaces. — J. Approx. Theory. 1998. V. 94. P. 383–395.

[88] *L. Skrzypczak*, On approximation numbers of Sobolev embeddings of weighted function spaces. — J. Approx. Theory. 2005. V. 136. P. 91–107.

[89] *D.D. Haroske, L. Skrzypczak*, Entropy and approximation numbers of embeddings of function spaces with Muckenhoupt weights, II. General weights. — Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2011. V. 36, N 1. P. 111–138.

[90] *D.D. Haroske, L. Skrzypczak*, Entropy numbers of embeddings of function spaces with Muckenhoupt weights, III. Some limiting cases. — J. Funct. Spaces Appl. 2011. V. 9, N. 2. P. 129–178.

[91] *Th. Kühn*, Entropy numbers of general diagonal operators. — Rev. Mat. Complut. 2005. V. 18, N. 2. P. 479–491.

[92] *Th. Kühn*, Entropy numbers in sequence spaces with an application to weighted function spaces. — J. Approx. Theory. 2008. V. 153, N. 1. P. 40–52.

[93] *Th. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, and L. Skrzypczak*, Entropy numbers of Sobolev embeddings of radial Besov spaces. — J. Approx. Theory. 2003. V. 121. P. 244–268.

[94] *Th. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, and L. Skrzypczak*, Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces. — Constr. Approx. 2006. V. 23. P. 61–77.

[95] *Th. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, L. Skrzypczak*, Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces II. — Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 2006. V. 49. P. 331–359.

[96] *Th. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, and L. Skrzypczak*, Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces III. Weights of logarithmic type. — Math. Z. 2007. V. 255, N. 1. P. 1–15.

[97] *A. Gąsiorowska, L. Skrzypczak*, Some s-numbers of embeddings of function spaces with weights of logarithmic type. — *Math. Nachr.* 2012. P. 1–15 / DOI 10.1002/mana.201100086.

[98] *Shun Zhang, Gensun Fang*, Gelfand and Kolmogorov numbers of Sobolev embeddings of weighted function spaces. — J. Compl. 2012. V. 28. P. 209–223.

[99] *Shun Zhang, Gensun Fang, Fanglun Huang*, Some s-numbers of embeddings in function spaces with polynomial weights. — J. Compl. 2014. V. 30. P. 514-532.

[100] *J. Vybiral*, Widths of embeddings in function spaces. — Journal of Complexity. 2008. V. 24. P. 545–570.

весовых функциональных классов на многомерных областях.

В диссертации исследуются следующие задачи.

- Получить достаточные условия на веса, при которых поперечники весовых классов Соболева в весовом пространстве Лебега на области с условием Джона имеют такие же порядки убывания, как для невесового класса Соболева на кубе.

- Получить порядковые оценки норм двухвесовых операторов суммирования на дереве при дополнительных условиях на веса (при этом оценки должны иметь простой и удобный для приложений вид).

- Получить достаточные условия вложения весовых классов Соболева на области с условием Джона для весов, являющихся функциями расстояния до некоторого h-множества; в случае, когда эти функции и функция h имеют специальный вид, получить порядковые оценки поперечников.

- Получить порядковые оценки поперечников весовых классов Бесова с весами, имеющими сильную особенность в точке.

Методы исследования.

В диссертации используются методы теории функций, теории аппроксимации, теории поперечников, теории интегральных операторов, а также методы теории графов. Для исследования весовых классов Соболева предложен метод, основанный на введении древоподобной структуры области, удовлетворяющей условию Джона, и построении разбиений и других преобразований деревьев.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

- Получены достаточные условия на веса, при которых порядковые оценки поперечников весового класса Соболева такие же, как у невесовых классов Соболева на кубе.

- Получены достаточные условия вложения весовых классов Соболева на области с условием Джона в весовое пространство Лебега с весами, являющимися функцией расстояния до некоторого h-подмножества границы области; более того, получены оценки константы вложения на подобласти, порожденной некоторым поддеревом. Получены порядковые оценки норм двухвесовых операторов суммирования на дереве при дополнительных условиях на веса.

- Получены оценки сверху для поперечников функциональных классов, заданных на множестве с древоподобной структурой и удовлетворяющих специальным аксиомам.

- Получены порядковые оценки поперечников весовых классов Соболева на области с условием Джона в весовом пространстве Лебега с весами, являющимися функцией расстояния до некоторого h-подмножества границы области.

- Получены порядковые оценки поперечников конечномерных шаров в смешанной норме в некоторых ранее не исследованных случаях.

- Получены порядковые оценки поперечников весовых классов Бесова с весами, имеющими особенность в точке; исследован случай, когда эта особенность влияет на асимптотику.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут применяться в теории кусочно-полиномиальной аппроксимации, в спектральной теории операторов, теории дифференциальных уравнений, численных методах и теории случайных процессов. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности “математика”.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах:

- **МГУ, механико-математический факультет:** семинар по теории приближения под руководством д.ф.-м.н., профессора И.Г. Царькова (неоднократно: 2009–2014 гг.), семинар по теории ортогональных рядов под руководством академика РАН, профессора Б.С. Кашина и чл.-корр. РАН, профессора С.В. Конягина (неоднократно: 2011–2012 гг.), семинар по бесконечномерному анализу и математической физике под руководством д.ф.-м.н., профессора О.Г. Смолянова и д.ф.-м.н., профессора Е.Т. Шавгулидзе (неоднократно: 2011–2015 гг.), семинар по задачам дифференциальных уравнений, анализа и управления под руководством д.ф.-м.н., профессора А.В. Фурсикова, д.ф.-м.н., профессора В.М. Тихомирова, чл.-корр. РАН, профессора М.И. Зеликина и д.ф.-м.н., профессора В.Ю. Протасова (2012 г.), семинар по теории функций под руководством д.ф.-м.н., профессора Б.И. Голубова, д.ф.-м.н., профессора М.И. Дьяченко, академика РАН, профессора Б.С. Кашина, чл.-корр. РАН, профессора С.В. Конягина (2014 г.), семинар по операторным моделям в математической физике под руководством д.ф.-м.н., профессора А.А. Шкаликова, д.ф.-м.н., профессора И.А. Шейпака, к.ф.-м.н., доцента А.М. Савчука, к.ф.-м.н. А.А. Владимирова (2015 г.);

- **Математический институт им. В.А. Стеклова РАН:** семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского) под руководством чл.-корр. РАН, профессора О.В. Бесова (неоднократно: 2011–2014 гг.);

