ФГБОУ ВПО “МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА”

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Васильева Анастасия Андреевна

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ПОПЕРЕЧНИКИ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

(специальность - 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант — доктор
физико-математических наук,
профессор И.Г. Царьков

Москва 2015

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Теории весовых функциональных пространств и поперечников являются интенсивно развивающимися областями математики, имеющими приложения для дифференциальных уравнений [14, 32, 45, 60, 88, 90, 94, 96, 114, 115, 129, 154, 156, 169, 177], теории вероятностей [144, 145, 147, 149] и численных методов [12, 13, 23].

Диссертация продолжает исследования в этом направлении. Основной целью является получение новых теорем вложения весовых пространств Соболева на области с условием Джона и получение порядковых оценок поперечников весовых пространств Соболева в весовом пространстве Лебега, а также поперечников весовых пространств Бесова.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область (т.е. открытое связное множество), g, $v:\Omega\to\mathbb{R}_+$ — измеримые функции. Для каждой измеримой векторнозначной функции $\varphi:\ \Omega\to\mathbb{R}^m$, $\varphi=(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$, и для каждого $p\in[1,\,\infty]$ положим

$$\|\varphi\|_{L_p(\Omega)}=\Big\|\max_{1\leqslant k\leqslant m}|\varphi_k|\Big\|_{L_p(\Omega)}=\begin{cases}\left(\int\limits_{\Omega}\max_{1\leqslant k\leqslant m}|\varphi_k(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, & p<\infty,\\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega}\max_{1\leqslant k\leqslant m}|\varphi_k(x)|, & p=\infty.\end{cases}$$

Пусть $\overline{\beta}=(\beta_1,\,\dots,\,\beta_d)\in\mathbb{Z}_+^d:=(\mathbb{N}\cup\{0\})^d$, $|\overline{\beta}|=\beta_1+\ldots+\beta_d$. Для каждой обобщенной функции f на Ω обозначим $\nabla^r f=\left(\partial^r f/\partial x^{\overline{\beta}}\right)_{|\overline{\beta}|=r}$ (здесь частные производные берутся в обобщенном смысле), m_r — число компонент обобщенной вектор-функции $\nabla^r f$. Весовым классом Соболева назовем множество функций

$$W^r_{p,g}(\Omega)=\big\{f:\ \Omega\to\mathbb{R}\big|\ \exists\varphi:\ \Omega\to\mathbb{R}^{m_r}:\ \|\varphi\|_{L_p(\Omega)}\leqslant 1,\ \nabla^r f=g\cdot\varphi\big\} \qquad (1)$$

$\Bigg($соответствующую функцию φ будем обозначать через $\dfrac{\nabla^r f}{g}$; для определенности полагаем $\dfrac{\nabla^r f(x)}{g(x)}=0$ в точках $x\in\Omega$ таких, что $g(x)=0\Bigg)$. Линейную оболочку этого множества назовем весовым пространством Соболева.[1]

Обозначим

$$\|f\|_{L_{q,v}(\Omega)}=\|f\|_{q,v}=\|fv\|_{L_q(\Omega)}, \qquad L_{q,v}(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R}|\ \ \|f\|_{q,v}<\infty\}. \qquad (2)$$

Отметим, что множество $W^r_{p,g}(\Omega)$ содержит подпространство полиномов степени не выше $r-1$ (обозначим его через $\mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$). Поэтому задачу о непрерывном (компактном) вложении весового класса Соболева в $L_{q,v}(\Omega)$ естественно поставить следующим образом: существует ли ограниченное (предкомпактное) в $L_{q,v}(\Omega)$

[1] Обычно в литературе при определении весового пространства Соболева берутся не только ограничения на производные порядка r, но и различного рода условия на производные меньших порядков.

множество M такое, что $W^r_{p,g}(\Omega) \subset \mathcal{P}_{r-1}(\Omega) + M$? Возможна также следующая постановка задачи: существуют ли конечномерное подпространство $L \subset L_{q,v}(\Omega)$ и ограниченное (предкомпактное) в $L_{q,v}(\Omega)$ множество M такие, что $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L+M$?

Различные свойства весовых пространств Соболева и их обобщений изложены в книгах [60, 87, 94, 129, 174, 178] и в обзорной статье [33]. Достаточные условия ограниченности и компактности вложения весовых пространств Соболева в весовое пространство L_q были получены Кудрявцевым [32], Нечасом [155], Куфнером [127–129], Яковлевым [62], Трибелем [60], Мазьей [41], Лизоркиным и Отелбаевым [37,38], Гуркой и Опицем [105–107], Бесовым [4–7], Кусаиновой [35], Анточи [67], Гольдштейном и Ухловым [103], Казо и Д'Амброзио [81] и другими авторами. Отметим, что в этих работах в определении весовых классов Соболева присутствовало ограничение не только на производные порядка r, но и на младшие производные.

Пусть X — нормированное пространство, $n \in \mathbb{Z}_+$. Через $\mathcal{L}_n(X)$ обозначим совокупность подпространств в X размерности не выше n. Обозначим через $L(X,\, Y)$ пространство линейных непрерывных операторов из X в нормированное пространство Y, через $\operatorname{rk} A$ обозначим размерность образа оператора $A : X \to Y$, а через $\|A\|_{X\to Y}$ — его норму. Через X^* обозначим сопряженное пространство к X, через B_X — единичный шар в X.

Колмогоровским n-поперечником множества $M \subset X$ в пространстве X называется величина

$$d_n(M,\, X) = \inf_{L\in\mathcal{L}_n(X)} \sup_{x\in M} \inf_{y\in L} \|x-y\|_X,$$

линейным n-поперечником — величина

$$\lambda_n(M,\, X) = \inf_{A\in L(X,\, X),\, \operatorname{rk} A\leqslant n} \sup_{x\in M} \|x - Ax\|_X,$$

гельфандовским n-поперечником — величина

$$d^n(M,\, X) = \inf_{x_1^*,\, \dots,\, x_n^* \in X^*} \sup\{\|x\| :\ x\in M,\, x_j^*(x) = 0,\ 1\leqslant j\leqslant n\} =$$
$$= \inf_{A\in L(X,\mathbb{R}^n)} \sup\{\|x\| :\ x\in M\cap \ker A\}.$$

Колмогоровские поперечники впервые появились в работе А.Н. Колмогорова [125] в 1936 г. Понятие линейного и гельфандовского поперечника было введено В.М. Тихомировым в [56].

А. Пич [157] ввел понятие s-чисел для линейных операторов (позднее было введено обобщение этого понятия, и теперь s-числа, удовлетворяющие аксиомам из работы [157], называются строгими s-числами). Примерами строгих s-чисел являются числа Колмогорова, числа Гельфанда и аппроксимативные числа. Числа Колмогорова оператора $A \in L(X,\, Y)$ определяются как

$$d_n(A : X \to Y) = d_n(A(B_X),\, Y),$$

аппроксимативные числа — как

$$a_n(A : X \to Y) = \inf\{\|A - A_n\|_{X\to Y} : \operatorname{rk} A_n \leqslant n\},$$

числа Гельфанда — как

$$c_n(A : X \to Y) = \inf_{\{x_j^*\}_{j=1}^n \subset X^*} \sup\{\|Ax\| :\ x\in \cap_{j=1}^n \ker x_j^*,\ \|x\|\leqslant 1\}.$$

Будем обозначать $\lambda_n(A(B_X),\, Y) =: \lambda_n(A : X \to Y)$, $d^n(A(B_X),\, Y) =: d^n(A : X \to Y)$, $a_n(A : X \to Y) =: a_n(A(B_X),\, Y)$, $c_n(A : X \to Y) =: c_n(A(B_X),\, Y)$. Если

Id — компактный оператор вложения пространства X в пространство Y, то из результатов Хейнриха [118] (см. теорему 3.1) следует, что

$$a_n(\mathrm{Id} : X \to Y) = \lambda_n(A(B_X),\, Y), \quad c_n(\mathrm{Id} : X \to Y) = d^n(A(B_X),\, Y). \tag{3}$$

Если X и Y являются равномерно выпуклыми и равномерно гладкими (см. определения в [86]) и $A : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор с нулевым ядром и плотным в Y образом, то

$$c_n(A : X \to Y) = d^n(A(B_X),\, Y) \tag{4}$$

(см. работу Эдмундса и Ланга [91]). Примерами пространств, являющихся одновременно равномерно выпуклыми и равномерно гладкими, являются $L_p(\Omega,\, \Sigma,\, \mu)$ при $1 < p < \infty$ (здесь Σ — сигма-алгебра на множестве Ω, μ — мера); доказательство см., например, в [86].

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Обозначим через l_p^n линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|(x_1,\, \dots,\, x_n)\|_p \equiv \|(x_1,\, \dots,\, x_n)\|_{l_p^n} = \begin{cases} (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, & p < \infty, \\ \max\{|x_1|,\, \dots,\, |x_n|\}, & p = \infty, \end{cases}$$

через B_p^n обозначим единичный шар в l_p^n.

Всюду для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ через p' будем обозначать сопряженный показатель: $p' = \frac{p}{p-1}$.

Из соотношений двойственности между колмогоровскими и гельфандовскими поперечниками [25] следует, что $d_n(B_p^\nu,\, l_q^\nu) = d^n(B_{q'}^\nu,\, l_{p'}^\nu)$. В [26] показано соотношение двойственности между линейными поперечниками вида $\lambda_n(B_p^\nu,\, l_q^\nu) = \lambda_n(B_{q'}^\nu,\, l_{p'}^\nu)$.

В 60–80-е годы XX века изучались задачи об оценках поперечников функциональных классов в L_q (см. [3, 14–16, 26, 29, 30, 34, 43, 44, 53–56], а также [57, 58, 158]) и конечномерных шаров B_p^n в l_q^n. Для $p \geqslant q$ Пич [157] и Стесин [51] нашли точные значения величин $d_n(B_p^\nu,\, l_q^\nu)$ и $\lambda_n(B_p^\nu,\, l_q^\nu)$. В случае $p < q$ точное значение поперечника $d_n(B_p^\nu,\, l_q^\nu)$ известно только при $p = 1$, $q = 2$ (см. работы А.Н. Колмогорова, А.А. Петрова и Ю.М. Смирнова [31] и С.Б. Стечкина [52]). Для произвольных $p < q$ (кроме некоторых критических случаев) в работах Б.С. Кашина [29], Е.Д. Глускина [20, 21] и А.Ю. Гарнаева и Е.Д. Глускина [19] найдены порядковые оценки поперечников конечномерных шаров с точностью до мультипликативных констант, зависящих только от p и q. Для колмогоровских поперечников порядковые оценки не получены в случае $p < 2$, $q = \infty$, для гельфандовских поперечников — в случае $p = 1$, $q > 2$, для линейных поперечников — в случае $p = 1$, $q = \infty$. При $p < 2$, $q = \infty$ Б.С. Кашиным в [27, 28] получены оценки колмогоровских поперечников, точные в степенной шкале.

Порядковые оценки поперечников невесовых классов Соболева получены в работах Тихомирова, Бирмана и Соломяка, Исмагилова, Майорова, Маковоза, Кашина, ДеВора, Шарпли и Рименшнайдера [3, 10, 26, 29, 43, 44, 56, 84]. Некоторые обобщения этих пространств на d-мерном торе изучались в работах Кашина, Темлякова, Галеева, Куланина и других авторов (см., например, [15,16,30,34,53–55]).

Сформулируем окончательный результат для пространств Соболева на d-мерном кубе.

Пусть X, Y — множества, $f_1,\, f_2 :\ X \times Y \to \mathbb{R}_+$. Мы пишем $f_1(x,\, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x,\, y)$ (или $f_2(x,\, y) \underset{y}{\gtrsim} f_1(x,\, y)$, или $f_1(x,\, y) \overset{x}{\lesssim} f_2(x,\, y)$, или $f_2(x,\, y) \overset{x}{\gtrsim} f_1(x,\, y)$), если для любого $y \in Y$ существует $c(y) > 0$ такое, что $f_1(x,\, y) \leqslant c(y) f_2(x,\, y)$ для любого

$x \in X$; $f_1(x, y) \underset{y}{\asymp} f_2(x, y)$ или $f_1(x, y) \overset{x}{\asymp} f_2(x, y)$, если $f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y)$ и $f_2(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_1(x, y)$.

Всюду далее будем обозначать $\vartheta_n = d_n$, $\hat{q} = q$ при оценке колмогоровских чисел (поперечников), $\vartheta_n = a_n$ ($\vartheta_n = \lambda_n$), $\hat{q} = \min\{q, p'\}$ при оценке аппроксимативных чисел (соответственно линейных поперечников), $\vartheta_n = c_n$ ($\vartheta_n = d^n$), $\hat{q} = p'$ при оценке гельфандовских чисел (соответственно гельфандовских поперечников).

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Всюду далее будем обозначать

$$\delta = r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p}.$$

Положим

$$\theta_{p,q,r,d} = \begin{cases} \frac{\delta}{d} - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+, & \text{если} \quad p \geqslant q \quad \text{или} \quad p < q, \quad \hat{q} \leqslant 2, \\ \min\left\{\frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\}, \, \frac{\hat{q}\delta}{2d}\right\}, & \text{если} \quad p < q, \ \hat{q} > 2. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема A. (см., например, [10, 29, 43, 56, 84]). *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $\delta > 0$. Предположим, что в случае $p < q$ и $\hat{q} > 2$ выполнено*

$$\frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\} \neq \frac{\hat{q}\delta}{2d}. \tag{6}$$

Тогда для колмогоровских (соответственно линейных и гельфандовских) поперечников выполнена оценка

$$\vartheta_n(W^r_p([0, 1]^d), \, L_q([0, 1]^d)) \underset{r,d,p,q}{\asymp} n^{-\theta_{p,q,r,d}}.$$

В [9] О.В. Бесовым была рассмотрена область типа пика:

$$K_\sigma = \{(x_1, \, \dots, \, x_{d-1}, \, x_d) : \, |(x_1, \, \dots, \, x_{d-1})|^{1/\sigma} < x_d < 1\},$$

где $\sigma > 1$. В этом случае условием компактности вложения $W^r_p(K_\sigma)$ в $L_q(K_\sigma)$ является соотношение $r - [\sigma(d-1)+1]\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ > 0$ (это следует из результатов Д.А. Лабутина, В.Г. Мазьи и С.В. Поборчего [36, 42]). Было показано, что в этом случае

$$d_n(W^r_p(K_\sigma), \, L_q(K_\sigma)) \underset{p,q,r,d,\sigma}{\asymp} d_n(W^r_p([0, 1]^d), \, L_q([0, 1]^d))$$

(если $p < q$ и $q > 2$, то дополнительно требовалось выполнение (6)).

Для $r = 1$, $p = q$ и более общих областей с особенностями оценки аппроксимативных чисел оператора вложения были получены Эвансом и Харрисом [96].

Первые результаты об оценках поперечников весовых классов Соболева появились в 60-70е годы XX века в работах Бирмана и Соломяка, Эль Колли и Трибеля [10, 60, 95]. Интенсивно эта задача стала изучаться с 90-х годов.

Случай $d = 1$ рассматривался в работах Коновалова и Левиатана, Лифшица и Линде, Эдмундса, Ланга, Ломакиной и Степанова и других авторов [40, 89, 126, 140, 144, 150]. В статье Коновалова и Левиатана [126] были получены порядковые оценки поперечников в случае степенных весов. Было показано, что для таких весов в случае компактного вложения $W^r_{p,g}[0, 1]$ в $L_{q,v}[0, 1]$ поперечники имеют такие же порядки убывания, как для $g \equiv 1$, $v \equiv 1$. В работах [40, 89, 140, 144, 150] были получены различные достаточные условия на веса g и v, при которых порядки поперечников такие же, как для $g \equiv 1$, $v \equiv 1$.

Задачи об оценках поперечников и аппроксимативных чисел операторов вложения весовых классов Соболева на метрических деревьях изучались в работах

Эванса, Харриса, Ланга и Соломяка [97, 168] (метрическое дерево — это дерево, в котором ребра рассматриваются как отрезки заданной длины; формальные определения будут даны в главе 3).

В работе Бирмана и Соломяка [10] была получена оценка сверху для колмогоровских поперечников классов Соболева на кубе K в весовом пространстве $L_{q,v}(K)$. Условия на вес v были такими, чтобы в силу неравенства Гельдера и теоремы Соболева выполнялась цепочка вложений $W^r_p(K) \subset L_{\tilde{q}}(K) \subset L_{q,v}(K)$ для некоторого $\tilde{q}$. При $q > \max\{p, 2\}$ полученная оценка не была точной по порядку (даже в невесовом случае стало возможным получать точные оценки только после результатов Б.С. Кашина [29] об оценках поперечников конечномерных шаров).

В [95] Эль Колли нашел порядки убывания величин $d_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega))$, где Ω — ограниченная область с гладкой границей, $p = q$, а веса g и v равны степени расстояния до границы Ω; применяя интерполяцию банаховых пространств, Трибель [60] распространил оценки сверху величин $d_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega))$ на случай $p \leqslant q$.

Оценки линейных поперечников весовых классов Соболева на $\mathbb{R}^d$ с весами вида $w_\alpha(x) = (1 + \|x\|_2^2)^{\alpha/2}$ получены Мынбаевым и Отелбаевым в [45].

В работе Трибеля [177] для веса $g(x) = |x|^{-r}(1+|\log|x||)^{-\alpha}$ были получены оценки аппроксимативных чисел весового класса Соболева в пространстве L_p на единичном евклидовом шаре. В случае $0 < \alpha \leqslant 1 + \frac{r}{d}$ оценки сверху и снизу различались. Подробнее об этом результате (а также о результате из [60]) будет сказано ниже.

Для весов общего вида оценки колмогоровских и линейных поперечников весовых классов Соболева в весовое пространство L_q были получены Лизоркиным, Отелбаевым, Айтеновой и Кусаиновой [1, 2, 39, 46]. Здесь в определение весового класса Соболева также входило ограничение на саму функцию (и это условие существенно использовалось).

Для некоторых пересечений весовых классов Соболева на кубе с весами, являющимися степенью расстояния до границы, порядковые оценки поперечников были получены Бойковым [11, 73].

Цель работы. Основной целью работы является решение ряда открытых задач о вложениях и оценках поперечников весовых функциональных классов на многомерных областях.

В диссертации исследуются следующие задачи.

- Получить достаточные условия на веса, при которых поперечники весовых классов Соболева в весовом пространстве Лебега на области с условием Джона имеют такие же порядки убывания, как для невесового класса Соболева на кубе.

- Получить порядковые оценки норм двухвесовых операторов суммирования на дереве при дополнительных условиях на веса (при этом оценки должны иметь простой и удобный для приложений вид).

- Получить достаточные условия вложения весовых классов Соболева на области с условием Джона для весов, являющихся функциями расстояния до некоторого h-множества; в случае, когда эти функции и функция h имеют специальный вид, получить порядковые оценки поперечников.

- Получить порядковые оценки поперечников весовых классов Бесова с весами, имеющими сильную особенность в точке.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории функций, теории аппроксимации, теории поперечников, теории интегральных операторов, а также методы теории графов.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

- Получены достаточные условия на веса, при которых порядковые оценки поперечников весового класса Соболева такие же, как у невесовых классов Соболева на кубе.

- Получены достаточные условия вложения весовых классов Соболева на области с условием Джона в весовое пространство Лебега с весами, являющимися функцией расстояния до некоторого h-подмножества границы области; более того, получены оценки константы вложения на подобласти, порожденной некоторым поддеревом.

- Получены оценки сверху для поперечников функциональных классов, заданных на множестве с древоподобной структурой и удовлетворяющих специальным аксиомам.

- Получены порядковые оценки весовых классов Соболева на области с условием Джона в весовое пространство Лебега с весами, являющимися функцией расстояния до некоторого h-подмножества границы области.

- Получены порядковые оценки поперечников конечномерных шаров в смешанной норме в некоторых ранее не исследованных случаях.

- Получены порядковые оценки поперечников весовых классов Бесова с весами, имеющими особенность в точке; исследован случай, когда эта особенность влияет на асимптотику.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут применяться в теории дифференциальных уравнений, численных методах и теории случайных процессов. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности “математика”.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались неоднократно на семинаре по теории приближения под руководством д.ф.-м.н., профессора И.Г. Царькова в 2009–2014 гг, на семинаре по теории ортогональных рядов под руководством академика РАН, профессора Б.С. Кашина и чл.-корр. РАН, профессора С.В. Конягина в 2011 и 2012 гг, на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинаре Никольского) под руководством чл.-корр. РАН, профессора О.В. Бесова в 2011–2014 гг, на семинаре по бесконечномерному анализу и математической физике под руководством д.ф.-м.н., профессора О.Г. Смолянова и д.ф.-м.н., профессора Е.Т. Шавгулидзе в 2011–2012 гг, на семинаре по задачам дифференциальных уравнений, анализа и управления под руководством д.ф.-м.н., профессора А.В. Фурсикова, д.ф.-м.н., профессора В.М. Тихомирова, чл.-корр. РАН, профессора М.И. Зеликина и д.ф.-м.н., профессора В.Ю. Протасова в 2012 г., на семинаре по теории функций под руководством д.ф.-м.н., профессора Б.И. Голубова, д.ф.-м.н., профессора М.И. Дьяченко, академика

РАН, профессора Б.С. Кашина, чл.-корр. РАН, профессора С.В. Конягина в 2014 г., на семинаре отдела анализа и геометрии Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством академика РАН Ю.Г. Решетняка в 2015 г., международных школах по теории функций им. С.Б. Стечкина (Миасс, 2010, 2013, 2014 гг.), на 15–17-й Саратовских зимних школах по теории функций (Саратов, 2010, 2012, 2014 гг.), на Воронежских зимних школах по теории функций (Воронеж, 2011, 2013 гг.), на международной конференции им. И.Г. Петровского (Москва, 2011 г.), на международной конференции "Function Spaces, Differential Operators, Nonlinear Analysis" (Tabarz, 2011 г.), на 4-й международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвященной 90-летию Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2013 г.), на международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященной 105-летию С.Л Соболева (Новосибирск, 2013 г.), международной конференции "Нелинейные аппроксимации и приложения", посвященной 60-летию В.Н. Темлякова (Москва, 2013 г.), международной конференции "Спектральная теория и дифференциальные уравнения", посвященной 100-летию Б.М. Левитана (Москва, 2014 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [181–201], из них [181–194] — в изданиях, рекомендованных ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Перейдем к обзору глав диссертации.

В **главе 1** получены оценки колмогоровских, гельфандовских и аппроксимативных чисел оператора вложения приведенного весового класса Соболева в весовое пространство Лебега. Условия на веса таковы, что порядки этих s-чисел такие же, как у оператора вложения невесового класса Соболева на кубе в невесовое пространство Лебега.

Для $x \in \mathbb{R}^d$, $\rho > 0$ будем обозначать через $B_\rho(x)$ замкнутый евклидов шар в $\mathbb{R}^d$ радиуса ρ с центром в точке x.

Пусть $|\cdot|$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^d$, E, $E' \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$\mathrm{diam}_{|\cdot|}\, E = \sup\{|y-z| :\ y,\, z \in E\}, \quad \mathrm{dist}_{|\cdot|}\,(x,\, E) = \inf\{|x-y| :\ y \in E\}, \tag{7}$$

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}\,(E',\, E) = \inf\{|x-y| :\ x \in E,\, y \in E'\}. \tag{8}$$

Обозначим через $AC[t_0,\, t_1]$ множество абсолютно непрерывных функций на отрезке $[t_0,\, t_1]$.

Определение 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если найдется точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существуют $T(x) > 0$ и кривая $\gamma_x : [0,\, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами:

1. $\gamma_x \in AC[0,\, T(x)]$, $\left|\frac{d\gamma_x(t)}{dt}\right| = 1$ п.в.,
2. $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$,
3. для любого $t \in [0,\, T(x)]$ выполнено включение $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$.

Если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ и точка x_* такая, как в определении 1, то

$$\mathrm{diam}_{|\cdot|}\, \Omega \underset{d,a,|\cdot|}{\lesssim} \mathrm{dist}_{|\cdot|}\,(x_*,\, \partial\Omega). \tag{9}$$

Определение 2. Скажем, что Ω удовлетворяет условию Джона, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Для ограниченной области условие Джона совпадает с условием гибкого конуса (определение см. в [8]). Различные свойства таких областей описаны в [65,71,85,179].

В работах Ю.Г. Решетняка [47, 48] найдено интегральное представление для функций на области Ω, удовлетворяющей условию Джона, через их производные порядка r. Из этого интегрального представления и теоремы Соболева [49] (см. также ее обобщения в [63, 64]) следует, что при $p > 1$, $1 \leqslant q < \infty$ и $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \geqslant 0$ (соответственно $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$) класс $W^r_p(\Omega)$ непрерывно (соответственно компактно) вложен в пространство $L_q(\Omega)$ (то есть условия непрерывного и компактного вложения такие же, как для $\Omega = [0, 1]^d$).

Пусть $r, d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$. Положим

$$\varkappa = \left(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^d)$ пространство полиномов на $\mathbb{R}^d$ степени не выше $r-1$. Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathcal{P}_{r-1}(E) = \{f|_E : \ f \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^d)\}. \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Пусть Γ', $\Gamma'' \subset \partial\Omega$ — непустые замкнутые множества, $g(x) = g_0(x)\tilde{g}(x)$, $v(x) = v_0(x)\tilde{v}(x)$, $x \in \Omega$, $g_0 \in L_\alpha(\Omega, \mathbb{R}_+)$, $v_0 \in L_\beta(\Omega, \mathbb{R}_+)$, $1 < \alpha$, $\beta \leqslant \infty$, $\beta > q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha} < 1$, $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} := \frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha} \geqslant 0$; если $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} = 0$, то $\tilde{g} = \tilde{v} = 1$; если $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} > 0$, то $\tilde{g}\tilde{v} \in L_{\tilde{\varkappa}}(\Omega)$,*

$$\tilde{g}(x) = \varphi_{\tilde{g}}\left(\mathrm{dist}\,(x, \Gamma')\right), \quad \tilde{v}(x) = \varphi_{\tilde{v}}\left(\mathrm{dist}\,(x, \Gamma'')\right), \tag{11}$$

где $\varphi_{\tilde{g}} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ убывает, $\varphi_{\tilde{v}} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ возрастает, и существует константа $c_0 \geqslant 1$ такая, что для любых $m \in \mathbb{Z}$, t, $s \in [2^{m-1}, 2^{m+1}]$

$$c_0^{-1} \leqslant \frac{\varphi_{\tilde{g}}(t)}{\varphi_{\tilde{g}}(s)} \leqslant c_0, \quad c_0^{-1} \leqslant \frac{\varphi_{\tilde{v}}(t)}{\varphi_{\tilde{v}}(s)} \leqslant c_0. \tag{12}$$

Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и существует линейный проектор $\hat{P} : \mathrm{span}\, W^r_{p,g}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что множество $\{f - \hat{P}f : \ f \in W^r_{p,g}(\Omega)\}$ ограничено в $L_{q,v}(\Omega)$.

Замечание 1. Из неравенства Гельдера и условия $\tilde{g}\tilde{v} \in L_{\tilde{\varkappa}}(\Omega)$ следует, что $gv \in L_\varkappa(\Omega)$, $W^r_{p,g}(\Omega) \subset W^r_{\tilde{p},\tilde{g}}(\Omega)$ и $L_{\tilde{q},\tilde{v}}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$, где $\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{q} - \frac{1}{\beta}$.

Положим

$$\hat{W}^r_{p,g}(\Omega) = \{f - \hat{P}f : \ f \in W^r_{p,g}(\Omega)\}.$$

Тогда $\mathrm{span}\, \hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$ с нормой $\|f\|_{W^r_{p,g}(\Omega)} := \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}$ является банаховым пространством. Пусть $I : \mathrm{span}\, \hat{W}^r_{p,g}(\Omega) \to L_{q,v}(\Omega)$ — оператор вложения, т.е. $I(f) = f$. Тогда I ограничен в силу теоремы 1.

Обозначим через $L_+(\Omega)$ класс функций $w : \Omega \to \mathbb{R}_+$ таких, что существует последовательность функций $w_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, со следующими свойствами:

- $0 \leqslant w_n(x) \leqslant w(x)$ для любого $x \in \Omega$;
- существует конечное семейство неперекрывающихся кубов $K_{n,i} \subset \Omega$, $1 \leqslant i \leqslant N_n$, такое, что $w_n|_{K_{n,i}} = \mathrm{const}$, $w_n(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus \cup_{i=1}^{N_n} K_{n,i}$;

- $w_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} w(x)$ почти всюду на Ω.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Также предположим, что в случае $p < q$ и $\hat{q} > 2$ выполнено (6). Тогда найдется такое $n_0 = n_0(r,\, d,\, q,\, p,\, a,\, g,\, v)$, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$\vartheta_n(\hat{W}^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{r,d,q,p,a,\alpha,\beta,c_0}{\lesssim} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)} n^{-\theta_{p,q,r,d}}.$$

Если $g,\, v \in L_+(\Omega)$, то найдется такое $n_1 = n_1(r,\, d,\, q,\, p,\, a,\, g,\, v)$, что при $n \geqslant n_1$ выполнено

$$\vartheta_n(\hat{W}^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{r,d,q,p}{\gtrsim} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)} n^{-\theta_{p,q,r,d}}.$$

Из (3) следует, что такие же оценки выполнены для линейных и гельфандовских поперечников.

Для доказательства теорем 1 и 2 на области с условием Джона вводится древоподобная структура (см. теорему 1.1.1) и используются специальные разбиения деревьев.

Применив теорему 2 в частном случае единичных весов, получаем, что если область удовлетворяет условию Джона, то оценки поперечников невесовых классов Соболева такие же, как для куба. Более простое доказательство этого факта было предложено О.В. Бесовым [9].

В **главе 2** получены оценки поперечников весовых классов Соболева с весами, монотонными по одной переменной, имеющими липшицевы поверхности уровня.

Для $x = (x_1,\, \dots,\, x_k) \in \mathbb{R}^k$ положим

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}.$$

Напомним, что область $D \subset \mathbb{R}^k$ имеет липшицеву границу, если для любой точки $x \in \partial D$ найдутся ее окрестность U, оператор поворота $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, открытое множество $V \subset \mathbb{R}^{k-1}$ и липшицева функция $\varphi : V \to \mathbb{R}$ такие, что

$$T((\partial D) \cap U) = \{(x',\, \varphi(x')) \in \mathbb{R}^k :\ x' \in V\}.$$

Пусть $d \in \mathbb{N} \cap [2,\, \infty)$, $D \subset \mathbb{R}^{d-1}$ — ограниченная область с липшицевой границей, $\overline{D}$ — ее замыкание, $\tau_- : \overline{D} \to \mathbb{R}$, $\tau_+ : \overline{D} \to \mathbb{R}$ — липшицевы функции, $\tau_-(x) < \tau_+(x)$ для любого $x \in \overline{D}$,

$$\Omega = \{(x',\, x_d) : x' \in D,\ \tau_-(x') < x_d < \tau_+(x')\}, \tag{13}$$

$\Gamma_0(\Omega) = \{(x', \tau_-(x')) : x' \in D\}$.

Пусть $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$. Если функция g ограничена в окрестности $\Gamma_0(\Omega)$, то для любого $k = 0,\, \dots,\, r-1$ вектор-функция $\nabla^k f|_{\Gamma_0(\Omega)} \in L_p(\Gamma_0(\Omega),\, \mathbb{R}^{m_k})$ корректно определена (это следует из интегрального представления функции и теоремы Адамса о потенциалах; см. [41, 63, 64]). Обозначим в этом случае

$$\hat{W}^r_{p,g}(\Omega) = \{f \in W^r_{p,g}(\Omega) : \nabla^k f|_{\Gamma_0(\Omega)} = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant r-1\}$$

и на $\operatorname{span} \hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$ определим норму

$$\|f\|_{\hat{W}^r_{p,g}(\Omega)} = \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega)}. \tag{14}$$

Определение 3. Пусть область Ω имеет вид (13), g, $v : \Omega \to \mathbb{R}_+$ — измеримые функции, $\Lambda \geqslant 0$. Скажем, что $(g, v) \in \mathcal{E}_\Lambda$, если существуют липшицевы с константой Λ (относительно нормы $|\cdot|$) функции $\varphi^i_k : D \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1$, такие что

$$\tau_-(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi^i_k(x) \leqslant \varphi^i_{k+1}(x) \leqslant \ldots \leqslant \tau_+(x),$$

$\tau_\pm(x) = \lim\limits_{k\to\pm\infty} \varphi^i_k(x)$, $2^{k-1} \leqslant g(x', x_d) \leqslant 2^{k+1}$ при $\varphi^0_k(x') < x_d \leqslant \varphi^0_{k+1}(x')$, $2^{-k-1} \leqslant v(x', x_d) \leqslant 2^{-k+1}$ при $\varphi^1_k(x') < x_d \leqslant \varphi^1_{k+1}(x')$.

Как и раньше, будем обозначать $\varkappa = \left(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)^{-1}$. Число $\theta_{p,q,r,d}$ определим формулой (5).

Теорема 3. *Пусть $d \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$, $r \in \mathbb{N}$, область Ω имеет вид (13), $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Пусть g, $v : \Omega \to \mathbb{R}_+$ — измеримые функции, $gv \in L_\varkappa(\Omega)$ и $(g, v) \in \mathcal{E}_\Lambda$ для некоторого $\Lambda \geqslant 0$.*

Тогда класс $\hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$ является компактным подмножеством пространства $L_{q,v}(\Omega)$. Если при этом в случае $p < q$, $\hat{q} > 2$ выполнено (6), то

$$\vartheta_n(\hat{W}^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{p,q,r,d,\Lambda,\Omega}{\lesssim} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)} n^{-\theta_{p,q,r,d}}.$$

При достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнены аналогичные оценки снизу:

$$\vartheta_n(\hat{W}^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{p,q,r,d}{\gtrsim} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)} n^{-\theta_{p,q,r,d}}.$$

В **главе 3** получены точные двусторонние оценки норм двухвесовых операторов суммирования на дереве при некоторых дополнительных ограничениях на веса.

Неравенства вида

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k^q \left|\sum_{j=0}^{k} u_j f_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (f_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} \in l_p, \tag{15}$$

изучались Лейндлером [142], Беннеттом [68–70], Браверманом и Степановым [75], Гроссе-Эрдманном [104] и Гольдманом [22, 102]. Впервые точные двусторонние оценки минимальной константы C в (15) были получены Беннеттом [70] (при $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ оценки сверху были доказаны Хайнигом и Андерсеном [66, 117]). При всех значениях параметров p, $q > 0$, кроме $0 < q < p < 1$, оценки были явными. Браверман и Степанов [75] привели альтернативное доказательство для $0 < q < 1 < p < \infty$. Гроссе-Эрдманн [104] и Гольдман [102] (см. также [22]) получили явные оценки для $0 < q < p < 1$.

Аналогичная задача для двухвесовых операторов интегрирования на полуоси была решена в работах Таленти [170], Томазелли [171], Макенхаупта [153], Брэдли [74], Мазьи и Розина [41, §1.3], Сойера [162], Синнамона [165], Синнамона и Степанова [166]. Подробнее эти результаты изложены в книгах [104, 130, 132].

При $p = q = 2$ Наймарк и Соломяк [154] показали, что задача об оценке нормы весового оператора интегрирования на регулярном метрическом дереве с весами, зависящими только от расстояния от корня, может быть сведена к задаче об оценке нормы некоторого весового оператора типа Харди на полуоси.

Критерий ограниченности двухвесового оператора интегрирования на метрическом дереве и точные двусторонние оценки его нормы получены в работе Эванса, Харриса и Пика [98]. Эти результаты могут быть использованы при оценке нормы оператора суммирования на комбинаторном дереве при $1 < p \leqslant q < \infty$ (см. §3.1). Однако эта оценка в общем случае имеет довольно сложный вид. При некоторых дополнительных условиях на веса будут получены оценки, имеющие более простой вид и более удобные для приложений.

Неравенства типа Харди на деревьях используются при получении теорем вложения для весовых классов Соболева на области (см. [96] и главу 4) и при оценке поперечников функциональных классов, s-чисел и энтропийных чисел операторов вложения (см. [96, 97, 146–148, 168] и главу 5).

Напомним определения некоторых терминов из теории графов. Всюду далее будем предполагать, что граф не имеет кратных ребер и петель.