- **Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН:** семинар отдела анализа и геометрии под руководством академика РАН Ю.Г. Решетняка (2015 г.).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях: на международных школах по теории функций им. С.Б. Стечкина (Миасс, 2010, 2013, 2014 гг.), на 15–17-й Саратовских зимних школах по теории функций (Саратов, 2010, 2012, 2014 гг.), на Воронежских зимних школах по теории функций (Воронеж, 2011, 2013 гг.), на международной конференции им. И.Г. Петровского (Москва, 2011 г.), на международной конференции "Function Spaces, Differential Operators, Nonlinear Analysis" (Табарц, Германия, 2011 г.), на 4-й международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвященной 90-летию Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2013 г.), на международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященной 105-летию С.Л Соболева (Новосибирск, 2013 г.), международной конференции "Нелинейные аппроксимации и приложения", посвященной 60-летию В.Н. Темлякова

(Москва, 2013 г.), международной конференции "Спектральная теория и дифференциальные уравнения", посвященной 100-летию Б.М. Левитана (Москва, 2014 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 21 работах автора, список которых приведен в конце автореферата, из них 14 — в изданиях, рекомендованных ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав и списка литературы, содержащего 201 наименование. Общий объем диссертации составляет 259 страниц. Нумерация теорем в автореферате совпадает с нумерацией теорем в диссертации.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** содержится обзор исследований по тематике диссертации, приводятся определения основных используемых понятий, непосредственно связанных с темой диссертации, а также формулируются основные теоремы.

В **главе 1** получены порядковые оценки колмогоровских, аппроксимативных и гельфандовских чисел весовых классов Соболева на области с условием Джона (отсюда и из результата Хейнриха следуют аналогичные оценки для поперечников). Условия на веса таковы, что s-числа и поперечники имеют такие же порядки убывания, как в невесовом случае на кубе.

Обозначим через $AC[t_0, \, t_1]$ множество абсолютно непрерывных функций на отрезке $[t_0, \, t_1]$. Для $x \in \mathbb{R}^d$, $\rho > 0$ будем обозначать через $B_\rho(x)$ замкнутый евклидов шар в $\mathbb{R}^d$ радиуса ρ с центром в точке x.

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если найдется точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существуют $T(x) > 0$ и кривая $\gamma_x : [0, \, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами:

1. $\gamma_x \in AC[0, \, T(x)]$, $\left|\frac{d\gamma_x(t)}{dt}\right| = 1$ п.в.,
2. $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$,
3. для любого $t \in [0, \, T(x)]$ выполнено включение $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$.

Скажем, что Ω удовлетворяет условию Джона, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Примерами областей с условием Джона являются области с условием конуса, множество, ограниченное снежинкой Коха, области вида $\cup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{int}\, B_{ct}(\gamma(t))$, где $\gamma\,:\,[0,\,T]\,\to\,\mathbb{R}^d$ — кривая с натуральной параметризацией, $c>0$. Области, имеющие нулевые внутренние углы, условию Джона не удовлетворяют.

В работах Ю.Г. Решетняка[101, 102] найдено интегральное представление для функций на области Ω, удовлетворяющей условию Джона, через их производные порядка r. Из этого интегрального представления и теоремы Соболева[103] следует, что при $p>1$, $1\leqslant q<\infty$ и $\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\geqslant 0$ (соответственно $\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}>0$) класс $W^r_p(\Omega)$ непрерывно (соответственно компактно) вложен в пространство $L_q(\Omega)$ (то есть условия непрерывного и компактного вложения такие же, как для $\Omega=[0,\,1]^d$).

Пусть X, Y — множества, f_1, $f_2\,:\;X\times Y\to\mathbb{R}_+$. Мы пишем $f_1(x,\,y)\underset{y}{\lesssim} f_2(x,\,y)$ (или $f_2(x,\,y)\underset{y}{\gtrsim} f_1(x,\,y)$, или $f_1(x,\,y)\overset{x}{\lesssim} f_2(x,\,y)$, или $f_2(x,\,y)\overset{x}{\gtrsim} f_1(x,\,y)$), если для любого $y\in Y$ существует $c(y)>0$ такое, что $f_1(x,\,y)\leqslant c(y)f_2(x,\,y)$ для любого $x\in X$; $f_1(x,\,y)\underset{y}{\asymp} f_2(x,\,y)$ или $f_1(x,\,y)\overset{x}{\asymp} f_2(x,\,y)$, если $f_1(x,\,y)\underset{y}{\lesssim} f_2(x,\,y)$ и $f_2(x,\,y)\underset{y}{\lesssim} f_1(x,\,y)$.

Пусть $r,\,d\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant\infty$, $1\leqslant q<\infty$. Всюду далее будем обозначать

$$\varkappa=\left(\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)^{-1},\quad \delta=r+\frac{d}{q}-\frac{d}{p}.$$

Пусть также $1\leqslant\hat{q}<\infty$. Положим

$$\theta=\begin{cases}\frac{\delta}{d}-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+, & \text{если}\quad p\geqslant q\quad\text{или}\quad p<q,\quad \hat{q}\leqslant 2,\\ \min\Bigl\{\frac{\delta}{d}+\min\bigl\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\,\frac{1}{2}-\frac{1}{\hat{q}}\bigr\},\,\frac{\hat{q}\delta}{2d}\Bigr\}, & \text{если}\quad p<q,\;\hat{q}>2.\end{cases}\tag{1}$$

Основным результатом главы 1 является теорема 2. Из нее, в частности, вытекает следующий результат.

---

[101] *Ю.Г. Решетняк*, Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей. — Сиб. матем. журнал. 1980. Т. 21, N 6. С. 108–116.

[102] *Ю.Г. Решетняк*, Замечание об интегральных представлениях дифференцируемых функций многих переменных. — Сиб. матем. журнал. 1984. Т. 25, N 5. С. 198–200.

[103] *С.Л. Соболев*, Об одной теореме функционального анализа. — Матем. сборник. 1938. Т. 4(46), N 3. С. 471–497.

Следствие. *Пусть* $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ *— ограниченная область,* $\Omega\in\mathbf{FC}(a)$, $r\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant\infty$, $1\leqslant q<\infty$, $\delta>0$. *Пусть* Γ', $\Gamma''\subset\partial\Omega$ *— непустые замкнутые множества,* $gv\in L_\varkappa(\Omega)$,

$$g(x)=\varphi_g\left(\mathrm{dist}\,(x,\,\Gamma')\right),\;\; v(x)=\varphi_v\left(\mathrm{dist}\,(x,\,\Gamma'')\right),$$

где $\varphi_g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}_+$ *убывает,* $\varphi_v:(0,+\infty)\to\mathbb{R}_+$ *возрастает, и существует константа* $c_0\geqslant 1$ *такая, что для любых* $m\in\mathbb{Z}$, t, $s\in[2^{m-1},\,2^{m+1}]$

$$c_0^{-1}\leqslant\frac{\varphi_g(t)}{\varphi_g(s)}\leqslant c_0,\quad c_0^{-1}\leqslant\frac{\varphi_v(t)}{\varphi_v(s)}\leqslant c_0.$$

Пусть $\hat q=q$. *Определим* θ *формулой* (1). *Также предположим, что в случае* $p<q$ *и* $\hat q>2$ *выполнено*

$$\frac{\delta}{d}+\min\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\,\frac{1}{2}-\frac{1}{\hat q}\right\}\neq\frac{\hat q\delta}{2d}. \qquad (2)$$

Тогда существует $n_0=n_0(r,\,d,\,q,\,p,\,a,\,g,\,v)$, *что при* $n\geqslant n_0$ *выполнено*

$$d_n(W^r_{p,g}(\Omega),\,L_{q,v}(\Omega))\underset{r,d,q,p,a,c_0}{\asymp}\|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)}n^{-\theta}.$$

Аналогичные утверждения выполняются для линейных поперечников с $\hat q=\min\{q,\,p'\}$ *и гельфандовских поперечников с* $\hat q=p'$.

Применив это следствие в случае единичных весов, получаем, что если область удовлетворяет условию Джона, то оценки поперечников невесовых классов Соболева такие же, как для куба. Более простое доказательство этого факта в этом частном случае было предложено О.В. Бесовым. [62]

В **главе 2** получены оценки поперечников весовых классов Соболева с весами, монотонными по одной переменной, у которых поверхности уровня являются графиками функций, липшицевых с одной и той же константой. Отметим, что результат не сводится к результатам предыдущей главы, так как веса локально могут очень быстро изменяться, и это приводит к дополнительным техническим трудностям.

Для $x=(x_1,\,\dots,\,x_k)\in\mathbb{R}^k$ положим $|x|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_k^2}$.

Пусть $d\in\mathbb{N}\cap[2,\,\infty)$, $D\subset\mathbb{R}^{d-1}$ — ограниченная область с липшицевой границей, $\overline{D}$ — ее замыкание, $\tau_-:\overline{D}\to\mathbb{R}$, $\tau_+:\overline{D}\to\mathbb{R}$

— липшицевы функции, $\tau_-(x) < \tau_+(x)$ для любого $x \in \overline{D}$,

$$\Omega = \{(x',\, x_d) : x' \in D,\ \tau_-(x') < x_d < \tau_+(x')\}, \qquad (3)$$

$\Gamma_0(\Omega) = \{(x', \tau_-(x')) : x' \in D\}$.

Пусть $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$. Если функция g ограничена в окрестности $\Gamma_0(\Omega)$, то для любого $k = 0,\, \dots,\, r-1$ вектор-функция $\nabla^k f|_{\Gamma_0(\Omega)} \in L_p(\Gamma_0(\Omega),\, \mathbb{R}^{m_k})$ корректно определена (это следует из интегрального представления функции и теоремы Адамса о потенциалах). Обозначим в этом случае

$$\hat{W}^r_{p,g}(\Omega) = \{f \in W^r_{p,g}(\Omega) : \nabla^k f|_{\Gamma_0(\Omega)} = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant r-1\}.$$

Пусть область Ω имеет вид (3), g, $v : \Omega \to \mathbb{R}_+$ — измеримые функции, $\Lambda \geqslant 0$. Скажем, что $(g,\, v) \in \mathcal{E}_\Lambda$, если существуют липшицевы с константой Λ (относительно нормы $|\cdot|$) функции $\varphi^i_k : D \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $i = 0,\ 1$, такие что

$$\tau_-(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi^i_k(x) \leqslant \varphi^i_{k+1}(x) \leqslant \ldots \leqslant \tau_+(x),$$

$\tau_\pm(x) = \lim\limits_{k\to\pm\infty} \varphi^i_k(x)$, $2^{k-1} \leqslant g(x',\, x_d) \leqslant 2^{k+1}$ при $\varphi^0_k(x') < x_d \leqslant \varphi^0_{k+1}(x')$, $2^{-k-1} \leqslant v(x',\, x_d) \leqslant 2^{-k+1}$ при $\varphi^1_k(x') < x_d \leqslant \varphi^1_{k+1}(x')$.

Как и раньше, будем обозначать $\varkappa = \left(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)^{-1}$. Из теоремы 3 диссертации вытекает

Следствие. *Пусть* $d \in \mathbb{N} \cap [2,\, \infty)$, $r \in \mathbb{N}$, *область* Ω *имеет вид* (3), $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. *Пусть* g, $v : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *— измеримые функции,* $gv \in L_\varkappa(\Omega)$ *и* $(g,\, v) \in \mathcal{E}_\Lambda$ *для некоторого* $\Lambda \geqslant 0$. *Пусть* $\hat{q} = q$. *Число* θ *определим формулой* (1). *Также предположим, что в случае* $p < q$, $\hat{q} > 2$ *выполнено* (2). *Тогда при достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$

$$d_n(\hat{W}^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{p,q,r,d,\Lambda,\Omega}{\asymp} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)} n^{-\theta}.$$

Аналогичное утверждение выполняется для линейных поперечников с $\hat{q} = \min\{q,\, p'\}$ *и гельфандовских поперечников с* $\hat{q} = p'$.

В **главе 3** получены точные двусторонние оценки норм двухвесовых операторов суммирования на дереве при некоторых дополнительных ограничениях на веса и деревья.

Неравенства вида

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k^q \left|\sum_{j=0}^{k} u_j f_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (f_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} \in l_p,$$

изучались Л. Лейндлером,[104] Г. Беннеттом,[105, 106, 107] М.Ш. Браверманом и В.Д. Степановым,[108] К.-Г. Гроссе-Эрдманном[109] и М.Л. Гольдманом.[110, 111]

При $p = q = 2$ К. Наймарк и М.З. Соломяк[112] показали, что задача об оценке нормы весового оператора интегрирования на регулярном метрическом дереве с весами, зависящими только от расстояния от корня, может быть сведена к задаче об оценке нормы некоторого весового оператора типа Харди на полуоси.

Критерий ограниченности двухвесового оператора интегрирования на метрическом дереве и точные двусторонние оценки его нормы получены в работе В.Д. Эванса, Д.Дж. Харриса и Л. Пика.[113] Эти результаты могут быть использованы при оценке нормы оператора суммирования на комбинаторном дереве при $1 < p \leqslant q < \infty$ (см. §3.1 диссертации). Однако эта оценка в общем случае имеет довольно сложный вид. При некоторых дополнительных условиях на веса будут получены оценки, имеющие более простой вид и более удобные для приложений.

---

[104] *L. Leindler*, Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood. — Acta Sci. Math. 1970. V. 31. P. 279–285.

[105] *G. Bennett*, Some elementary inequalities. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1987. V. 38, N 152. P. 401–425.

[106] *G. Bennett*, Some elementary inequalities. II. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1988. V. 39, N 156. P. 385–400.

[107] *G. Bennett*, Some elementary inequalities. III. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1991. V. 42, N 166. P. 149–174.