Пусть $\mathcal{G}$ — граф с не более, чем счетным числом вершин. Множество вершин $\mathcal{G}$ будем обозначать $\mathbf{V}(\mathcal{G})$, множество ребер — $\mathbf{E}(\mathcal{G})$. Две различные вершины, являющиеся концами одного и того же ребра, будем называть соседними; ребра будем отождествлять с парами соседних вершин. Если вершина является концом ребра, то будем говорить, что вершина и ребро инцидентны. Если $\xi_i \in \mathbf{V}(\mathcal{G})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, причем вершины ξ_i и ξ_{i+1} являются соседними для любого $i = 1, \ldots, n-1$, то последовательность $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ будем называть путем (длины $n-1$); если все вершины ξ_i различны, то такой путь будем называть простым; если $n \geqslant 4$, $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — простой путь и $\xi_1 = \xi_n$, то такой путь будем называть циклом. Назовем путь $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ почти простым, если путь $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ простой (в частности, простые пути и циклы являются почти простыми). Если граф $\mathcal{G}$ ориентированный и для любого $i = 1, \ldots, n-1$ вершина ξ_i является началом, а ξ_{i+1} — концом ребра (ξ_i, ξ_{i+1}), то путь $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ будем называть ориентированным; при этом, ξ_1 будем называть началом, а ξ_n — концом этого пути. Граф будем называть связным, если любые его две вершины можно соединить конечным путем. Если связный граф не имеет циклов, то он называется деревом.

Пусть $(\mathcal{T}, \xi_0)$ — дерево с выделенной вершиной (корнем) ξ_0. Тогда на множестве $\mathbf{V}(\mathcal{T})$ естественным образом вводится частичный порядок: $\xi' > \xi$, если существует путь $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi')$ такой, что $\xi = \xi_k$ для некоторого $k \in \overline{0, n}$. В этом случае положим $\rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi') = \rho_{\mathcal{T}}(\xi', \xi) = n + 1 - k$ и назовем эту величину расстоянием между ξ и ξ'. Кроме того, положим $\rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi) = 0$. Если $\xi' > \xi$ или $\xi' = \xi$, то будем писать $\xi' \geqslant \xi$ и обозначим $[\xi, \xi'] := \{\xi'' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}) : \xi \leqslant \xi'' \leqslant \xi'\}$. Для $j \in \mathbb{Z}_+$, $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ положим

$$\mathbf{V}_j(\xi) := \mathbf{V}_j^{\mathcal{T}}(\xi) := \{\xi' \geqslant \xi : \ \rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi') = j\}. \tag{16}$$

Для вершины $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ обозначим $\mathcal{T}_\xi = (\mathcal{T}_\xi, \xi)$ поддерево в $\mathcal{T}$, множеством вершин которого является

$$\{\xi' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}) : \xi' \geqslant \xi\}. \tag{17}$$

Введенный частичный порядок на дереве $\mathcal{T}$ индуцирует частичный порядок на каждом его поддереве.

Отметим следующее свойство дерева $(\mathcal{T}, \xi_0)$: если его вершины ξ' и ξ'' несравнимы, то $\mathbf{V}(\mathcal{T}_{\xi'}) \cap \mathbf{V}(\mathcal{T}_{\xi''}) = \varnothing$.

Пусть $\mathcal{T}$ — дерево. Если $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ — поддеревья в $\mathcal{T}$ и $\mathbf{V}(\mathcal{T}_1) \subset \mathbf{V}(\mathcal{T}_2)$, то будем говорить, что $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

Пусть $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}(\mathcal{T})$. Скажем, что $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ — максимальный подграф в $\mathcal{T}$ на множестве вершин $\mathbf{W}$, если $\mathbf{V}(\mathcal{G}) = \mathbf{W}$ и любые вершины ξ', $\xi'' \in \mathbf{W}$, являющиеся соседними в $\mathcal{T}$, также являются соседними в $\mathcal{G}$.

Пусть $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}$ — поддеревья. Обозначим через $\mathcal{T}_1 \backslash \mathcal{T}_2$ (соответственно $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$) максимальный подграф на множестве вершин $\mathbf{V}(\mathcal{T}_1) \backslash \mathbf{V}(\mathcal{T}_2)$

(соответственно $\mathbf{V}(\mathcal{T}_1) \cup \mathbf{V}(\mathcal{T}_2)$, $\mathbf{V}(\mathcal{T}_1) \cap \mathbf{V}(\mathcal{T}_2)$). Если $\mathbf{V}(\mathcal{T}_1) \cap \mathbf{V}(\mathcal{T}_2) = \varnothing$, то также будем обозначать $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2$.

Для подграфа $\mathcal{G}$ в $(\mathcal{T}, \xi_0)$ обозначим через $\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G})$ и $\mathbf{V}_{\min}(\mathcal{G})$ соответственно множество максимальных и минимальных вершин в $\mathcal{G}$.

Пусть $\mathcal{G}$ — граф, $f : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$. Положим

$$\|f\|_{l_p(\mathcal{G})} = \left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{G})} |f(\xi)|^p\right)^{1/p}, \quad \text{если} \quad 0 < p < \infty, \quad \|f\|_{l_\infty(\mathcal{G})} = \sup_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{G})} |f(\xi)|.$$

Обозначим через $l_p(\mathcal{G})$ пространство функций $f : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|f\|_{l_p(\mathcal{G})}$.

Пусть $\mathcal{G}$ — дизъюнктное объединение деревьев $(\mathcal{T}_j, \xi_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Тогда частичный порядок на каждом дереве $\mathcal{T}_j$ порождает частичный порядок на $\mathcal{G}$. Пусть $u, w : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to [0, \infty)$ — весовые функции.

Определение 4. Определим оператор суммирования $S_{u,w,\mathcal{G}}$ по формуле

$$S_{u,w,\mathcal{G}} f(\xi) = w(\xi) \sum_{\xi' \leqslant \xi} u(\xi') f(\xi'), \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{G}), \quad f : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}.$$

Пусть $0 < p, q \leqslant \infty$. Через $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{G},u,w}$ обозначим минимальную константу C в неравенстве

$$\left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{G})} w^q(\xi) \left|\sum_{\xi' \leqslant \xi} u(\xi') f(\xi')\right|^q\right)^{1/q} \leqslant C \left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{G})} |f(\xi)|^p\right)^{1/p}, \quad f : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$$

(с соответствующими изменениями при $p = \infty$ или $q = \infty$).

В случае $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ величина $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{G},u,w}$ является нормой оператора $S_{u,w,\mathcal{G}} : l_p(\mathcal{G}) \to l_q(\mathcal{G})$.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 4. *Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево, $u, w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$, $1 < p < q < \infty$. Предположим, что существуют $K \geqslant 1$, $l_0 \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in (0, 1)$ такие, что*

$$\operatorname{card} \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi) \leqslant K, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}), \tag{18}$$

$$\frac{u(\xi')}{u(\xi)} \leqslant K, \quad \frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi''})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}} \leqslant \lambda, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}), \quad \xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi), \quad \xi'' \in \mathbf{V}_{l_0}^{\mathcal{A}}(\xi). \tag{19}$$

Тогда $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{K,\lambda,l_0,p,q}{\asymp} \sup_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})} u(\xi) \|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}$.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. *Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево. Предположим, что существует $C_* \geqslant 1$ такое, что для любого $j \in \mathbb{Z}_+$, $j' \geqslant j$, $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$*

$$C_*^{-1} \cdot 2^{\theta s(j'-j)} \frac{\Lambda_*(2^{sj'})}{\Lambda_*(2^{sj})} \leqslant \operatorname{card} \mathbf{V}_{j'-j}^{\mathcal{A}}(\xi) \leqslant C_* \cdot 2^{\theta s(j'-j)} \frac{\Lambda_*(2^{sj'})}{\Lambda_*(2^{sj})}; \tag{20}$$

здесь $\theta > 0$, $s \in \mathbb{N}$, $\Lambda_* : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — абсолютно непрерывная функция такая, что $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{y\Lambda_*'(y)}{\Lambda_*(y)} = 0$. Предположим, что для любой вершины $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$

$$u(\xi) = u_j = 2^{\frac{\theta s j}{q}} \Psi_u(2^{sj}), \quad w(\xi) = w_j = 2^{-\frac{\theta s j}{q}} \Psi_w(2^{sj}), \tag{21}$$

где Ψ_u, $\Psi_w : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — абсолютно непрерывные функции такие, что

$$\lim_{y \to \infty} \frac{y\Psi_u'(y)}{\Psi_u(y)} = \lim_{y \to \infty} \frac{y\Psi_w'(y)}{\Psi_w(y)} = 0.$$

Будет показано, что выполнены условия теоремы 4 и справедлива

Теорема 5. *Пусть $1 < p < q < \infty$. Предположим, что выполнены условия (20) и (21). Обозначим $\mathfrak{Z} = (u, w, \theta, s, \Lambda_*, C_*, p, q)$. Для $j_0 \in \mathbb{Z}_+$ положим*

$$M_{j_0} = \sup_{j\in\mathbb{Z}_+,\, j\geqslant j_0} \Psi_u(2^{sj}) \left(\sum_{i\geqslant j} \Psi_w^q(2^{si}) \frac{\Lambda_*(2^{si})}{\Lambda_*(2^{sj})}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Пусть $M_{j_0} < \infty$, $\xi_* \in \mathbf{V}_{j_0}^{\mathcal{A}}(\xi_0)$. Тогда $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\xi_*},u,w} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} M_{j_0}$.

В частности, если

$$\Lambda_*(y) = (\log_2 y + 1)^{\gamma_*}, \quad \Psi_u(y) = (\log_2 y + 1)^{-\alpha_u}, \quad \Psi_w(y) = (\log_2 y + 1)^{-\alpha_w}, \tag{22}$$

α_u, α_w, $\gamma_* \in \mathbb{R}$, $\alpha_w > \frac{\gamma_*+1}{q}$, $\alpha_u + \alpha_w \geqslant \frac{1}{q}$, то $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} < \infty$ и для $\xi_* \in \mathbf{V}_{j_0}^{\mathcal{A}}(\xi_0)$ получаем $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\xi_*},u,w} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} j_0^{-\alpha_u-\alpha_w+\frac{1}{q}}$, $j_0 \in \mathbb{N}$.

Пример 2. *Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево. Предположим, что существует $C_* \geqslant 1$ такое, что для любых $j \in \mathbb{Z}_+$, $j' \geqslant j$, $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$,*

$$C_*^{-1} \cdot \frac{(j')^{\gamma_*}\tau_*(j')}{j^{\gamma_*}\tau_*(j)} \leqslant \operatorname{card} \mathbf{V}_{j'-j}^{\mathcal{A}}(\xi) \leqslant C_* \cdot \frac{(j')^{\gamma_*}\tau_*(j')}{j^{\gamma_*}\tau_*(j)}; \tag{23}$$

здесь $\gamma_* > 0$, $\tau_* : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — абсолютно непрерывная функция такая, что $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y\tau_*'(y)}{\tau_*(y)} = 0$. Предположим, что для любого $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$

$$u(\xi) = u_j = j^{-\alpha_u}\rho_u(j), \quad w(\xi) = w_j = j^{-\alpha_w}\rho_w(j), \tag{24}$$

где ρ_u, ρ_w : $(0, \infty) \to (0, \infty)$ — абсолютно непрерывные функции такие, что $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y\rho_u'(y)}{\rho_u(y)} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y\rho_w'(y)}{\rho_w(y)} = 0$.

В данном примере условия теоремы 4 не выполнены. Однако найти порядковые оценки для $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\xi_*},u,w}$ оказывается возможным. Для этого строятся дерево $\mathcal{A}_J$ и весовые функции u_J, $w_J : \mathbf{V}(\mathcal{A}_J) \to (0, \infty)$, удовлетворяющие условиям теоремы 4, и применяется лемма 3.2.3 из §3.3. В итоге получается

Теорема 6. *Пусть $1 < p < q < \infty$. Предположим, что выполнены условия (23) и (24). Обозначим $\mathfrak{Z} = (u, w, \gamma_*, \tau_*, C_*, p, q)$. Пусть $j_0 = 2^{k_0}$, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\xi_* \in \mathbf{V}_{j_0}^{\mathcal{A}}(\xi_0)$.*

1. *Пусть $-\alpha_w + \frac{1}{q} + \frac{\gamma_*}{q} < 0$. Положим $\alpha = \alpha_u + \alpha_w$, $\rho(t) = \rho_u(t)\rho_w(t)$. Если $M_{j_0} := \sup_{j\geqslant j_0} j^{-\alpha+\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}}\rho(j) < \infty$, то $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\xi_*},u,w} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} M_{j_0}$. В частности, если $-\alpha+\frac{1}{q}+\frac{1}{p'} < 0$, то $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\xi_*},u,w} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} j_0^{-\alpha+\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}}\rho(j_0)$.*

2. *Пусть $-\alpha_w + \frac{1}{q} + \frac{\gamma_*}{q} = 0$, $-\alpha_u + \frac{1}{p'} - \frac{\gamma_*}{q} = 0$,*

$$\tilde{M}_{k_0} := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \rho_u(2^{k_0+k}) \left(\sum_{t\geqslant k} \rho_w^q(2^{k_0+t}) \frac{\tau_*(2^{k_0+t})}{\tau_*(2^{k_0+k})}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Тогда $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\xi_*},u,w} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} \tilde{M}_{k_0}$.

Этот результат можно обобщить следующим образом. Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево с бесконечным множеством вершин. Предположим, что существуют функция $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и константа $C_* \geqslant 1$ такие, что $\psi(0) = 0$, $\psi(x) \underset{x\to\infty}{\to} \infty$ и для любого $0 \leqslant j \leqslant j' < \infty$, $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$

$$C_*^{-1} \cdot 2^{\psi(j')-\psi(j)} \leqslant \operatorname{card} \mathbf{V}_{j'-j}^{\mathcal{A}}(\xi) \leqslant C_* \cdot 2^{\psi(j')-\psi(j)} \tag{25}$$

(такие деревья назовем слабо регулярными). Пусть u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$,

$$u(\xi) = u_j, \quad w(\xi) = w_j \quad \text{при} \quad \xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0), \tag{26}$$

$w \in l_q(\mathcal{A})$.

Пусть $\sigma = \sigma(p, q) > 0$ удовлетворяет системе неравенств

$$\sigma \leqslant \min\left\{\frac{1}{16}, \left(\frac{p'}{4p}\right)^3\right\}, \tag{27}$$

$$a_0 \left(1 - \frac{2p}{p'}\sigma^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{p}} \leqslant \tilde{a}, \quad \tilde{a}^{p'} \frac{1}{1-\sigma^{\frac{1}{3}}} \leqslant a_*^{p'}, \tag{28}$$

где

$$a_0 = \max\left\{2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \left(\varepsilon_0^{\frac{p}{q}} + (1-\varepsilon_0)^{\frac{p}{q}}\right)^{-\frac{1}{p}}\right\}, \quad \tilde{a} = \frac{a_0+1}{2}, \quad a_* = \frac{\tilde{a}+1}{2}, \tag{29}$$

$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p, q) \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ таково, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнено неравенство $(1-\varepsilon)^{\frac{p}{q}} + \frac{\varepsilon^{\frac{p}{q}}}{2} \geqslant 1$.

Построим по индукции последовательность $\{j_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$. Положим $j_0 = 0$. Пусть j_k определено для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$. Положим

$$j_{k+1} = \min\left\{j \geqslant j_k : \sum_{i=j}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j)} \leqslant C_*^{-2}\sigma(p, q)^q \sum_{i=j_k}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_k)}\right\}. \tag{30}$$

Для любого $j \geqslant j_k$

$$\sum_{i=j}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j)} \leqslant 2^{\psi(j_k)-\psi(j)} \sum_{i=j_k}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_k)}.$$

Так как выполнено (25), $w \in l_q(\mathcal{A})$ и $\psi(j) \underset{j\to\infty}{\to} \infty$, мы получаем, что j_{k+1} корректно определено и $j_{k+1} \geqslant j_k + 1$. Кроме того,

$$\text{если} \quad j_k \leqslant j < j_{k+1}, \quad \text{то} \quad 2^{\psi(j)-\psi(j_k)} \leqslant C_*^2 \sigma(p, q)^{-q}. \tag{31}$$

Теорема 7. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $(\mathcal{A}, \xi_0)$ и u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$ удовлетворяют (25) и (26) для $0 \leqslant j < \infty$, $w \in l_q(\mathcal{A})$. Пусть $\{j_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ — последовательность, определенная выше. Положим $\mathfrak{Z} = (p, q, C_*)$. Тогда*

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} \sup_{k\geqslant 0} \left(\sum_{j_k \leqslant i \leqslant j_{k+1}-1} u_i^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=j_{k+1}-1}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_{k+1}-1)}\right)^{1/q} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}$$

$$\asymp \sup_{j\geqslant 0} \left(\sum_{0\leqslant i\leqslant j} u_i^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j)}\right)^{1/q}.$$

Теперь рассмотрим случай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < q < \infty$, $p \geqslant q$.

Пусть $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево, такое, что $\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{A}) = \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_N(\xi_0)$. Предположим, что существуют функция $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и константа $C_* \geqslant 1$ такие, что $\psi(0) = 0$ и для любого $0 \leqslant j \leqslant j' < N+1$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_j(\xi_0)$ выполнено (25). Пусть $u, w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$ удовлетворяют (26).

Обозначим через $\overline{\mathfrak{S}}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}$ минимальную константу C в неравенстве

$$\left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})} w^q(\xi) \left(\sum_{\xi' \leqslant \xi} u(\xi') f(\xi')\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \|f\|_{l_p(\mathcal{A})},$$

$$f : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+, \quad f(\xi) = f_j, \quad \xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_j(\xi_0), \quad 0 \leqslant j < N+1.$$

Для таких функций f

$$\left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})} w^q(\xi) \left(\sum_{\xi' \leqslant \xi} u(\xi') f(\xi')\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \underset{C_*, q}{\overset{(25),(26)}{\asymp}} \left(\sum_{j=0}^{N} w_j^q \cdot 2^{\psi(j)} \left(\sum_{i=0}^{j} u_i f_i\right)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|f\|_{l_p(\mathcal{A})} \underset{C_*}{\overset{(25)}{\asymp}} \left(\sum_{j=0}^{N} f_j^p \cdot 2^{\psi(j)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(если $C_* = 1$, то выполнены точные равенства). Положим

$$\hat{w}_j = w_j \cdot 2^{\frac{\psi(j)}{q}}, \quad \hat{u}_j = u_j \cdot 2^{-\frac{\psi(j)}{p}}, \quad 0 \leqslant j < N+1. \tag{32}$$

Тогда $\overline{\mathfrak{S}}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{C_*,q}{\asymp} \mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$, где $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$ — наименьшая константа в неравенстве

$$\left(\sum_{j=0}^{N} \hat{w}_j^q \left(\sum_{i=0}^{j} \hat{u}_i \varphi_i\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{j=0}^{N} \varphi_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \varphi_j \geqslant 0, \quad 0 \leqslant j < N+1. \tag{33}$$

Кроме того, если $C_* = 1$, то выполнено точное равенство.

Теорема 8. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $p \geqslant q$. Предположим, что выполнены условия (25) и (26). Тогда*

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{p,q,C_*}{\asymp} \mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}} \underset{C_*,q}{\asymp} \overline{\mathfrak{S}}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}; \tag{34}$$

если $C_* = 1$, то $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} = \mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}} = \overline{\mathfrak{S}}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}$.

Аналогичный результат для весовых операторов интегрирования на метрическом дереве будет сформулирован в конце главы 3 (см. теорему 3.3.1); в том числе, будет получено обобщение результата Наймарк и Соломяка [154]. Определение этих операторов дано в §3.1.

Оценки величин $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$ были получены Хайнигом, Андерсеном и Беннеттом [66, 70, 117]. Их результат при $p \geqslant 1$ формулируется следующим образом.

Теорема B. [66,70,117]. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $\hat{u} = \{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, $\hat{w} = \{\hat{w}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — неотрицательные последовательности, такие, что*

$$M_{\hat{u},\hat{w}} := \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \hat{w}_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=0}^{m} \hat{u}_n^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \quad \textit{при} \quad 1 < p \leqslant q < \infty,$$

$$M_{\hat u,\hat w} := \sup_{m\in\mathbb{Z}_+} \hat u_m \sum_{n=m}^{\infty} \hat w_n \quad \textit{при} \quad p=q=1,$$

$$M_{\hat u,\hat w} := \left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\Bigl(\sum_{n=m}^{\infty}\hat w_n^q\Bigr)^{\frac{1}{p}}\Bigl(\sum_{n=0}^{m}\hat u_n^{p'}\Bigr)^{\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{pq}{p-q}}\hat w_m^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < \infty$$

$$\textit{при} \quad 1\leqslant p\leqslant\infty, \quad q<p.$$

Пусть $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat u,\hat w}$ *— минимальная константа* C *в неравенстве*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat w_n\sum_{k=0}^{n}\hat u_k f_k\right|^q\right)^{1/q} \leqslant C\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}|f_n|^p\right)^{1/p}, \quad \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\in l_p.$$

Тогда $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat u,\hat w} \underset{p,q}{\asymp} M_{\hat u,\hat w}$.

Пример 3. *Пусть* $1<p=q<\infty$, $(\mathcal{A},\xi_0)$ *и* u, w *— такие, как в примере 1 с* Λ_*, Ψ_u, Ψ_w, *удовлетворяющими (22). Тогда выполнены условия теоремы 8. Здесь* $2^{\psi(j)} = 2^{\theta sj}(sj+1)^{\gamma_*}$, $\hat w_j = (sj+1)^{-\alpha_w+\frac{\gamma_*}{q}}$, $\hat u_j = (sj+1)^{-\alpha_u-\frac{\gamma_*}{q}}$. *Применяя теорему B, мы получаем, что* $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}<\infty$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha_w>\frac{1+\gamma_*}{q}$ *и* $\alpha_u+\alpha_w\geqslant 1$. *Заметим, что выполнены условия (18) и (19), и* $M_0<\infty$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha_w>\frac{1+\gamma_*}{q}$ *и* $\alpha_u+\alpha_w\geqslant\frac{1}{q}$ *(здесь* M_0 *такое, как в теореме 5; это доказывается точно так же, как в случае* $1<p<q<\infty$*). Тем самым, теорема 4 неверна при* $p=q$.

В **главе 4** получены достаточные условия вложения класса $W^r_{p,g}(\Omega)$ в пространство $L_{q,v}(\Omega)$ в случае, когда область Ω удовлетворяет условию Джона, а веса g и v являются функциями расстояния до некоторого h-множества $\Gamma\subset\Omega$.

Теоремы вложения для области Ω с липшицевой границей и весами, являющимися функциями расстояния до k-мерной поверхности $\Gamma\subset\Omega$, были получены в работах [59, 62, 95, 120–124, 127, 128, 131, 155]. Случай $r=1$, $p=q$ был изучен в работах Нечаса [155] (степенные веса, $\Gamma=\partial\Omega$), Куфнера [127] (веса — степенные функции расстояния до точки), Яковлева [62] (веса являются функциями расстояния до k-мерной поверхности), Кадлеца и Куфнера [123, 124] (случай степенных весов с логарифмическим множителем, $\Gamma=\partial\Omega$), Куфнера [128] (веса — произвольные функции расстояния до $\partial\Omega$). При $p=q$, $r\in\mathbb{N}$, $\Gamma=\partial\Omega$ для степенных весов теорема вложения была получена А. Эль Колли [95]. Применяя интерполяцию функциональных пространств, Х. Трибель [59] обобщил этот результат для случая $p\leqslant q$. В случае $p=q$, $r=1$, k-мерной поверхности Γ и весов общего вида Куфнер и Опиц [131] получили достаточные условия для компактности вложений. Для $p>q$, $r\in\mathbb{N}$, произвольной k-мерной поверхности Γ и степенных весов критерий вложения был получен в [120–122]. В [122] при $r=1$ также был получен критерий в случае весов общего вида, являющихся функцией расстояния до поверхности.

Отметим, что при $p\geqslant q$ при доказательстве теорем вложения использовалось двухвесовое неравенство Харди.

В [77,119] рассматривались задачи о вложениях весовых пространств Соболева на неограниченных областях с весами, являющимися степенью расстояния до границы области.

В [105] были получены достаточные условия вложения в случае $r=1$ и весов общего вида (не являющихся, вообще говоря, функциями расстояния до множества). Норма в весовом пространстве Соболева определялась как

$\|f\|_{g,w} = \left\|\frac{\nabla f}{g}\right\|_{L_p(\Omega)} + \|wf\|_{L_p(\Omega)}$. Идея доказательства состояла в следующем. По весовым функциям строилось покрытие Безиковича области Ω, на каждом из шаров применялась теорема вложения Соболева, затем проводилось суммирование по шарам. Здесь существенно использовался второй вес w, на который были наложены достаточно жесткие ограничения. Если граница $\partial\Omega$ липшицева, весовые функции являются степенью расстояния до границы, то ограничения на функцию w можно ослабить, применив другой метод доказательства (с использованием неравенства Харди). В [106] были получены теоремы вложения в случае, когда Ω имеет гельдерову границу, а веса являются степенями расстояния до $\partial\Omega$.

В [4–7, 35, 37, 38, 81] были получены достаточные условия вложения весовых пространств Соболева порядка r с весами общего вида. Здесь снова в определение весового пространства Соболева входили условия на младшие производные. В [35, 37, 38, 81] эти условия существенно использовались и вблизи границы области. Это позволяло рассматривать произвольные области.

В [4–7] условия на младшие производные вблизи границы были не очень ограничительными или даже отсутствовали. При этом учитывалась геометрия области (предполагалось условие гибкого σ-конуса). Идея доказательства состояла в построении интегрального представления для функции и оценки нормы специальных интегральных операторов. Сначала доказывались слабые оценки, а затем применялись интерполяционные методы. Здесь существенно использовалось условие $p < q$. Кроме того, в случае степенных весов (см. [7]) функция v была ограниченной.

Также отметим работу [141], в которой для $r = 1$, $p = q$ и весов, являющихся степенью расстояния до нерегулярной границы области, получена теорема вложения $\mathring{W}^1_{p,g}(\Omega)$ в $L_{p,v}(\Omega)$. Здесь $\mathring{W}^1_{p,g}(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega) \cap W^1_{p,g}(\Omega)$ относительно полунормы $\|f\|_{W^1_{p,g}(\Omega)} := \left\|\frac{\nabla f}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}$.

Обозначим через $\mathbb{H}$ множество неубывающих положительных функций, определенных на $(0, 1]$.

Введем понятие h-множества в соответствии с [76].

Определение 5. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — непустой компакт, $h \in \mathbb{H}$. Скажем, что Γ является h-множеством, если существуют $c_* \geqslant 1$ и конечная счетно-аддитивная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такие, что $\operatorname{supp}\mu = \Gamma$ и для любого $x \in \Gamma$, $t \in (0, 1]$ выполнено

$$c_*^{-1}h(t) \leqslant \mu(B_t(x)) \leqslant c_* h(t). \qquad (35)$$

Заметим, что мера μ неотрицательна.

Пример 4. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — липшицева поверхность размерности k, $0 \leqslant k < d$. Тогда Γ является h-множеством с $h(t) = t^k$.*

Пример 5. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — снежинка Коха. Тогда Γ является h-множеством с $h(t) = t^{\log 4/\log 3}$ (см. [151, p. 66-68]).*

Понятие h-множества для функций h специального вида возникло раньше (см. работы Эдмундса, Трибеля и Моура [92, 93, 152, 175]). В этих и других работах (см., например, [76, 80, 159, 160, 176]) изучались свойства оператора $\operatorname{tr}|_\Gamma$ ограничения на h-множество или его композиции с оператором $(\Delta)^{-1}$ в пространствах Бесова и Трибеля – Лизоркина. В [109] изучались пространства Бесова с весами, удовлетворяющими условию Макенхаупта, и в качестве примеров рассматривались веса, являющиеся функцией расстояния до h-множества, при подходящих значениях параметров.

Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ — ограниченная область, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество. Далее для удобства считаем, что $\overline{\Omega} \subset \left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)^d$ (здесь $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω). Общий случай можно свести к этому заменой переменных.

Пусть $|\cdot|$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^d$. Расстояние от точки до множества определим формулой (7). Рассмотрим веса вида

$$g(x) = \varphi_g(\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma)), \quad v(x) = \varphi_v(\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma)), \tag{36}$$

где $\varphi_g,\, \varphi_v : (0,\, \infty) \to (0,\, \infty)$. Предположим, что существует $c_0 \geqslant c_*$ такое, что

$$\frac{h(t)}{h(s)} \leqslant c_0, \quad \frac{\varphi_g(t)}{\varphi_g(s)} \leqslant c_0, \quad \frac{\varphi_v(t)}{\varphi_v(s)} \leqslant c_0, \quad j \in \mathbb{N}, \;\; t,\, s \in [2^{-j-1},\, 2^{-j+1}]. \tag{37}$$

Для таких функций g и v получены достаточные условия существования непрерывного вложения $W^r_{p,g}(\Omega)$ в $L_{q,v}(\Omega)$.

В силу эквивалентности норм на $\mathbb{R}^d$ и (37), без ограничения общности можно считать, что $|(x_1,\, \dots,\, x_d)| = \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i|$.

Всюду далее считаем, что $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Пусть

$$\overline{u}_j = \varphi_g(2^{-j}) \cdot 2^{-\left(r - \frac{d}{p}\right)j}, \quad \overline{w}_j = \varphi_v(2^{-j}) \cdot 2^{-\frac{dj}{q}}. \tag{38}$$

Сформулируем основные результаты этой главы.

Напомним, что множество полиномов $\mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ определяется формулой (10).

Обозначим $\mathfrak{Z} = (p,\, q,\, r,\, d,\, a,\, c_0)$.

Теорема 9. *Пусть $\overline{u}_j$, $\overline{w}_j$ определены формулой (38), $1 < p < q < \infty$, $\delta > 0$. Предположим, что существуют $l_0 \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in (0,\, 1)$ такие, что*

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=j+l_0}^{\infty} \frac{h(2^{-4(j+l_0)})}{h(2^{-4i})} \overline{w}_{4i}^q\right)^{1/q}}{\left(\sum\limits_{i=j}^{\infty} \frac{h(2^{-4j})}{h(2^{-4i})} \overline{w}_{4i}^q\right)^{1/q}} \leqslant c_0^{-18/q}\lambda, \quad j \geqslant 0. \tag{39}$$

Пусть

$$M := \sup_{j\geqslant 0} \overline{u}_j \left(\sum_{i=j}^{\infty} \frac{h(2^{-j})}{h(2^{-i})} \overline{w}_i^q\right)^{1/q} < \infty.$$

Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и существует линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z},\, \lambda,\, l_0}{\lesssim} M \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega)}.$$

Теорема 10. *Пусть $\overline{u}_j$, $\overline{w}_j$ определены формулой (38), $1 < p < q < \infty$, $\delta > 0$. Предположим, что*

$$M := \sup_{j\geqslant 0} \left(\sum_{0\leqslant i\leqslant j} \overline{u}_i^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \overline{w}_i^q \cdot \frac{h(2^{-j})}{h(2^{-i})}\right)^{1/q} < \infty.$$

Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и существует линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} M \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega)}.$$

Теорема 11. *Пусть $\overline{u}_j$, $\overline{w}_j$ определены формулой (38), $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $p \geqslant q$. Положим $\hat{w}_j = \overline{w}_j \cdot \left[\frac{h(2^{-j})}{h(1)}\right]^{-\frac{1}{q}}$, $\hat{u}_j = \overline{u}_j \cdot \left[\frac{h(2^{-j})}{h(1)}\right]^{\frac{1}{p}}$. Пусть*

$$M := \sup_{0\leqslant j<\infty} \Big(\sum_{i=j}^{\infty} \hat{w}_i^q\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{i=0}^{j} \hat{u}_i^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad \textit{если} \quad 1 < p = q < \infty,$$

$$M := \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\Big(\sum_{i=j}^{\infty} \hat{w}_i^q\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=0}^{j} \hat{u}_i^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{pq}{p-q}} \hat{w}_j^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < \infty, \quad \textit{если} \quad q < p.$$

Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и существует линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} M \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega)}.$$

В **главе 5** получены порядковые оценки поперечников весовых классов Соболева на области с условием Джона и с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества.

Далее мы рассматриваем функцию $h \in \mathbb{H}$, в окрестности нуля имеющую вид

$$h(t) = t^{\theta}\Lambda(t), \quad 0 \leqslant \theta < d, \tag{40}$$

где $\Lambda : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ — абсолютно непрерывная функция, такая что

$$\frac{t\Lambda'(t)}{\Lambda(t)} \underset{t\to+0}{\to} 0. \tag{41}$$

Всюду мы будем использовать обозначение $\log x = \log_2 x$.

Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ — ограниченная область, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество. Снова будем предполагать, что $\overline{\Omega} \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$. Пусть $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$, β_g, $\beta_v \in \mathbb{R}$, $g(x) = \varphi_g(\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x, \Gamma))$, $v(x) = \varphi_v(\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x, \Gamma))$ (т.е. выполнено (36)),

$$\varphi_g(t) = t^{-\beta_g}\Psi_g(t), \;\; \varphi_v(t) = t^{-\beta_v}\Psi_v(t), \tag{42}$$

где Ψ_g и Ψ_v — абсолютно непрерывные функции,

$$\frac{t\Psi_g'(t)}{\Psi_g(t)} \underset{t\to+0}{\to} 0, \;\; \frac{t\Psi_v'(t)}{\Psi_v(t)} \underset{t\to+0}{\to} 0. \tag{43}$$

Сначала рассмотрим случай

$$\beta_v < \frac{d-\theta}{q}. \tag{44}$$

Будем предполагать, что

$$\text{a) } \beta_g + \beta_v < \delta - \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+ \qquad \text{или b) } \beta_g + \beta_v = \delta - \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+, \tag{45}$$

при этом

$$\begin{gathered}\Lambda(t) = |\log t|^{\gamma}\tau(|\log t|), \;\; \Psi_g(t) = |\log t|^{-\alpha_g}\rho_g(|\log t|), \\ \Psi_v(t) = |\log t|^{-\alpha_v}\rho_v(|\log t|) \quad \text{в случае b),}\end{gathered} \tag{46}$$

где ρ_g, ρ_v и τ — абсолютно непрерывные функции,

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y\tau'(y)}{\tau(y)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y\rho_g'(y)}{\rho_g(y)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y\rho_v'(y)}{\rho_v(y)}=0, \tag{47}$$

$$\alpha:=\alpha_g+\alpha_v>(1-\gamma)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+; \quad \gamma<0 \quad \text{при} \quad \theta=0. \tag{48}$$

Отметим, что в этом случае функции Λ, Ψ_g и Ψ_v удовлетворяют (41) и (43) соответственно.

Замечание 2. Если функции Ψ_g и Ψ_v (ρ_g и ρ_v) удовлетворяют (43) (соответственно (47)), то их произведение и любая их степень удовлетворяет аналогичному условию.

Замечание 3. Брикки в [76] доказал существование h-множества $\Gamma\subset\left(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)^d$ при некоторых условиях на функцию h. Если $\theta>0$, то $h(t)=t^\theta\Lambda(t)$ удовлетворяет этим условиям. Если $\theta=0$ и Λ удовлетворяет (46), (47), то, проводя аналогичные рассуждения с небольшими изменениями, также можно построить h-множество. Кроме того, из построения следует, что $\Omega:=\left(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)^d\backslash\Gamma$ является областью с условием Джона и $\Gamma\subset\partial\Omega$.

Положим

$$\beta=\beta_g+\beta_v, \quad \rho(y)=\rho_g(y)\rho_v(y), \quad \Psi(y)=\Psi_g(y)\Psi_v(y),$$

$\mathfrak{Z}=(r,\,d,\,p,\,q,\,g,\,v,\,h,\,a,\,c_*)$, $\mathfrak{Z}_*=(\mathfrak{Z},\,R)$, где c_* — константа из определения 5 и $R=\operatorname{diam}\Omega$.

Обозначим $\psi_\Lambda(y)=\frac{1}{\Lambda\left(\frac{1}{y}\right)}$. Тогда $\psi_\Lambda\in AC(0,\,\infty)$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y\psi_\Lambda'(y)}{\psi_\Lambda(y)}=0$.

Пусть $\gamma_*>0$, $\psi_*\in AC(0,\,\infty)$, $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y\psi_*'(y)}{\psi_*(y)}=0$. Будет показано (см. лемму 5.1.1), что при достаточно больших x уравнение

$$y^{\gamma_*}\psi_*(y)=x$$

имеет единственное решение $y(x)$. Более того,

$$y(x)=x^{\frac{1}{\gamma_*}}\varphi_*(x),$$

где φ_* — абсолютно непрерывная функция и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\varphi_*'(x)}{\varphi_*(x)}=0$. Обозначим функцию φ_* через $\varphi_{\gamma_*,\psi_*}$.

Теорема 12. *Существует $n_0=n_0(\mathfrak{Z})$ такое, что для любого $n\geqslant n_0$ выполнены следующие утверждения.*

1. *Пусть $\theta>0$ и выполнено условие (45), a).*

   - *Пусть $p\geqslant q$ или $p<q$, $\hat q\leqslant 2$. Положим*

     $$\theta_1=\frac{\delta}{d}-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+, \quad \theta_2=\frac{\delta-\beta}{\theta}-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+, \tag{49}$$

     $$\sigma_1(n)=1, \quad \sigma_2(n)=\Psi(n^{-1/\theta}\varphi^{-1}_{\theta,\psi_\Lambda}(n))\varphi^{\beta-\delta}_{\theta,\psi_\Lambda}(n). \tag{50}$$

     Также предположим, что $\theta_1\neq\theta_2$, $j_*\in\{1,\,2\}$,

     $$\theta_{j_*}=\min\{\theta_1,\,\theta_2\}.$$

     Тогда

     $$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\,L_{q,v}(\Omega))\underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp}n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

- *Пусть $p < q$, $\hat{q} > 2$. Обозначим*
$$\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\}, \quad \theta_2 = \frac{\hat{q}\delta}{2d}, \tag{51}$$
$$\theta_3 = \frac{\delta-\beta}{\theta} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\}, \quad \theta_4 = \frac{\hat{q}(\delta-\beta)}{2\theta}, \tag{52}$$
$$\begin{gathered}\sigma_1(n) = \sigma_2(n) = 1, \quad \sigma_3(n) = \Psi(n^{-1/\theta}\varphi^{-1}_{\theta,\psi_\Lambda}(n))\varphi^{\beta-\delta}_{\theta,\psi_\Lambda}(n), \\ \sigma_4(n) = \sigma_3(n^{\hat{q}/2}).\end{gathered} \tag{53}$$
Предположим, что существует $j_* \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$ такое, что
$$\theta_{j_*} < \min_{j\ne j_*} \theta_j. \tag{54}$$
Тогда
$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

2. *Предположим, что $\theta > 0$ и выполнено условие (45), b). Тогда*
$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} (\log n)^{-\alpha+(1-\gamma)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}\rho(\log n)\tau^{-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}(\log n).$$

3. *Предположим, что $\theta = 0$ и выполнено условие (45), b). Обозначим $\tau^{-1}(x) = \frac{1}{\tau(x)}$.*

- *Пусть $p \geqslant q$ или $p < q$, $\hat{q} \leqslant 2$. Положим*
$$\theta_1 = \frac{\delta}{d} - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+, \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{1-\gamma} - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+, \tag{55}$$
$$\sigma_1(n) = 1, \quad \sigma_2(n) = \rho\left(n^{\frac{1}{1-\gamma}}\varphi_{1-\gamma,\tau^{-1}}(n)\right)\varphi^{-\alpha}_{1-\gamma,\tau^{-1}}(n). \tag{56}$$
Пусть $\theta_1 \ne \theta_2$, $j_* \in \{1,\, 2\}$,
$$\theta_{j_*} = \min\{\theta_1,\, \theta_2\}.$$
Тогда
$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

- *Пусть $p < q$ и $\hat{q} > 2$. Обозначим*
$$\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\}, \quad \theta_2 = \frac{\hat{q}\delta}{2d}, \tag{57}$$
$$\theta_3 = \frac{\alpha}{1-\gamma} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\}, \quad \theta_4 = \frac{\hat{q}\alpha}{2(1-\gamma)}, \tag{58}$$
$$\begin{gathered}\sigma_1(n) = \sigma_2(n) = 1, \quad \sigma_3(n) = \rho\left(n^{\frac{1}{1-\gamma}}\varphi_{1-\gamma,\tau^{-1}}(n)\right)\varphi^{-\alpha}_{1-\gamma,\tau^{-1}}(n), \\ \sigma_4(n) = \sigma_3(n^{\hat{q}/2}).\end{gathered} \tag{59}$$
Предположим, что существует $j_* \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$ такое, что
$$\theta_{j_*} < \min_{j\ne j_*} \theta_j. \tag{60}$$
Тогда
$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

4. Пусть $\theta = 0$ и выполнено условие (45), a).

- *Если $p \geqslant q$ или $p < q$, $\hat{q} \leqslant 2$, то*

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\frac{\delta}{d}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}.$$

- *Пусть $p < q$, $\hat{q} > 2$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q},\, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\}$, $\theta_2 = \frac{\hat{q}\delta}{2d}$, $\theta_1 \neq \theta_2$. Тогда*

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\min\{\theta_1,\,\theta_2\}}.$$

Также показано (см. замечание 5.2.1), что если вместо (45), a) выполнено $\beta_g + \beta_v > \delta - \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$, или если выполнено (45), b) и $\alpha < (1-\gamma)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$, то множество $W^r_{p,g}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)$ неограниченно в $L_{q,v}(\Omega)$. Кроме того (см. замечание 5.2.2), $\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) = \infty$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$. Взяв $\vartheta_n = d_n$, получаем, что не существует конечномерного подпространства $L \subset L_{q,v}(\Omega)$ и ограниченного множества $M \subset L_{q,v}(\Omega)$ таких, что $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L + M$.

В случае, когда Γ — одноточечное множество, тем же методом доказывается, что оценки поперечников задаются формулами из пункта 3 теоремы 12 с $\gamma = 0$ и $\tau \equiv 1$ (более подробное доказательство описано в [190]).

Если вместо $W^r_{p,g}(\Omega)$ рассмотреть приведенный класс Соболева $\hat{W}^r_{p,g}(\Omega) = \{f - Pf :\ f \in W^r_{p,g}(\Omega)\}$, где $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ — линейный непрерывный оператор из теорем 9, 11, то поперечники имеют те же порядки. Кроме того, в этом случае можно рассмотреть оператор вложения $I : \operatorname{span} \hat{W}^r_{p,g}(\Omega) \to L_{q,v}(\Omega)$, и определить для него аппроксимативные и гельфандовские числа. Оценки этих чисел получаются из (3) и оценок поперечников.

В работе Трибеля [177] был получен следующий результат. Пусть

$$g(x) = |x|^{-r}(1 + |\log|x||)^{-\alpha}.$$

Обозначим через $C_0^r(B_1(0))$ множество функций, имеющих непрерывные производные порядка не выше r и таких, что $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{int} B_1(0)$. Для $f \in C_0^r(B_1(0))$ положим $\|f\|_{W^r_{p,g}(B_1(0))} = \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(B_1(0))}$. Пусть $\mathring{W}^r_{p,g}(B_1(0))$ — замыкание множества

$$\left\{f \in C_0^r(B_1(0)) : \|f\|_{W^r_{p,g}(B_1(0))} \leqslant 1\right\}$$

в $L_p(B_1(0))$ относительно нормы $\|\cdot\|_{W^r_{p,g}(B_1(0))}$. Если $\alpha > 1 + \frac{r}{d}$, то

$$a_n(\mathring{W}^r_{p,g}(B_1(0)),\, L_p(B_1(0))) \underset{r,d,p,\alpha}{\asymp} n^{-\frac{r}{d}},$$

а если $0 < \alpha \leqslant 1 + \frac{r}{d}$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$n^{-\min\{\alpha,\, r/d\}} \underset{r,d,p,\alpha}{\lesssim} a_n(\mathring{W}^r_{p,g}(B_1(0)),\, L_p(B_1(0))) \underset{r,d,p,\alpha,\varepsilon}{\lesssim} n^{-\alpha\frac{r}{r+d}+\varepsilon}.$$

В случае, когда Ω имеет гладкую границу, $\Gamma = \partial\Omega$ и $\theta_1 := \frac{\delta}{d} \neq \frac{\delta-\beta}{d-1} =: \theta_2$, в [60] получена оценка сверху

$$d_n(\mathring{W}^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} n^{-\min\{\theta_1,\,\theta_2\}}.$$

Тем самым, теорема 12 и ее предельный вариант с одноточечным множеством Γ дают обобщение и уточнение результатов [60, 177].

Теперь рассмотрим случай

$$\beta_v = \frac{d-\theta}{q}, \quad \alpha_v > \frac{1-\gamma}{q}. \tag{61}$$

Предполагаем, что

$$h(t) = t^{\theta}|\log t|^{\gamma}\tau(|\log t|), \quad 0 < \theta < d, \tag{62}$$

$$\varphi_g(t) = t^{-\beta_g}|\log t|^{-\alpha_g}\rho_g(|\log t|), \quad \varphi_v(t) = t^{-\beta_v}|\log t|^{-\alpha_v}\rho_v(|\log t|), \tag{63}$$

где ρ_g, ρ_v и τ — абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие (47). Снова положим $\beta = \beta_g + \beta_v$, $\alpha = \alpha_g + \alpha_v$, $\rho(y) = \rho_g(y)\rho_v(y)$, $\mathfrak{Z} = (r, d, p, q, g, v, h, a, c_*)$, $\mathfrak{Z}_* = (\mathfrak{Z}, R)$.

Теорема 13. *Существует $n_0 = n_0(\mathfrak{Z})$ такое, что для любого $n \geqslant n_0$ выполнено следующее утверждение.*

1. *Пусть $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+ < 0$. Обозначим*

$$\sigma_*(n) = (\log n)^{-\alpha + \frac{1}{q} + \frac{(\beta-\delta)\gamma}{\theta}}\rho(\log n)\tau^{\frac{\beta-\delta}{\theta}}(\log n).$$

- *Пусть $p \geqslant q$ или $p < q$, $\hat{q} \leqslant 2$. Положим*

$$\theta_1 = \frac{\delta}{d} - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+, \quad \theta_2 = \frac{\delta-\beta}{\theta} - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+, \tag{64}$$

$$\sigma_1(n) = 1, \quad \sigma_2(n) = \sigma_*(n). \tag{65}$$

Предположим, что $\theta_1 \neq \theta_2$, $j_* \in \{1, 2\}$,

$$\theta_{j_*} = \min\{\theta_1, \theta_2\}.$$

Тогда

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

- *Пусть $p < q$, $\hat{q} > 2$. Положим*

$$\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\}, \quad \theta_2 = \frac{\hat{q}\delta}{2d}, \tag{66}$$

$$\theta_3 = \frac{\delta-\beta}{\theta} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right\}, \quad \theta_4 = \frac{\hat{q}(\delta-\beta)}{2\theta}, \tag{67}$$

$$\sigma_1(n) = \sigma_2(n) = 1, \quad \sigma_3(n) = \sigma_4(n) = \sigma_*(n). \tag{68}$$

Предположим, что существует такое $j_* \in \{1, 2, 3, 4\}$, что

$$\theta_{j_*} < \min_{j \neq j_*}\theta_j. \tag{69}$$

Тогда

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

2. Пусть $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+ = 0$. Также предположим, что $\alpha_0 := \alpha - \frac{1}{q} > 0$ в случае $p < q$ и $\alpha_0 := \alpha - 1 - (1-\gamma)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) > 0$ в случае $p \geqslant q$. Тогда

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} (\log n)^{-\alpha_0}\rho(\log n)\tau^{-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}(\log n).$$

Кроме того (см. замечание 5.2.4), если выполнено (61) и при этом $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+ = 0$, $\alpha < \frac{1}{q}$ в случае $1 < p < q < \infty$ и $\alpha < 1 + (1-\gamma)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ в случае $p \geqslant q$, то $\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) = \infty$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$. В частности, взяв $\vartheta_n = d_n$, получим, что не существует конечномерного подпространства $L \subset L_{q,v}(\Omega)$ и ограниченного множества $M \subset L_{q,v}(\Omega)$ таких, что $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L + M$.

Оценки в теоремах 12 (при дополнительном предположении, что выполнено (62) и (63)) и 13 отличаются показателями при логарифмах.

Замечание 4. Из теоремы A следует, что при $\frac{\delta-\beta}{\theta} > \frac{\delta}{d}$ порядковые оценки поперечников в теоремах 12 и 13 такие же, как в невесовом случае.

В заключение отметим, что методы доказательства теорем 12 и 13 позволяют получать оценки поперечников весовых классов Соболева на метрических деревьях. Подробнее этот результат описан в [192].

В **главе 6** получены порядковые оценки поперечников весовых классов Бесова с весами, имеющими особенность в точке.

Введем необходимые определения в соответствии с [111].

Определение 6. Пусть $w : \mathbb{R}^d \to (0, +\infty)$ — локально интегрируемая функция, $1 < p < \infty$. Скажем, что w принадлежит классу Макенхаупта $\mathcal{A}_p$, если существует константа $A > 0$ такая, что для любого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ выполнено следующее неравенство:

$$\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w^{-p'/p}(x)\,dx\right)^{1/p'} \leqslant A. \qquad (70)$$

Положим $\mathcal{A}_\infty = \cup_{p>1}\mathcal{A}_p$.

Пусть $w : \mathbb{R}^d \to (0, +\infty)$, $0 < p < +\infty$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Обозначим

$$\|f\|_{L_p(w)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p},$$

$\|f\|_{L_\infty(w)} = \|f\|_{L_\infty}$.

Будем обозначать через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ соответственно пространство Шварца и его сопряженное. Для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ обозначим через $\mathcal{F}(f)$ преобразование Фурье функции f.

Пусть функция $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ такова, что

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{y \in \mathbb{R}^d : |y| < 2\}, \quad \varphi(x) = 1 \text{ для } |x| \leqslant 1,$$

$\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_j(x) = \varphi(2^{-j}x) - \varphi(2^{-j+1}x)$, $j \in \mathbb{N}$.

Определение 7. Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $w \in \mathcal{A}_\infty$. Весовым пространством Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d,\, w)$ называется множество обобщенных функций $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ таких, что норма

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d,\, w)} := \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_j\mathcal{F}f)\|^q_{L_p(w)}\right)^{1/q}$$

конечна. В случае $q = \infty$ определение меняется стандартным образом.

Пространство $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d,\, w)$ является квазибанаховым, а если $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$, то это пространство банахово.

Свойства пространств Бесова с весом $w \equiv 1$ описаны в монографиях Трибеля [60, 172–175]. В [94, 108] рассмотрены пространства Бесова с допустимыми весами. Примерами таких весов являются функции $w(x) = (1 + \|x\|_2^2)^{\alpha/2}$, где $\|\cdot\|_2$ — стандартная евклидова норма на $\mathbb{R}^d$. Случай $w \in \mathcal{A}_\infty$ впервые был изучен в работе [78], более общие веса рассмотрены в [72, 99]. В работах Хароске, Скрыпчака, Пиотровской и Шнайдера [109–111] изучались различные характеристики пространств Бесова с весами Макенхаупта (например, атомарные разложения, описание в помощью всплесков, оценки роста).

Обозначим через $|\cdot|$ произвольную норму на $\mathbb{R}^d$.

Задачи об оценке энтропийных и аппроксимативных чисел операторов вложения весовых пространств Бесова изучались в работах Трибеля, Хароске, Скрыпчака, Кюна, Леопольда, Зикеля, Кетано [79, 111–113, 115, 116, 133–135, 137–139, 167]; колмогоровские и гельфандовские поперечники рассматривались в работах [100, 163, 164], а числа Вейля — в работе [100]. Кроме того, порядковые оценки колмогоровских, гельфандовских и линейных поперечников операторов вложения невесовых пространств Бесова на ограниченной области получены в работе Выбирала [180]. В [79, 116, 137, 163, 164, 167] рассмотрены веса вида $w_\alpha(x) = (1 + \|x\|_2^2)^{\alpha/2}$. В [111] получены порядковые оценки аппроксимативных и энтропийных чисел оператора $\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w) \to B^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^d)$ для

$$w(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & |x| \leqslant 1, \\ |x|^\beta, & |x| > 1. \end{cases}$$

В [112] найдено достаточное условие на вес w (в терминах условия Макенхаупта), при котором аппроксимативные числа оператора вложения $\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,\,q_1}(Q,\, w) \to B^{s_2}_{p_2,\,q_2}(Q)$ имеют такие же порядки убывания, как в невесовом случае. Здесь $Q \subset \mathbb{R}^d$ — куб,

$$B^s_{p,q}(Q,\, w) = \{f|_Q :\, f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d,\, w)\}.$$

В [113] для весовой функции

$$w(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha_1}(1 - \log |x|)^{\beta_1}, & |x| \leqslant 1, \\ |x|^{\alpha_2}(1 + \log |x|)^{\beta_2}, & |x| > 1, \end{cases}$$

получены порядковые оценки энтропийных чисел оператора $\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,\,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w) \to B^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^d)$ при некоторых условиях на параметры. При этом, параметры α_1 и β_1 не влияют на асимптотику. В [100, 139] рассмотрены веса логарифмического типа. Примерами таких весов являются непрерывные положительные функции такие, что $c_1(\log |x|)^\alpha \leqslant w(x) \leqslant c_2(\log |x|)^\alpha$ для достаточно больших $|x|$ $(0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty)$.

Аналогичные задачи для радиальных пространств Бесова изучались в [101, 136].

Для $s_1,\, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 < p_1,\, q_1 \leqslant +\infty$, $1 \leqslant p_2,\, q_2 < +\infty$ положим $\delta := s_1 - s_2 + \frac{d}{p_2} - \frac{d}{p_1}$. Мы будем рассматривать случай $1 < p_1 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$.

Пусть $\delta > 0$, $\beta_g,\, \beta_v \in \mathbb{R}$, $\beta_g + \beta_v = \delta$, $\beta_g > -\frac{d}{p_1}$, $\beta_v < \frac{d}{p_2}$, $\gamma_g > -\frac{d}{p_1}$, $\gamma_v < \frac{d}{p_2}$, $\gamma_g + \gamma_v > \delta$, $\alpha_g + \alpha_v > 0$, $\rho_g,\, \rho_v : [1,\, +\infty) \to (0,\, +\infty)$ — абсолютно непрерывные функции такие, что

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y\rho_g'(y)}{\rho_g(y)} = 0, \quad \lim_{y\to+\infty} \frac{y\rho_v'(y)}{\rho_v(y)} = 0, \tag{71}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x|^{-\beta_g}|\log_2 |x||^{-\alpha_g}\rho_g(|\log_2 |x||), \text{ если } |x| \leqslant \frac{1}{2}, \\ |x|^{-\gamma_g}, \text{ если } |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} |x|^{-\beta_v} |\log_2 |x||^{-\alpha_v} \rho_v(|\log_2 |x||), \text{ если } |x| \leqslant \frac{1}{2}, \\ |x|^{-\gamma_v}, \text{ если } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Обозначим $w_1(x) = g^{-p_1}(x)$, $w_2(x) = v^{p_2}(x)$.

Положим $\alpha = \alpha_g + \alpha_v$, $\rho(y) = \rho_g(y)\rho_v(y)$. Тогда $\alpha > 0$,

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y\rho'(y)}{\rho(y)} = 0. \tag{72}$$

Для $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$ таких, что $p_2 \geqslant 2$, мы обозначим $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$,

$$\lambda(\mathbf{p}) = \min\left\{ \frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}}, 1 \right\} \tag{73}$$

(если $p_2 = 2$, то полагаем $\lambda(\mathbf{p}) = 1$). Отметим, что если $p_2 > 2$, то

$$\lambda(\mathbf{p}) < 1 \quad \Leftrightarrow p_1 > 2. \tag{74}$$

Обозначим

$$J_* = J_*(p_1, q_1, p_2, q_2) = \begin{cases} \{1, 2, 3, 4\}, & p_2 > 2, \ q_2 > 2, \\ \{1, 2, 3\}, & p_2 > 2, \ q_2 = 2, \\ \{2, 3, 4\}, & p_2 = 2, \ q_2 > 2, \end{cases}$$

$$J_{**} = J_{**}(p_1, q_1, p_2, q_2) = \begin{cases} \{1, 2, 3, 4\}, & \min\{p_2, p_1'\} > 2, \ \min\{q_2, q_1'\} > 2, \\ \{1, 2, 3\}, & \min\{p_2, p_1'\} > 2, \ \min\{q_2, q_1'\} = 2, \\ \{2, 3, 4\}, & \min\{p_2, p_1'\} = 2, \ \min\{q_2, q_1'\} > 2. \end{cases}$$

Теорема 14. *1. Пусть $1 < p_1 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$, $p_2 \geqslant 2$, $q_2 \geqslant 2$,*

$$\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \frac{\lambda(\mathbf{p})}{2} - \frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}, \ \ \theta_2 = \frac{p_2\delta}{2d},$$

$$\theta_3 = \alpha + \frac{\lambda(\mathbf{q})}{2} - \frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}, \ \ \theta_4 = \frac{q_2\alpha}{2},$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = \frac{q_2}{2}$. Предположим, что существует $j_* \in J_*$ такое, что $\theta_{j_*} < \min_{j\in J_*\backslash\{j_*\}} \theta_j$. Тогда

$$d_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)) \overset{n}{\asymp} n^{-\theta_{j_*}} \rho(n^{\sigma_{j_*}}).$$

2. Пусть $1 < p_1 \leqslant 2 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant 2 \leqslant q_2 < \infty$,

$$\tilde\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}\right\}, \ \ \tilde\theta_2 = \frac{\min\{p_2, p_1'\}\delta}{2d},$$

$$\tilde\theta_3 = \alpha + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_1} - \frac{1}{2}\right\}, \ \ \tilde\theta_4 = \frac{\min\{q_2, q_1'\}\alpha}{2},$$

$\tilde\sigma_1 = \tilde\sigma_2 = 0$, $\tilde\sigma_3 = 1$, $\tilde\sigma_4 = \frac{\min\{q_2, q_1'\}}{2}$. Предположим, что существует $j_* \in J_{**}$ такое, что $\tilde\theta_{j_*} < \min_{j\in J_{**}\backslash\{j_*\}} \tilde\theta_j$. Тогда

$$a_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)) =$$
$$= \lambda_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)) \overset{n}{\asymp} n^{-\tilde\theta_{j_*}} \rho(n^{\tilde\sigma_{j_*}}).$$

3. Пусть $1 < p_1 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$. *Если* $p_2 \leqslant 2$, $q_2 \leqslant 2$ *и* $\alpha \ne \frac{\delta}{d}$, *то*

$$d_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) \overset{n}{\asymp}$$
$$\asymp \lambda_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) =$$
$$= a_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) \overset{n}{\asymp} \max\{n^{-\frac{\delta}{d}},\, n^{-\alpha}\rho(n)\}.$$

Если $p_1 \geqslant 2$, $q_1 \geqslant 2$ *и* $\alpha \ne \frac{\delta}{d}$, *то*

$$\lambda_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) =$$
$$= a_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)) \overset{n}{\asymp} \max\{n^{-\frac{\delta}{d}},\, n^{-\alpha}\rho(n)\}.$$

Оценки гельфандовских чисел (или поперечников) также нетрудно получить при соответствующих условиях на параметры, применяя соотношения двойственности.

Сравним теорему 14 с известными результатами. Если $w_2(x) \equiv 1$, то $\beta_g = \delta$, $\alpha_g = \alpha$ и $\rho_g = \rho$. Если $\alpha > 0$ достаточно велико и $\tilde{\theta}_1 \ne \tilde{\theta}_2$, то

$$\lambda_n\big(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d,\, w_2)\big) \overset{n}{\asymp} n^{-\min\{\tilde{\theta}_1,\, \tilde{\theta}_2\}}. \tag{75}$$

В [111] рассматривалась функция $\overline{w}_1 = \overline{g}^{\,-p_1}(x)$ с $\beta_{\overline{g}} < \delta$, $\alpha_{\overline{g}} = 0$, $\rho_{\overline{g}}(x) \equiv 1$. Пусть $\gamma_{\overline{g}} > \delta$. Тогда $B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, \overline{w}_1) \subset B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d,\, w_1)$, и результат работы [111] об оценке аппроксимативных чисел следует из (75). Также отметим, что если α достаточно мало, то асимптотика зависит от параметров q_1 и q_2. В предыдущих результатах (см., например, [111–113, 163]), порядки поперечников и энтропийных чисел не зависели от q_i (за исключением некоторых предельных случаев, когда q_i содержались в показателе логарифмического множителя).

Доказательство теоремы 14 основано на оценках колмогоровских и линейных поперечников конечномерных шаров в смешанной норме (см. теоремы 6.1.1 и 6.2.1). Для некоторых других соотношений между параметрами оценки поперечников получены Изааком и Галеевым [17, 18, 24]. В этих работах рассмотрены случаи $p_1 = 1$, $q_1 = \infty$, $p_2 = 2$ или $1 < p_2 \leqslant \min\{q_2,\, 2\}$, $1 \leqslant q_2 \leqslant \infty$.

Глава 1

Поперечники и s-числа весовых классов Соболева на области с условием Джона

1.1 Древоподобная структура области с условием Джона

В этой и следующей главе в качестве нормы $|\cdot|$ мы будем использовать стандартную евклидову норму: $|(x_1, \ldots, x_d)| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$.

Пусть $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k$ — деревья, не имеющие общих вершин, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, $\eta_j \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_j)$, $j = 1, \ldots, k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Обозначим через

$$\mathbf{J}(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k; \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_k, \eta_k) \tag{1.1}$$

дерево, получающееся из $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k$ соединением ребром вершин ξ_j и η_j, $j = 1, \ldots, k$.

Пусть $\mathcal{K}$ — совокупность замкнутых кубов в $\mathbb{R}^d$ с осями, параллельными осям координат. Для куба $K \in \mathcal{K}$ и $s \in \mathbb{Z}_+$ обозначим $\Xi_s(K)$ разбиение K на 2^{sd} замкнутых одинаковых по размеру неперекрывающихся кубов, $\Xi(K) := \bigcup_{s \in \mathbb{Z}_+} \Xi_s(K)$. Отметим следующее свойство семейства $\Xi(K)$, $K \in \mathcal{K}$: если $\Delta_1, \Delta_2 \in \Xi(K)$, то либо Δ_1 и Δ_2 не перекрываются, либо $\Delta_1 \in \Xi(\Delta_2)$, либо $\Delta_2 \in \Xi(\Delta_1)$.

Всюду далее меру Лебега множества $A \subset \mathbb{R}^d$ будем обозначать через $\operatorname{mes} A$ или $|A|$.

Пусть $\Theta \subset \Xi([0, 1]^d)$ — множество попарно не перекрывающихся кубов.

Определение 1.1.1. Пусть $\mathcal{G}$ — граф, $F : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \Theta$ — биекция. Скажем, что отображение F согласовано со структурой графа $\mathcal{G}$, если выполнено следующее условие: для любых соседних вершин ξ', $\xi'' \in \mathbf{V}(\mathcal{G})$ множество $\Gamma_{\xi', \xi''} := F(\xi') \cap F(\xi'')$ имеет размерность $d-1$.

Замечание 1.1.1. Если отображение F согласовано со структурой графа $\mathcal{G}$, вершины ξ' и ξ'' соседние и $\operatorname{mes} F(\xi') \geqslant \operatorname{mes} F(\xi'')$, то $F(\xi') \cap F(\xi'')$ является $(d-1)$-мерной гранью куба $F(\xi'')$.

Пусть $(\mathcal{T}, \xi_*)$ — дерево, $F : \mathbf{V}(\mathcal{T}) \to \Theta$ — биекция, согласованная со структурой дерева $\mathcal{T}$. Для соседних вершин ξ', ξ'' обозначим $\mathring{\Gamma}_{\xi', \xi''} = \operatorname{int}_{d-1} \Gamma_{\xi', \xi''}$ и для каждого поддерева $\mathcal{T}'$ в $\mathcal{T}$ положим

$$\Omega_{\mathcal{T}', F} = \left(\cup_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T}')} \operatorname{int} F(\xi)\right) \cup \left(\cup_{(\xi', \xi'') \in \mathbf{E}(\mathcal{T}')} \mathring{\Gamma}_{\xi', \xi''}\right). \tag{1.2}$$

Для $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, $\Delta = F(\xi)$ обозначим

$$\Omega_{\leqslant \Delta} = \Omega_{[\xi_*,\, \xi],F}. \tag{1.3}$$

Пусть ξ', ξ'' — соседние вершины в $\mathcal{T}$, $\Gamma_{\xi',\xi''}$ совпадает с $(d-1)$-мерной гранью $F(\xi')$ (тогда $\operatorname{mes} F(\xi') \leqslant \operatorname{mes} F(\xi'')$), x', x'' — центры $F(\xi')$ и $F(\xi'')$ соответственно. Обозначим через y ортогональную проекцию точки x' на $\Gamma_{\xi',\xi''}$,

$$\gamma_{\xi'\xi''}(t) = \begin{cases} \frac{|x'-y|-t}{|x'-y|}x' + \frac{t}{|x'-y|}y, & 0 \leqslant t \leqslant |x'-y|, \\ \frac{|x''-y|+|x'-y|-t}{|x''-y|}y + \frac{t-|x'-y|}{|x''-y|}x'', & |x'-y| \leqslant t \leqslant |x''-y| + |x'-y|, \end{cases}$$

$$\gamma_{\xi''\xi'}(t) = \begin{cases} \frac{|x''-y|-t}{|x''-y|}x'' + \frac{t}{|x''-y|}y, & 0 \leqslant t \leqslant |x''-y|, \\ \frac{|x'-y|+|x''-y|-t}{|x'-y|}y + \frac{t-|x''-y|}{|x'-y|}x', & |x''-y| \leqslant t \leqslant |x''-y| + |x'-y|. \end{cases}$$

Пусть $\Delta \in \Xi([0,\, 1]^d)$. Обозначим через $\mathbf{m}(\Delta)$ такое $m \in \mathbb{Z}_+$, что $\Delta \in \Xi_m([0,\, 1]^d)$ (т.е. $2^{-\mathbf{m}(\Delta)}$ — длина стороны Δ). Для каждой вершины $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ положим

$$m_\xi = \mathbf{m}(F(\xi)). \tag{1.4}$$

Пусть γ — кривая в $\mathbb{R}^d$. Через $|\gamma|$ будем обозначать ее длину.

Лемма 1.1.1. *Пусть $(\mathcal{T},\, v_*)$ — дерево, биективное отображение $F : \mathbf{V}(\mathcal{T}) \to \Theta$ согласовано со структурой дерева $\mathcal{T}$. Пусть существуют такие l_*, $k_* \in \mathbb{N}$, что для любых вершин v', $v'' \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, $v' > v''$, выполнено*

$$l_*(m_{v'} - m_{v''}) \geqslant \rho_{\mathcal{T}}(v',\, v'') - k_*. \tag{1.5}$$

Тогда найдется такое $\hat{a} = \hat{a}(k_*,\, l_*,\, d)$, что для любого поддерева $\mathcal{T}'$ дерева $\mathcal{T}$ множество $\Omega_{\mathcal{T}',F}$ является областью из класса $\mathbf{FC}(\hat{a})$. При этом, кривую γ_x из определения 1 можно выбрать так, что

$$B_{\hat{a}t}(\gamma_x(t)) \subset \Omega_{\leqslant F(w)}, \text{ если } x \in F(w), \tag{1.6}$$

а в качестве x_* взять центр куба $F(v)$, где v — минимальная вершина дерева $\mathcal{T}'$. Кроме того,

$$\operatorname{mes} \Omega_{\mathcal{T}',F} \underset{\hat{a},d}{\asymp} \operatorname{mes} F(v). \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}'$ — поддерево в $\mathcal{T}$, v — минимальная вершина дерева $\mathcal{T}'$, x_v — центр куба $F(v)$, $z \in \Omega_{\mathcal{T}',F}$. Тогда $z \in F(v')$, где v' — вершина $\mathcal{T}'$. Построим кривую γ_z с началом в точке z и концом в x_v следующим образом. Пусть $v_1 > v_2 > \dots > v_k$ — последовательность вершин в $\mathcal{T}'$ такая, что $v_1 = v'$, $v_k = v$, $\rho_{\mathcal{T}}(v_j,\, v_{j+1}) = 1$, $j = 1,\, \dots,\, k-1$. Обозначим через x_j центры кубов $F(v_j)$, $s_j = |\gamma_{v_{j-1}v_j}|$, $\tau_1 = |z - x_1|$, $\tau_j = \tau_{j-1} + s_j$, $2 \leqslant j \leqslant k$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{\tau_1 - t}{\tau_1}z + \frac{t}{\tau_1}x_1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \\ \gamma_{v_{j-1}v_j}(t - \tau_{j-1}), & \tau_{j-1} \leqslant t \leqslant \tau_j, \quad 2 \leqslant j \leqslant k, \end{cases}$$

$$E_t = \begin{cases} F(v_1), & 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \\ F(v_{j-1}) \cup F(v_j), & \tau_{j-1} \leqslant t \leqslant \tau_j, \quad 2 \leqslant j \leqslant k. \end{cases}$$

Для каждого $t \in [0,\, \tau_k]$ через a_t обозначим максимальный радиус открытого шара с центром в точке $\gamma(t)$, содержащегося в E_t. Покажем, что

$$a_t \underset{d,k_*,l_*}{\gtrsim} t. \tag{1.8}$$

Отсюда будет следовать первое утверждение леммы и (1.6).

Обозначим через σ_j длину стороны куба $F(v_j)$. Тогда $\tau_1 \underset{d}{\lesssim} \sigma_1$, $s_j \underset{d}{\asymp} \max\{\sigma_j, \sigma_{j-1}\}$. Заметим, что при $t \in [0, \tau_1]$ выполнено $a_t \underset{d}{\gtrsim} t$. Пусть $j \geqslant 2$, $\tau_{j-1} \leqslant t \leqslant \tau_j$, $\tilde{t}_j \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ таково, что $\gamma(\tilde{t}_j) \in \Gamma_{v_{j-1},v_j}$. Имеем

$$\begin{aligned}\tau_{j-1} = \tau_1 + \sum_{i=2}^{j-1} s_i \underset{d}{\lesssim} \sigma_1 + \sum_{i=2}^{j-1} \max\{\sigma_i, \sigma_{i-1}\} \leqslant \sum_{i=1}^{j-1} 2\sigma_i = \sum_{i=1}^{j-1} 2^{-m_{v_i}+1} = \\ = 2^{-m_{v_{j-1}}+1} \sum_{i=1}^{j-1} 2^{-m_{v_i}+m_{v_{j-1}}} \overset{(1.5)}{\underset{d,k_*,l_*}{\lesssim}} \sigma_{j-1} \sum_{i=1}^{j-1} 2^{\frac{i-j}{l_*}} \underset{l_*}{\lesssim} \sigma_{j-1}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Покажем, что

$$a_t \underset{k_*,l_*,d}{\gtrsim} \max\{t - \tilde{t}_j, \sigma_{j-1}\}. \tag{1.10}$$

В самом деле, если $t \in [\tau_{j-1}, \tilde{t}_j)$, то $\max\{t - \tilde{t}_j, \sigma_{j-1}\} = \sigma_{j-1}$; если $t \in [\tilde{t}_j, \tau_j]$, то $a_t \geqslant \frac{t-\tilde{t}_j}{2(\tau_j - \tilde{t}_j)}\sigma_j = \frac{t-\tilde{t}_j}{2|\gamma(\tilde{t}_j)-x_j|}\sigma_j \underset{d}{\gtrsim} t - \tilde{t}_j$. Из (1.5) следует, что $\min\{\sigma_j, \sigma_{j-1}\} \underset{k_*,l_*,d}{\gtrsim} \sigma_{j-1}$. Наконец, $a_t \underset{d}{\gtrsim} \min\{\sigma_j, \sigma_{j-1}\}$, откуда получаем (1.10).

Докажем (1.8). Если $t - \tilde{t}_j \leqslant \sigma_{j-1}$, то

$$t \leqslant \tilde{t}_j + \sigma_{j-1} = \tau_{j-1} + (\tilde{t}_j - \tau_{j-1}) + \sigma_{j-1} \overset{(1.9)}{\underset{d,l_*,k_*}{\lesssim}} \sigma_{j-1} \overset{(1.10)}{\underset{d,l_*,k_*}{\lesssim}} a_t.$$

Пусть $t - \tilde{t}_j > \sigma_{j-1}$. Если $t - \tilde{t}_j \leqslant \frac{t}{2}$, то

$$t \leqslant 2\tilde{t}_j = 2\tau_{j-1} + 2(\tilde{t}_j - \tau_{j-1}) \overset{(1.9)}{\underset{d,l_*,k_*}{\lesssim}} \sigma_{j-1} \overset{(1.10)}{\underset{d,l_*,k_*}{\lesssim}} a_t.$$

Если $t - \tilde{t}_j > \frac{t}{2}$, то $a_t \overset{(1.10)}{\underset{k_*,l_*,d}{\gtrsim}} t - \tilde{t}_j > \frac{t}{2}$.