[108] *M.Sh. Braverman and V.D. Stepanov*, On the discrete Hardy inequality. — Bull. London Math. Soc. 1994. V. 26, N. 3. P. 283–287.

[109] *K.-G. Grosse-Erdmann*, The Blocking Technique, Weighted Mean Operators and Hardy's Inequality (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1679. Springer-Verlag, Berlin, 1998), 114 pp.

[110] *M.L. Goldman*, Hardy Type Inequalities on the Cone of Quasimonotone Functions. — Research report 98/31, Russian Acad. of Sciences, Far Eastern Branch, Khabarovsk, 1998.

[111] *М.Л. Гольдман*, Точные оценки норм операторов типа Харди на конусах квазимонотонных функций. — Труды МИАН. 2001. Т. 232. С. 109–137.

[112] *K. Naimark, M. Solomyak*. Geometry of Sobolev spaces on regular trees and the Hardy inequality. — Russian J. Math. Phys. 2001. V. 8, N 3. P. 322–335.

[113] *W.D. Evans, D.J. Harris, L. Pick*, Weighted Hardy and Poincaré inequalities on trees. — J. London Math. Soc. 1995. V. 52, N 2. P. 121–136.

Пусть $\mathcal{G}$ — граф с не более, чем счетным числом вершин. Множество вершин $\mathcal{G}$ будем обозначать $\mathbf{V}(\mathcal{G})$. Если $\xi_i \in \mathbf{V}(\mathcal{G})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, причем вершины ξ_i и ξ_{i+1} являются соседними для любого $i = 1, \ldots, n-1$, то последовательность $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ будем называть путем; если все вершины ξ_i различны, то такой путь будем называть простым.

Пусть $(\mathcal{T}, \xi_0)$ — дерево с выделенной вершиной (корнем) ξ_0. Тогда на множестве $\mathbf{V}(\mathcal{T})$ естественным образом вводится частичный порядок: $\xi' > \xi$, если существует простой путь $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi')$ такой, что $\xi = \xi_k$ для некоторого $k \in \overline{0, n}$. В этом случае положим $\rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi') = \rho_{\mathcal{T}}(\xi', \xi) = n + 1 - k$ и назовем эту величину расстоянием между ξ и ξ'. Кроме того, положим $\rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi) = 0$. Если $\xi' > \xi$ или $\xi' = \xi$, то будем писать $\xi' \geqslant \xi$. Для $j \in \mathbb{Z}_+$, $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ положим

$$\mathbf{V}_j(\xi) := \mathbf{V}_j^{\mathcal{T}}(\xi) := \{\xi' \geqslant \xi : \ \rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi') = j\}.$$

Введенный частичный порядок на дереве $\mathcal{T}$ индуцирует частичный порядок на каждом его поддереве.

Для подграфа $\mathcal{G}$ в $(\mathcal{T}, \xi_0)$ обозначим через $\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G})$ множество максимальных вершин в $\mathcal{G}$.

Для графа $\mathcal{G}$, $f : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$ положим $\|f\|_{l_p(\mathcal{G})} = \Big(\sum\limits_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{G})} |f(\xi)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ при $0 < p < \infty$, $\|f\|_{l_\infty(\mathcal{G})} = \sup_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{G})} |f(\xi)|$. Обозначим через $l_p(\mathcal{G})$ пространство функций $f : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|f\|_{l_p(\mathcal{G})}$.

Пусть $\mathcal{T}$ — дерево, u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{T}) \to [0, \infty)$ — весовые функции.

Определение. Определим оператор суммирования $S_{u,w,\mathcal{T}}$ по формуле

$$S_{u,w,\mathcal{T}} f(\xi) = w(\xi) \sum_{\xi' \leqslant \xi} u(\xi') f(\xi'), \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T}), \quad f : \mathbf{V}(\mathcal{T}) \to \mathbb{R}.$$

Пусть $0 < p, q \leqslant \infty$. Через $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{T},u,w}$ обозначим минимальную константу C в неравенстве

$$\left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})} w^q(\xi) \left| \sum_{\xi' \leqslant \xi} u(\xi') f(\xi') \right|^q \right)^{1/q} \leqslant C \left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})} |f(\xi)|^p \right)^{1/p},$$

$f : \mathbf{V}(\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ (с соответствующими изменениями при $p = \infty$ или $q = \infty$). В случае $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ величина $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{T},u,w}$ является нормой оператора $S_{u,w,\mathcal{T}} : l_p(\mathcal{T}) \to l_q(\mathcal{T})$.

Пусть $(\mathcal{A},\, \xi_0)$ — дерево с бесконечным множеством вершин. Предположим, что существуют функция $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и константа $C_* \geqslant 1$ такие, что $\psi(0) = 0$, $\psi(x) \underset{x\to\infty}{\to} \infty$ и для любого $0 \leqslant j \leqslant j' < \infty$, $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$

$$C_*^{-1} \cdot 2^{\psi(j')-\psi(j)} \leqslant \operatorname{card} \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j'-j}(\xi) \leqslant C_* \cdot 2^{\psi(j')-\psi(j)} \qquad (4)$$

(такие деревья мы назовем слабо регулярными; если $C_* = 1$, то деревья называют регулярными). Пусть u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0,\, \infty)$,

$$u(\xi) = u_j, \quad w(\xi) = w_j \quad \text{при} \quad \xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0), \qquad (5)$$

$w \in l_q(\mathcal{A})$.

Из теоремы 7 диссертации получаем

Следствие. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $(\mathcal{A},\, \xi_0)$ *и* u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0,\, \infty)$ *удовлетворяют* (4) *и* (5) *для* $0 \leqslant j < \infty$, $w \in l_q(\mathcal{A})$. *Положим* $\mathfrak{Z} = (p,\, q,\, C_*)$. *Тогда*

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} \sup_{j\geqslant 0} \left(\sum_{0\leqslant i\leqslant j} u_i^{p'} \right)^{1/p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j)} \right)^{1/q}.$$

Пусть теперь $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < q < \infty$, $p \geqslant q$.

Пусть $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $(\mathcal{A},\, \xi_0)$ — дерево, такое, что $\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{A}) = \mathbf{V}_N^{\mathcal{A}}(\xi_0)$. Предположим, что существуют функция $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и константа $C_* \geqslant 1$ такие, что $\psi(0) = 0$ и для любого $0 \leqslant j \leqslant j' < N+1$, $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$ выполнено (4). Пусть u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0,\, \infty)$ удовлетворяют (5).

Положим

$$\hat{w}_j = w_j \cdot 2^{\frac{\psi(j)}{q}}, \quad \hat{u}_j = u_j \cdot 2^{-\frac{\psi(j)}{p}}, \quad 0 \leqslant j < N+1.$$

Пусть $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$ — наименьшая константа в неравенстве

$$\left(\sum_{j=0}^{N} \hat{w}_j^q \left(\sum_{i=0}^{j} \hat{u}_i \varphi_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{j=0}^{N} \varphi_j^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \varphi_j \geqslant 0, \quad 0 \leqslant j < N+1.$$

Из теоремы 8 диссертации получаем

Следствие. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $p \geqslant q$. *Предположим, что выполнены условия* (4) *и* (5). *Тогда*

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{p,q,C_*}{\asymp} \mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}};$$

если $C_* = 1$, *то* $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} = \mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$.

Оценки величин $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$ известны (см. работу Г. Беннетта [107]).

В **главе 4** получены достаточные условия вложения класса $W^r_{p,g}(\Omega)$ в пространство $L_{q,v}(\Omega)$ в случае, когда область Ω удовлетворяет условию Джона, а веса g и v являются функциями расстояния до некоторого h-множества $\Gamma \subset \Omega$.

Введем понятие h-множества в соответствии с работой М. Брикки.[114] Обозначим через $\mathbb{H}$ множество неубывающих положительных функций, определенных на $(0,\, 1]$.

Определение. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — непустой компакт, $h \in \mathbb{H}$. Скажем, что Γ является h-множеством, если существуют $c_* \geqslant 1$ и конечная счетно-аддитивная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такие, что $\operatorname{supp}\mu = \Gamma$ и для любого $x \in \Gamma$, $t \in (0,\, 1]$ выполнено

$$c_*^{-1} h(t) \leqslant \mu(B_t(x)) \leqslant c_* h(t). \tag{6}$$

Пример 1. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — липшицева поверхность размерности k, $0 \leqslant k < d$. Тогда Γ является h-множеством с $h(t) = t^k$.

Пример 2. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — кривая Коха. Тогда Γ является h-множеством с $h(t) = t^{\log 4/\log 3}$ (см. книгу П. Маттила[115]).

В работе М. Брикки [114] строятся h-множества типа канторовских.

Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ — ограниченная область, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество. Далее для удобства считаем, что $\overline{\Omega} \subset \left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)^d$ (здесь $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω). Общий случай можно свести к этому заменой переменных.

Пусть $|\cdot|$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим веса вида

$$g(x) = \varphi_g(\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma)), \quad v(x) = \varphi_v(\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma)),$$

где φ_g, $\varphi_v : (0,\, \infty) \to (0,\, \infty)$. Предположим, что существует $c_0 \geqslant c_*$ такое, что

$$\frac{h(t)}{h(s)} \leqslant c_0, \quad \frac{\varphi_g(t)}{\varphi_g(s)} \leqslant c_0, \quad \frac{\varphi_v(t)}{\varphi_v(s)} \leqslant c_0, \quad j \in \mathbb{N}, \;\; t,\; s \in [2^{-j-1},\, 2^{-j+1}].$$

---

[114] *M. Bricchi*, Existence and properties of h-sets. — Georgian Mathematical Journal. 2002. V. 9, N. 1. P. 13—32.

[115] *P. Mattila*, Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge Univ. Press, 1995.

Для таких функций g и v получены достаточные условия существования непрерывного вложения $W^r_{p,g}(\Omega)$ в $L_{q,v}(\Omega)$.

Всюду далее считаем, что $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Пусть

$$\overline{u}_j = \varphi_g(2^{-j}) \cdot 2^{-\left(r-\frac{d}{p}\right)j}, \quad \overline{w}_j = \varphi_v(2^{-j}) \cdot 2^{-\frac{dj}{q}}. \tag{7}$$

Обозначим $\mathfrak{Z} = (p,\, q,\, r,\, d,\, a,\, c_0)$.

Теорема 10. *Пусть* $\overline{u}_j$, $\overline{w}_j$ *определены формулой* (7), $1 < p < q < \infty$, $\delta > 0$. *Предположим, что*

$$M := \sup_{j\geqslant 0} \left(\sum_{0\leqslant i\leqslant j} \overline{u}_i^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \overline{w}_i^q \cdot \frac{h(2^{-j})}{h(2^{-i})}\right)^{1/q} < \infty.$$

Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ *и существует линейный непрерывный оператор* $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ *такой, что для любой функции* $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ *выполнено* $\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} M \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega)}$.

Теорема 11. *Пусть* $\overline{u}_j$, $\overline{w}_j$ *определены формулой* (7), $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $p \geqslant q$. *Положим* $\hat{w}_j = \overline{w}_j \cdot \left[\frac{h(2^{-j})}{h(1)}\right]^{-\frac{1}{q}}$, $\hat{u}_j = \overline{u}_j \cdot \left[\frac{h(2^{-j})}{h(1)}\right]^{\frac{1}{p}}$. *Пусть*

$$M := \sup_{0\leqslant j<\infty} \Big(\sum_{i=j}^{\infty} \hat{w}_i^q\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{i=0}^{j} \hat{u}_i^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad \textit{если} \quad 1 < p = q < \infty,$$

$$M := \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\Big(\sum_{i=j}^{\infty} \hat{w}_i^q\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=0}^{j} \hat{u}_i^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{pq}{p-q}} \hat{w}_j^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < \infty, \quad \textit{если} \quad q < p.$$

Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ *и существует линейный непрерывный оператор* $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ *такой, что для любой функции* $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ *выполнено* $\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} M \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega)}$.

В **главе 5** получены порядковые оценки поперечников весовых классов Соболева на области с условием Джона и с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества.

Основными результатами этой главы являются теоремы 12 и 13.

Здесь для простоты изложения результаты будут приведены в частном случае. Всюду мы будем использовать обозначение $\log x = \log_2 x$.

Мы рассматриваем функцию $h \in \mathbb{H}$, в окрестности нуля имеющую вид

$$h(t) = t^{\theta} |\log t|^{\gamma}, \quad 0 \leqslant \theta < d.$$

Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ — ограниченная область, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество. Снова будем предполагать, что $\overline{\Omega} \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$. Пусть $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$, β_g, $\beta_v \in \mathbb{R}$, $g(x) = \varphi_g(\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x, \Gamma))$, $v(x) = \varphi_v(\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x, \Gamma))$,

$$\varphi_g(t) = t^{-\beta_g} |\log t|^{-\alpha_g}, \;\; \varphi_v(t) = t^{-\beta_v} |\log t|^{-\alpha_v}.$$

Положим $\beta = \beta_g + \beta_v$, $\alpha = \alpha_g + \alpha_v$.

Сначала рассмотрим случай $\beta_v < \frac{d-\theta}{q}$.

Будем предполагать, что $\beta \leqslant \delta - \theta \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$, при этом в случае равенства выполнены соотношения $\alpha > (1-\gamma)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$; $\gamma < 0$ при $\theta = 0$.

Положим $\mathfrak{Z} = (r, d, p, q, g, v, h, a, c_*)$, $\mathfrak{Z}_* = (\mathfrak{Z}, R)$, где c_* — константа из (6) и $R = \mathrm{diam}\,\Omega$.