Соотношение (1.7) выполнено в силу включения $F(v) \subset \Omega_{\mathcal{T}',F}$ и (9). $\square$

Определение 1.1.2. Пусть Γ — конечный ориентированный граф, $v_* \in \mathbf{V}(\Gamma)$, $k \in \mathbb{N}$. Скажем, что $(\Gamma, v_*) \in \mathfrak{G}_k$, если для любого $v \in \mathbf{V}(\Gamma)$ существует ориентированный простой путь с началом в вершине v_* и концом в v, причем длина этого пути не превосходит k.

Лемма 1.1.2. *Пусть* Γ — *конечный ориентированный граф,* $v_* \in \mathbf{V}(\Gamma)$, $k \in \mathbb{N}$, $(\Gamma, v_*) \in \mathfrak{G}_k$. *Кроме того, предположим, что* v_* *является началом всех ребер, инцидентных* v_*. *Тогда существует дерево* $\mathcal{T}$ *с корнем* v_*, *являющееся подграфом* Γ, *такое, что* $\mathbf{V}(\mathcal{T}) = \mathbf{V}(\Gamma)$ *и для любого* $v \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ *выполнено* $\rho_{\mathcal{T}}(v, v_*) \leqslant k$.

Доказательство. Сразу заметим, что граф Γ связный. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество ориентированных почти простых путей с началом в вершине v_* (это множество конечное). Для $v \neq v_*$ через $\mathcal{S}_v$ обозначим множество путей, принадлежащих $\mathcal{S}$, с концом в вершине v. Скажем, что путь принадлежит $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}(\Gamma)$, если он принадлежит $\mathcal{S}_v$ для некоторого $v \neq v_*$ и $\operatorname{card} \mathcal{S}_v \geqslant 2$.

Покажем, что

1. если $\tilde{\mathcal{S}} = \varnothing$, то Γ — дерево;

2. если $\tilde{\mathcal{S}} \neq \varnothing$, то существует граф $\tilde{\Gamma}$, получающийся из Γ удалением одного ребра (с сохранением вершин), такой, что $(\tilde{\Gamma}, v_*) \in \mathfrak{G}_k$.

Отсюда по индукции получаем утверждение леммы. В самом деле, положим $\Gamma_0 = \Gamma$. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$ построен граф Γ_n, получающийся удалением n ребер из Γ и такой, что $(\Gamma_n,\, v_*) \in \mathfrak{G}_k$. Если $\tilde{\mathcal{S}}(\Gamma_n) = \varnothing$, то Γ_n — искомое дерево, иначе применяем 2 к $(\Gamma_n,\, v_*)$ и определяем граф Γ_{n+1}. Так как граф Γ конечный, то найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $\tilde{\mathcal{S}}(\Gamma_m) = \varnothing$.

Докажем 1. Пусть Γ не является деревом. Тогда Γ имеет цикл. Значит, существует вершина v, которую можно соединить с v_* двумя различными простыми путями (не обязательно ориентированными). Так как $(\Gamma,\, v_*) \in \mathfrak{G}_k$, то существует простой ориентированный путь $s = (v_*,\, v_1,\, \dots,\, v_n)$ с началом в вершине v_* и концом в вершине $v = v_n$. Пусть

$$\overline{s} = (v_*,\, v_1',\, \dots,\, v_l',\, v_{m+1},\, \dots,\, v_n)$$

— другой простой путь, соединяющий v_* и v, при этом $v_l' \neq v_m$. Обозначим $v_{l+1}' = v_{m+1}$, $v_{l+2}' = v_m$, $v_0' = v_*$. Пусть $\mathbf{W} \subset \{v_0',\, \dots,\, v_l',\, v_{l+1}'\}$ — множество вершин v_j', являющихся началом ребра $(v_j',\, v_{j+1}')$. По условию леммы, $v_0' \in \mathbf{W}$. Кроме того, $v_{l+1}' \notin \mathbf{W}$ (так как путь s ориентированный и имеет начало в вершине v_*). Пусть

$$\hat{l} = \max\{j \in \overline{0,\, l}:\ v_j' \in \mathbf{W}\}.$$

Покажем, что $\operatorname{card} \mathcal{S}_{v_{\hat{l}+1}'} \geqslant 2$. В самом деле, по условию леммы существуют ориентированные простые пути $\sigma' \in \mathcal{S}_{v_{\hat{l}}'}$ и $\sigma'' \in \mathcal{S}_{v_{\hat{l}+2}'}$. Добавим к ним в конец вершину $v_{\hat{l}+1}'$ и получим два пути, принадлежащих $\mathcal{S}_{v_{\hat{l}+1}'}$ (заметим, что $v_{\hat{l}+1}' \notin \{v_{\hat{l}}',\, v_{\hat{l}+2}'\}$). Для того, чтобы показать, что эти пути различны, достаточно проверить, что $v_{\hat{l}}' \neq v_{\hat{l}+2}'$. В самом деле, если $\hat{l} \leqslant l-1$, то это верно, так как путь $\overline{s}$ простой, а если $\hat{l} = l$, то это следует из условия $v_l' \neq v_m$.

Докажем 2. В самом деле, существует путь $(v_*,\, v_1,\, \dots,\, v_{k_0}) \in \tilde{\mathcal{S}}$ такой, что

$$k_0 = \max\{|s| : s \in \tilde{\mathcal{S}}\}, \tag{1.11}$$

где $|s|$ — длина пути s. Так как $\operatorname{card} \mathcal{S}_{v_{k_0}} \geqslant 2$, то в силу (1.11) и условия $\Gamma \in \mathfrak{G}_k$ существует ориентированный простой путь $s' = (v_*,\, v_1',\, \dots,\, v_l',\, v_{k_1},\, \dots,\, v_{k_0}) \in \mathcal{S}_{v_{k_0}}$ такой, что

$$|s'| = \min\{|s| : s \in \mathcal{S}_{v_{k_0}}\} \tag{1.12}$$

и $v_l' \neq v_{k_1-1}$. Удалим ребро $(v_{k_1-1},\, v_{k_1})$ и получим граф $\tilde{\Gamma}$. Покажем, что $(\tilde{\Gamma},\, v_*) \in \mathfrak{G}_k$. Пусть $v \in \mathbf{V}(\tilde{\Gamma})$. Тогда в Γ существует ориентированный простой путь $s_v \in \mathcal{S}_v$, такой что $|s_v| \leqslant k$. Если s_v не содержит ребро $(v_{k_1-1},\, v_{k_1})$, то он также является путем в $\tilde{\Gamma}$. Пусть s_v содержит ребро $(v_{k_1-1},\, v_{k_1})$, то есть s_v состоит из двух путей

$$s_1 = (v_*,\, w_1,\, \dots,\, w_\nu,\, v_{k_1-1},\, v_{k_1}) \quad \text{и} \quad s_2 = (v_{k_1},\, u_1,\, \dots,\, u_\mu,\, v).$$

Рассмотрим путь

$$s'' = (v_*,\, v_1',\, \dots,\, v_l',\, v_{k_1},\, u_1,\, \dots,\, u_\mu,\, v).$$

Тогда s'' не содержит ребро $(v_{k_1-1},\, v_{k_1})$. Удалив, если нужно, циклические участки в s'', получим простой путь $s''' \in \mathcal{S}_v$, не содержащий ребро $(v_{k_1-1},\, v_{k_1})$. Остается показать, что $|s'''| \leqslant k$. В самом деле,

$$|s'''| \leqslant |s''| \leqslant l + 1 + |s_2| \overset{(1.12)}{\leqslant} |s_1| + |s_2| = |s_v| \leqslant k.$$

Лемма доказана. $\square$

Сформулируем теорему Уитни о покрытии.

Теорема C. (см., например, [143, стр. 562]). *Пусть* $\Omega \subset (0, 1)^d$ — *открытое множество. Тогда существует семейство замкнутых попарно не перекрывающихся кубов* $\Theta(\Omega) = \{\Delta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \Xi([0, 1]^d)$ *со следующими свойствами:*

1. $\Omega = \cup_{j\in\mathbb{N}}\Delta_j$;

2. $\operatorname{dist}(\Delta_j, \partial\Omega) \underset{d}{\asymp} 2^{-\mathbf{m}(\Delta_j)}$;

3. *если* $\dim(\Delta_i \cap \Delta_j) = d - 1$, *то*
$$\mathbf{m}(\Delta_j) - 2 \leqslant \mathbf{m}(\Delta_i) \leqslant \mathbf{m}(\Delta_j) + 2; \tag{1.13}$$

4. *для любого* $j \in \mathbb{N}$
$$\operatorname{card}\{i \in \mathbb{N} : \dim(\Delta_i \cap \Delta_j) = d - 1\} \leqslant 12^d. \tag{1.14}$$

Лемма 1.1.3. *Пусть* $a > 0$, $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, $\Omega \subset (0, 1)^d$. *Тогда существуют дерево* $(\mathcal{T}, \xi_0)$, *отображение* $F : \mathbf{V}(\mathcal{T}) \to \Theta(\Omega)$, *согласованное со структурой дерева* $\mathcal{T}$, $k_* = k_*(a, d) \in \mathbb{N}$ *и* $l_* = l_*(a, d) \in \mathbb{N}$ *такие, что для любых вершин* $v' > v''$ *выполнено (1.5).*

Доказательство. Занумеруем кубы $\{\Delta_{i,j}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, 1\leqslant i\leqslant r_j}$ из множества $\Theta(\Omega)$ так, чтобы $r_0 = 1$, $\mathbf{m}(\Delta_{i,j}) = \mu_j \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant i \leqslant r_j$, при этом
$$\mu_0 \leqslant \mu_1, \quad \mu_j < \mu_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Пусть x_* — центр $\Delta_{1,0}$. Так как $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, то найдется $b = b(a, d)$ такое, что для любого $x \in \Omega$ существует ломаная $\gamma_x : [0, T_0(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами:

a) $\gamma_x \in AC[0, T_0(x)]$, $\left|\frac{d\gamma_x(t)}{dt}\right| = 1$ п.в.;

b) $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T_0(x)) = x_*$;

c) для любого $t \in [0, T_0(x)]$ выполнено включение $B_{bt}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$;

d) звенья ломаной γ_x не параллельны ни одной из $d-1$-мерных координатных плоскостей и для любого $\Delta \in \Theta(\Omega)$ множество $\gamma_x([0, T_0(x)])$ не пересекает Δ ни в одной точке k-мерных граней, $k \leqslant d - 2$.

Построим по индукции последовательности деревьев $\{\mathcal{T}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ с корнем ξ_0, семейств кубов $\Theta_n \subset \Theta(\Omega)$ и биективных отображений $F_n : \mathbf{V}(\mathcal{T}_n) \to \Theta_n$, согласованных со структурой $\mathcal{T}_n$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $\mathcal{T}_n$ является поддеревом $\mathcal{T}_{n+1}$, $F_{n+1}|_{\mathbf{V}(\mathcal{T}_n)} = F_n$, $\Theta_n \supset \{\Delta_{i,n}\}_{1\leqslant i\leqslant r_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $F_0(\xi_0) = \Delta_{1,0}$;

2. существует $c_*(d, a) \in \mathbb{N}$ такое, что для любой вершины v дерева $\mathcal{T}_n$ выполнено $m_v \leqslant \mu_n + c_*(d, a)$;

3. существует $c_{**}(d, a) \in \mathbb{N}$ такое, что если $v, v' \in \mathcal{T}_n \backslash \mathcal{T}_{n-1}$, $v' > v$, то $\rho_{\mathcal{T}_n}(v', v) \leqslant c_{**}(d, a)$;

4. $\mathcal{T}_n$ удовлетворяет условию леммы 1.1.1 с
$$l_* = 1 + (c_{**}(d, a) + 1)(c_*(d, a) + 2), \tag{1.16}$$
$$k_* = l_* c_*(d, a) + (c_{**}(d, a) + 1)(c_*(d, a) + 2). \tag{1.17}$$

В качестве $\mathcal{T}_0$ возьмем дерево, состоящее из единственной вершины ξ_0; положим $\Theta_0 = \{\Delta_{1,0}\}$, $F_0(\xi_0) = \Delta_{1,0}$. Свойство 1 выполнено по построению, свойство 2 следует из равенства $m_{\xi_0} = \mathbf{m}(\Delta_{1,0}) = \mu_0$, свойства 3 и 4 для $n = 0$ тривиальны.

Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ построены дерево $\mathcal{T}_{n-1}$, семейство кубов Θ_{n-1} и отображение F_{n-1}, удовлетворяющие условиям 1–4. Построим $\mathcal{T}_n$, Θ_n и F_n.

Если $\{\Delta_{i,n}\}_{i=1}^{r_n} \subset \Theta_{n-1}$, то полагаем $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n-1}$, $\Theta_n = \Theta_{n-1}$, $F_n = F_{n-1}$. Пусть

$$I_n := \{i = 1, \dots, r_n : \Delta_{i,n} \notin \Theta_{n-1}\} \neq \varnothing.$$

Рассмотрим $i \in I_n$. Обозначим через $x_{i,n}$ центр куба $\Delta_{i,n}$, $\tau_{i,n} = T_0(x_{i,n})$, $\gamma_{i,n} = \gamma_{x_{i,n}}$,

$$t_{i,n} = \min\{t \in [0, \tau_{i,n}] : \gamma_{i,n}(t) \in \overline{\Omega}_{\mathcal{T}_{n-1},F_{n-1}}\}.$$

Тогда

$$t_{i,n} < \tau_{i,n}. \tag{1.18}$$

Пусть $k = k(i)$, $\{Q_1^i, \dots, Q_k^i\} \subset \Theta(\Omega)\backslash\Theta_{n-1}$ — множество всех кубов таких, что $\gamma_{i,n}([0, t_{i,n}]) \cap Q_j^i \neq \varnothing$. Тогда

$$\mathbf{m}(Q_j^i) \geqslant \mu_n \tag{1.19}$$

в силу свойства 1 дерева $\mathcal{T}_{n-1}$ и (1.15). С другой стороны, найдется такое $c_1(d, a) \in \mathbb{N}$, что

$$\mathbf{m}(Q_j^i) \leqslant \mu_n + c_1(d, a). \tag{1.20}$$

В самом деле, если $Q_j^i = \Delta_{i,n}$, то это следует из определения μ_n. Если $Q_j^i \neq \Delta_{i,n}$, то для любого t такого, что $\gamma_{i,n}(t) \in Q_j^i$, выполнено $|x_{i,n} - \gamma_{i,n}(t)| \geqslant 2^{-\mu_n-1}$, поэтому $t \underset{d}{\gtrsim} 2^{-\mu_n}$. Остается воспользоваться свойством c) ломаной $\gamma_{i,n}$ и теоремой C.

Построим последовательность из различных кубов $Q_{j_1}^i, \dots, Q_{j_\nu}^i$, $\nu = \nu(i)$, $1 \leqslant j_s \leqslant k$, такую, что $Q_{j_1}^i = \Delta_{i,n}$, $\gamma_{i,n}(t_{i,n}) \in Q_{j_\nu}^i$ и $\dim(Q_{j_s}^i \cap Q_{j_{s+1}}^i) = d-1$, а также последовательность $\tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_\nu$ такую, что $\gamma_{i,n}(\tilde{t}_s) \in Q_{j_s}^i$, $1 \leqslant s \leqslant \nu$. Положим

$$\tilde{t}_0 = 0, \tilde{t}_1 = \max\{t \in [0, t_{i,n}] : \gamma_{i,n}(t) \in Q_{j_1}^i\}.$$

Пусть построены кубы $Q_{j_1}^i = \Delta_{i,n}, Q_{j_2}^i, \dots, Q_{j_s}^i$ и $\tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_s$, при этом

$$\tilde{t}_\sigma = \max\{t \in [\tilde{t}_{\sigma-1}, t_{i,n}] : \gamma_{i,n}(t) \in Q_{j_\sigma}^i\}, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant s. \tag{1.21}$$

Если $\tilde{t}_s = t_{i,n}$, то построение закончено. Предположим, что $\tilde{t}_s < t_{i,n}$. Через J_s обозначим множество $j' \in \{1, \dots, k\}\backslash\{j_1, \dots, j_s\}$ таких, что

$$\dim(Q_{j_s}^i \cap Q_{j'}^i) = d-1.$$

Докажем, что $J_s \neq \varnothing$. В самом деле, из свойства d) ломаной $\gamma_{i,n}$ и (1.21) следует, что $\gamma_{i,n}(\tilde{t}_s) \in \mathrm{int}_{d-1}(Q_{j_s}^i \cap Q)$ для некоторого $Q \in \Theta(\Omega)$, $Q \neq Q_{j_s}^i$. Более того, $Q \notin \cup_{\sigma=1}^{s-1} Q_{j_\sigma}^i$ в силу (1.21). Наконец, из определения $t_{i,n}$ и условия $\tilde{t}_s < t_{i,n}$ следует, что $Q \notin \Theta_{n-1}$, так что $Q \in \{Q_1^i, \dots, Q_k^i\}\backslash\{Q_{j_1}^i, \dots, Q_{j_s}^i\}$.

Положим $\tilde{t}_{s+1} = \max\{t \in [\tilde{t}_s, t_{i,n}] : \gamma_{i,n}(t) \in \cup_{j' \in J_s} Q_{j'}^i\}$, $j_{s+1} \in J_s$ определяем из равенства $\gamma_{i,n}(\tilde{t}_{s+1}) \in Q_{j_{s+1}}^i$. Покажем, что j_{s+1} определено однозначно. В самом деле, пусть $\gamma_{i,n}(\tilde{t}_{s+1}) \in Q_{j'}^i \cap Q_{j''}^i$, $j', j'' \in J_s$, $j' \neq j''$. Из свойства d) ломаной $\gamma_{i,n}$ следует, что $\gamma_{i,n}(\tilde{t}_{s+1}) \in \mathrm{int}_{d-1}(Q_{j'}^i \cap Q_{j''}^i)$. В силу (1.18), $\tilde{t}_{s+1} < \tau_{i,n}$. Значит, найдется такое $\delta \in (0, \tau_{i,n} - \tilde{t}_{s+1})$, что $\gamma_{i,n}(\tilde{t}_{s+1} + \delta) \in \mathrm{int}\, Q_{j'}^i \cup \mathrm{int}\, Q_{j''}^i$ (это снова следует из свойства

d) ломаной $\gamma_{i,n}$). Поэтому $\tilde{t}_{s+1} < t_{i,n}$ и получаем противоречие с определением $\tilde{t}_{s+1}$. Отметим также, что $\tilde{t}_{s+1} = \max\{t \in [\tilde{t}_s, t_{i,n}] : \gamma_{i,n}(t) \in Q^i_{j_{s+1}}\}$.

Для каждого $s \in \overline{1, \nu - 1}$ обозначим $\tilde{J}_s$ множество

$$j' \in \{1, \ldots, k\}\backslash\{j_1, \ldots, j_{s+1}\}$$

таких, что $Q^i_{j_{s+1}} \cap Q^i_{j'} \neq \varnothing$. В силу (1.19) и (1.20) (или в силу теоремы C), найдется такое $c_2(d, a) \in \mathbb{N}$, что $\operatorname{card} \tilde{J}_s \leqslant c_2(d, a)$. Докажем, что для любого $s \in \mathbb{N}$ такого, что $\tilde{t}_{s+c_2(d,a)+2} < t_{i,n}$, выполнено

$$\tilde{t}_{s+c_2(d,a)+3} - \tilde{t}_{s+1} \geqslant 2^{-\mu_n - c_1(d,a)}. \tag{1.22}$$

В самом деле, пусть $j_\sigma \in \tilde{J}_s$ для любого $\sigma \in \{s+2, \ldots, s+c_2(d, a)+3\}$. Так как все j_σ различны, то $\operatorname{card} \tilde{J}_s \geqslant c_2(d, a) + 1$ — противоречие. Пусть существует такое $\sigma \in \{s+2, \ldots, s+c_2(d, a)+3\}$, что $j_\sigma \notin \tilde{J}_s$. Тогда $Q^i_{j_{s+1}} \cap Q^i_{j_\sigma} = \varnothing$. Так как $\gamma_{i,n}(\tilde{t}_{s+1}) \in Q^i_{j_{s+1}}$ и $\gamma_{i,n}(\tilde{t}_\sigma) \in Q^i_{j_\sigma}$, то

$$\tilde{t}_\sigma - \tilde{t}_{s+1} \geqslant |\gamma_{i,n}(\tilde{t}_\sigma) - \gamma_{i,n}(\tilde{t}_{s+1})| \overset{(1.20)}{\geqslant} 2^{-\mu_n - c_1(d,a)},$$

откуда следует (1.22).

С другой стороны, так как $\gamma_{i,n}(t_{i,n}) \in Q^i_{j_\nu}$, то в силу (1.19) и теоремы C найдется такое $c_3(d) \in \mathbb{N}$, что $\operatorname{dist}(\gamma_{i,n}(t_{i,n}), \partial\Omega) \leqslant 2^{-\mu_n + c_3(d)}$, поэтому $t_{i,n} \leqslant 2^{-\mu_n + c_4(d,a)}$ для некоторого $c_4(d, a) \in \mathbb{N}$ (в силу свойства c) ломаной $\gamma_{i,n}$). Отсюда и из (1.22) получаем, что $\nu \leqslant c_5(d, a)$ для некоторого $c_5(d, a) > 0$.

Положим $\Theta^{I_n} = \{Q^i_{j_s}, \ i \in I_n, \ 1 \leqslant s \leqslant \nu(i)\}$. Построим ориентированный граф $\mathcal{G}$ (без кратных ребер и петель) и биективное отображение $\Phi : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \Theta^{I_n}$: считаем, что вершины v', v'' соседние и v'' является началом, а v' — концом ребра (v'', v'), тогда и только тогда, когда существует $i \in I_n$ и $s \in 1, \ldots, \nu(i) - 1$ такое, что $\Phi(v') = Q^i_{j_s}$, $\Phi(v'') = Q^i_{j_{s+1}}$. Так как $\dim\left(Q^i_{j_s} \cap Q^i_{j_{s+1}}\right) = d - 1$, то Φ согласовано со структурой $\mathcal{G}$.

Пусть $\{\Phi^{-1}(Q^i_{j_{\nu(i)}})\}_{i \in I_n} = \{w_1, \ldots, w_{r'_n}\}$. Добавим к графу $\mathcal{G}$ еще одну вершину $\hat{v}$ и соединим ее ребрами с вершинами $w_{i'}$, $1 \leqslant i' \leqslant r'_n$, считая, что $\hat{v}$ — начало каждого из этих ребер. Получим ориентированный граф $\hat{\mathcal{G}}$, такой, что $(\hat{\mathcal{G}}, \hat{v}) \in \mathfrak{G}_{c_5(d,a)}$ (см. определение 1.1.2). По лемме 1.1.2, существует дерево $\mathcal{T}'$ с корнем $\hat{v}$, являющееся подграфом $\hat{\mathcal{G}}$, такое, что $\mathbf{V}(\mathcal{T}') = \mathbf{V}(\hat{\mathcal{G}})$ и для любого $v \in \mathbf{V}(\mathcal{T}')$ выполнено

$$\rho_{\mathcal{T}'}(\hat{v}, v) \leqslant c_5(d, a). \tag{1.23}$$

Так как $\gamma_{i,n}(t_{i,n}) \in Q^i_{j_{\nu(i)}} = \Phi(w_{i'})$ для некоторого $i' \in \{1, \ldots, r'_n\}$, то из определения $t_{i,n}$ и свойства d) ломаной $\gamma_{i,n}$ следует, что найдутся вершина $u_{i'} \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{n-1})$ и куб $\tilde{Q}_{i'} = F_{n-1}(u_{i'})$, такие, что $\dim(\tilde{Q}_{i'} \cap \Phi(w_{i'})) = d - 1$. Положим

$$\mathcal{T}_n = \mathbf{J}(\mathcal{T}_{n-1}, (\mathcal{T}')_{w_1}, \ldots, (\mathcal{T}')_{w_{r'_n}}; u_1, w_1, \ldots, u_{r'_n}, w_{r'_n}),$$

$$F_n(v) = \begin{cases} F_{n-1}(v), & \text{если } v \in \mathcal{T}_{n-1}, \\ \Phi(v), & \text{если } v \in \mathbf{V}((\mathcal{T}')_{w_i}), \ \ 1 \leqslant i \leqslant r'_n, \end{cases}$$

$\Theta_n = F_n(\mathbf{V}(\mathcal{T}_n))$. Тогда отображение F_n биективно и согласовано со структурой дерева $\mathcal{T}_n$ (это следует из построения, определения графа $\mathcal{G}$ и предположения индукции).

Свойства 1–2 дерева $\mathcal{T}_n$ следуют из построения, (1.15) и (1.20), свойство 3 — из (1.23). Проверим свойство 4. Пусть $v', v'' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_n)$, $v' > v''$. Если $v', v'' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{n-1})$, то это выполнено в силу предположения индукции. Пусть $v' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_n)\backslash\mathbf{V}(\mathcal{T}_{n-1})$. Если для любого $v \in [v'', v']$ выполнено $m_v \geqslant \mu_n$, то $v'' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_n)\backslash\mathbf{V}(\mathcal{T}_{n-c_*(d,a)-2})$. В самом деле, если $v \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{n-j})$ и $m_v \geqslant \mu_n$, то

$$\mu_{n-j} + j - 1 \overset{(1.15)}{\leqslant} \mu_{n-j+1} + j - 1 \overset{(1.15)}{\leqslant} \mu_{n-j+2} + j - 2 \overset{(1.15)}{\leqslant} \cdots \overset{(1.15)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \mu_n \leqslant m_v \leqslant \mu_{n-j} + c_*(d,\, a)$$

(последнее неравенство следует из свойства 2 дерева $\mathcal{T}_{n-j}$), откуда $j \leqslant 1 + c_*(d,\, a)$. Значит, в силу свойства 3 деревьев $\mathcal{T}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\rho_{\mathcal{T}_n}(v',\, v'') \leqslant (c_{**}(d,\, a) + 1)(c_*(d,\, a) + 2); \tag{1.24}$$

в силу свойства 2 дерева $\mathcal{T}_n$, $m_{v'} - m_{v''} \geqslant \mu_n - (\mu_n + c_*(d,\, a)) = -c_*(d,\, a)$, то есть

$$l_*(m_{v'} - m_{v''}) \geqslant -l_* c_*(d,\, a) \overset{(1.17)}{=} (c_{**}(d,\, a) + 1)(c_*(d,\, a) + 2) - k_* \overset{(1.24)}{\geqslant} \rho_{\mathcal{T}_n}(v',\, v'') - k_*.$$

Пусть теперь $v' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_n)\backslash\mathbf{V}(\mathcal{T}_{n-1})$ и $W := \{v \in [v'',\, v'] : m_v \leqslant \mu_n - 1\} \neq \varnothing$. Положим $v_* = \max W$. Тогда из (1.19) следует, что

$$v_* \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{n-1}), \quad v_* < v'. \tag{1.25}$$

Через v_{**} обозначим вершину в $[v_*,\, v']$, следующую за v_*. В силу неравенства (1.24), примененного к $v'' := v_{**}$, (1.25) и предположения индукции имеем

$$l_*(m_{v'} - m_{v''}) = l_*(m_{v'} - m_{v_*}) + l_*(m_{v_*} - m_{v''}) \geqslant l_* + \rho_{\mathcal{T}_n}(v_*,\, v'') - k_* =$$
$$= (l_* - 1 - \rho_{\mathcal{T}_n}(v',\, v_{**})) + \rho_{\mathcal{T}_n}(v',\, v'') - k_* \geqslant$$
$$\geqslant (l_* - 1 - (c_{**}(d,\, a) + 1)(c_*(d,\, a) + 2)) + \rho_{\mathcal{T}_n}(v',\, v'') - k_* \overset{(1.16)}{=} \rho_{\mathcal{T}_n}(v',\, v'') - k_*.$$

Остается взять в качестве $\mathcal{T}$ дерево, получающееся при счетном повторении индукционных шагов, а в качестве F — такое отображение, что $F|_{\mathcal{T}_n} = F_n$. □

Из доказанных утверждений вытекает следующий результат.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\Omega \subset [0,\, 1]^d$, $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$. Тогда существуют дерево $\mathcal{T}$ и взаимно-однозначное соответствие $F : \mathbf{V}(\mathcal{T}) \to \Theta(\Omega)$, согласованное со структурой $\mathcal{T}$ и удовлетворяющее следующим условиям:*

1. *для любого поддерева $\mathcal{T}'$ в $\mathcal{T}$*
$$\Omega_{\mathcal{T}',F} \in \mathbf{FC}(b_*), \text{ где } b_* = b_*(a,\, d) > 0; \tag{1.26}$$
2. *выполнено неравенство*
$$\operatorname{card} \mathbf{V}_1(\xi) \underset{d}{\lesssim} 1, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T}); \tag{1.27}$$
3. *если $x \in F(\xi)$, то кривая γ_x из определения 1 может быть выбрана так, что $B_{b_* t}(\gamma_x(t)) \subset \Omega_{\leqslant F(\xi)}$ для любого $t \in [0,\, T(x)]$; если $\mathcal{T}'$ — поддерево в $\mathcal{T}$ и $\xi_{\mathcal{T}'}$ — минимальная вершина $\mathcal{T}'$, то центр куба $F(\xi_{\mathcal{T}'})$ может быть выбран в качестве точки x_* из определения 1 для $\Omega_{\mathcal{T}',F} \in \mathbf{FC}(b_*)$. Кроме того,*
$$\operatorname{mes} \Omega_{\mathcal{T}',F} \underset{a,d}{\asymp} \operatorname{mes} F(\xi_{\mathcal{T}'}). \tag{1.28}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\mathcal{T}$ и F — дерево и отображение, построенные в лемме 1.1.3. Из леммы 1.1.1 получаем, что

$$\Omega_{\mathcal{T}',F} \in \mathbf{FC}(\hat{a}(k_*(a,\, d),\, l_*(a,\, d),\, d));$$

соотношения (1.27) и (1.28) следуют из (1.14) и (1.7) соответственно. Первая часть свойства 3 также следует из леммы 1.1.1. □

1.2 Построение разбиения дерева

Пусть $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l$ — поддеревья в $\mathcal{T}$, $\cup_{j=1}^{l}\mathcal{T}_j = \mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$. Тогда $\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l\}$ будем называть разбиением дерева $\mathcal{T}$. Если $\mathfrak{S}$ — разбиение $\mathcal{T}$, $\mathcal{A}$ — поддерево в $\mathcal{T}$, то положим

$$\mathfrak{S}|_{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A} \cap \mathcal{T}' : \mathcal{T}' \in \mathfrak{S},\ \mathcal{A} \cap \mathcal{T}' \neq \varnothing\}.$$

Пусть $\mathcal{T}$ — дерево, $\Psi : 2^{\mathbf{V}(\mathcal{T})} \to \mathbb{R}_+$. Далее будем обозначать $\Psi(\mathcal{T}') := \Psi(\mathbf{V}(\mathcal{T}'))$ для поддерева $\mathcal{T}'$ в $\mathcal{T}$.

Лемма 1.2.1. *Пусть $(\mathcal{T}, v_*)$ — дерево с корнем, имеющее не более, чем счетное число вершин, $\Psi : 2^{\mathbf{V}(\mathcal{T})} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\Psi(V_1 \cup V_2) \geqslant \Psi(V_1) + \Psi(V_2),\ V_1, V_2 \subset \mathbf{V}(\mathcal{T}),\ \ V_1 \cap V_2 = \varnothing; \tag{1.29}$$

$$\text{если } \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{V}(\mathcal{T}),\ \ v_1 < \dots < v_n < \dots,\ \text{ то } \lim_{n\to\infty} \Psi(\mathcal{T}_{v_n}) = 0. \tag{1.30}$$

Пусть $\gamma > 0$, $\Psi(\mathcal{T}) > 2\gamma$. Тогда существует единственная вершина $\hat{v} \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ такая, что

$$\Psi(\mathcal{T}_{\hat{v}}) > \Psi(\mathcal{T}) - \gamma \tag{1.31}$$

и для любого $v' \in \mathbf{V}_1(\hat{v})$

$$\Psi(\mathcal{T}_{v'}) \leqslant \Psi(\mathcal{T}) - \gamma. \tag{1.32}$$

Доказательство. Обозначим

$$E = \{v \in \mathbf{V}(\mathcal{T}) : \Psi(\mathcal{T}_v) > \Psi(\mathcal{T}) - \gamma\}.$$

Так как $v_* \in E$, то $E \neq \varnothing$. Покажем, что E является цепью и конечно. Сначала проверим, что любые две вершины в E сравнимы. Действительно, пусть $v', v'' \in E$ несравнимы. Тогда $\mathcal{T}_{v'} \cap \mathcal{T}_{v''} = \varnothing$ и

$$\Psi(\mathcal{T}) \overset{(1.29)}{\geqslant} \Psi(\mathcal{T}_{v'}) + \Psi(\mathcal{T}_{v''}) > 2\Psi(\mathcal{T}) - 2\gamma,$$

то есть $\Psi(\mathcal{T}) < 2\gamma$ — противоречие с условием леммы. Итак, E является цепью. Докажем, что E конечно. В самом деле, иначе существует последовательность $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ такая, что $v_1 < \dots < v_n < \dots$ и $\Psi(\mathcal{T}_{v_n}) > \Psi(\mathcal{T}) - \gamma \geqslant \gamma$. Это противоречит (1.30).

В качестве $\hat{v}$ возьмем максимальную вершину в E. Так как E является цепью, то вершина, для которой выполнены (1.31) и (1.32), единственна. $\square$

Пусть выполнены условия леммы 1.2.1, $\hat{v}$ — вершина, для которой справедливы неравенства (1.31) и (1.32). Определим разбиение $\Sigma(\mathcal{T}, \gamma)$ дерева $\mathcal{T}$ по формуле

$$\Sigma(\mathcal{T}, \gamma) = \{\mathcal{T} \backslash \mathcal{T}_{\hat{v}}\} \cup \{\hat{v}\} \cup \{\mathcal{T}_{v'}\}_{v' \in \mathbf{V}_1(\hat{v})}. \tag{1.33}$$

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Через $\lceil x \rceil$ (соответственно $\lfloor x \rfloor$) будем обозначать ближайшее сверху (соответственно снизу) к x целое число.

В следующей лемме строится специальное разбиение (комбинаторного) дерева. Отметим, что для метрического дерева похожее разбиение было построено в работе [168].

Лемма 1.2.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого дерева $\mathcal{T}$ с не более, чем счетным числом вершин и с корнем v_*, такого, что*

$$\operatorname{card} \mathbf{V}_1(v) \leqslant k, \quad v \in \mathbf{V}(\mathcal{T}), \tag{1.34}$$

для любого отображения $\Psi : 2^{\mathbf{V}(\mathcal{T})} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяющего (1.29) и (1.30), и для любого $\gamma > 0$ найдется разбиение $\mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma)$ дерева $\mathcal{T}$ со следующими свойствами:

1. *пусть $u \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, $\mathfrak{S}(\mathcal{T}_u, \gamma) \subset \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma)$; если $\Psi(\mathcal{T}_u) > (k+1)\gamma$,*

   $$\Sigma(\mathcal{T}_u, \gamma) = \{\mathcal{T}_u \backslash \mathcal{T}_{\hat{v}_u}\} \cup \{\hat{v}_u\} \cup \{\mathcal{T}_{v'}\}_{v' \in \mathbf{V}_1(\hat{v}_u)},$$

   то

   $$\mathfrak{S}(\mathcal{T}_u, \gamma) = \{\mathcal{T}_u \backslash \mathcal{T}_{\hat{v}_u}\} \cup \{\hat{v}_u\} \bigcup \left(\bigcup_{v' \in \mathbf{V}_1(\hat{v}_u)} \mathfrak{S}(\mathcal{T}_{v'}, \gamma) \right), \tag{1.35}$$

   при этом $\Psi(\mathcal{T}_{\hat{v}_u}) > \Psi(\mathcal{T}_u) - \gamma$, $\Psi(\mathcal{T}_u \backslash \mathcal{T}_{\hat{v}_u}) < \gamma$; если $\Psi(\mathcal{T}_u) \leqslant (k+1)\gamma$, то $\mathfrak{S}(\mathcal{T}_u, \gamma) = \{\mathcal{T}_u\}$;

2. *если $\mathcal{T}' \in \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma)$ и $\Psi(\mathcal{T}') > (k+2)\gamma$, то $\operatorname{card} \mathbf{V}(\mathcal{T}') = 1$;*

3. *если $\left\lceil \frac{\Psi(\mathcal{T})}{\gamma} \right\rceil \geqslant k+2$, то $\operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma) \leqslant (k+2) \left\lceil \frac{\Psi(\mathcal{T})}{\gamma} \right\rceil - (k+1)(k+2)$, иначе $\operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma) = 1$;*

4. *пусть $v > v_*$; тогда $\operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma)|_{\mathcal{T}_v} \leqslant (k+2) \left(\left\lceil \frac{\Psi(\mathcal{T}_v)}{\gamma} \right\rceil + 1 \right)$;*

5. *если $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma)$ и $\operatorname{card} \mathbf{V}(\mathcal{A}) \geqslant 2$, то либо $\mathcal{A} = \mathcal{T}_v$ для некоторого $v \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, либо $\mathcal{A} = \mathcal{T}_v \backslash \mathcal{T}_w$ для некоторых $v, w \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, $w > v$; при этом, во втором случае $\Psi(\mathcal{A}) < \gamma$ и $\Psi(\mathcal{T}_w) > \Psi(\mathcal{T}_v) - \gamma$.*

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{T}$ — дерево. Скажем, что $(\mathcal{T}, \Psi) \in \mathfrak{R}_{m,\gamma}$, если $(m-1)\gamma < \Psi(\mathcal{T}) \leqslant m\gamma$.

Если $v \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, то положим $\mu(v) = \mu(v, \mathcal{T}) = \left\lceil \frac{\Psi(\mathcal{T}_v)}{\gamma} \right\rceil$. Тогда $(\mathcal{T}_v, \Psi) \in \mathfrak{R}_{\mu(v),\gamma}$.

Построим индукцией по $m \in \mathbb{Z}_+$ разбиение $\mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma)$ для всех $\mathcal{T}$ таких, что $(\mathcal{T}, \Psi) \in \mathfrak{R}_{m,\gamma}$. Если $m \leqslant k+1$, то положим $\mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma) = \{\mathcal{T}\}$. Пусть

$$m \geqslant k+1 \tag{1.36}$$

и разбиение $\mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma)$, удовлетворяющее свойствам 1–5, построено для всех $(\mathcal{T}, \Psi) \in \mathfrak{R}_{m',\gamma}$, $m' \leqslant m$. Построим разбиение для всех $(\mathcal{T}, \Psi) \in \mathfrak{R}_{m+1,\gamma}$. В этом случае

$$m\gamma < \Psi(\mathcal{T}) \leqslant (m+1)\gamma. \tag{1.37}$$

Возьмем разбиение $\Sigma(\mathcal{T}, \gamma)$, заданное формулой (1.33). Тогда

$$\Psi(\mathcal{T} \backslash \mathcal{T}_{\hat{v}}) \overset{(1.29)}{\leqslant} \Psi(\mathcal{T}) - \Psi(\mathcal{T}_{\hat{v}}) \overset{(1.31)}{<} \gamma. \tag{1.38}$$

Так как для любого $v' \in \mathbf{V}_1(\hat{v})$

$$\Psi(\mathcal{T}_{v'}) \overset{(1.32)}{\leqslant} \Psi(\mathcal{T}) - \gamma \leqslant m\gamma, \quad \mu(v') = \mu(v', \mathcal{T}) \leqslant m, \tag{1.39}$$

то по предположению индукции определено разбиение $\mathfrak{S}(\mathcal{T}_{v'},\,\gamma)$. Положим

$$\mathfrak{S}(\mathcal{T},\,\gamma)=\{\mathcal{T}\backslash\mathcal{T}_{\hat v}\}\cup\{\hat v\}\bigcup\left(\bigcup_{v'\in\mathbf{V}_1(\hat v)}\mathfrak{S}(\mathcal{T}_{v'},\,\gamma)\right). \tag{1.40}$$

На этом индукционном шаге получаем, что в случае $\Psi(\mathcal{T}_{\hat v})\in(m\gamma,\,(m+1)\gamma]$

$$\text{если } \Sigma(\mathcal{T}_{\hat v},\,\gamma)=\{\hat v\}\cup\{\mathcal{T}_{v'}\}_{v'\in\mathbf{V}_1(\hat v)},\ \text{то } \mathfrak{S}(\mathcal{T}_{\hat v},\,\gamma)=\{\hat v\}\bigcup\left(\bigcup_{v'\in\mathbf{V}_1(\hat v)}\mathfrak{S}(\mathcal{T}_{v'},\,\gamma)\right), \tag{1.41}$$

$$\text{если } \mathcal{T}_{\hat v}\backslash\mathcal{T}_w\in\Sigma(\mathcal{T}_{\hat v},\,\gamma) \text{ для некоторого } w>\hat v,\ \text{то } \mathcal{T}_{\hat v}\backslash\mathcal{T}_w\in\mathfrak{S}(\mathcal{T}_{\hat v},\,\gamma). \tag{1.42}$$

В случае $\Psi(\mathcal{T}_{\hat v})\leqslant m\gamma$ по предположению индукции (см. пункт 1) также выполнены (1.41) и (1.42).

Докажем свойство 1. Если $u=v_*$, то утверждение следует из построения и (1.38). Если $u>v_*$, то в силу (1.40) получаем, что $\mathcal{T}_u\subset\mathcal{T}_{v'}$ для некоторого $v'\in\mathbf{V}_1(\hat v)$ или $u=\hat v$. В первом случае свойство 1 выполнено по предположению индукции. Рассмотрим второй случай. Если $\Psi(\mathcal{T}_{\hat v})\leqslant(k+1)\gamma$, то по построению $\mathfrak{S}(\mathcal{T}_{\hat v},\,\gamma)=\{\mathcal{T}_{\hat v}\}$ (см. базу индукции). Значит, $\mathfrak{S}(\mathcal{T}_{\hat v},\,\gamma)\overset{(1.40)}{\not\subset}\mathfrak{S}(\mathcal{T},\,\gamma)$. Пусть $\Psi(\mathcal{T}_{\hat v})>(k+1)\gamma$. Из (1.42), (1.40) и включения $\mathfrak{S}(\mathcal{T}_{\hat v},\,\gamma)=\mathfrak{S}(\mathcal{T}_u,\,\gamma)\subset\mathfrak{S}(\mathcal{T},\,\gamma)$ следует, что $\Sigma(\mathcal{T}_{\hat v},\,\gamma)=\{\hat v\}\cup\{\mathcal{T}_{v'}\}_{v'\in\mathbf{V}_1(\hat v)}$. Значит, (1.35) следует из (1.41).

Из (1.38), (1.40) и предположения индукции следует свойство 2.

Докажем свойство 3. По определению $\mu(v')$,

$$\sum_{v'\in\mathbf{V}_1(\hat v)}\mu(v')\gamma\leqslant\sum_{v'\in\mathbf{V}_1(\hat v)}(\Psi(\mathcal{T}_{v'})+\gamma)\overset{(1.29),(1.34)}{\leqslant}\Psi(\mathcal{T})+k\gamma\overset{(1.37)}{\leqslant}(m+1)\gamma+k\gamma,$$

то есть

$$\sum_{v'\in\mathbf{V}_1(\hat v)}\mu(v')\leqslant m+1+k. \tag{1.43}$$

Обозначим

$$\mathbf{V}'=\{v'\in\mathbf{V}_1(\hat v):\mu(v')\geqslant k+2\},\quad \mathbf{V}''=\{v'\in\mathbf{V}_1(\hat v):\mu(v')<k+2\}.$$

Если $\operatorname{card}\mathbf{V}'\geqslant 2$, то в силу предположения индукции

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\mathfrak{S}(\mathcal{T},\,\gamma)&\overset{(1.40)}{\leqslant}2+\sum_{v'\in\mathbf{V}'}((k+2)\cdot\mu(v')-(k+1)(k+2))+\\ +\operatorname{card}\mathbf{V}''&\overset{(1.43)}{\leqslant}2-2(k+1)(k+2)+(k+2)(m+1+k)+k=\\ &=(k+2)(m+1)-(k+1)(k+2).\end{aligned}$$

Если $\operatorname{card}\mathbf{V}'=1$, то по предположению индукции

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\mathfrak{S}(\mathcal{T},\,\gamma)&\overset{(1.39),(1.40)}{\leqslant}2+(k+2)m-(k+1)(k+2)+k=\\ &=(k+2)(m+1)-(k+1)(k+2).\end{aligned}$$

Если $\operatorname{card}\mathbf{V}'=0$, то

$$\operatorname{card}\mathfrak{S}(\mathcal{T},\,\gamma)\leqslant 2+k=(k+2)(k+2)-(k+1)(k+2)\overset{(1.36)}{\leqslant}$$

$$\leqslant (k+2)(m+1) - (k+1)(k+2).$$

Докажем свойство 4. Если $v > \hat{v}$, то $\mathcal{T}_v \subset \mathcal{T}_{v'}$ для некоторого $v' \in \mathbf{V}_1(\hat{v})$ и утверждение следует из предположения индукции. Если v, $\hat{v}$ несравнимы, то $\mathcal{T}_v \subset \mathcal{T}\backslash\mathcal{T}_{\hat{v}}$ и $\operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma)|_{\mathcal{T}_v} = 1$. Если $v \leqslant \hat{v}$, то $\operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma)|_{\mathcal{T}_v} \leqslant \operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma)$ и утверждение следует из уже доказанного свойства 3 и неравенств $\Psi(\mathcal{T}_v) \geqslant \Psi(\mathcal{T}_{\hat{v}}) \overset{(1.31)}{>} \Psi(\mathcal{T}) - \gamma$.

Докажем свойство 5. Так как $\operatorname{card} \mathbf{V}(\mathcal{A}) > 1$, то в силу (1.40) есть две возможности: a) $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}(\mathcal{T}_{v'},\, \gamma)$ для некоторого $v' \in \mathbf{V}_1(\hat{v})$ (тогда свойство 5 выполнено по предположению индукции); b) $\mathcal{A} = \mathcal{T}\backslash\mathcal{T}_{\hat{v}}$ (тогда свойство 5 следует из этого равенства и (1.38)). □

Лемма 1.2.3. *Пусть выполнены условия леммы 1.2.2. Тогда существует такое $c(k) > 0$, что для любых $\gamma > 0$ и*

$$\gamma' \geqslant \frac{\gamma}{2} \tag{1.44}$$

любой элемент разбиения $\mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma)$ пересекается с не более, чем $c(k)$ элементами $\mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma')$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathcal{T}}$ — элемент $\mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma)$, l — количество элементов $\mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma')$, пересекающихся с $\tilde{\mathcal{T}}$. Предположим, что $l > 1$. Тогда $\tilde{\mathcal{T}}$ содержит по крайней мере две вершины. По лемме 1.2.2 (свойство 5), имеем два случая.

Случай 1. Пусть $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_v$ для некоторого $v \in \mathcal{T}$. Применим лемму 1.2.2. По свойству 2, $\Psi(\tilde{\mathcal{T}}) \leqslant (k+2)\gamma$. Значит, по свойствам 3 и 4

$$l = \operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma')|_{\mathcal{T}_v} \leqslant (k+2)\left(\left\lceil (k+2)\frac{\gamma}{\gamma'} \right\rceil + 1\right) \overset{(1.44)}{\leqslant} (k+2)(2k+5).$$

Случай 2. Пусть $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_v\backslash\mathcal{T}_w$, v, $w \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, $w > v$, при этом

$$\Psi(\mathcal{T}_v\backslash\mathcal{T}_w) < \gamma. \tag{1.45}$$

Положим

$$\tilde{E} = \{u \in \mathbf{V}(\mathcal{T}) : \mathcal{T}_v \subset \mathcal{T}_u, \;\; \mathfrak{S}(\mathcal{T}_u,\, \gamma') \subset \mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma')\}.$$

Это множество непусто, так как содержит v_*. Далее, $\tilde{E}$ является цепью, поскольку если вершины u_1 и u_2 несравнимы, то $\mathcal{T}_{u_1}$ и $\mathcal{T}_{u_2}$ не пересекаются. Наконец, $\rho_{\mathcal{T}}(v_*,\, v) \geqslant \rho_{\mathcal{T}}(v_*,\, u)$ для любого $u \in \tilde{E}$, так что $\tilde{E}$ содержит максимальный элемент u_0.

Так как $l > 1$, то по лемме 1.2.2 (свойство 1) найдется вершина $\hat{u} \geqslant u_0$ такая, что

$$\mathfrak{S}(\mathcal{T}_{u_0},\, \gamma') = \{\mathcal{T}_{u_0}\backslash\mathcal{T}_{\hat{u}}\} \cup \{\hat{u}\} \bigcup \left(\bigcup_{v' \in \mathbf{V}_1(\hat{u})} \mathfrak{S}(\mathcal{T}_{v'},\, \gamma') \right). \tag{1.46}$$

Покажем, что

$$v \leqslant \hat{u}. \tag{1.47}$$

В самом деле, если v и $\hat{u}$ несравнимы, то $\mathcal{T}_v \subset \mathcal{T}_{u_0}\backslash\mathcal{T}_{\hat{u}}$, и

$$l = \operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma')|_{\tilde{\mathcal{T}}} \leqslant \operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma')|_{\mathcal{T}_v} = \operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T}_{u_0},\, \gamma')|_{\mathcal{T}_v} = 1.$$

Если $v > \hat{u}$, то $v \in \mathcal{T}_{v'}$ для некоторого $v' \in \mathbf{V}_1(\hat{u})$, то есть $v' \in \tilde{E}$ в силу (1.46) и $v' > u_0$ — противоречие с тем, что $u_0 = \max \tilde{E}$.

Пусть $u \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, $\mathfrak{S}(\mathcal{T}_u,\, \gamma') \subset \mathfrak{S}(\mathcal{T},\, \gamma')$, $u \geqslant v$. Обозначим через l_u число элементов разбиения $\mathfrak{S}(\mathcal{T}_u,\, \gamma')$, пересекающихся с $\mathcal{T}_v\backslash\mathcal{T}_w$.

Обозначим также

$$\mathcal{U} = \{u \geqslant v : \ \mathfrak{S}(\mathcal{T}_u, \gamma') \subset \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma'), \ l_u > 1\}. \tag{1.48}$$

Утверждение ($\star$). Существует отображение $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbf{V}(\mathcal{T})$ такое, что $\varphi(u) > u$ для любого $u \in \mathcal{U}$,

$$\mathfrak{S}(\mathcal{T}_{\varphi(u)}, \gamma') \subset \mathfrak{S}(\mathcal{T}_u, \gamma'), \ \ \Psi(\mathcal{T}_{\varphi(u)}) \leqslant \Psi(\mathcal{T}_u) - \gamma' \text{ и } l_u \leqslant k + 1 + l_{\varphi(u)}, \tag{1.49}$$

и если $l_{\varphi(u)} > 1$, то

$$\varphi(u) < w. \tag{1.50}$$

Доказательство утверждения ($\star$). По лемме 1.2.2 (свойство 1), для каждого $u \in \mathcal{U}$ найдется вершина $\tilde{u} \geqslant u$ такая, что

$$\mathfrak{S}(\mathcal{T}_u, \gamma') = \{\mathcal{T}_u \backslash \mathcal{T}_{\tilde{u}}\} \cup \{\tilde{u}\} \bigcup \left(\bigcup_{v' \in \mathbf{V}_1(\tilde{u})} \mathfrak{S}(\mathcal{T}_{v'}, \gamma') \right),$$

при этом $\Psi(\mathcal{T}_{v'}) \overset{(1.32)}{\leqslant} \Psi(\mathcal{T}_u) - \gamma'$ для любого $v' \in \mathbf{V}_1(\tilde{u})$. Поэтому $l_u \leqslant 2 + \sum\limits_{v' \in \mathbf{V}_1(\tilde{u})} l_{v'}$, а для того, чтобы выполнялись первые два соотношения в (1.49), достаточно выбрать $\varphi(u) \in \mathbf{V}_1(\tilde{u})$.

Докажем, что если $l_{v'} > 1$, то $v' < w$. Если $v' \geqslant w$, то $l_{v'} = 0$. Если v' и w несравнимы, то $\mathcal{T}_{v'} \subset \mathcal{T}_v \backslash \mathcal{T}_w$ (поскольку $v' > u \overset{(1.48)}{\geqslant} v$ и $\mathcal{T}_w \cap \mathcal{T}_{v'} = \varnothing$). Тогда

$$\Psi(\mathcal{T}_{v'}) \leqslant \Psi(\mathcal{T}_v \backslash \mathcal{T}_w) \overset{(1.45)}{<} \gamma \overset{(1.44)}{\leqslant} 2\gamma',$$

откуда $l_{v'} \leqslant \operatorname{card} \mathfrak{S}(\mathcal{T}_{v'}, \gamma') = 1$ (см. свойство 3 в лемме 1.2.2).

Положим $A_u = \{v' \in \mathbf{V}_1(\tilde{u}) : l_{v'} > 1\}$. Из соотношения $\operatorname{card}\{v' \in \mathbf{V}_1(\tilde{u}) : v' < w\} \leqslant 1$ следует, что $\operatorname{card} A_u \leqslant 1$. Если $\operatorname{card} A_u = 1$, то в качестве $\varphi(u)$ берем элемент множества A_u (и в силу доказанного выполнено (1.50)). Если $A_u = \varnothing$, то в качестве $\varphi(u)$ берем произвольный элемент множества $\mathbf{V}_1(\tilde{u})$. В обоих случаях выполнено последнее неравенство в (1.49). Утверждение ($\star$) доказано.

Из (1.46) следует, что $\mathfrak{S}(\mathcal{T}_{u'}, \gamma') \subset \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \gamma')$ для любого $u' \in \mathbf{V}_1(\hat{u})$ и $u' > \hat{u} \overset{(1.47)}{\geqslant} v$. Значит, если $l_{u'} > 1$, то $u' \in \mathcal{U}$.

В силу (1.46) и условия $u_0 \in \tilde{E}$,

$$l \leqslant 2 + \sum_{u' \in \mathbf{V}_1(\hat{u})} l_{u'}. \tag{1.51}$$

Оценим $l_{u'}$ для каждого $u' \in \mathbf{V}_1(\hat{u})$ такого, что $l_{u'} > 1$. Для этого воспользуемся (1.49). Если $l_{\varphi(u')} \leqslant 1$, то $l_{u'} \leqslant k + 2$. Пусть $l_{\varphi(u')} > 1$. Тогда $\varphi(u') \in \mathcal{U}$. Снова применив (1.49), получаем, что $l_{u'} \leqslant k + 1 + k + 1 + l_{\varphi(\varphi(u'))}$, при этом

$$\Psi(\mathcal{T}_{\varphi(\varphi(u'))}) \overset{(1.49)}{\leqslant} \Psi(\mathcal{T}_{\varphi(u')}) - \gamma' \overset{(1.49)}{\leqslant} \Psi(\mathcal{T}_{u'}) - 2\gamma' \overset{(1.44)}{\leqslant} \Psi(\mathcal{T}_{u'}) - \gamma.$$

Если $l_{\varphi(\varphi(u'))} > 1$, то $\varphi(\varphi(u')) \overset{(1.50)}{<} w$, и $\Psi(\mathcal{T}_w) \leqslant \Psi(\mathcal{T}_{\varphi(\varphi(u'))})$. С другой стороны, по лемме 1.2.2 (свойство 5), $\Psi(\mathcal{T}_w) > \Psi(\mathcal{T}_v) - \gamma$. Учитывая условие $u' > \hat{u} \overset{(1.47)}{\geqslant} v$, получаем противоречивую цепочку неравенств

$$\Psi(\mathcal{T}_v) - \gamma < \Psi(\mathcal{T}_w) \leqslant \Psi(\mathcal{T}_{\varphi(\varphi(u'))}) \leqslant \Psi(\mathcal{T}_{u'}) - \gamma \leqslant \Psi(\mathcal{T}_v) - \gamma.$$

Значит, $l_{\varphi(\varphi(u'))} \leqslant 1$, $l_{u'} \leqslant 2k + 3$ и $l \overset{(1.51)}{\leqslant} 2 + k(2k + 3)$. $\square$

Следствие 1.2.1. *Пусть выполнены условия леммы 1.2.2, $\Psi(\mathcal{T}) > 0$. Тогда найдется константа $C(k) > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует разбиение $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \Psi(\mathcal{T})/n)$ дерева $\mathcal{T}$ на не более, чем $C(k)n$ поддеревьев $\mathcal{T}_j$ таких, что $\Psi(\mathcal{T}_j) \leqslant \frac{(k+2)\Psi(\mathcal{T})}{n}$ для любого j, удовлетворяющего условию $\operatorname{card}\mathbf{V}(\mathcal{T}_j) \geqslant 2$. При этом, найдется такое $C_1(k) > 0$, что если $m \leqslant 2n$, то каждый элемент $\mathfrak{S}_n$ перекрывается с не более, чем $C_1(k)$ элементами $\mathfrak{S}_m$.*

1.3 Построение разбиения области

Сначала построим разбиение куба.

Пусть Φ — неотрицательная функция, определенная на измеримых по Лебегу подмножествах $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая условиям:

$$\Phi(A_1) + \Phi(A_2) \leqslant \Phi(A_1 \cup A_2), \quad \text{где} \quad A_1,\, A_2 \subset \mathbb{R}^d \quad \text{не перекрываются;} \tag{1.52}$$

$$\text{если } \operatorname{mes} A_n \to 0, \text{ то } \Phi(A_n) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{1.53}$$

Через $\mathcal{R}$ обозначим совокупность множеств вида $K\backslash K'$, где $K \in \mathcal{K}$, $K' \in \Xi(K)$, $K' \neq K$.

В следующих леммах определяются разбиения $Q(K, \gamma)$, $P(K, \gamma)$ куба K.

Лемма 1.3.1. *Для любого $\gamma > 0$ и любого $K \in \mathcal{K}$ такого, что $\Phi(K) > 3\gamma$, существует единственное разбиение $Q(K, \gamma) = \{R, \Delta_1, \ldots, \Delta_{2^d}\}$ куба K на неперекрывающиеся подмножества со следующими свойствами*:

$$R \in \mathcal{R}, \quad \widehat{\Delta} := \bigcup_{j=1}^{2^d} \Delta_j \in \Xi(K), \quad \Delta_j \in \Xi_1(\widehat{\Delta}), \quad j = 1, \ldots, 2^d, \tag{1.54}$$

$$\Phi(\widehat{\Delta}) > \Phi(K) - \gamma, \tag{1.55}$$

$$\Phi(\Delta_j) \leqslant \Phi(K) - \gamma. \tag{1.56}$$

Доказательство. Рассмотрим множество S чисел $s \in \mathbb{Z}_+$ таких, что существует куб $\Delta_*^{s,\gamma} \in \Xi_s(K)$, удовлетворяющий условию

$$\Phi(\Delta_*^{s,\gamma}) > \Phi(K) - \gamma. \tag{1.57}$$

Множество S конечно в силу соотношений $\Phi(K) > 3\gamma$, (1.53) и (1.57) и содержит 0 ($\Delta_*^{0,\gamma} = K$). Положим $s_* = \max S$, $\widehat{\Delta} = \Delta_*^{s_*,\gamma}$, $R = K\backslash\widehat{\Delta}$, $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_{2^d}\} = \Xi_1(\widehat{\Delta})$. Тогда свойство (1.54) выполнено по построению, неравенство (1.55) следует из условия $s_* \in S$, неравенство (1.56) — из условия $s_* + 1 \notin S$. Существование $Q(K, \gamma)$ доказано.

Докажем единственность. Пусть существует другое разбиение $\{R', \Delta_1', \ldots, \Delta_{2^d}'\}$ с теми же свойствами, $\widehat{\Delta}' = \bigcup_{j=1}^{2^d} \Delta_j'$, $\widehat{\Delta}' \neq \widehat{\Delta}$. Из (1.55) и (1.56) следует, что случаи $\widehat{\Delta}' \in \Xi(\widehat{\Delta})$ и $\widehat{\Delta} \in \Xi(\widehat{\Delta}')$ невозможны. Поэтому остался случай, когда $\widehat{\Delta}$ и $\widehat{\Delta}'$ не перекрываются. Тогда

$$\Phi(K) \overset{(1.52)}{\geqslant} \Phi(\widehat{\Delta}) + \Phi(\widehat{\Delta}') \overset{(1.55)}{>} 2\Phi(K) - 2\gamma,$$

откуда $\Phi(K) < 2\gamma$ — противоречие. $\square$

Лемма 1.3.2. *Для любых $K \in \mathcal{K}$ и $\gamma > 0$ существует разбиение $P(K, \gamma)$ куба K на неперекрывающиеся подмножества со следующими свойствами:*

1. *если $\Delta \in P(K, \gamma)$, то $\Delta \in \Xi(K)$ или $\Delta \in \mathcal{R}$;*
2. *$\Phi(\Delta) \leqslant 3\gamma$ для любого $\Delta \in P(K, \gamma)$, при этом если $\Delta \in \mathcal{R}$, то $\Phi(\Delta) < \gamma$;*
3. *если $\lceil \Phi(K)\gamma^{-1} \rceil \leqslant m \in \mathbb{Z}_+$, то разбиение $P(K, \gamma)$ содержит не более $1+2^d(m-3)_+$ элементов; в частности, если $\Phi(K) \leqslant 3\gamma$, то $P(K, \gamma) = \{K\}$;*
4. *если $R \in \mathcal{R} \cap P(K, \gamma)$, то существует куб $\Delta \in \Xi(K)$ такой, что $R \in Q(\Delta, \gamma)$ и $P(\Delta, \gamma) \subset P(K, \gamma)$;*
5. *если $\Delta \in \Xi(K)$, $P(\Delta, \gamma) \subset P(K, \gamma)$, $\Phi(\Delta) > 3\gamma$, то для любого куба $\Delta' \in Q(\Delta, \gamma)$ выполнено $P(\Delta', \gamma) \subset P(K, \gamma)$;*
6. *если $\Phi(K) > 3\gamma$, $Q(K, \gamma) = \{\mathcal{R}, \Delta_1, \ldots, \Delta_{2^d}\}$, $R = K \backslash \Delta \in \mathcal{R}$, $\Delta_j \in \Xi_1(\Delta)$, $1 \leqslant j \leqslant 2^d$, то $P(K, \gamma) = \{R\} \cup \Big(\cup_{j=1}^{2^d} P(\Delta_j, \gamma)\Big)$; если $Q(K, \gamma) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_{2^d}\}$, $\Delta_j \in \Xi_1(K)$, $1 \leqslant j \leqslant 2^d$, то $P(K, \gamma) = \cup_{j=1}^{2^d} P(\Delta_j, \gamma)$.*

Доказательство. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_m(\gamma)$ множество кубов $K \in \mathcal{K}$ таких, что $\lceil \Phi(K)\gamma^{-1} \rceil = m$. Пусть также $\mathcal{K}'_m = \bigcup_{l=0}^m \mathcal{K}_l$, т. е. $\mathcal{K}'_m = \{K \in \mathcal{K}\colon\ \lceil \Phi(K)\gamma^{-1} \rceil \leqslant m\}$.

Разбиение $P(K, \gamma)$ строится по индукции. Положим $P(K, \gamma) = \{K\}$ для всех $K \in \mathcal{K}'_3$. Пусть $P(K, \gamma)$ со свойствами 1–6 построено для всех $K \in \mathcal{K}'_{m-1}$, $m \geqslant 4$. Построим $P(K, \gamma)$ для всех $K \in \mathcal{K}_m$. Рассмотрим разбиение $Q(K, \gamma) = \{R, \Delta_1, \ldots, \Delta_{2^d}\}$. Тогда в силу (1.56)

$$\Phi(\Delta_j) \leqslant \Phi(K) - \gamma \leqslant m\gamma - \gamma = (m-1)\gamma, \quad \text{т. е.} \quad \Delta_j \in \mathcal{K}'_{m-1}. \tag{1.58}$$

Значит, для каждого $j = 1, \ldots, 2^d$ в силу предположения индукции определено разбиение $P(\Delta_j, \gamma) = \{\Delta_{j,k}\}_{1 \leqslant k \leqslant n_j}$, удовлетворяющее свойствам 1–6. Положим

$$\begin{aligned} P(K, \gamma) = \{R\} \cup P(\Delta_1, \gamma) \cup \ldots \cup P(\Delta_{2^d}, \gamma) = \\ = \{R, \Delta_{j,k},\ j = 1, \ldots, 2^d,\ k = 1, \ldots, n_j\} \end{aligned} \tag{1.59}$$

(если $R = \varnothing$, то его в разбиение не включаем). Покажем, что для $P(K, \gamma)$ выполнены свойства 1–6. Свойство 1 выполнено по построению. В силу предположения индукции

$$\Phi(\Delta_{j,k}) \leqslant 3\gamma, \quad j = 1, \ldots, 2^d, \quad k = 1, \ldots, n_j,$$

а если $\Delta_{j,k} \in \mathcal{R}$, то $\Phi(\Delta_{j,k}) < \gamma$. Кроме того,

$$\Phi(R) \overset{(1.52)}{\leqslant} \Phi(K) - \Phi\Big(\bigcup_{j=1}^{2^d} \Delta_j\Big) \overset{(1.55)}{<} \gamma.$$

Значит, выполнено свойство 2.

Докажем по индукции, что выполнено свойство 3. Предположение индукции записывается в следующем виде: если $\Delta \in \mathcal{K}$ и $\lceil \Phi(\Delta)\gamma^{-1} \rceil \leqslant l \in \mathbb{Z}_+$ $(3 \leqslant l \leqslant m-1)$, то разбиение $P(\Delta, \gamma)$ содержит не более $1 + 2^d(l-3)$ элементов. Исходя из этого, мы должны доказать, что

$$\operatorname{card} P(K, \gamma) = 1 + \sum_{j=1}^{2^d} \operatorname{card} P(\Delta_j, \gamma) \leqslant 1 + 2^d(m-3) \ \text{ для } \ K \in \mathcal{K}_m.$$

Так как $\Delta_j \in \mathcal{K}'_{m-1}$ в силу (1.58), то по предположению индукции

$$\operatorname{card} P(\Delta_j, \gamma) \leqslant 1 + 2^d(m-4) \quad (m \geqslant 4). \tag{1.60}$$

Обозначим через J множество тех j, для которых $\Phi(\Delta_j) > 3\gamma$, и пусть $\theta = \operatorname{card} J$. Если $\theta = 0$, то $P(\Delta_j, \gamma) = \{\Delta_j\}$ и $\operatorname{card} P(K, \gamma) = 1 + 2^d \leqslant 1 + 2^d(m-3)$. Если $\theta = 1$, $J = \{j'\}$, то $\operatorname{card} P(\Delta_{j'}, \gamma) \leqslant 1 + 2^d(m-4)$ в силу (1.60). Значит, $P(K, \gamma)$ содержит не более $1+(2^d-1)+1+2^d(m-4) = 1+2^d(m-3)$ элементов. Пусть $\theta \geqslant 2$ и $m_j = \lfloor \Phi(\Delta_j)\gamma^{-1} \rfloor$, $j \in J$. Так как $\lceil \Phi(\Delta_j)\gamma^{-1} \rceil \leqslant m_j+1$, то $\operatorname{card} P(\Delta_j, \gamma) \leqslant 1+2^d(m_j-2)$ в силу предположения индукции. Поскольку

$$\sum_{j\in J} m_j\gamma \leqslant \Phi(R) + \sum_{j=1}^{2^d} \Phi(\Delta_j) \overset{(1.52)}{\leqslant} \Phi(K) \leqslant m\gamma,$$

то

$$\sum_{j\in J} m_j \leqslant m. \tag{1.61}$$

Значит, число элементов $P(K, \gamma)$ не превосходит

$$\begin{aligned} 1 + (2^d - \theta) + \sum_{j\in J} \big(1 + 2^d(m_j - 2)\big) &= 1 + 2^d - \theta + \theta(1 - 2\cdot 2^d) + 2^d \sum_{j\in J} m_j \\ &\overset{(1.61)}{\leqslant} 1 + 2^d - 2\cdot 2^d\theta + 2^d m \leqslant 1 + 2^d(m-3). \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из того, что $\theta \geqslant 2$. Таким образом, свойство 3 доказано.

Свойство 6 сразу следует из (1.59).

Докажем свойство 4. Пусть $R' \in \mathcal{R} \cap P(K, \gamma)$. Тогда либо $R' = R$ и в качестве Δ можно взять K, либо $R' \in P(\Delta_j, \gamma)$ для некоторого $j = 1, \ldots, 2^d$. Во втором случае по предположению индукции существует куб $\Delta \in \Xi(\Delta_j)$ такой, что $R' \in Q(\Delta, \gamma)$ и $P(\Delta, \gamma) \subset P(\Delta_j, \gamma)$. Но $P(\Delta_j, \gamma) = \{\Delta_{j,k}\}_{1\leqslant k\leqslant n_j} \subset P(K, \gamma)$ по построению, так что $P(\Delta, \gamma) \subset P(K, \gamma)$.

Докажем свойство 5. Пусть $\Delta \in \Xi(K)$, $\Phi(\Delta) > 3\gamma$ и $P(\Delta, \gamma) \subset P(K, \gamma)$, $\Delta' \in Q(\Delta, \gamma)$. Требуется доказать, что $P(\Delta', \gamma) \subset P(K, \gamma)$. Если $\Delta = K$, то это следует из (1.59). Если $\Delta \neq K$, то Δ не перекрывается с R и поэтому $\Delta \subset \cup_{j=1}^{2^d}\Delta_j$. Если $\Delta \in \Xi(\Delta_j)$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$, то снова в силу (1.59) получаем, что $P(\Delta, \gamma) \subset P(\Delta_j, \gamma)$. По предположению индукции, $P(\Delta', \gamma) \subset P(\Delta_j, \gamma) \subset P(K, \gamma)$. Если $\Delta = \cup_{j=1}^{2^d}\Delta_j$, то $Q(\Delta, \gamma) = \{\Delta_j\}_{j=1}^{2^d}$. В самом деле, иначе $Q(\Delta, \gamma)$ содержит элемент $R' \in \mathcal{R}$. Отметим, что $\Delta \in \mathcal{K}'_m$. В силу уже доказанного свойства 6, $R' \in P(\Delta, \gamma) \subset P(K, \gamma)$ — противоречие с (1.59). Итак, $\Delta' = \Delta_j$ для некоторого j и опять $P(\Delta_j, \gamma) \subset P(K, \gamma)$ в силу (1.59).

$\square$

Лемма 1.3.3. *Пусть $K \in \mathcal{K}$, $\Phi(K) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $T_n = T_n(K) := P\left(K, n^{-1}\Phi(K)\right)$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1. *число элементов разбиения T_n не превосходит $2^d n$;*
2. *для любого $\Delta \in T_n$ выполнено $\Phi(\Delta) \leqslant 3n^{-1}\Phi(K)$;*
3. *любой элемент T_n принадлежит $\Xi(K)$ или $\mathcal{R}$;*

4. существует $C(d) \in \mathbb{N}$ такое, что при $l \leqslant 2m$ ($l, m \in \mathbb{N}$) любой элемент разбиения T_m перекрывается с не более, чем $C(d)$ элементами разбиения T_l.

Доказательство. Свойства 1, 2 и 3 следуют из утверждений 1, 2 и 3 леммы 1.3.2 для разбиения $P(K, n^{-1}\Phi(K))$.

Докажем свойство 4.

Для каждого $\Delta \in \Xi(K)$ построим куб K_Δ со свойствами:

(a) $\Delta \subset K_\Delta$;

(b) $P\big(K_\Delta, l^{-1}\Phi(K)\big) \subset T_l = P\big(K, l^{-1}\Phi(K)\big)$;

(c) если $\Phi(K_\Delta) > 3l^{-1}\Phi(K)$, то ни один из кубов, принадлежащих разбиению $Q\big(K_\Delta, l^{-1}\Phi(K)\big)$, не содержит Δ.

Для этого рассмотрим семейство кубов $K' \in \Xi(K)$ со следующими свойствами:

(a$'$) $\Delta \subset K'$;

(b$'$) $P\big(K', l^{-1}\Phi(K)\big) \subset T_l$.