Для удобства будем обозначать через $\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega))$ любой из поперечников:

$$d_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)), \quad \lambda_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)), \quad d^n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)),$$

и $\hat{q} = q$ для колмогоровских поперечников, $\hat{q} = \min\{q, p'\}$ для линейных поперечников и $\hat{q} = p'$ для гельфандовских поперечников.

Из теоремы 12 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Существует $n_0 = n_0(\mathfrak{Z})$ такое, что для любого $n \geqslant n_0$ выполнены следующие утверждения.*

1. Пусть $\theta > 0$ и $\beta < \delta - \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$.

- *Пусть $p \geqslant q$ или $p < q$, $\hat{q} \leqslant 2$. Положим*

$$\theta_1 = \frac{\delta}{d} - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+, \quad \theta_2 = \frac{\delta - \beta}{\theta} - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+,$$

$\sigma_1(n) = 1$, $\sigma_2(n) = (\log n)^{-\alpha+\frac{(\beta-\delta)\gamma}{\theta}}$. *Также предположим, что* $\theta_1 \ne \theta_2$, $j_* \in \{1, 2\}$,

$$\theta_{j_*} = \min\{\theta_1, \theta_2\}.$$

Тогда

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

- *Пусть* $p < q$, $\hat{q} > 2$. *Обозначим*

$$\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\}, \quad \theta_2 = \frac{\hat{q}\delta}{2d},$$

$$\theta_3 = \frac{\delta - \beta}{\theta} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\}, \quad \theta_4 = \frac{\hat{q}(\delta-\beta)}{2\theta},$$

$\sigma_1(n) = \sigma_2(n) = 1$,

$$\sigma_3(n) = \sigma_4(n) = (\log n)^{-\alpha+\frac{(\beta-\delta)\gamma}{\theta}}.$$

Предположим, что существует $j_* \in \{1, 2, 3, 4\}$ *такое, что* $\theta_{j_*} < \min_{j\ne j_*}\theta_j$. *Тогда*

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

2. *Предположим, что* $\theta > 0$ *и* $\beta = \delta - \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$. *Тогда*

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} (\log n)^{-\alpha+(1-\gamma)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}.$$

3. *Предположим, что* $\theta = 0$ *и* $\beta = \delta - \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$.

- *Пусть* $p \geqslant q$ *или* $p < q$, $\hat{q} \leqslant 2$. *Положим*

$$\theta_1 = \frac{\delta}{d} - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+, \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{1-\gamma} - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+.$$

Пусть $\theta_1 \ne \theta_2$, $j_* \in \{1, 2\}$, $\theta_{j_*} = \min\{\theta_1, \theta_2\}$. *Тогда*

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}.$$

- *Пусть $p<q$ и $\hat{q}>2$. Обозначим*

$$\theta_1=\frac{\delta}{d}+\min\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}, \frac{1}{2}-\frac{1}{\hat{q}}\right\}, \quad \theta_2=\frac{\hat{q}\delta}{2d},$$

$$\theta_3=\frac{\alpha}{1-\gamma}+\min\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}, \frac{1}{2}-\frac{1}{\hat{q}}\right\}, \quad \theta_4=\frac{\hat{q}\alpha}{2(1-\gamma)}.$$

Предположим, что существует $j_*\in\{1, 2, 3, 4\}$ такое, что $\theta_{j_*}<\min_{j\ne j_*}\theta_j$. Тогда

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}.$$

4. Пусть $\theta=0$ и $\beta<\delta-\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+$.

- *Если $p\geqslant q$ или $p<q$, $\hat{q}\leqslant 2$, то*

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\frac{\delta}{d}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}.$$

- *Пусть $p<q$, $\hat{q}>2$, $\theta_1=\frac{\delta}{d}+\min\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}, \frac{1}{2}-\frac{1}{\hat{q}}\right\}$, $\theta_2=\frac{\hat{q}\delta}{2d}$, $\theta_1\ne\theta_2$. Тогда*

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\min\{\theta_1, \theta_2\}}.$$

В случае, когда Γ — одноточечное множество, тем же методом доказывается, что оценки поперечников задаются формулами из пункта 3 следствия с $\gamma=0$. Это усиливает и обобщает результат Х. Трибеля.[76]

Рассмотрим некоторые частные случаи.

- Γ — k-мерная липшицева поверхность, $1\leqslant k\leqslant d-1$; тогда $h(t)=t^k$. При $\frac{\delta-\beta}{k}>\frac{\delta}{d}$ порядки поперечников такие же, как в невесовом случае, при $\frac{\delta-\beta}{k}<\frac{\delta}{d}$ асимптотика меняется. Для $\theta=d-1$ получаем усиление результата Х. Трибеля[2] для $\beta_v>\frac{d-\theta}{q}$ (в книге Трибеля последнее неравенство не требовалось, но в определение класса еще входили условия на младшие производные).

- Γ — кривая Коха, Ω — ее внутренность; тогда $h(t)=t^{\frac{\log 4}{\log 3}}$, и асимптотика меняется при $\frac{(\delta-\beta)\log 3}{\log 4}<\frac{\delta}{d}$.

При $\theta = 0$ влияние особенности на асимптотику проявляется только в "предельном" случае $\beta = \delta - \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$. Если $\theta > 0$, то в этом "предельном" случае порядки убывания поперечников не степенные, а логарифмические.

Пусть теперь $\beta_v = \frac{d-\theta}{q}$, $\alpha_v > \frac{1-\gamma}{q}$, $0 < \theta < d$. Тогда в случае $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+ < 0$ результат об оценке поперечников аналогичен пункту 1 предыдущего следствия с заменой $-\alpha$ на $-\alpha + \frac{1}{q}$ в показателе логарифма.

Пусть $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+ = 0$. Предположим, что $\alpha_0 := \alpha - \frac{1}{q} > 0$ в случае $p < q$ и $\alpha_0 := \alpha - 1 - (1-\gamma)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) > 0$ в случае $p \geqslant q$. Тогда

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} (\log n)^{-\alpha_0}.$$

Эти оценки следуют из теоремы 13 диссертации.

В **главе 6** получены порядковые оценки поперечников весовых классов Бесова с весами, имеющими особенность в точке. Здесь рассмотрены некоторые предельные условия на параметры, при которых эта особенность влияет на порядки поперечников.

Для s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$, $1 < p_1, q_1 \leqslant +\infty$, $1 \leqslant p_2, q_2 < +\infty$ положим $\delta := s_1 - s_2 + \frac{d}{p_2} - \frac{d}{p_1}$. Мы будем рассматривать случай $1 < p_1 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$.

Пусть $\delta > 0$, β_g, $\beta_v \in \mathbb{R}$, $\beta_g + \beta_v = \delta$, $\beta_g > -\frac{d}{p_1}$, $\beta_v < \frac{d}{p_2}$, $\gamma_g > -\frac{d}{p_1}$, $\gamma_v < \frac{d}{p_2}$, $\gamma_g + \gamma_v > \delta$, $\alpha_g + \alpha_v > 0$, ρ_g, $\rho_v : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ — абсолютно непрерывные функции такие, что $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y\rho_g'(y)}{\rho_g(y)} = 0$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y\rho_v'(y)}{\rho_v(y)} = 0$,

$$g(x) = \begin{cases} |x|^{-\beta_g} |\log_2|x||^{-\alpha_g} \rho_g(|\log_2|x||), & \text{если } |x| \leqslant \frac{1}{2}, \\ |x|^{-\gamma_g}, & \text{если } |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} |x|^{-\beta_v} |\log_2|x||^{-\alpha_v} \rho_v(|\log_2|x||), & \text{если } |x| \leqslant \frac{1}{2}, \\ |x|^{-\gamma_v}, & \text{если } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Обозначим $w_1(x) = g^{-p_1}(x)$, $w_2(x) = v^{p_2}(x)$.

Положим $\alpha = \alpha_g + \alpha_v$, $\rho(y) = \rho_g(y)\rho_v(y)$. Тогда $\alpha > 0$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y\rho'(y)}{\rho(y)} = 0$.

Для $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$ таких, что $p_2 \geqslant 2$, мы обозначим $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$,

$$\lambda(\mathbf{p}) = \min\left\{\frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}}, 1\right\}$$

(если $p_2 = 2$, то полагаем $\lambda(\mathbf{p}) = 1$). Отметим, что если $p_2 > 2$, то $\lambda(\mathbf{p}) < 1 \quad \Leftrightarrow p_1 > 2$.

Обозначим

$$J_* = \begin{cases} \{1, 2, 3, 4\}, & p_2 > 2, \; q_2 > 2, \\ \{1, 2, 3\}, & p_2 > 2, \; q_2 = 2, \\ \{2, 3, 4\}, & p_2 = 2, \; q_2 > 2, \end{cases}$$

$$J_{**} = \begin{cases} \{1, 2, 3, 4\}, & \min\{p_2, p_1'\} > 2, \; \min\{q_2, q_1'\} > 2, \\ \{1, 2, 3\}, & \min\{p_2, p_1'\} > 2, \; \min\{q_2, q_1'\} = 2, \\ \{2, 3, 4\}, & \min\{p_2, p_1'\} = 2, \; \min\{q_2, q_1'\} > 2. \end{cases}$$

Теорема 14.

1. *Пусть* $1 < p_1 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$, $p_2 \geqslant 2$, $q_2 \geqslant 2$,

$$\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \frac{\lambda(\mathbf{p})}{2} - \frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}, \quad \theta_2 = \frac{p_2\delta}{2d},$$

$$\theta_3 = \alpha + \frac{\lambda(\mathbf{q})}{2} - \frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}, \quad \theta_4 = \frac{q_2\alpha}{2},$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = \frac{q_2}{2}$. *Предположим, что существует* $j_* \in J_*$ *такое, что* $\theta_{j_*} < \min_{j\in J_*\setminus\{j_*\}} \theta_j$. *Тогда*

$$d_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)) \overset{n}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}\rho(n^{\sigma_{j_*}}).$$

2. *Пусть* $1 < p_1 \leqslant 2 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant 2 \leqslant q_2 < \infty$,

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}\right\}, \quad \tilde{\theta}_2 = \frac{\min\{p_2, p_1'\}\delta}{2d},$$

$$\tilde{\theta}_3 = \alpha + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_1} - \frac{1}{2}\right\}, \quad \tilde{\theta}_4 = \frac{\min\{q_2, q_1'\}\alpha}{2},$$

$\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = 0$, $\tilde{\sigma}_3 = 1$, $\tilde{\sigma}_4 = \frac{\min\{q_2, q_1'\}}{2}$. *Предположим, что существует* $j_* \in J_{**}$ *такое, что* $\tilde{\theta}_{j_*} < \min_{j\in J_{**}\setminus\{j_*\}} \tilde{\theta}_j$. *Тогда*

$$a_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)) =$$

$$= \lambda_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) \overset{n}{\asymp} n^{-\tilde{\theta}_{j*}}\rho(n^{\tilde{\sigma}_{j*}}).$$

3. *Пусть* $1 < p_1 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$. *Если* $p_2 \leqslant 2$, $q_2 \leqslant 2$ *и* $\alpha \neq \frac{\delta}{d}$, *то*

$$d_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) \overset{n}{\asymp}$$

$$\asymp \lambda_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) =$$

$$= a_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) \overset{n}{\asymp} \max\{n^{-\frac{\delta}{d}},\, n^{-\alpha}\rho(n)\}.$$

Если $p_1 \geqslant 2$, $q_1 \geqslant 2$ *и* $\alpha \neq \frac{\delta}{d}$, *то*

$$\lambda_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) =$$

$$= a_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) \overset{n}{\asymp} \max\{n^{-\frac{\delta}{d}},\, n^{-\alpha}\rho(n)\}.$$

Оценки гельфандовских чисел (или поперечников) также нетрудно получить при соответствующих условиях на параметры, применяя соотношения двойственности.

Сравним теорему 14 с известными результатами. Если $w_2(x) \equiv 1$, то $\beta_g = \delta$, $\alpha_g = \alpha$ и $\rho_g = \rho$. Если $\alpha > 0$ достаточно велико и $\tilde{\theta}_1 \neq \tilde{\theta}_2$, то

$$\lambda_n\big(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)\big) \overset{n}{\asymp} n^{-\min\{\tilde{\theta}_1,\, \tilde{\theta}_2\}}. \tag{8}$$

В работе Д.Д. Хароске и Л. Скрыпчака[84] рассматривалась функция $\overline{w}_1 = \overline{g}^{-p_1}(x)$ с $\beta_{\overline{g}} < \delta$, $\alpha_{\overline{g}} = 0$, $\rho_{\overline{g}}(x) \equiv 1$. Пусть $\gamma_{\overline{g}} > \delta$. Тогда $B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, \overline{w}_1) \subset B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1)$, и результат работы Хароске и Скрыпчака об оценке аппроксимативных чисел следует из (8). Также отметим, что если α достаточно мало, то асимптотика зависит от параметров q_1 и q_2. В предыдущих результатах (см., например, работы Д.Д. Хароске, Л. Скрыпчака, Шунь Чжана и Гэньсунь Фана) порядки поперечников и энтропийных чисел не зависели от q_i (за исключением некоторых предельных случаев, когда q_i содержались в показателе логарифмического множителя).