Это семейство непусто (так как содержит K) и конечно. В качестве K_Δ возьмем его минимальный по включению элемент. Свойства (a) и (b) тогда выполнены автоматически. Свойство (c) докажем от противного. Пусть $\Phi(K_\Delta) > 3l^{-1}\Phi(K)$ и куб $\Delta' \in Q\big(K_\Delta, l^{-1}\Phi(K)\big)$ содержит Δ. В силу свойства 5 разбиения $P(K, l^{-1}\Phi(K))$

$$P(\Delta', l^{-1}\Phi(K)) \subset P(K, l^{-1}\Phi(K)),$$

т. е. Δ' удовлетворяет свойствам (a$'$) и (b$'$) и K_Δ — не минимальный.

Сразу заметим, что если элемент T_m содержится в объединении k элементов T_l, то он перекрывается не более, чем с k элементами T_l.

Пусть $\Delta \in T_m$ является кубом. Если $\Phi(K_\Delta) \leqslant 3l^{-1}\Phi(K)$, то $K_\Delta \in T_l$.

Пусть $\Phi(K_\Delta) > 3l^{-1}\Phi(K)$. Рассмотрим разбиение $Q\big(K_\Delta, l^{-1}\Phi(K)\big)$, состоящее из кубов Δ_j, $j = 1, \dots, 2^d$, и множества $R \in \mathcal{R}$. В силу свойства 6, $R \in P(K_\Delta, l^{-1}\Phi(K)) \subset T_l$. Возможны три случая:

• $\Delta' := \bigcup_{j=1}^{2^d} \Delta_j$ и Δ не перекрываются. Тогда $\Delta \subset R \in T_l$, поэтому Δ перекрывается ровно с одним элементом T_l.

• $\Delta \subset \Delta'$, причем включение строгое. Тогда $\Delta \subset \Delta_j$ для некоторого j, что противоречит определению K_Δ, т. е. этот случай невозможен.

• $\Delta \supset \Delta'$. Тогда $\Delta \backslash \Delta' \subset R \in T_l$. Для любого $j = 1, \dots, 2^d$ имеем $\Phi(\Delta_j) \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant 3m^{-1}\Phi(K) \leqslant 6l^{-1}\Phi(K)$ (так как $m \geqslant l/2$). В силу утверждения 3 леммы 2, разбиение $P\big(\Delta_j, l^{-1}\Phi(K)\big)$ содержит не более $1 + 2^d \cdot 3 \leqslant 2^{d+2}$ элементов. Значит, Δ перекрывается не более, чем с $1 + 2^d \cdot 2^{d+2}$ элементами T_l.

Таким образом, любой куб из T_m перекрывается не более, чем с $1 + 2^d \cdot 2^{d+2}$ элементами T_l.

Пусть $R \in \mathcal{R}$ является элементом разбиения T_m. В силу свойства 4 разбиения $P\big(K, m^{-1}\Phi(K)\big)$, существует куб Δ такой, что $R \in Q\big(\Delta, m^{-1}\Phi(K)\big)$ и элементы $P\big(\Delta, m^{-1}\Phi(K)\big)$ являются элементами T_m. Обозначим через Δ_j ($j = 1, \dots, 2^d$) кубы из $Q\big(\Delta, m^{-1}\Phi(K)\big)$.

Пусть $\Phi(K_\Delta) \leqslant 3l^{-1}\Phi(K)$. Тогда $K_\Delta \in T_l$, и Δ перекрывается ровно с одним элементом T_l.

Пусть $\Phi(K_\Delta) > 3l^{-1}\Phi(K)$. Обозначим элементы разбиения $Q\big(K_\Delta, l^{-1}\Phi(K)\big)$ через Δ'_j, $j = 1, \dots, 2^d$, и $R' \in \mathcal{R}$. Из свойств 5 и 6 разбиения $P\big(K_\Delta, l^{-1}\Phi(K)\big)$ получаем $R' \in T_l$ и

$$P\left(\Delta'_j, l^{-1}\Phi(K)\right) \subset T_l. \tag{1.62}$$

Аналогично предыдущему имеем три случая:

• $\Delta \subset R' \in T_l$, т. е. Δ перекрывается ровно с одним элементом T_l;
• $\Delta \subset \Delta'_j$ для некоторого j; это невозможно, так как противоречит определению K_Δ;
• $\Delta \supset \bigcup_{j=1}^{2^d} \Delta'_j$.
Рассмотрим третий случай. Для каждого Δ'_j есть три возможности:
• Δ'_j и $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$ не перекрываются;
• $\Delta'_j \subset \bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$;
• $\Delta'_j \supset \bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$ (причем включение строгое).
Оценим число элементов T_l, перекрывающихся с $\Delta'_j \cap R$. В первом случае $\Delta'_j \subset R$, поэтому в силу утверждения 2 леммы 1.3.2

$$\Phi(\Delta'_j) \leqslant m^{-1}\Phi(K) \overset{l\leqslant 2m}{\leqslant} 3l^{-1}\Phi(K),$$

откуда $\Delta'_j \in T_l$. Значит, $\Delta'_j \cap R$ перекрывается не более чем с одним элементом T_l. Во втором случае $\Delta'_j \cap R = \varnothing$. Рассмотрим третий случай (он возможен не более, чем для одного куба Δ'_j). Можно считать, что $\Phi(\Delta'_j) > 3l^{-1}\Phi(K)$ (иначе $\Delta'_j \in T_l$). Из (1.55), неравенства $l \leqslant 2m$ и включения $\Delta \supset \Delta'_j$ следует, что

$$\Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i\Big) > \Phi(\Delta) - m^{-1}\Phi(K) \geqslant \Phi(\Delta'_j) - 2l^{-1}\Phi(K). \tag{1.63}$$

Обозначим элементы разбиения $Q\left(\Delta'_j,\, l^{-1}\Phi(K)\right)$ через $\Delta'_{j,s}$, $s = 1, \ldots, 2^d$, и $R'_j \in \mathcal{R}$. В силу свойства 6 разбиения $P\left(\Delta'_j,\, l^{-1}\Phi(K)\right)$ и включения (1.62) выполнено $R'_j \in T_l$. Зафиксируем s. Если $\Delta'_{j,s} \subset R$, то в силу утверждения 2 леммы 1.3.2

$$\Phi(\Delta'_{j,s}) \leqslant \Phi(R) \leqslant m^{-1}\Phi(K) \overset{l\leqslant 2m}{\leqslant} 3l^{-1}\Phi(K), \quad \text{поэтому} \quad \Delta'_{j,s} \in T_l.$$

Если $\Delta'_{j,s} \subset \bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$, то $\Delta'_{j,s} \cap R = \varnothing$. Пусть $\Delta'_{j,s} \supset \bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$ и включение является строгим. Так как $\Phi(\Delta'_{j,s}) \overset{(1.56)}{\leqslant} \Phi(\Delta'_j) - l^{-1}\Phi(K)$, то из (1.63) получаем, что

$$\Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i\Big) > \Phi(\Delta'_{j,s}) - l^{-1}\Phi(K). \tag{1.64}$$

Отсюда следует, что $\Delta'_{j,s} \cap R$ содержится в элементе T_l. В самом деле, пусть $S_1 = \{s \in \{1, \ldots, 2^d\} : \ \Delta'_{j,s} \in T_l\}$. Для $s \in S_1$ утверждение тривиально. Пусть $s \notin S_1$. Напомним, что в силу утверждения 5 леммы 1.3.2

$$P\big(\Delta'_{j,s},\, l^{-1}\Phi(K)\big) \subset P\big(\Delta'_j,\, l^{-1}\Phi(K)\big) \subset P\big(K_\Delta,\, l^{-1}\Phi(K)\big) \subset T_l. \tag{1.65}$$

Поэтому $\Phi(\Delta'_{j,s}) > 3l^{-1}\Phi(K)$, иначе $P\big(\Delta'_{j,s},\, l^{-1}\Phi(K)\big) = \{\Delta'_{j,s}\}$ и $\Delta'_{j,s} \in T_l$. Рассмотрим разбиение $Q\big(\Delta'_{j,s},\, l^{-1}\Phi(K)\big)$, состоящее из кубов $\Delta'_{j,s,t}$, $t = 1, \ldots, 2^d$, и дополнения $R'_{j,s} \in \mathcal{R}$. В силу (1.65) и свойства 6 разбиения $P\big(\Delta'_{j,s},\, l^{-1}\Phi(K)\big)$ выполнено $R'_{j,s} \in T_l$. Докажем, что $\Delta'_{j,s} \cap R \subset R'_{j,s}$. Для этого достаточно проверить включение $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i \supset \bigcup_{t=1}^{2^d} \Delta'_{j,s,t}$. Если оно не выполнено, то возможны два случая:
• $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i \subset \Delta'_{j,s,t_*}$ для некоторого t_*. С другой стороны, для любого t имеем $\Phi(\Delta'_{j,s,t}) \leqslant \Phi(\Delta'_{j,s}) - l^{-1}\Phi(K)$ $\big($в силу (1.56) для $Q(\Delta'_{j,s},\, l^{-1}\Phi(K))\big)$, так что $\Phi\big(\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i\big) \leqslant \Phi(\Delta'_{j,s}) - l^{-1}\Phi(K)$, что противоречит (1.64).

- $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i \subset R'_{j,s}$. Тогда

$$l^{-1}\Phi(K) \geqslant \Phi(R'_{j,s}) \geqslant \Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i\Big) \overset{(1.64)}{>} \Phi(\Delta'_{j,s}) - l^{-1}\Phi(K),$$

откуда $\Phi(\Delta'_{j,s}) \leqslant 2l^{-1}\Phi(K)$, что противоречит неравенству $\Phi(\Delta'_{j,s}) > 3l^{-1}\Phi(K)$.

Тем самым показано, что $\Delta'_{j,s} \cap R \subset R'_{j,s} \in T_l$. Отсюда следует, что R перекрывается не более, чем с $1 + 2^d + 2^d$ элементами T_l: R', Δ'_ν ($\nu \neq j$), R'_j, $\Delta'_{j,s}$ ($s \in S_1$), $R'_{j,s}$ ($s \notin S_1$).

Лемма доказана. $\square$

Отметим, что похожее разбиение было построено в [83]. Для него были доказаны свойства, аналогичные утверждениям 1–3 леммы 1.3.3 (с другими константами в оценках количества элементов разбиения и величины $\Phi(\Delta)$). Кроме того, при дополнительных условиях на функцию Φ в [10] построено разбиение на кубы со свойствами 1–3 (также с другими константами).

Теперь перейдем к построению разбиения области.

Определение функций Φ и Ψ. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{l_*} > 0$, $\sum_{j=1}^{l_*} \alpha_j = 1$, $\mu_1, \dots, \mu_{l_*}$ — конечные абсолютно непрерывные меры на Ω. Из теоремы Радона – Никодима и абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$\mu_j(A) \to 0 \text{ при } \operatorname{mes} A \to 0. \tag{1.66}$$

Для измеримого по Лебегу множества $A \subset \mathbb{R}^d$ положим

$$\Phi(A) = \prod_{j=1}^{l_*} (\mu_j(A \cap \Omega))^{\alpha_j}. \tag{1.67}$$

Из (1.66) и условия $\alpha_j > 0$ следует (1.53). Далее, в силу неравенства Гельдера

$$\prod_{j=1}^{l_*} (b_j + c_j)^{\alpha_j} \geqslant \prod_{j=1}^{l_*} b_j^{\alpha_j} + \prod_{j=1}^{l_*} c_j^{\alpha_j}, \;\; b_j \geqslant 0, \; c_j \geqslant 0, \tag{1.68}$$

откуда следует (1.52).

Пусть $\mathcal{T}$ и F — дерево и отображение, построенные в соответствии с леммой 1.1.3. Определим отображение $\Psi : 2^{\mathbf{V}(\mathcal{T})} \to \mathbb{R}_+$ по формуле

$$\Psi(\mathbf{W}) = \Phi\left(\cup_{v \in \mathbf{W}} F(v)\right), \quad \mathbf{W} \subset \mathbf{V}(\mathcal{T}). \tag{1.69}$$

Из (1.52) следует (1.29). Докажем (1.30). Пусть $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{V}(\mathcal{T})$, $v_1 < \dots < v_n < \dots$. Из (1.5) следует, что $m_{v_n} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Значит, $\operatorname{mes} F(v_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, и в силу (1.28) получаем $\operatorname{mes} \Omega_{\mathcal{T}_{v_n}, F} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Поэтому (1.30) следует из (1.53).

Теорема 1.3.1. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется семейство разбиений $\{\mathcal{B}_{n,m}\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ области Ω со следующими свойствами:*

1. $\operatorname{card} \mathcal{B}_{n,m} \underset{d}{\lesssim} 2^m n$;
2. *если $E \in \mathcal{B}_{n,m}$, то*

(a) *либо* $E = \Omega_{\mathcal{T}',F}$ *для некоторого поддерева* $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, *либо* $E \subset F(w)$ *для некоторой вершины* $w \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ *и* $E \in \Xi(F(w)) \cup \mathcal{R}$;

(b) $\Phi(E) \underset{d}{\lesssim} \frac{\Phi(\Omega)}{2^m n}$;

3. *найдется константа* $C_*(d)$ *такая, что любой элемент* $\mathcal{B}_{n,m}$ *перекрывается с не более, чем* $C_*(d)$ *элементами* $\mathcal{B}_{n,m\pm 1}$.

Доказательство. Считаем, что $\Phi(\Omega) > 0$ (иначе полагаем $\mathcal{B}_{n,m} = \{\Omega_{\mathcal{T},F}\}$). Из (1.27) следует, что для любой вершины $v \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ выполнено $\operatorname{card} \mathbf{V}_1(\mathcal{T}) \underset{d}{\lesssim} 1$. По следствию 1.2.1, для любых $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ существует разбиение $\mathfrak{S}_{2^m n} = \{\mathcal{T}_j^{m,n}\}_{j=1}^{j_*(m,n)}$ дерева $\mathcal{T}$ со следующими свойствами:

1. $\mathcal{T}_j^{m,n}$ является деревом;
2. $j_*(m,\, n) \underset{d}{\lesssim} 2^m n$;
3. если $\operatorname{card} \mathbf{V}(\mathcal{T}_j^{m,n}) \geqslant 2$, то $\Psi(\mathcal{T}_j^{m,n}) \underset{d}{\lesssim} \frac{\Psi(\mathcal{T})}{2^m n}$;
4. существует величина $\hat{C}(d) > 0$ такая, что любой элемент $\mathfrak{S}_{2^m n}$ пересекается с не более, чем $\hat{C}(d)$ элементами разбиения $\mathfrak{S}_{2^{m\pm 1} n}$.

Обозначим

$$J_{m,n} = \left\{ j \in \overline{1,\, j_*(m,\, n)} : \operatorname{card} \mathbf{V}(\mathcal{T}_j^{m,n}) = 1, \;\; \Psi(\mathcal{T}_j^{m,n}) \geqslant \frac{\Psi(\mathcal{T})}{2^m n} \right\}. \tag{1.70}$$

Пусть $j \in J_{m,n}$, $\mathbf{V}(\mathcal{T}_j^{m,n}) = \{v_j^{m,n}\}$. Положим $\Delta_j^{m,n} := F(\{v_j^{m,n}\})$,

$$l_{j,m,n} = \left\lceil \frac{2^m n \Phi(\Delta_j^{m,n})}{\Phi(\Omega)} \right\rceil. \tag{1.71}$$

Тогда

$$\sum_{j \in J_{m,n}} l_{j,m,n} \leqslant j_*(m,\, n) + \sum_{j \in J_{m,n}} \frac{2^m n \Phi(\Delta_j^{m,n})}{\Phi(\Omega)} \overset{(1.52)}{\leqslant} j_*(m,\, n) + 2^m n \underset{d}{\lesssim} 2^m n. \tag{1.72}$$

Пусть $T_{l_{j,m,n}}(\Delta_j^{m,n})$ — разбиение куба $\Delta_j^{m,n}$, построенное в соответствии с леммой 1.3.3. Положим

$$\mathcal{B}_{n,m} = \{\Omega_{\mathcal{T}_j^{m,n},F}\}_{j \notin J_{m,n}} \bigcup \left(\bigcup_{j \in J_{m,n}} T_{l_{j,m,n}}(\Delta_j^{m,n}) \right).$$

Проверим свойство 1:

$$\operatorname{card} \mathcal{B}_{n,m} \leqslant j_*(m,\, n) + \sum_{j \in J_{m,n}} 2^d l_{j,m,n} \overset{(1.72)}{\underset{d}{\lesssim}} 2^m n.$$

Проверим свойство 2. Пункт a) следует из построения и пункта 3 леммы 1.3.3. Проверим пункт b). Пусть $E = \Omega_{\mathcal{T}_j^{m,n},F}$, где $j \notin J_{m,n}$. Из свойства 3 разбиения $\mathfrak{S}_{2^m n}$ и определения $J_{m,n}$ получаем

$$\Phi(E) \overset{(1.2)}{=} \Phi\left(\cup_{v \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_j^{m,n})} F(v)\right) \overset{(1.69)}{=} \Psi(\mathcal{T}_j^{m,n}) \underset{d}{\lesssim} \frac{\Psi(\mathcal{T})}{2^m n} \overset{(1.69)}{=} \frac{\Phi(\Omega)}{2^m n}. \tag{1.73}$$

Пусть $E \in T_{l_{j,m,n}}(\Delta_j^{m,n})$ для некоторого $j \in J_{m,n}$. Из пункта 2 леммы 1.3.3 следует, что

$$\Phi(E) \leqslant 3l_{j,m,n}^{-1}\Phi(\Delta_j^{m,n}) \overset{(1.71)}{\leqslant} \frac{3\Phi(\Omega)}{2^m n}.$$

Проверим свойство 3. Пусть $E = \Omega_{\mathcal{T}_j^{m,n},F}$, $j \notin J_{m,n}$. Обозначим

$$I_j^{\pm} = \{i \in J_{m\pm1,n} : \; v_i^{m\pm1,n} \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_j^{m,n})\}. \tag{1.74}$$

Тогда

$$\operatorname{card} I_j^{\pm} \cdot \frac{\Psi(\mathcal{T})}{2^m n} \overset{(1.70)}{\leqslant} 2\sum_{i\in I_j^{\pm}} \Psi(\{v_i^{m\pm1,n}\}) \overset{(1.29)}{\leqslant} 2\Psi(\mathcal{T}_j^{m,n}) \underset{d}{\overset{(1.73)}{\lesssim}} \frac{\Psi(\mathcal{T})}{2^m n},$$

поэтому

$$\operatorname{card} I_j^{\pm} \underset{d}{\lesssim} 1. \tag{1.75}$$

Значит, в силу пункта 1 леммы 1.3.3 и свойства 4 разбиения $\mathfrak{S}_{2^m n}$,

$$\operatorname{card}\{E' \in \mathcal{B}_{n,m\pm1} : \; (\operatorname{int} E') \cap (\operatorname{int} E) \neq \varnothing\} \leqslant \hat{C}(d) + \sum_{i\in I_j^{\pm}} 2^d l_{i,m\pm1,n} \overset{(1.71)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \hat{C}(d) + 2^d \sum_{i\in I_j^{\pm}} \left(\frac{2^{m\pm1} n\Phi(\Delta_i^{m\pm1,n})}{\Phi(\Omega)} + 1\right) \underset{d}{\overset{(1.69),(1.75)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim 1 + \sum_{i\in I_j^{\pm}} \frac{2^{m\pm1} n\Psi(\{v_i^{m\pm1,n}\})}{\Psi(\mathcal{T})} \underset{d}{\overset{(1.29),(1.74)}{\lesssim}} 1 + \frac{2^{m\pm1} n\Psi(\mathcal{T}_j^{m,n})}{\Psi(\mathcal{T})} \underset{d}{\overset{(1.73)}{\lesssim}} 1.$$

Пусть $E \in T_{l_{j,m,n}}(\Delta_j^{m,n})$ для некоторого $j \in J_{m,n}$ и E перекрывается с не менее, чем двумя элементами разбиения $\mathcal{B}_{n,m\pm1}$. Тогда $\Delta_j^{m,n} = \Delta_i^{m\pm1,n}$ для некоторого $i \in J_{m\pm1,n}$, и

$$\begin{gathered}\operatorname{card}\{E' \in \mathcal{B}_{n,m\pm1} : \; (\operatorname{int} E') \cap (\operatorname{int} E) \neq \varnothing\} = \\ = \operatorname{card}\{E' \in T_{l_{i,m\pm1,n}}(\Delta_i^{m\pm1,n}) : \; (\operatorname{int} E') \cap (\operatorname{int} E) \neq \varnothing\} = \\ = \operatorname{card}\{E' \in T_{l_{i,m\pm1,n}}(\Delta_j^{m,n}) : \; (\operatorname{int} E') \cap (\operatorname{int} E) \neq \varnothing\} \leqslant C(d)\end{gathered}$$

в силу пункта 4 леммы 1.3.3, определения $l_{j,m,n}$ и $l_{i,m\pm1,n}$ и неравенства $\lceil 2a \rceil \leqslant 2\lceil a \rceil$.

$\square$

1.4 Доказательство оценки сверху s-чисел

В этом параграфе мы докажем теорему 1 и верхнюю оценку s-чисел из теоремы 2.

В [47, 48] было получено интегральное представление для гладких функций на области, удовлетворяющей условию Джона, через ее производные r-го порядка. Здесь мы сформулируем этот результат для случая, когда функция равна нулю на некотором шаре, и затем более подробно проведем некоторые шаги доказательства из [47, 48].

В [47] дано следующее эквивалентное определение условия Джона.

Определение 1.4.1. Область Ω удовлетворяет условию Джона, если существуют $0 < \rho < R$ и $x_* \in \Omega$ такие, что для любого $x \in \Omega$ найдется кривая γ_x со свойствами 1 и 2 из определения 1, при этом $T(x) \leqslant R$ и для любого $t \in [0, T(x)]$ выполнено

$$\operatorname{dist}(\gamma_x(t), \partial\Omega) \geqslant \frac{\rho}{T(x)} t. \tag{1.76}$$

Проверим эквивалентность определений 1 и 1.4.1. В самом деле, если область Ω удовлетворяет условию Джона в смысле определения 1.4.1, то $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для $a < \frac{\rho}{R}$. Обратно, пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$. Без ограничения общности можно считать, что $a < 1$. Пусть $R_0 = \operatorname{dist}(x_*, \partial\Omega)$. Тогда для любого $x \in \Omega$ выполнено $a \cdot T(x) \leqslant R_0$. Положим

$$R = \frac{R_0}{a}, \quad \rho = \frac{aR_0}{2}. \tag{1.77}$$

Проверим (1.76). Если $T(x) \geqslant \frac{R_0}{2}$, то

$$\operatorname{dist}(\gamma_x(t), \partial\Omega) \geqslant at = \frac{2\rho}{R_0}t \geqslant \frac{\rho}{T(x)}t.$$

Если $T(x) < \frac{R_0}{2}$, то $|\gamma_x(t) - x_*| < \frac{R_0}{2}$ для любого $t \in [0, T(x)]$, поэтому

$$\operatorname{dist}(\gamma_x(t), \partial\Omega) \geqslant \frac{R_0}{2} \geqslant \frac{aR_0}{2} \cdot \frac{t}{T(x)} = \frac{\rho}{T(x)}t.$$

Заметим, что

$$\frac{\rho}{R} = \frac{a^2}{2}. \tag{1.78}$$

Теорема D. [47, 48]. *Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, точка x_* и кривые γ_x — из определения 1, $R_0 = \operatorname{dist}(x_*, \partial\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда существуют измеримые функции $H_{\overline{\beta}} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $|\overline{\beta}| = r$, такие, что для любого $x \in \Omega$ выполнено $\operatorname{supp} H_{\overline{\beta}}(x, \cdot) \subset \cup_{t\in[0, T(x)]} B_{at}(\gamma_x(t))$, $|H_{\overline{\beta}}(x, y)| \underset{a,d,r}{\lesssim} |x-y|^{r-d}$ и для любой функции $f \in C^\infty(\Omega)$, $f|_{B_{R_0/2}(x_*)} = 0$, выполнено*

$$f(x) = \sum_{|\overline{\beta}|=r} \int\limits_\Omega H_{\overline{\beta}}(x, y) \nabla^{\overline{\beta}} f(y)\, dy. \tag{1.79}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $r = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $a < 1$. Из формул (5.10), (5.14), (5.20) и (5.22) работы [47] следует, что

$$f(x) = \int\limits_{B_{\hat\rho}(x_*)} f(y)\theta(y - x_*)\, dy + \sum_{j=1}^d \int\limits_\Omega H_j(x, y) \frac{\partial f}{\partial y_j}(y)\, dy,$$

где $\theta(\cdot)$ — некоторая гладкая функция с носителем в шаре $B_{\hat\rho}(0)$, $\hat\rho = \frac{\rho}{2(1+\sqrt{d})} \overset{(1.77)}{=} \frac{aR_0}{4(1+\sqrt{d})} \leqslant \frac{R_0}{2}$, $H_j(x, y) = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \omega_\nu(x) H_{j,\nu}(x, y)$, ω_ν — некоторое гладкое разбиение единицы, а измеримые функции $H_{j,\nu}$ имеют вид

$$H_{j,\nu}(x, y) = \int\limits_0^{T(x)} \psi_{j,\nu}(x, y, t)\theta\left(R\frac{y - \gamma_x(t)}{t}\right) dt$$

(вид функций $\psi_{j,\nu}$ определен в формуле (5.14)); при этом,

$$|H_j(x, y)| \underset{d}{\lesssim} \left(\frac{R}{\rho}\right)^d |x-y|^{1-d} \overset{(1.78)}{=} \left(\frac{2}{a^2}\right)^d |x-y|^{1-d}. \tag{1.80}$$

Так как $\hat\rho \leqslant \frac{R_0}{2}$, то в случае $f|_{B_{R_0/2}(x_*)} = 0$ получаем

$$f(x) = \sum_{j=1}^{d} \int\limits_{\Omega} H_j(x,\, y)\frac{\partial f}{\partial y_j}(y)\, dy. \tag{1.81}$$

Если $|y - \gamma_x(t)| \geqslant at$ для любого $t \in [0,\, T(x)]$, то в силу $a < 1$ получаем, что

$$|y - \gamma_x(t)| \geqslant \frac{a^2}{4(1+\sqrt{d})}t \overset{(1.77),(1.78)}{=} \frac{\hat\rho}{R}t;$$

так как $\operatorname{supp}\theta \subset B_{\hat\rho}(0)$, то $H_{j,\nu}(x,\, y) = 0$. Значит, $\operatorname{supp} H_j(x,\, \cdot) \subset \cup_{t\in[0,\,T(x)]} B_{at}(\gamma_x(t))$.

Теперь перейдем к доказательству утверждения для произвольного $r \in \mathbb{N}$ в соответствии с [48]. Пусть

$$\varphi(x,\, \xi) = \sum_{|\overline{\beta}| \leqslant r-1} \frac{(x-\xi)^{\overline{\beta}}}{\overline{\beta}!}\nabla^{\overline{\beta}} f(\xi).$$

Тогда, если $f|_{B_{R_0/2}(x_*)} = 0$, то $\varphi(x,\, \cdot)|_{B_{R_0/2}(x_*)} = 0$, и в силу (1.81) получаем

$$\varphi(x,\, \xi) = \sum_{j=1}^{d} \int\limits_{\Omega} H_j(\xi,\, y)\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(x,\, y)\, dy.$$

Подставив $\xi = x$, получим

$$f(x) = \sum_{j=1}^{d} \int\limits_{\Omega} H_j(x,\, y)\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(x,\, y)\, dy.$$

Остается применить формулу (5) из работы [48]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(x,\, y) = \sum_{|\overline{\beta}| = r-1} \frac{(x-y)^{\overline{\beta}}}{\overline{\beta}!}\nabla^{\overline{\beta}+\delta_j} f(y),$$

где $\delta_j = (\delta_{j,1},\, \dots,\, \delta_{j,d})$, $\delta_{j,i}$ — символ Кронекера, и учесть (1.80). □

Следующая теорема доказана в [49]; см. также [143, стр. 566] и обобщения этого результата в [63, 64], и [41, стр. 51].

Теорема E. [49]. *Пусть* $1 < \tilde p < \tilde q < \infty$, $d \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $\frac{r}{d} + \frac{1}{\tilde q} - \frac{1}{\tilde p} = 0$,

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)|x-y|^{r-d}\, dy.$$

Тогда оператор $T : L_{\tilde p}(\mathbb{R}^d) \to L_{\tilde q}(\mathbb{R}^d)$ *ограничен.*

Из теорем D, E, неравенства Гельдера и результатов С.Л. Соболева [50] получается следующий результат.

Теорема F. [47–49]. *Пусть* $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \geqslant 0$. *Тогда существует линейный непрерывный проектор* $P : L_q(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ *такой, что для любой функции* $f \in W^r_p(\Omega)$

$$\|f - Pf\|_{L_q(\Omega)} \underset{p,q,r,d,a}{\lesssim} (\operatorname{mes}\Omega)^{\frac{\delta}{d}} \|\nabla^r f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.82}$$

Если $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $1 \leqslant q_k < \infty$, $\frac{r-k}{d} + \frac{1}{q_k} - \frac{1}{p} \geqslant 0$, *то*

$$\|\nabla^k(f - Pf)\|_{L_{q_k}(\Omega)} \underset{p,q,r,d,a}{\lesssim} (\operatorname{mes}\Omega)^{\frac{r-k}{d}+\frac{1}{q_k}-\frac{1}{p}} \|\nabla^r f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.83}$$

В дальнейшем нам также понадобится следующие известные неравенства:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^s\right)^{1/s} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^t\right)^{1/t}, \quad 0 < t \leqslant s < \infty, \quad x_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1.84}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^s\right)^{1/s} \leqslant n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{t}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^t\right)^{1/t}, \quad 0 < s \leqslant t < \infty, \quad x_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.85}$$

Предложение 1.4.1. *Для любого куба $\Delta \in \Theta(\Omega)$ и для любых $x, y \in \Delta$ выполнено*

$$\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{g}(y)} \underset{c_0,d}{\asymp} 1, \quad \frac{\tilde{v}(x)}{\tilde{v}(y)} \underset{c_0,d}{\asymp} 1. \tag{1.86}$$

Доказательство. Докажем утверждение для функции $\tilde{g}$ (для $\tilde{v}$ доказательство аналогичное). В силу (11) и (12), достаточно доказать, что для любого $x, y \in \Delta$ выполнено $\operatorname{dist}(x, \Gamma') \underset{d}{\asymp} \operatorname{dist}(y, \Gamma')$. Можно считать, что $\operatorname{dist}(x, \Gamma') = \operatorname{dist}(\Delta, \Gamma')$. Применяя теорему C, получаем

$$\operatorname{dist}(\Delta, \Gamma') \leqslant \operatorname{dist}(y, \Gamma') \leqslant \operatorname{dist}(\Delta, \Gamma') + \operatorname{diam}\Delta \underset{d}{\lesssim}$$
$$\lesssim \operatorname{dist}(\Delta, \Gamma') + \operatorname{dist}(\Delta, \partial\Omega) \leqslant 2\operatorname{dist}(\Delta, \Gamma').$$

□

Обозначим через χ_E характеристическую функцию E.

Лемма 1.4.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$, $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — система измеримых подмножеств в E, $E_k \supset E_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, $\cap_{k\in\mathbb{Z}} E_k = \varnothing$, $\cup_{k\in\mathbb{Z}} E_k = E$. Пусть множество $\mathcal{G}$ является выпуклым конусом в пространстве неотрицательных измеримых функций на множестве E и содержит функции χ_{E_k}, $k \in \mathbb{Z}$; пусть функции $\mathbb{F} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{F}_0 : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют следующим условиям:*

1. *$\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_0$ — однородные функции порядка 1;*
2. *функция $\mathbb{F} - \mathbb{F}_0$ выпукла;*
3. *если $g_1 \leqslant g_2$ п.в., то $\mathbb{F}_0(g_1) \leqslant \mathbb{F}_0(g_2)$;*
4. *для любого $k \in \mathbb{Z}$ выполнено $\mathbb{F}(\chi_{E_k}) \leqslant \mathbb{F}_0(\chi_{E_k})$;*
5. *если для любого $x \in E$ последовательность $g_n(x)$ возрастает, $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$, $g \in \mathcal{G}$, то $\mathbb{F}(g_n) \to \mathbb{F}(g)$ при $n \to \infty$.*

Пусть $f \in \mathcal{G}$, $f|_{E_k \setminus E_{k+1}} = c_k \geqslant 0$ и последовательность $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ возрастает. Тогда $\mathbb{F}(f) \leqslant \mathbb{F}_0(f)$.

Доказательство. Существует возрастающая последовательность f_n, такая что $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ для любого $x \in E$ и $f_n = \sum\limits_{j=1}^{m_n} \lambda_{j,n} \chi_{E_{k_{j,n}}}$, $\lambda_{j,n} \geqslant 0$. В силу свойств 1, 2 и 4, $\mathbb{F}(f_n) \leqslant \mathbb{F}_0(f_n)$. Из свойств 3 и 5 получаем $\mathbb{F}_0(f) \geqslant \mathbb{F}_0(f_n) \geqslant \mathbb{F}(f_n) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{F}(f)$. □

Лемма 1.4.2. *Пусть r, $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $1 < \tilde{p} \leqslant \infty$, $1 \leqslant \tilde{q} < \infty$, $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} = \frac{r}{d} + \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{p}} \geqslant 0$, функции $\tilde{g}$, $\tilde{v} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть $\mathcal{T}$, $F : \mathbf{V}(\mathcal{T}) \to \Theta(\Omega)$ — дерево и отображение из теоремы 1.1.1, $\tilde{\mathcal{T}}$ — поддерево в $\mathcal{T}$, $\tilde{\Omega} = \Omega_{\tilde{\mathcal{T}},F}$. Тогда $W^r_{\tilde{p},\tilde{g}}(\tilde{\Omega}) \subset L_{\tilde{q},\tilde{v}}(\tilde{\Omega})$ и существует линейный непрерывный проектор $P : L_{\tilde{q},\tilde{v}}(\tilde{\Omega}) \to (\mathcal{P}_{r-1}(\tilde{\Omega}),\, \|\cdot\|_{L_{\tilde{q},\,\tilde{v}}(\tilde{\Omega})})$ такой, что для для любой функции $f \in W^r_{\tilde{p},\tilde{g}}(\tilde{\Omega})$*

$$\|f - Pf\|_{L_{\tilde{q},\tilde{v}}(\tilde{\Omega})} \underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d,a,c_0}{\lesssim} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})} \left\| \frac{\nabla^r f}{\tilde{g}} \right\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})}. \tag{1.87}$$

Доказательство. По теореме 1.1.1, $\tilde{\Omega} \in \mathbf{FC}(b_*)$, где $b_* = b_*(a,\, d) > 0$. Пусть $\gamma_x : [0,\, T(x)] \to \tilde{\Omega}$ — кривые из определения 1, $\gamma_x(T(x)) = x_*$. Из пункта 3 теоремы 1.1.1 следует, что γ_x можно выбрать так, что

$$\cup_{t\in[0,\,T(x)]} B_{b_* t}(\gamma_x(t)) \subset \tilde{\Omega}_{\leqslant F(\xi)}, \quad \text{если } x \in F(\xi) \tag{1.88}$$

(см. обозначение (1.3)) и x_* — центр куба $F(\xi_*)$, где ξ_* — минимальная вершина дерева $\tilde{\mathcal{T}}$.

Множество $C^\infty(\Omega) \cap W^r_{\tilde{p},\tilde{g}}(\Omega)$ плотно в $W^r_{\tilde{p},\tilde{g}}(\Omega)$ (это доказывается так же, как в невесовом случае, см., например, [41], стр. 16).[1] Значит, (1.87) достаточно проверить для гладких функций.