Доказательство теоремы 14 основано на оценках колмогоровских и линейных поперечников конечномерных шаров в смешанной норме (см. теоремы 6.1.1 и 6.2.1 диссертации), а также на результате Д.Д. Хароске и Л. Скрыпчака[84] об изоморфизме весового пространства Бесова и некоторого пространства последовательностей. В теореме 6.1.1 предполагается, что $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < \infty$, $1 \leqslant q_1 \leqslant q_1 < \infty$, $p_2 \geqslant 2$, $q_2 \geqslant 2$. В теореме 6.2.1 выполнено $1 < p_1 \leqslant 2 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant 2 \leqslant q_2 < \infty$. Для некоторых других соотношений между параметрами оценки поперечников получены А.Д. Изааком[116] и Э.М. Галеевым.[117, 118] В этих работах рассмотрены случаи $p_1 = 1$, $q_1 = \infty$, $p_2 = 2$ или $1 < p_2 \leqslant \min\{q_2, 2\}$, $1 \leqslant q_2 \leqslant \infty$.

Заключение. В диссертации получены новые теоремы вложения весовых классов Соболева на области с условием Джона и получены оценки поперечников. Кроме того, получены оценки поперечников весовых классов Бесова с весами, имеющими сильную особенность в точке, при дополнительных условиях на параметры p_1, p_2, q_1, q_2.

Дальнейшие цели исследования по данному направлению состоят в следующем.

1. Получить оценки других характеристик компактного вложения весовых классов Соболева (например, энтропийных чисел).

2. Получить оценки поперечников весовых и невесовых классов Соболева на областях, не удовлетворяющих условию Джона (например, гельдеровых областях, областях с условием гибкого рога, областях с условием распадающегося гибкого конуса).

3. Получить теоремы вложения весовых классов Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона, для более общих весов (например, в случае, когда веса являются произведением функций расстояния до подмножеств границы области).

4. В теоремах 12, 13, 14 оценки поперечников получены при условии $\theta_{j_*} < \min_{j\ne j_*} \theta_j$. Остается не изученным предельный случай, когда это условие не выполнено.

5. Получить оценки поперечников конечномерных шаров в смешанной норме в случаях, не изученных в диссертации и в работах А.Д. Изаака и Э.М. Галеева, и применить эти результаты к получению оценок поперечников весовых классов Бесова.

[116] *А.Д. Изаак*, Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой. — Матем. заметки. 1994. Т. 55, N 1. С. 43–52.

[117] *Э.М. Галеев*, Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных. — Изв. АН СССР, сер. мат.. 1990. Т. 54, N 2. С. 418–430.

[118] *Э.М. Галеев*, Поперечники по Колмогорову некоторых конечномерных множеств в смешанной норме. — Матем. заметки. 1995. Т. 58, N 1. С. 144–148.

Автор выражает благодарность участникам семинара по теории приближений на механико-математическом факультете МГУ и участникам семинара Никольского в Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН за постоянную поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. *Васильева А.А.* “Поперечники весовых классов Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона”. Труды МИАН, **280** (2013), 97–125.

2. *Васильева А.А.* “Достаточные условия вложения весового класса Соболева на области с условием Джона”. Сиб. мат. журнал, **56**:1 (2015), 65–81.

3. *Васильева А.А.* “Колмогоровские поперечники весовых классов Соболева на кубе”. Труды ИММ УрО РАН, **16**:4 (2010), 100–116.

4. *Васильева А.А.* “Поперечники весовых классов Соболева с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества”. Докл. АН, **459**:2 (2014), 142–144.

5. *Vasil'eva A.A.* “Widths of function classes on sets with tree-like structure”, J. Appr. Theory, **192** (2015), 19–59 (published online 26 November 2014).

6. *Vasil'eva A.A.* “Estimates for norms of two-weighted summation operators on a tree under some restrictions on weights”, Math. Nachr. 1–24 (2015) /DOI 10.1002/mana.201300355 (published online 25 February 2015).

7. *Vasil'eva A.A.* “Kolmogorov and linear widths of the weighted Besov classes with singularity at the origin”. J. Appr. Theory, **167** (2013), 1–41.

8. *Vasil'eva A.A.* “Widths of weighted Sobolev classes on a John domain: strong singularity at a point”. Rev. Mat. Compl., **27**:1 (2014), 167–212.

9. *Vasil'eva A.A.* “Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes on a domain for a special class of weights”. Russian J. Math. Phys., **18**:3 (2011), 353–385.

10. *Vasil'eva A.A.* "Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes on a domain for a special class of weights. II". Russ. J. Math. Phys., **18**:4 (2011), 465–504.

11. *Vasil'eva A.A.* "Widths of weighted Sobolev classes with weights that are functions of the distance to some h-set: some limit cases", Russ. J. Math. Phys., **22**:1 (2015), 127–140.

12. *Vasil'eva A.A.* "Embedding theorem for weighted Sobolev classes on a John domain with weights that are functions of the distance to some h-set". Russ. J. Math. Phys., **20**:3 (2013), 360–373.

13. *Vasil'eva A.A.* "Embedding theorem for weighted Sobolev classes on a John domain with weights that are functions of the distance to some h-set". Russ. J. Math. Phys., **21**:1 (2014), 112–122.

14. *Vasil'eva A.A.* "Embeddings of weighted Sobolev classes on a John domain". Eurasian Math. J., **5**:3 (2014), 129–134.

15. *Васильева А.А.* "Поперечники и теоремы вложения многомерных весовых соболевских классов". Совр. пробл. теории функций и их прилож. Материалы 15-й Сар. зимней школы. Саратов, 2010. С. 43–44.

16. *Васильева А.А.* "Колмогоровские поперечники весовых классов Бесова с сингулярными весами и конечномерных шаров в смешанной норме". Совр. мет. теории функций и смежные проблемы: материалы ВЗМШ. Воронеж, 2011. С. 56–57.

17. *Васильева А.А.* "Колмогоровские поперечники весовых классов Соболева на области с условием гибкого конуса". Международная конференция, посвященная 110-й годовщине И.Г. Петровского: тезисы докладов. Москва, 2011. С. 166–167.

18. *Васильева А.А.* "Линейные поперечники весовых классов Бесова". Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 16-й Сар. зимней школы. Саратов, 2012. С. 38–39.

19. *Васильева А.А.* "Теоремы вложения для весовых классов Соболева с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества". Совр. мет. теории функций и смежные проблемы: материалы ВЗМШ. Воронеж, 2013. С. 40–41.

20. *Васильева А.А.* “Поперечники весовых классов Соболева с весами, являющимися функциями расстояния до h-множества”. Диф. уравн. Функц. пр-ва. Теория прибл. Междунар. конференция, посв. 105-летию С.Л. Соболева. Тезисы докладов. Новосибирск, 18–24 августа 2013 г. С. 370.

21. *Васильева А.А.* “Оценки норм двухвесовых операторов суммирования на дереве при дополнительных условиях на веса”. Совр. пробл. теории функций и их приложения. Материалы 17-й Сар. зимней школы. Саратов, 2014. С. 66–68.