Шаг 1. Пусть $R_0 = \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_\infty}(x_*,\, \partial\tilde{\Omega})$. Так как вершины куба $F(\xi_*)$ принадлежат $\partial\tilde{\Omega}$ (см. (1.2)), то $B_{R_0}(x_*) \subset F(\xi_*)$. Из предложения 1.4.1 следует, что

$$\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{g}(y)} \underset{c_0,\,d}{\asymp} 1, \quad \frac{\tilde{v}(x)}{\tilde{v}(y)} \underset{c_0,\,d}{\asymp} 1, \quad x,\, y \in B_{3R_0/4}(x_*). \tag{1.89}$$

Докажем, что (1.87) следует из оценки

$$\|f\|_{L_{\tilde{q},\tilde{v}}(\tilde{\Omega})} \underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d,a,c_0}{\lesssim} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})} \left\| \frac{\nabla^r f}{\tilde{g}} \right\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})}, \quad f \in C^\infty(\Omega), \quad f|_{B_{R_0/2}(x_*)} = 0. \tag{1.90}$$

Из теоремы F следует, что существует линейный непрерывный оператор $P : L_{\tilde{q},\tilde{v}}(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что если $r - k + \frac{d}{\tilde{q}_k} - \frac{d}{\tilde{p}} \geqslant 0$, то

$$\|\nabla^k(f - Pf)\|_{L_{\tilde{q}_k}(B_{3R_0/4}(x_*))} \underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d}{\lesssim} R_0^{r-k+\frac{d}{\tilde{q}_k}-\frac{d}{\tilde{p}}} \|\nabla^r f\|_{L_{\tilde{p}}(B_{3R_0/4}(x_*))}, \quad 0 \leqslant k \leqslant r-1 \tag{1.91}$$

(см. оценки (1.82) и (1.83)). Отображение P может быть построено следующим образом: берется ортогональный проектор в пространстве $L_2(B_{3R_0/4}(x_*))$, затем он продолжается на $L_1(B_{3R_0/4}(x_*))$ по непрерывности (это возможно, так как полиномы являются ограниченными функциями на шаре) и после этого сужается на $L_{\tilde{q},\tilde{v}}(B_{3R_0/4}(x_*))$ (здесь используется (1.89)). Затем берется композиция с оператором продолжения полинома на $\tilde{\Omega}$ (полученный оператор снова будет непрерывен, так как вес $\tilde{v}$ по условию теоремы ограничен).

Пусть $\psi_0 : \mathbb{R}^d \to [0,\, 1]$, $\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}\psi_0 \subset B_{3/4}(0)$, $\psi_0|_{B_{1/2}(0)} = 1$, $\psi(x) = \psi_0\left(\frac{x-x_*}{R_0}\right)$. Тогда

$$\|\psi(f - Pf)\|_{L_{\tilde{q}}(\tilde{\Omega})} \leqslant \|f - Pf\|_{L_{\tilde{q}}(B_{3R_0/4}(x_*))} \overset{(1.91)}{\underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d}{\lesssim}} R_0^{r+\frac{d}{\tilde{q}}-\frac{d}{\tilde{p}}} \|\nabla^r f\|_{L_{\tilde{p}}(B_{3R_0/4}(x_*))}. \tag{1.92}$$

[1] Здесь под $C^\infty(\Omega)$ подразумевается пространство функций, гладких на открытом множестве Ω, но, вообще говоря, не продолжающихся до гладких функций на всем $\mathbb{R}^d$.

В силу (1.89) и равенства $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} = \frac{r}{d} + \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{p}}$,

$$\|f - Pf\|_{L_{\tilde{q},\tilde{v}}(\tilde{\Omega})} \leqslant \|\psi(f - Pf)\|_{L_{\tilde{q},\tilde{v}}(\tilde{\Omega})} + \|(1-\psi)(f - Pf)\|_{L_{\tilde{q},\tilde{v}}(\tilde{\Omega})} \underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d,a,c_0}{\overset{(1.89),(1.90),(1.92)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(B_{3R_0/4}(x_*))} \left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}}\right\|_{L_{\tilde{p}}(B_{3R_0/4}(x_*))} +$$

$$+\|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})} \left\|\frac{\nabla^r[(1-\psi)(f-Pf)]}{\tilde{g}}\right\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})} \leqslant$$

$$\leqslant \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})} \left(2\left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}}\right\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})} + \left\|\frac{\nabla^r[\psi(f-Pf)]}{\tilde{g}}\right\|_{L_{\tilde{p}}(B_{3R_0/4}(x_*))}\right) \underset{\tilde{p},r,d,\psi_0}{\lesssim}$$

$$\lesssim \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})} \left(2\left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}}\right\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})} + \sum_{k=0}^{r} R_0^{k-r}\left\|\frac{\nabla^k(f-Pf)}{\tilde{g}}\right\|_{L_{\tilde{p}}(B_{\frac{3R_0}{4}}(x_*))}\right)$$

$$\underset{\tilde{p},r,d,c_0}{\overset{(1.91),(1.89)}{\lesssim}} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})} \left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}}\right\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})}.$$

Шаг 2. Пусть $f \in C^\infty(\Omega)$, $f|_{B_{R_0/2}(x_*)} = 0$, $\varphi(x) = \frac{|\nabla^r f(x)|}{\tilde{g}(x)}$. Из теоремы D следует, что для любого $x \in \tilde{\Omega}$ найдется множество

$$G_x \subset \cup_{t\in[0,\,T(x)]} B_{b_* t}(\gamma_x(t)) \tag{1.93}$$

такое, что $\{(x,\,y) \in \tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega} :\ y \in G_x\}$ измеримо (это следует из измеримости функций $H_{\overline{\beta}}$) и

$$|f(x)| \underset{r,d,a}{\overset{(1.79)}{\lesssim}} \int\limits_{G_x} |x-y|^{r-d}\tilde{g}(y)\varphi(y)\,dy.$$

Тем самым, для доказательства (1.90) достаточно получить оценку

$$\left(\int\limits_{\tilde{\Omega}} \tilde{v}^{\tilde{q}}(x) \left(\int\limits_{G_x} |x-y|^{r-d}\tilde{g}(y)\varphi(y)\,dy\right)^{\tilde{q}} dx\right)^{1/\tilde{q}} \underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d,c_0,a}{\lesssim} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})}\|\varphi\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})}, \quad \varphi \geqslant 0. \tag{1.94}$$

Мы это неравенство докажем для $r > 0$ (не обязательно целых) таких, что $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} := \frac{r}{d} + \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{p}} > 0$.

Шаг 3. Предположим, что $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} > 0$. Пусть $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ — два поддерева в $\tilde{\mathcal{T}}$ с минимальной вершиной ξ_*, $E' = \tilde{\Omega}\backslash\Omega_{\mathcal{T}',F}$, $E'' = \Omega_{\mathcal{T}'',F}$. Покажем, что (1.94) выполнено для $\tilde{g} = \chi_{E'}$, $\tilde{v} = \chi_{E''}$. В самом деле, $E' \cap E'' = \sqcup_i E_i$, где $E_i = \Omega_{\mathcal{A}_i,F}$, $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{T}$ — деревья с попарно несравнимыми минимальными вершинами. Из (1.88) следует, что если $x \in \Omega_{\mathcal{T}',F}$, то $G_x \subset \Omega_{\mathcal{T}',F}$ и $G_x \cap E' = \varnothing$, а если $x \in E_i$, то $G_x \cap E' \subset E_i$. Значит, левая часть (1.94) не превосходит

$$\left(\sum_i \int\limits_{E_i} \left(\int\limits_{E_i} |x-y|^{r-d}\varphi(y)\,dy\right)^{\tilde{q}} dx\right)^{1/\tilde{q}} =: M.$$

По теореме 1.1.1, $E_i \in \mathbf{FC}(b_*)$, поэтому $(\operatorname{diam} E_i)^d \underset{a,d}{\overset{(9)}{\lesssim}} \operatorname{mes} E_i$. По теореме E и неравенству Гельдера,

$$M \underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d,a}{\lesssim} \left(\sum_i (\operatorname{mes} E_i)^{\frac{\tilde{q}}{\tilde{\varkappa}}} \|\varphi\|^{\tilde{q}}_{L_{\tilde{p}}(E_i)}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{mes}\,(E'\cap E''))^{1/\tilde{\varkappa}}\|\varphi\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})} = \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})}\|\varphi\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})}$$

(при $\tilde{p}\leqslant\tilde{q}$ второе неравенство следует из соотношения (1.84) с $t=\tilde{p}$, $s=\tilde{q}$, а при $\tilde{p}>\tilde{q}$ — из неравенства Гельдера и (1.84) с $t=1$ и $s=\frac{\tilde{p}\tilde{q}}{\tilde{\varkappa}(\tilde{p}-\tilde{q})}$).

Шаг 4. Пусть $\frac{1}{\tilde{\varkappa}}>0$. Покажем, что существуют две последовательности поддеревьев $\{\mathcal{T}'_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{\mathcal{T}''_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ дерева $\mathcal{T}$ и функции $\hat{g}$, $\hat{v}:\Omega\to\mathbb{R}_+$ со следующими свойствами:

1. $\mathcal{T}'_0=\mathcal{T}''_0=\varnothing$, $\mathcal{T}'_j\subset\mathcal{T}'_{j+1}$, $\mathcal{T}''_j\subset\mathcal{T}''_{j+1}$, $j\in\mathbb{Z}_+$, $\cup_{j\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{T}'_j=\cup_{j\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{T}''_j=\mathcal{T}$;
2. $\hat{g}|_{\Omega_{\mathcal{T}'_j,F}\setminus\Omega_{\mathcal{T}'_{j-1},F}}=C'_j$, $\hat{v}|_{\Omega_{\mathcal{T}''_j,F}\setminus\Omega_{\mathcal{T}''_{j-1},F}}=C''_j$, $j\in\mathbb{N}$;
3. последовательность $\{C'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ возрастает, а последовательность $\{C''_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ убывает;
4. $\tilde{g}(x)\underset{a,d,c_0}{\asymp}\hat{g}(x)$, $\tilde{v}(x)\underset{a,d,c_0}{\asymp}\hat{v}(x)$.

Построим функцию $\hat{g}$ (функция $\hat{v}$ строится аналогично). Пусть $\Gamma'\subset\partial\Omega$ — множество из условия теоремы 1, $\mathcal{T}'$ — поддерево в $\mathcal{T}$, ξ' — минимальная вершина $\mathcal{T}'$, $m\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{dist}\,(F(\xi'),\,\Gamma')\in[2^{-m},\,2^{-m+1})$. Обозначим через $\mathcal{S}_{\mathcal{T}'}$ максимальное по включению дерево из множества деревьев $\mathcal{S}'\subset\mathcal{T}'$ с минимальной вершиной ξ' таких, что

$$\mathrm{dist}\,(F(\xi),\,\Gamma')\geqslant 2^{-m},\quad \xi\in\mathbf{V}(\mathcal{S}'). \tag{1.95}$$

Покажем, что для любых $\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{S}_{\mathcal{T}'})$, $x\in F(\xi)$ выполнено

$$\mathrm{dist}\,(x,\,\Gamma')\underset{a,d}{\lesssim}2^{-m}. \tag{1.96}$$

В самом деле, выберем $x'\in F(\xi')$ так, что $\mathrm{dist}\,(x',\,\Gamma')<2^{-m+1}$. Так как $\Omega_{\mathcal{S}_{\mathcal{T}'},F}\in\mathbf{FC}(b_*(a,\,d))$ (см. теорему 1.1.1), то из (9) следует, что $|x-x'|\underset{a,d}{\lesssim}2^{-\mathbf{m}(F(\xi'))}$. По теореме C, $2^{-\mathbf{m}(F(\xi'))}\underset{d}{\asymp}\mathrm{dist}\,(x',\,\partial\Omega)$. Значит,

$$\mathrm{dist}\,(x,\,\Gamma')\leqslant|x-x'|+\mathrm{dist}\,(x',\,\Gamma')\underset{a,d}{\lesssim}$$

$$\lesssim\mathrm{dist}\,(x',\,\partial\Omega)+2^{-m}\leqslant\mathrm{dist}\,(x',\,\Gamma')+2^{-m}\leqslant 2^{-m+2}.$$

Деревья $\mathcal{T}'_j$ строим индукцией по $j\in\mathbb{Z}_+$. Полагаем $\mathcal{T}'_0=\varnothing$, $m_0=m-1$, $C'_0=\varphi_{\tilde{g}}(2^{-m_0})$. Пусть построены деревья $\mathcal{T}'_i$, $i\in\{0,\,\dots,\,j\}$, и определены числа $C'_i=\varphi_{\tilde{g}}(2^{-m_i})$ (см. (11)), $m_i\in\mathbb{Z}$, $i\in\{0,\,\dots,\,j\}$, $m_0\leqslant\ldots\leqslant m_j$. Кроме того, предположим, что $\mathcal{T}=\mathcal{T}'_j\sqcup\left(\sqcup_{s=1}^{s_0(j)}\mathcal{T}'_{j,s}\right)$, где $\mathcal{T}'_{j,s}$ — деревья с минимальными вершинами $\xi_{j,s}$, $s_0(j)\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, при этом $\xi_{j,s}$ являются соседними к некоторым вершинам дерева $\mathcal{T}'_j$ и

$$\mathrm{dist}\,(F(\xi_{j,s}),\,\Gamma')\in[2^{-m_{j,s}},\,2^{-m_{j,s}+1}),\quad m_{j,s}\in\mathbb{Z},\quad m_{j,s}\geqslant m_j+1$$

(отметим, что при $j=0$ выполнено $s_0(0)=1$ и $m_{0,1}=m=m_0+1$). Положим $m_{j+1}=\min_{1\leqslant s\leqslant s_0(j)}m_{j,s}$, $C'_{j+1}=\varphi_{\tilde{g}}(2^{-m_{j+1}})$,

$$I_j=\left\{s\in\overline{1,\,s_0(j)}:\;m_{j,s}=m_{j+1}\right\},$$

$\mathcal{T}'_{j+1}=\mathcal{T}'_j\cup\left(\cup_{s\in I_j}\mathcal{S}_{\mathcal{T}'_{j,s}}\right)$, $\hat{g}|_{\Omega_{\mathcal{T}'_{j+1},F}\setminus\Omega_{\mathcal{T}'_j,F}}=C'_{j+1}$. Тогда свойства 1 и 2 выполнены по построению, свойство 3 выполнено, так как функция $\varphi_{\tilde{g}}$ убывает, а последовательность $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ возрастает. Свойство 4 следует из (12), (1.95) и (1.96). По построению, $\mathcal{T}=\mathcal{T}'_{j+1}\sqcup\left(\sqcup_{s=1}^{s_0(j+1)}\mathcal{T}'_{j+1,s}\right)$, где $\mathcal{T}'_{j+1,s}$ — деревья с минимальными вершинами $\xi_{j+1,s}$,

$s_0(j+1) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, при этом $\xi_{j+1,s}$ являются соседними к некоторым вершинам дерева $\mathcal{T}'_{j+1}$. Из определения $\mathcal{S}_{\mathcal{T}'_{j,s}}$ следует, что

$$\mathrm{dist}\,(F(\xi_{j,s}),\, \Gamma') \in [2^{-m_{j,s}},\, 2^{-m_{j,s}+1}), \quad m_{j,s} \in \mathbb{Z}, \quad m_{j,s} \geqslant m_j + 1.$$

Шаг 5. Докажем (1.94). Если $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} = 0$, то это следует теоремы E, (9) и неравенства Гельдера (напомним, что по условию теоремы 1 в этом случае $\tilde{g} = 1$ и $\tilde{v} = 1$). Пусть $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} > 0$. Можно считать, что $\tilde{g} = \hat{g}$, $\tilde{v} = \hat{v}$, где $\hat{g}$ и $\hat{v}$ — функции, полученные на шаге 4.

Левая часть (1.94) выпукла по $\tilde{g}$ и по $\tilde{v}$. Если $\tilde{\varkappa} \leqslant 1$, то в силу обратного неравенства Минковского [61, теорема 198] правая часть (1.94) вогнута по $\tilde{g}$ и по $\tilde{v}$, поэтому в силу леммы 1.4.1 неравенство достаточно проверить для $\tilde{g} = \chi_{E'}$, $\tilde{v} = \chi_{E''}$, $E' = \tilde{\Omega} \backslash \Omega_{\mathcal{T}',F}$, $E'' = \Omega_{\mathcal{T}'',F}$ ($\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}'' \subset \tilde{\mathcal{T}}$ — деревья с минимальной вершиной ξ_*), что сделано на шаге 3.

Рассмотрим случай $\tilde{\varkappa} > 1$. Пусть сначала $\tilde{p} < \tilde{q}$. Выберем $\rho > 0$ так, чтобы $\frac{\rho}{d} + \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{p}} = 1$, $\tilde{\beta} := \tilde{\varkappa}^{-1}(\rho - d)$, $\tilde{\gamma} := \tilde{\varkappa}^{-1}$. Положим $h(x) = \tilde{g}^{\tilde{\varkappa}}(x)$, $w(x) = \tilde{v}^{\tilde{\varkappa}}(x)$. Тогда

$$\left(\int\limits_{\tilde{\Omega}} \tilde{v}^{\tilde{q}}(x) \left|\int\limits_{G_x} \tilde{g}(y)\varphi(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^{\tilde{q}} dx\right)^{\tilde{\varkappa}/\tilde{q}} =$$

$$= \left(\int\limits_{\tilde{\Omega}} w^{\tilde{q}/\tilde{\varkappa}}(x) \left|\int\limits_{G_x} h^{1/\tilde{\varkappa}}(y)\varphi(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^{\tilde{q}} dx\right)^{\tilde{\varkappa}/\tilde{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\tilde{\Omega}} w^{\tilde{q}/\tilde{\varkappa}}(x) \left(\int\limits_{G_x} h(y)\varphi^{\tilde{\gamma}\tilde{\varkappa}}(y)|x-y|^{\tilde{\beta}\tilde{\varkappa}}\,dy\right)^{\tilde{q}/\tilde{\varkappa}} \times\right.$$

$$\left.\times \left(\int\limits_{G_x} \varphi^{(1-\tilde{\gamma})\tilde{\varkappa}'}(y)|x-y|^{(r-d-\tilde{\beta})\tilde{\varkappa}'}\,dy\right)^{\tilde{q}(1-\tilde{\varkappa}^{-1})} dx\right)^{\tilde{\varkappa}/\tilde{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\tilde{\Omega}} w^{\tilde{q}}(x) \left(\int\limits_{G_x} h(y)|x-y|^{\rho-d}\varphi(y)\,dy\right)^{\tilde{q}} dx\right)^{1/\tilde{q}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\tilde{\Omega}} \left(\int\limits_{G_x} |x-y|^{(r-d-\tilde{\beta})\tilde{\varkappa}'}\varphi^{(1-\tilde{\gamma})\tilde{\varkappa}'}(y)\,dy\right)^{\tilde{q}} dx\right)^{\frac{\tilde{\varkappa}-1}{\tilde{q}}}.$$

В силу доказанного утверждения для $\tilde{\varkappa} \leqslant 1$, получаем, что первый сомножитель не превосходит по порядку $\|\varphi\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})}\|hw\|_{L_1(\tilde{\Omega})} = \|\varphi\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})}\|\tilde{g}\tilde{v}\|^{\tilde{\varkappa}}_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})}$. Заметим, что $(1-\tilde{\gamma})\tilde{\varkappa}' = 1$. Положим $l - d = (r - d - \tilde{\beta})\tilde{\varkappa}'$. Если $\frac{l}{d} + \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{p}} = 0$, то в силу теоремы E и условия $1 < \tilde{p} < \tilde{q} < \infty$

$$\left(\int\limits_{\tilde{\Omega}} \left(\int\limits_{G_x} |x-y|^{l-d}\varphi(y)\,dy\right)^{\tilde{q}} dx\right)^{\frac{\tilde{\varkappa}-1}{\tilde{q}}} \underset{\tilde{q},\tilde{p},r,d}{\lesssim} \|\varphi\|^{\tilde{\varkappa}-1}_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})},$$

откуда следует (1.94). Покажем, что $\frac{l}{d} + \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{p}} = 0$. В самом деле,

$$\frac{l}{d} + \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{p}} = \left(\frac{r}{d} - 1 - \frac{\tilde{\beta}}{d}\right)\tilde{\varkappa}' + 1 + \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{p}},$$

и нужно проверить равенство

$$-\frac{r}{d}+1+\frac{\tilde\beta}{d}=\left(1-\frac{r}{d}-\frac{1}{\tilde q}+\frac{1}{\tilde p}\right)\left(1+\frac{1}{\tilde q}-\frac{1}{\tilde p}\right).$$

Используя определение $\tilde\beta$ и ρ, получаем, что левая часть равна

$$-\frac{r}{d}+1-\left(\frac{r}{d}+\frac{1}{\tilde q}-\frac{1}{\tilde p}\right)\left(\frac{1}{\tilde q}-\frac{1}{\tilde p}\right),$$

откуда легко видеть, что требуемое неравенство выполнено.

Теперь рассмотрим случай $1<\tilde q\leqslant \tilde p<\infty$. Выберем $1<q_1<p_1<\infty$, $1<p_2<q_2<\infty$ так, чтобы $\frac{r}{d}+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}>1$, $\frac{r}{d}+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}>0$, $\frac{1}{\tilde p}=\frac{\lambda_0}{p_1}+\frac{1-\lambda_0}{p_2}$, $\frac{1}{\tilde q}=\frac{\lambda_0}{q_1}+\frac{1-\lambda_0}{q_2}$ для некоторого $\lambda_0\in(0,\,1)$. Положим

$$\frac{1}{\varkappa_1}=\frac{r}{d}+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1},\quad \frac{1}{\varkappa_2}=\frac{r}{d}+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2},$$

$\gamma_0=\frac{1}{\lambda_0}$, $\beta_0=\frac{\gamma_0p_1}{\tilde p}$, $\theta=\frac{\gamma_0q_1}{\tilde q}$, $\alpha_0=\frac{\gamma_0\varkappa_1}{\tilde\varkappa}$. Тогда $\gamma_0>1$, $\beta_0>1$, $\theta>1$, $\frac{1}{\tilde\varkappa}=\frac{\lambda_0}{\varkappa_1}+\frac{1-\lambda_0}{\varkappa_2}$, $p_2=\frac{\tilde p\beta_0'}{\gamma_0'}$, $q_2=\frac{\tilde q\theta'}{\gamma_0'}$, $\varkappa_2=\frac{\tilde\varkappa\alpha_0'}{\gamma_0'}$. Покажем, что $\alpha_0>1$. Это равносильно неравенству $\frac{1}{\tilde\varkappa}>\frac{1}{\gamma_0\varkappa_1}$, т.е.

$$\frac{\lambda_0}{\varkappa_1}+\frac{1-\lambda_0}{\varkappa_2}>\frac{\lambda_0}{\varkappa_1}.$$

Последнее соотношение верно, поскольку $\varkappa_2>0$.

Применив неравенство Гельдера, получаем

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega}\tilde v^{\tilde q}(x)\left|\int\limits_{G_x}\tilde g(y)\varphi(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^{\tilde q}dx\right)^{1/\tilde q}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int\limits_{\tilde\Omega}\tilde v^{\frac{\tilde q\theta}{\alpha_0}}(x)\left|\int\limits_{G_x}\tilde g^{\frac{\gamma_0}{\alpha_0}}(y)\varphi^{\frac{\gamma_0}{\beta_0}}(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^{\frac{\tilde q\theta}{\gamma_0}}dx\right)^{1/\tilde q\theta}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\tilde\Omega}\tilde v^{\frac{\tilde q\theta'}{\alpha_0'}}(x)\left|\int\limits_{G_x}\tilde g^{\frac{\gamma_0'}{\alpha_0'}}(y)\varphi^{\frac{\gamma_0'}{\beta_0'}}(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^{\frac{\tilde q\theta'}{\gamma_0'}}dx\right)^{1/\tilde q\theta'}.$$

Положим $g_1=\tilde g^{\frac{\gamma_0}{\alpha_0}}$, $v_1=\tilde v^{\frac{\gamma_0}{\alpha_0}}$, $f_1=\varphi^{\frac{\gamma_0}{\beta_0}}$, $g_2=\tilde g^{\frac{\gamma_0'}{\alpha_0'}}$, $v_2=\tilde v^{\frac{\gamma_0'}{\alpha_0'}}$, $f_2=\varphi^{\frac{\gamma_0'}{\beta_0'}}$. Тогда первый множитель имеет вид

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega}v_1^{q_1}(x)\left|\int\limits_{G_x}g_1(y)f_1(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^{q_1}dx\right)^{1/q_1\gamma_0}\underset{q_1,p_1,r,d}{\lesssim}$$

$$\lesssim\|g_1v_1\|^{\frac{1}{\gamma_0}}_{L_{\varkappa_1}(\tilde\Omega)}\|f_1\|^{\frac{1}{\gamma_0}}_{L_{p_1}(\Omega_{\tilde\varphi})}=\|\tilde g\tilde v\|^{\frac{1}{\alpha_0}}_{L_{\tilde\varkappa}(\tilde\Omega)}\|\varphi\|^{\frac{1}{\beta_0}}_{L_{\tilde p}(\tilde\Omega)}$$

(здесь использовалось уже доказанное неравенство (1.94) для $\varkappa_1<1$). Аналогично второй множитель оценивается по порядку величиной $\|\tilde g\tilde v\|^{\frac{1}{\alpha_0'}}_{L_{\tilde\varkappa}(\tilde\Omega)}\|\varphi\|^{\frac{1}{\beta_0'}}_{L_{\tilde p}(\tilde\Omega)}$, при этом используется доказанное неравенство (1.94) для $p_2<q_2$. Отсюда следует требуемая оценка.

Рассмотрим случай $\tilde{p} = \infty$, $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} = \frac{r}{d} + \frac{1}{\tilde{q}} < 1$. Нужно доказать порядковое неравенство

$$\left(\int\limits_{\tilde{\Omega}} \tilde{v}^{\tilde{q}}(x) \left|\int\limits_{G_x} \tilde{g}(y)|x-y|^{r-d}\, dy\right|^{\tilde{q}} dx\right)^{1/\tilde{q}} \underset{\tilde{q},r,d}{\lesssim} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})}. \tag{1.97}$$

Положим $w = \tilde{v}^{\tilde{\varkappa}}$. Тогда (1.97) переписывается в виде

$$\left(\int\limits_{\tilde{\Omega}} w^{\frac{\tilde{q}}{\tilde{\varkappa}}}(x) \left|\int\limits_{G_x} \tilde{g}(y)|x-y|^{r-d}\, dy\right|^{\tilde{q}} dx\right)^{\tilde{\varkappa}/\tilde{q}} \underset{\tilde{q},r,d}{\lesssim} \int\limits_{\tilde{\Omega}} \tilde{g}^{\tilde{\varkappa}}(x)w(x)\, dx.$$

Так как $\frac{\tilde{q}}{\tilde{\varkappa}} > 1$, то левая часть выпукла по w. В силу леммы 1.4.1, соотношение (1.97) достаточно доказать для функций $\tilde{v}$ вида $\tilde{v}(x) = \chi_{E''}$, $E'' = \Omega_{\mathcal{T}'',F}$, где дерево $\mathcal{T}'' \subset \tilde{\mathcal{T}}$ имеет минимальную вершину ξ_* (см. шаг 3). Значит, остается проверить порядковое неравенство

$$\left(\int\limits_{E''} \left|\int\limits_{G_x} \tilde{g}(y)|x-y|^{r-d}\, dy\right|^{\tilde{q}} dx\right)^{1/\tilde{q}} \underset{\tilde{q},r,d}{\lesssim} \|\tilde{g}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(E'')}. \tag{1.98}$$

Отметим, что если $x \in E''$, то $G_x \subset E''$, и (1.98) следует из теоремы E, условий $\tilde{\varkappa} > 1$, $\tilde{q} < \infty$ и равенства $\frac{r}{d} + \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{\varkappa}} = 0$.

Остается рассмотреть случай $\tilde{q} = 1$. Тогда $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} = \frac{r}{d} + \frac{1}{\tilde{p}'}$. Нужно доказать порядковое неравенство

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}} \tilde{v}(x) \int\limits_{G_x} \tilde{g}(y)\varphi(y)|x-y|^{r-d}\, dy\, dx \underset{\tilde{p},r,d}{\lesssim} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{\Omega})} \|\varphi\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})}. \tag{1.99}$$

Положим

$$\tilde{G}_y = \left\{x \in \tilde{\Omega} : y \in G_x\right\}.$$

Переставляя пределы интегрирования в левой части (1.99), получаем, что она не превосходит

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}} \varphi(y)\tilde{g}(y) \int\limits_{\tilde{G}_y} \tilde{v}(x)|x-y|^{r-d}\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{L_{\tilde{p}}(\tilde{\Omega})} \left(\int\limits_{\tilde{\Omega}} \tilde{g}^{\tilde{p}'}(y) \left|\int\limits_{\tilde{G}_y} \tilde{v}(x)|x-y|^{r-d}\, dx\right|^{\tilde{p}'} dy\right)^{1/\tilde{p}'}.$$

Далее повторяем рассуждения, которые проводились для случая $\tilde{p} = \infty$ и получаем, что достаточно доказать порядковое неравенство

$$\left(\int\limits_{E'} \left|\int\limits_{\tilde{G}_y} \tilde{v}(x)|x-y|^{r-d}\, dx\right|^{\tilde{p}'} dy\right)^{1/\tilde{p}'} \underset{r,d,\tilde{p}}{\lesssim} \|\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(E')}, \tag{1.100}$$

где $E' = \tilde{\Omega}\backslash\Omega_{\mathcal{T}',F}$, $\mathcal{T}' \subset \tilde{\mathcal{T}}$ — дерево с минимальной вершиной ξ_*. Имеем $E' = \sqcup_{i=1}^{i_0}\Omega_{\mathcal{D}_i,F}$, где $\mathcal{D}_i \subset \tilde{\mathcal{T}}$ — деревья с попарно несравнимыми минимальными вершинами. Если $y \in \Omega_{\mathcal{D}_i,F}$, то $\tilde{G}_y \subset \Omega_{\mathcal{D}_i,F}$ в силу (1.88) и (1.93). Из условий $\tilde{\varkappa} > 1$, $\tilde{p} > 1$, равенства $\frac{r}{d} + \frac{1}{\tilde{p}'} - \frac{1}{\tilde{\varkappa}} = 0$ следует (1.100). $\square$

Доказательство теоремы 1. Возьмем $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$, $\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{q} - \frac{1}{\beta}$, оператор $\hat{P} = P$ определим в соответствии с леммой 1.4.2. Из неравенства Гельдера и леммы 1.4.2 следует, что $W^r_{p,g}(\Omega) \subset W^r_{\tilde{p},\tilde{g}}(\Omega) \subset L_{\tilde{q},\tilde{v}}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$

$$\|f - \hat{P}f\|_{L_{q,v}(\Omega)} \leqslant \|v_0\|_{L_\beta(\Omega)} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\Omega)} \|g_0\|_{L_\alpha(\Omega)} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \|v_0\|_{L_\beta(\Omega)} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(\Omega)} \|g_0\|_{L_\alpha(\Omega)}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 1.4.1. Оператор $\hat{P}$ определен так, что

$$\hat{P}|_{C_0^\infty(\Omega)} : (C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W_p^r(\Omega)}) \to L_q(\Omega)$$

ограничен (здесь $\|f\|_{W_p^r(\Omega)} = \|\nabla^r f\|_{L_p(\Omega)}$).

Перейдем к доказательству оценки s-чисел.

Предложение 1.4.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $k_j \leqslant 2^m - 1$, $j = 1, \ldots, d$. Пусть*

$$A = \prod_{j=1}^d \left(\frac{k_j}{2^m}, \frac{k_j + 1}{2^m} \right), \qquad B = \overline{(0, 1)^d \backslash A}.$$

Тогда существует не более $2d$ параллелепипедов $\Pi_i = \prod_{j=1}^d [a_{ij}, b_{ij}]$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ таких, что $\bigcup_{i=1}^k \Pi_i = B$ и для любых i, j, s

$$|b_{ij} - a_{ij}| \leqslant 2|b_{is} - a_{is}|. \tag{1.101}$$

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $k_j + 1 \leqslant 2^{m-1}$ для любого j (т. е. $A \subset [0, 1/2]^d$, иначе сделаем отражение) и $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_d$. Положим $d_0 = \max\{j = 1, \ldots, d : \ k_j > 0\}$,

$$\Pi_j = [0, 1]^{j-1} \times \left[\frac{k_j + 1}{2^m}, 1 \right] \times [0, 1]^{d-j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant d,$$

$$\Pi_{d+j} = \prod_{s=1}^{j-1} \left[\frac{k_s}{2^m}, \frac{k_s + k_j}{2^m} \right] \times \left[0, \frac{k_j}{2^m} \right] \times \prod_{s=j+1}^{d} \left[0, \frac{k_j + 1}{2^m} \right], \qquad 1 \leqslant j \leqslant d_0.$$

Так как $1 - \dfrac{k_j + 1}{2^m} \geqslant \dfrac{1}{2}$ и $k_j \geqslant 1$ при $j \leqslant d_0$, то выполняется (1.101). Кроме того, $\dfrac{k_s + k_j}{2^m} \leqslant \dfrac{2^{m-1} + 2^{m-1}}{2^m} = 1$. Если $x = (x_1, \ldots, x_d) \in A$, то для любого j имеем $\dfrac{k_j}{2^m} < x_j < \dfrac{k_j + 1}{2^m}$, поэтому $x \notin \Pi_j$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$ и $x \notin \Pi_{d+j}$ $(1 \leqslant j \leqslant d_0)$. Пусть $x \in B$. Если $x_j \geqslant \dfrac{k_j + 1}{2^m}$ для некоторого j, то $x \in \Pi_j$. Пусть $x_j < \dfrac{k_j + 1}{2^m}$, $1 \leqslant j \leqslant d$. Тогда множество J индексов j, для которых $x_j \leqslant \dfrac{k_j}{2^m}$ и $k_j > 0$, непусто. Положим $l = \min\{j : \ j \in J\}$. Тогда

$$x_s \geqslant \frac{k_s}{2^m} \quad \text{при} \quad s < l, \quad \text{т. е.} \quad \frac{k_s}{2^m} \leqslant x_s < \frac{k_s + 1}{2^m} \leqslant \frac{k_l + k_s}{2^m},$$
$$x_l \leqslant \frac{k_l}{2^m} \quad \text{и} \quad \text{при} \quad s > l \quad 0 \leqslant x_s < \frac{k_s + 1}{2^m} \leqslant \frac{k_l + 1}{2^m},$$

так что $x \in \Pi_{d+l}$. □

Пусть $G \subset \Omega$ — измеримое множество, $T = \{\Omega_i\}_{i=1}^{i_0}$ — ее конечное разбиение. Обозначим

$$\mathcal{S}_{r,T}(G) = \{S : G \to \mathbb{R} : S|_{\Omega_i} \in \mathcal{P}_{r-1}(\Omega_i),\ 1 \leqslant i \leqslant i_0,\ \ S|_{\Omega\setminus G} = 0\}; \tag{1.102}$$

для $f \in L_{q,v}(G)$ положим

$$\|f\|_{p,q,T,v} = \left(\sum_{i=1}^{i_0} \|f\|^{\sigma_{p,q}}_{L_{q,v}(\Omega_i)}\right)^{\frac{1}{\sigma_{p,q}}}, \tag{1.103}$$

где $\sigma_{p,q} = \min\{p, q\}$. Обозначим $L_{p,q,T,v}(G)$ пространство функций $f \in L_{q,v}(G)$ с нормой $\|\cdot\|_{p,q,T,v}$. Заметим, что $\|f\|_{p,q,T,v} \geqslant \|f\|_{L_{q,v}(G)}$.

Лемма 1.4.3. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — область, являющаяся конечным объединением кубов, g, $v : U \to \mathbb{R}_+$ — измеримые функции, $g \in L_\alpha(\Omega, \mathbb{R}_+)$, $v \in L_\beta(\Omega, \mathbb{R}_+)$, $1 < \alpha$, $\beta \leqslant \infty$, $\beta > q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha} < 1$, $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} := \frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha} \geqslant 0$. Тогда $\|gv\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(U)} < \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N(\varepsilon)$, $m \in \mathbb{Z}_+$ существует разбиение $\hat{T}_{m,n,\varepsilon} = \hat{T}_{m,n,\varepsilon}(U) = \{G_j^{m,n,\varepsilon}\}_{j=1}^{\nu_{m,n}}$ области U со следующими свойствами:*

1. *$\nu_{m,n} \underset{d}{\lesssim} 2^m n$;*

2. *существует линейное непрерывное отображение $S_{m,n,\varepsilon} : \operatorname{span}\hat{W}^r_{p,g}(U) \to (\mathcal{S}_{r,\hat{T}_{m,n,\varepsilon}}(U),\ \|\cdot\|_{L_{q,v}(U)})$ такое, что для любой функции $f \in W^r_{p,g}(U)$*

$$\|f - S_{m,n,\varepsilon}(f)\|_{p,q,\hat{T}_{m,n,\varepsilon},v} \underset{d,p,q,r,\alpha,\beta}{\lesssim} (\|gv\|_{\varkappa} + \varepsilon)(2^m n)^{-\frac{\delta}{d}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}; \tag{1.104}$$

3. *для любого $G_j^{m,n,\varepsilon}$*

$$\operatorname{card}\{i \in \{1,\ \dots,\ \nu_{m\pm1,n}\} :\ \operatorname{mes}(G_j^{m,n,\varepsilon} \cap G_i^{m\pm1,n,\varepsilon}) > 0\} \underset{d}{\lesssim} 1.$$

Доказательство. Пусть $\Delta = \prod_{j=1}^d [a_j,\, b_j]$, при этом

$$|b_j - a_j| \leqslant 2|b_s - a_s| \tag{1.105}$$

для любых j, $s = 1, \dots, d$. Пусть $f \in W^r_{p,g}(\Delta)$, $g \in L_\alpha(\Delta)$, $v \in L_\beta(\Delta)$, $\beta > q$, $\alpha > p'$. Определим $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ из равенств $\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{q}-\frac{1}{\beta}$. Так как $\frac{r}{d}+\frac{1}{\tilde{q}}-\frac{1}{\tilde{p}} \geqslant 0$, то по теореме F существует линейный непрерывный оператор $P_\Delta : L_{\tilde{q}}(\Delta) \to (\mathcal{P}_{r-1}(\Delta),\ L_{\tilde{q}}(\Delta))$ такой, что для любой функции $f \in W^r_{\tilde{p}}(\Delta)$

$$\|f - P_\Delta f\|_{L_{\tilde{q}}(\Delta)} \underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d}{\lesssim} (\operatorname{mes}\Delta)^{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha}} \|\nabla^r f\|_{L_{\tilde{p}}(\Delta)}. \tag{1.106}$$

В силу неравенства Гельдера

$$\|f - P_\Delta f\|_{L_{q,v}(\Delta)} \leqslant \|v\|_{L_\beta(\Delta)} \|f - P_\Delta f\|_{L_{\tilde{q}}(\Delta)}, \tag{1.107}$$

$$\|\nabla^r f\|_{L_{\tilde{p}}(\Delta)} \leqslant \|g\|_{L_\alpha(\Delta)} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Delta)}. \tag{1.108}$$

Пусть $\lambda > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, число d_0 и множества B и Π_i определяются, как в предложении 1.4.2,

$$\Delta = \lambda B + x_0, \tag{1.109}$$

$\Delta_i = \lambda\Pi_i + x_0$. Положим $\widetilde{\Delta}_1 = \Delta_1$, $\widetilde{\Delta}_{i+1} = \Delta_{i+1}\backslash(\bigcup_{j=1}^{i}\Delta_j)$ при $1 \leqslant i \leqslant d + d_0 - 1$. Положим $P_\Delta f(x) = P_{\Delta_i} f(x)$ при $x \in \widetilde{\Delta}_i$. Так как для любого Δ_i выполняется (1.106) и число параллелепипедов Δ_i не превосходит $2d$, то (1.106) справедливо и для Δ; кроме того, выполнены (1.107) и (1.108).

Пусть Δ или определено с помощью (1.109) (т.е. $\Delta \in \mathcal{R}$), или является кубом. Тогда в силу (1.106), (1.107) и (1.108)

$$\|f - P_\Delta f\|_{L_{q,v}(\Delta)} \underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d}{\lesssim} (\operatorname{mes}\Delta)^{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}} \|v\|_{L_\beta(\Delta)} \|g\|_{L_\alpha(\Delta)} \Big\| \frac{\nabla^r f}{g} \Big\|_{L_p(\Delta)}. \tag{1.110}$$

Рассмотрим функцию множества

$$\Phi(A) = \Phi_{g,v}(A) =$$
$$= (\operatorname{mes} A)^{\frac{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \Big(\int\limits_A |g(x)|^\alpha\,dx\Big)^{\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \Big(\int\limits_A |v(x)|^\beta\,dx\Big)^{\frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}},$$

где A — измеримое подмножество U. Функция Φ имеет вид (1.67), так что выполнены условия (1.52) и (1.53).

Для любого $\varepsilon' > 0$ существуют разбиение U на кубы K_i, $i = 1, \ldots, i_0$, и функции $g_1 \geqslant 0$, $v_1 \geqslant 0$, постоянные на K_i, $g_1|_{K_i} = a_i$, $v_1|_{K_i} = b_i$, и такие, что

$$\|g - g_1\|_{L_\alpha(U)} \leqslant \varepsilon', \quad \|v - v_1\|_{L_\beta(U)} \leqslant \varepsilon' \tag{1.111}$$

(ε' будет позже выбрано по ε).

Пусть $n \geqslant i_0$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Положим

$$n_{i,m} = 2^m\Big(\Big[\frac{\Phi(K_i)}{\sum\limits_j \Phi(K_j)} n\Big] + 1\Big). \tag{1.112}$$

Тогда $\sum_i n_{i,m} \leqslant 2^m(n + i_0) \leqslant 2^{m+1}n$. Для каждого i такого, что $\Phi(K_i) > 0$, в соответствии с леммой 1.3.3 возьмем разбиение

$$P\Big(K_i, \frac{\Phi(K_i)}{n_{i,m}}\Big) = \{\Delta_{ij}^m, \ \ 1 \leqslant j \leqslant j_{i,m}\}.$$

В силу леммы 1.3.3,

$$\Phi(\Delta_{ij}^m) \leqslant 3n_{i,m}^{-1}\Phi(K_i), \tag{1.113}$$

$j_{i,m} \leqslant 2^d n_{i,m}$ для любого $i = 1, \ldots, i_0$. Обозначим через T_m разбиение области U, состоящее из элементов Δ_{ij}^m, $i = 1, \ldots, i_0$, $j = 1, \ldots, j_{i,m}$. Тогда число элементов T_m не больше $2^{d+m+1}n$. Положим $(S_{m,n,\varepsilon}f)|_{\Delta_{ij}^m} = P_{\Delta_{ij}^m} f$. Тогда

$$\|f - S_{m,n,\varepsilon}f\|_{p,q,T_m,v} = \Big(\sum_{i,j} \|f - P_{\Delta_{ij}^m} f\|_{L_{q,v}(\Delta_{ij}^m)}^{\sigma_{p,q}}\Big)^{1/\sigma_{p,q}} \overset{(1.110)}{\underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d}{\lesssim}}$$
$$\lesssim \Big(\sum_{i,j} \Phi(\Delta_{ij}^m)^{\sigma_{p,q}\left(\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \Big\|\frac{\nabla^r f}{g}\Big\|_{L_p(\Delta_{ij}^m)}^{\sigma_{p,q}}\Big)^{1/\sigma_{p,q}} =: M_{\sigma_{p,q}}.$$

Пусть $f \in W_{p,g}^r(U)$. Если $p > q$, то в силу неравенства Гельдера

$$M_q = \Big(\sum_{i,j} \Phi(\Delta_{ij}^m)^{q\left(\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \Big\|\frac{\nabla^r f}{g}\Big\|_{L_p(\Delta_{ij}^m)}^{q}\Big)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{i,j}\Phi(\Delta_{ij}^m)^{\frac{pqr}{d(p-q)}+1}\Big)^{\frac{p-q}{qp}} \underset{r,d}{\overset{(1.113)}{\lesssim}} \left(\sum_i n_{i,m}^{-\frac{pqr}{d(p-q)}}\Phi(K_i)^{\frac{pqr}{d(p-q)}+1}\right)^{\frac{p-q}{qp}} \overset{(1.112)}{\leqslant}$$

$$\leqslant (2^m n)^{-\frac{r}{d}}\Big(\sum_i \Phi(K_i)\Big)^{\frac{\delta}{d}}.$$

Если $p\leqslant q$, то

$$M_p = \Big(\sum_{i,j}\Phi(\Delta_{ij}^m)^{p\left(\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\Big\|\frac{\nabla^r f}{g}\Big\|^p_{L_p(\Delta_{ij}^m)}\Big)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant \max_{i,j}\Phi(\Delta_{ij}^m)^{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \underset{r,d}{\overset{(1.113)}{\lesssim}} \max_i n_{i,m}^{-\frac{\delta}{d}}\Phi(K_i)^{\frac{\delta}{d}} \overset{(1.112)}{\leqslant} (2^m n)^{-\frac{\delta}{d}}\Big(\sum_i\Phi(K_i)\Big)^{\frac{\delta}{d}}.$$

Оценим сверху $\sum_i\Phi(K_i)$. Положим $v_2=v-v_1$, $g_2=g-g_1$. Тогда для любого $i=1,\,\dots,\,i_0$

$$\|g\|^{\varkappa}_{L_\alpha(K_i)}\|v\|^{\varkappa}_{L_\beta(K_i)} \overset{(1.84),(1.85)}{\leqslant} 4^{\max(0,\varkappa-1)}\sum_{j,l=1}^2\|g_j\|^{\varkappa}_{L_\alpha(K_i)}\|v_l\|^{\varkappa}_{L_\beta(K_i)},$$

поэтому

$$\Big(\sum_i\Phi(K_i)\Big)^{\frac{\delta}{d}}\leqslant 4\Big(\sum_i\sum_{j,l=1}^2\Phi_{g_j,v_l}(K_i)\Big)^{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\overset{(1.52)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 4\Big(\sum_i|K_i|^{1-\varkappa(1/\beta+1/\alpha)}(a_i^\alpha|K_i|)^{\varkappa/\alpha}(b_i^\beta|K_i|)^{\varkappa/\beta}+$$

$$+\Phi_{g_1,v_2}(U)+\Phi_{g_2,v_1}(U)+\Phi_{g_2,v_2}(U)\Big)^{1/\varkappa}=$$

$$=4\left(\|g_1v_1\|^{\varkappa}_{L_\varkappa(U)}+\Phi_{g_1,v_2}(U)+\Phi_{g_2,v_1}(U)+\Phi_{g_2,v_2}(U)\right)^{1/\varkappa}\overset{(1.111)}{=}$$

$$=4\|gv\|_{L_\varkappa(U)}+o(1),\quad \varepsilon'\to 0.$$

Значит, для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение U на кубы K_i такое, что

$$\Big(\sum_i\Phi(K_i)\Big)^{\frac{\delta}{d}}\leqslant 4\left(\|gv\|_{L_\varkappa(U)}+\varepsilon\right),$$

так что

$$\|f-S_{m,n,\varepsilon}f\|_{p,q,T_m,v}\underset{\tilde p,\tilde q,r,d}{\lesssim}(2^m n)^{-\frac{\delta}{d}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}\left(\|gv\|_{L_\varkappa(U)}+\varepsilon\right).$$

Лемма доказана. □

Теперь перейдем к построению семейства разбиений области Ω.

Лемма 1.4.4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что для любого $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant N(\varepsilon)$, $m\in\mathbb{Z}_+$ существует разбиение $\hat T_{m,n,\varepsilon}=\hat T_{m,n,\varepsilon}(\Omega)=\{G_j^{m,n,\varepsilon}\}_{j=1}^{\nu_{m,n}}$ области Ω со следующими свойствами:*

1. *$\nu_{m,n}\underset{d}{\lesssim}2^m n$;*

2. *существует линейное непрерывное отображение $S_{m,n,\varepsilon}:\operatorname{span}\hat W^r_{p,g}(\Omega)\to(\mathcal{S}_{r,\hat T_{m,n,\varepsilon}}(\Omega),\,\|\cdot\|_{L_{q,v}(\Omega)})$ такое, что для любой функции $f\in\hat W^r_{p,g}(\Omega)$*

$$\|f-S_{m,n,\varepsilon}(f)\|_{p,q,\hat T_{m,n,\varepsilon},v}\underset{a,d,p,q,r,c_0,\alpha,\beta}{\lesssim}(\|gv\|_\varkappa+\varepsilon)(2^m n)^{-\frac{\delta}{d}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+};\qquad(1.114)$$

3. *для любого $G_j^{m,n,\varepsilon}$*

$$\operatorname{card}\{i\in\{1,\,\dots,\,\nu_{m\pm1,n}\}:\ \operatorname{mes}(G_j^{m,n,\varepsilon}\cap G_i^{m\pm1,n,\varepsilon})>0\}\underset{d}{\lesssim}1.$$

Доказательство. Шаг 1. Мы рассмотрим случай $\alpha < \infty$ и $\beta < \infty$ (если $\alpha = \infty$ или $\beta = \infty$, то рассуждения проводятся аналогично, с небольшими изменениями в определении функции Φ). Пусть $\mu_1(E) = \int\limits_E g_0^\alpha(x)\,dx$, $\mu_2(E) = \int\limits_E v_0^\beta(x)\,dx$. Если $\frac{1}{\tilde{\varkappa}} := \frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} > 0$, то полагаем $l_* = 3$, $\mu_3(E) = \int\limits_E \tilde{g}^{\tilde{\varkappa}}(x)\tilde{v}^{\tilde{\varkappa}}(x)\,dx$,

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \quad \alpha_2 = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \quad \alpha_3 = \frac{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}; \tag{1.115}$$

если $\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta} = 0$, то полагаем $l_* = 2$ и определяем α_1 и α_2 формулой (1.115). Определим функцию Φ формулой (1.67), т.е.

$$\Phi(A) = \\ = \Big(\int\limits_E g_0^\alpha(x)\,dx\Big)^{\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \Big(\int\limits_E v_0^\beta(x)\,dx\Big)^{\frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \Big(\int\limits_E \tilde{g}^{\tilde{\varkappa}}(x)\tilde{v}^{\tilde{\varkappa}}(x)\,dx\Big)^{\frac{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}. \tag{1.116}$$

Кроме того, полагаем $\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{q} - \frac{1}{\beta}$. Из условия теоремы следует, что $\tilde{p} > 1$ и $\tilde{q} < \infty$.

Шаг 2. Пусть $(\mathcal{T}, \xi_0)$ и F — дерево и биекция, построенные в теореме 1.1.1. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathcal{T}_{\leqslant k}$ поддерево в $\mathcal{T}$ такое, что

$$\mathbf{V}(\mathcal{T}_{\leqslant k}) = \{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T}) :\ \rho_{\mathcal{T}}(\xi_0, \xi) \leqslant k\}.$$

Так как $\operatorname{card}\mathbf{V}_1(\xi) < \infty$ для любого $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, то множество $\mathbf{V}(\mathcal{T}_{\leqslant k})$ конечно.

Фиксируем $\varepsilon_* > 0$ и выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\varepsilon_k := \Phi(\Omega \backslash \Omega_{\mathcal{T}_{\leqslant k}, F}) \leqslant \varepsilon_*. \tag{1.117}$$

Тогда $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\leqslant k} \sqcup \left(\sqcup_{l=1}^{l_0(k)} \mathcal{T}_{k,l}\right)$, где $\mathcal{T}_{k,l}$ — деревья с минимальными вершинами $\hat{w}_{k,l}$, $l_0(k) \in \mathbb{N}$. Положим $\varepsilon_{k,l} = \Phi\left(\Omega_{\mathcal{T}_{k,l}, F}\right)$.

Шаг 3. Область $\Omega_{\mathcal{T}_{\leqslant k}, F}$ является конечным объединением кубов $F(\xi)$, $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{\leqslant k})$. В силу предложения 1.4.1, для любых $x, y \in F(\xi)$ выполнено $\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{g}(y)} \underset{c_0,d}{\asymp} 1$, $\frac{\tilde{v}(x)}{\tilde{v}(y)} \underset{c_0,d}{\asymp} 1$. Применяя лемму 1.4.3, при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ определим разбиение

$$\hat{T}_{m,n,\varepsilon/2;k} = \hat{T}_{m,n,\varepsilon/2}(\Omega_{\mathcal{T}_{\leqslant k}, F})$$

со свойствами, аналогичными 1–3. В частности, существует линейное непрерывное отображение $S_{m,n,\varepsilon/2;k} : \operatorname{span}\hat{W}^r_{p,g}(\Omega) \to (\mathcal{S}_{r,\hat{T}_{m,n,\varepsilon/2;k}}(\Omega_{\mathcal{T}_{\leqslant k}, F}), L_{q,v}(\Omega))$ такое, что для любой функции $f \in \hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$

$$\|f - S_{m,n,\varepsilon/2;k}(f)\|_{p,q,\hat{T}_{m,n,\varepsilon/2;k},v} \underset{a,d,p,q,r,c_0,\alpha,\beta}{\lesssim} \left(\|gv\|_\varkappa + \frac{\varepsilon}{2}\right)(2^m n)^{-\frac{\delta}{d}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}, \tag{1.118}$$

и отображение $f \mapsto S_{m,n,\varepsilon/2;k}(f)$ линейно.

Шаг 4. Пусть $n \geqslant l_0(k)$. Для каждого $l \in \{1, \ldots, l_0(k)\}$ положим

$$n_l = \begin{cases} \left\lceil n\frac{\varepsilon_{k,l}}{\varepsilon_k}\right\rceil, & \text{если } \varepsilon_{k,l} > 0, \\ 1, & \text{если } \varepsilon_{k,l} = 0. \end{cases} \tag{1.119}$$

Тогда, если $\varepsilon_k = 0$, то $\sum\limits_{l=1}^{l_0(k)} n_l = l_0(k) \leqslant n$, а если $\varepsilon_k > 0$, то

$$\sum_{l=1}^{l_0(k)} n_l \leqslant n\sum_{l=1}^{l_0(k)} \frac{\varepsilon_{k,l}}{\varepsilon_k} + l_0(k) = \\ = n\sum_{l=1}^{l_0(k)} \frac{\Phi\left(\Omega_{\mathcal{T}_{k,l},F}\right)}{\Phi(\Omega\backslash\Omega_{\mathcal{T}_{\leqslant k},F})} + l_0(k) \overset{(1.52)}{\leqslant} n + l_0(k) \leqslant 2n. \tag{1.120}$$

Шаг 5. Докажем, что для каждого $l \in \{1, \ldots, l_0(k)\}$, $n \geqslant l_0(k)$, $m \in \mathbb{Z}_+$ существует разбиение $T^l_{m,n} = \{G^{m,n}_{j,l}\}_{j=1}^{\nu_{m,n,l}}$ множества $\Omega_{\mathcal{T}_{k,l},F}$ со следующими свойствами:

1. $\nu_{m,n,l} \underset{d}{\lesssim} 2^m n_l$;

2. существует линейное непрерывное отображение $\hat{S}_{m,n,l} : \operatorname{span} \hat{W}^r_{p,g}(\Omega) \to (\mathcal{S}_{r,T^l_{m,n}}(\Omega_{\mathcal{T}_{k,l},F}), \|\cdot\|_{L_{q,v}(\Omega)})$ такое, что для любой функции $f \in \hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$
$$\|f - \hat{S}_{m,n,l}(f)\|_{p,q,T^l_{m,n},v} \underset{p,q,r,d,\alpha,\beta,a,c_0}{\lesssim} \left(\frac{\varepsilon_*}{2^m n}\right)^{\frac{\delta}{d}} \left(\sum_{E\in T^l_{m,n}} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|^{\sigma_{p,q}}_{L_p(E)}\right)^{\frac{1}{\sigma_{p,q}}}; \quad (1.121)$$

3. для любого $G^{m,n}_{j,l}$
$$\operatorname{card}\{i \in \{1, \ldots, \nu_{m\pm1,n,l}\} : \operatorname{mes}(G^{m,n}_{j,l} \cap G^{m\pm1,n}_{i,l}) > 0\} \underset{d}{\lesssim} 1. \quad (1.122)$$

Пусть покрытие $\mathcal{B}_{n_l,m} = \{E^{m,n_l}_{j,l}\}_{j=1}^{\tilde{\nu}_{m,n,l}}$ области $\Omega_{\mathcal{T}_{k,l},F}$ построено в соответствии с теоремой 1.3.1. Из пункта 1 теоремы 1.3.1 следует, что
$$\tilde{\nu}_{m,n,l} \underset{d}{\lesssim} 2^m n_l. \quad (1.123)$$
В силу пункта 2, a), либо $E^{m,n_l}_{j,l} \subset F(\xi)$ (причем включение строгое) и $E^{m,n_l}_{j,l} \in \mathcal{R} \cup \Xi(F(\xi))$ для некоторого $\xi = \xi^{m,n_l}_{j,l} \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{k,l})$ (множество таких j обозначим $J^1_{m,n,l}$), либо $E^{m,n_l}_{j,l} = \Omega_{\mathcal{T}^{m,n_l}_{j,l},F}$ для некоторого поддерева $\mathcal{T}^{m,n_l}_{j,l} \subset \mathcal{T}_{k,l}$ (множество таких j обозначим $J^2_{m,n,l}$). Из пункта 2, b) следует, что
$$\Phi(E^{m,n_l}_{j,l}) \underset{d}{\lesssim} \frac{\Phi(\Omega_{\mathcal{T}_{k,l},F})}{2^m n_l} = \frac{\varepsilon_{k,l}}{2^m n_l} \overset{(1.119)}{\leqslant} \frac{\varepsilon_k}{2^m n} \overset{(1.117)}{\leqslant} \frac{\varepsilon_*}{2^m n}. \quad (1.124)$$

Пусть $j \in J^1_{m,n,l}$. Тогда из предложения 1.4.1 следует, что для любых $x, y \in E^{m,n_l}_{j,l}$ выполнено $\frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{g}(y)} \underset{c_0,d}{\asymp} 1$ и $\frac{\tilde{v}(x)}{\tilde{v}(y)} \underset{c_0,d}{\asymp} 1$. Поэтому существуют разбиение $\Pi_{j,l}$ множества $E^{m,n_l}_{j,l}$ на не более, чем $2d$ измеримых подмножеств и линейное непрерывное отображение $S_{j,l} : \operatorname{span} \hat{W}^r_{p,g}(\Omega) \to (\mathcal{S}_{r,\Pi_{j,l}}(E^{m,n_l}_{j,l}), L_{q,v}(\Omega))$ такие, что для любой функции $f \in \hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$
$$\begin{gathered}\|f - S_{j,l}(f)\|_{p,q,\Pi_{j,l},v} \underset{p,q,r,d,\alpha,\beta,c_0}{\lesssim} \\ \lesssim \Phi(E^{m,n_l}_{j,l})^{\frac{1}{\varkappa}} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(E^{m,n_l}_{j,l})} \underset{d,\varkappa}{\overset{(1.124)}{\lesssim}} \left(\frac{\varepsilon_*}{2^m n}\right)^{\frac{\delta}{d}} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(E^{m,n_l}_{j,l})}\end{gathered} \quad (1.125)$$
(см. также доказательство леммы 1.4.3).

Пусть $j \in J^2_{m,n,l}$. По лемме 1.4.2, существует линейное непрерывное отображение $P_{j,l} : L_{\tilde{q},\tilde{v}}(E^{m,n_l}_{j,l}) \to (\mathcal{P}_{r-1}(E^{m,n_l}_{j,l}), \|\cdot\|_{L_{\tilde{q},\tilde{v}}(E^{m,n_l}_{j,l})})$ такое, что для любой функции $f \in W^r_{\tilde{p},\tilde{g}}(E^{m,n_l}_{j,l})$
$$\|f - P_{j,l}(f)\|_{L_{\tilde{q},\tilde{v}}(E^{m,n_l}_{j,l})} \underset{\tilde{p},\tilde{q},r,d,a,c_0}{\lesssim} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(E^{m,n_l}_{j,l})} \left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}}\right\|_{L_{\tilde{p}}(E^{m,n_l}_{j,l})}.$$

Отсюда и из неравенства Гельдера получаем, что для любой функции $f \in \hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$

$$\|f - P_{j,l}(f)\|_{L_{q,v}(E^{m,n_l}_{j,l})} \underset{p,q,\alpha,\beta,r,d,a,c_0}{\lesssim}$$

$$\lesssim \|v_0\|_{L_\beta(E^{m,n_l}_{j,l})} \|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_{\tilde{\varkappa}}(E^{m,n_l}_{j,l})} \|g_0\|_{L_\alpha(E^{m,n_l}_{j,l})} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(E^{m,n_l}_{j,l})} \overset{(1.116)}{=} \tag{1.126}$$

$$= \Phi(E^{m,n_l}_{j,l})^{\frac{\delta}{d}} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(E^{m,n_l}_{j,l})} \underset{d,\varkappa}{\overset{(1.124)}{\lesssim}} \left(\frac{\varepsilon_*}{2^m n}\right)^{\frac{\delta}{d}} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(E^{m,n_l}_{j,l})}.$$

Положим $T^l_{m,n} = \left(\cup_{j\in J^1_{m,n,l}} \Pi_{j,l}\right) \cup \{E^{m,n_l}_{j,l}\}_{j\in J^2_{m,n,l}}$, $\hat{S}_{m,n,l}(f)|_{E^{m,n_l}_{j,l}} = S_{j,l}(f)$, $j \in J^1_{m,n,l}$, $\hat{S}_{m,n,l}(f)|_{E^{m,n_l}_{j,l}} = P_{j,l}(f)$, $j \in J^2_{m,n,l}$. Тогда свойство 1 и (1.122) следуют из (1.123), условия $\operatorname{card}\Pi_{j,l} \leqslant 2d$ и пункта 3 теоремы 1.3.1. Из (1.125), (1.126) и условия $\operatorname{card}\Pi_{j,l} \leqslant 2d$ следует (1.121).

Шаг 6. Положим $\hat{T}_{m,n,\varepsilon} = \hat{T}_{m,n,\varepsilon/2;k} \cup \left(\cup_{l=1}^{l_0(k)} T^l_{m,n}\right)$, $S_{m,n,\varepsilon}(f)|_{\Omega_{\mathcal{T}_{\leqslant k},F}} = S_{m,n,\varepsilon/2;k}(f)$, $S_{m,n,\varepsilon}(f)|_{\Omega_{\mathcal{T}_{k,l},F}} = \hat{S}_{m,n,l}(f)$. Свойство 1 следует из оценки

$$\operatorname{card}\hat{T}_{m,n,\varepsilon} = \operatorname{card}\hat{T}_{m,n,\varepsilon/2;k} + \sum_{l=1}^{l_0(k)} \nu_{m,n,l} \underset{d}{\lesssim} 2^m n + \sum_{l=1}^{l_0(k)} 2^m n_l \underset{d}{\overset{(1.120)}{\lesssim}} 2^m n. \tag{1.127}$$

Неравенство (1.114) при достаточно малом $\varepsilon_* > 0$ следует из (1.118), (1.121), (1.127) и неравенства Гельдера. Свойство 3 разбиения $\hat{T}_{m,n,\varepsilon}$ следует из свойства 3 разбиения $\hat{T}_{m,n,\varepsilon/2;k}$ (см. лемму 1.4.3) и (1.122). □

Замечание 1.4.2. Если $g(x) \equiv c_1 > 0$, $v(x) \equiv c_2 > 0$, то для $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ существует разбиение $T_{m,n}$ области Ω такое, что

1. $\operatorname{card} T_{m,n} \underset{d}{\lesssim} 2^m n$,
2. для любого $E \in T_{m,n}$ существует линейный непрерывный оператор $P_E : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено $\|f - P_E f\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{p,q,r,d,a}{\lesssim} c_1 c_2 (\operatorname{mes} E)^{\frac{\delta}{d}} (2^m n)^{-\frac{\delta}{d}} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(E)}$,
3. для $E \in T_{m,n}$ выполнено $\operatorname{card}\{E' \in T_{m\pm1,n} :\ \operatorname{mes}(E\cap E') > 0\} \underset{d}{\lesssim} 1$.

Лемма 1.4.5. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное измеримое множество, $v \in L_q(U)$, $T = \{U_i\}_{i=1}^k$ — конечное разбиение U, $\nu_i = \dim(\mathcal{P}_{r-1}(U_i), \|\cdot\|_{L_{q,v}(U_i)})$, $\nu = \sum\limits_{i=1}^k \nu_i$. Тогда существует линейный изоморфизм $A : (\mathcal{S}_{r,T}(U), \|\cdot\|_{L_{q,v}(U)}) \to \mathbb{R}^\nu$ такой, что*

$$\|A\|_{L_{p,q,T,v}(U)\to l^\nu_p} \underset{r,d,p}{\lesssim} 1, \quad \|A^{-1}\|_{l^\nu_q \to L_{q,v}(U)} \underset{r,d,q}{\lesssim} 1. \tag{1.128}$$

Доказательство. Так как

$$\nu_i \underset{r,d}{\lesssim} 1, \tag{1.129}$$

то по теореме Джона об эллипсоиде (см. [161], гл. 1 и 3) существует линейный изоморфизм $A_i : (\mathcal{P}_{r-1}(U_i), \|\cdot\|_{L_{q,v}(U_i)}) \to l_2^{\nu_i}$ такой, что

$$\|A_i\|_{L_{q,v}(U_i)\to l_2^{\nu_i}} = 1, \quad \|A_i^{-1}\|_{l_2^{\nu_i}\to L_{q,v}(U_i)} \underset{r,d}{\lesssim} 1. \tag{1.130}$$

Определим оператор $A : \mathcal{S}_{r,T}(U) \to \mathbb{R}^\nu$ по формуле

$$A\varphi = \left(A_i\left(\varphi|_{U_i}\right)\right)_{i=1}^k.$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{S}_{r,T}(U)$, $A_i\left(\varphi|_{U_i}\right) = (c_{i,s})_{1\leqslant s\leqslant \nu_i}$. Тогда

$$\|\varphi\|^q_{L_{q,v}(U)} = \sum_i \int\limits_{U_i} |\varphi(x)v(x)|^q\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \|(A_i)^{-1}\|^q_{l_q^{\nu_i}\to L_{q,v}(U_i)} \sum_{s=1}^{\nu_i} |c_{i,s}|^q \overset{(1.129),(1.130)}{\underset{q,r,d}{\lesssim}} \|(c_{i,s})\|^q_{l_q^\nu},$$

откуда следует второе неравенство (1.128). Далее,

$$\|(c_{i,s})\|^p_{l_p^\nu} \leqslant \sum_i \|A_i\|^p_{L_{q,v}(U_i)\to l_p^{\nu_i}} \|\varphi\|^p_{L_{q,v}(U_i)} \overset{(1.129),(1.130)}{\underset{p,r,d}{\lesssim}} \|\varphi\|^p_{L_{p,q,T,v}(U)}.$$

Отсюда следует первое утверждение (1.128). □

Сформулируем результаты об оценках поперечников конечномерных шаров, доказанные Пичем [157], Стесиным [51], Кашиным [29] и Глускиным [21].

Теорема G. [51,157]. *Пусть* $p \geqslant q$, $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_\nu > 0$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_\nu)$, $c_{\nu+1} = 0$,

$$B_p^\nu(\mathbf{c}) = \left\{(x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu :\ \left(\frac{x_1}{c_1}, \ldots, \frac{x_\nu}{c_\nu}\right) \in B_p^\nu\right\}.$$

Тогда для $0 \leqslant n \leqslant \nu$

$$\vartheta_n(B_p^\nu(\mathbf{c}), l_q^\nu) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=n+1}^{\nu} c_j^{\frac{pq}{p-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} & \text{при} \quad p > q, \\ c_{n+1} \quad \text{при } p = q. \end{cases} \tag{1.131}$$

В частности,

$$\vartheta_n(B_p^\nu, l_q^\nu) = (\nu - n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},\ n \in \mathbb{Z}_+,\ \nu \in \mathbb{N},\ n \leqslant \nu. \tag{1.132}$$

Теорема H. [21, 29]. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$. *Тогда*

$$d_n(B_p^\nu, l_q^\nu) \underset{q,p}{\asymp} \Phi(n, \nu, p, q), \tag{1.133}$$

$$\lambda_n(B_p^\nu, l_q^\nu) \underset{q,p}{\asymp} \Psi(n, \nu, p, q), \tag{1.134}$$

$$d^n(B_p^\nu, l_q^\nu) \underset{q,p}{\asymp} \Psi(n, \nu, q', p'), \tag{1.135}$$

где

$$\Phi(n, \nu, p, q) = \begin{cases} \min\left\{1,\ \left(\nu^{1/q}n^{-1/2}\right)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)/\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\right\},\ 2 \leqslant p \leqslant q < \infty, \\ \max\left\{\nu^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \min\left(1,\ \nu^{\frac{1}{q}}n^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{n}{\nu}\right)^{1/2}\right\},\ 1 < p < 2 \leqslant q < \infty, \\ \max\left\{\nu^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},\ \left(1-\frac{n}{\nu}\right)^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)/\left(1-\frac{2}{p}\right)}\right\},\ 1 < p \leqslant q \leqslant 2, \end{cases}$$

$$\Psi(n, \nu, p, q) = \begin{cases} \Phi(n, \nu, p, q), & \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geqslant 1, \\ \Phi(n, \nu, q', p'), & \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leqslant 1. \end{cases}$$

Далее при доказательстве оценок поперечников применяем метод дискретизации В.Е. Майорова [43].

Лемма 1.4.6. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$, $\hat q \geqslant 2$, $\delta > 0$, $\nu(m) \underset{q,p,r,d}{\lesssim} 2^m n$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. *Если* $\frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \, \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat q}\right\} \neq \frac{\hat q \delta}{2d}$, *то существует последовательность* $\{k(m)\}_{m\in\mathbb{Z}_+} \subset \{0, \, \dots, \, \nu(m)\}$ *такая, что* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} k(m) \underset{q,p,r,d}{\lesssim} n$ *и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_{k(m)}(B_p^{\nu(m)}, \, l_q^{\nu(m)})(2^m n)^{-\frac{\delta}{d}} \underset{q,p,r,d}{\lesssim} n^{-\theta_{p,q,r,d}}.$$

Эта лемма доказывается при оценке поперечников классов Соболева или Бесова (см., например, [84], [158], [180]) и использует теорему H.

Доказательство теоремы 2: оценка сверху. При $p \geqslant q$ и $p < q$, $\hat q \leqslant 2$ оценка следует из леммы 1.4.4. В самом деле, для оценки колмогоровских и аппроксимативных чисел в качестве приближающего подпространства берется $\mathcal{S}_{r,\hat T_{0,n,\varepsilon}}(\Omega)$, а в качестве отображения — $S_{0,n,\varepsilon}$. При оценке чисел Гельфанда берется подпространство $\{f \in \operatorname{span} \hat W^r_{p,g}(\Omega) : \ S_{0,n,\varepsilon} f = 0\}$. Здесь используется оценка

$$\dim \mathcal{S}_{r,\hat T_{0,n,\varepsilon}}(\Omega) \underset{r,d}{\lesssim} n, \tag{1.136}$$

а также линейность и непрерывность отображения $S_{0,n,\varepsilon}$.

Пусть $p < q$ и $\hat q > 2$. Применим метод дискретизации В.Е. Майорова [43]. Из леммы 1.4.4 следует, что для любой функции $f \in \hat W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено

$$f = S_{0,n,\varepsilon} f + \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} (S_{m+1,n,\varepsilon} f - S_{m,n,\varepsilon} f) \tag{1.137}$$

(ряд сходится в пространстве $L_{q,v}(\Omega)$).

Пусть $\tilde T_{m,n,\varepsilon}$ — разбиение, состоящее из множеств $G_j^{m,n,\varepsilon} \cap G_i^{m+1,n,\varepsilon}$ (см. обозначения в лемме 1.4.4) таких, что $\operatorname{mes}(G_j^{m,n,\varepsilon} \cap G_i^{m+1,n,\varepsilon}) > 0$. Тогда $S_{m+1,n,\varepsilon} f - S_{m,n,\varepsilon} f \in \mathcal{S}_{r,\tilde T_{m,n,\varepsilon}}(\Omega)$.

Пусть $\tilde\nu_{m,n} = \dim(\mathcal{S}_{r,\tilde T_{m,n,\varepsilon}}(\Omega), \, \|\cdot\|_{L_{q,v}(\Omega)})$. Из пунктов 1 и 3 леммы 1.4.4 следует, что

$$\tilde\nu_{m,n} \underset{d}{\lesssim} 2^m n. \tag{1.138}$$

По лемме 1.4.5, существует изоморфизм $A_{m,n} : (\mathcal{S}_{r,\tilde T_{m,n,\varepsilon}}(\Omega), \, \|\cdot\|_{L_{q,v}(\Omega)}) \to \mathbb{R}^{\tilde\nu_{m,n}}$ такой, что

$$\|A_{m,n}\|_{L_{p,q,\tilde T_{m,n,\varepsilon},v}(\Omega) \to l_p^{\tilde\nu_{m,n}}} \underset{r,d,p}{\lesssim} 1, \quad \|A_{m,n}^{-1}\|_{l_q^{\tilde\nu_{m,n}} \to L_{q,v}(\Omega)} \underset{r,d,q}{\lesssim} 1. \tag{1.139}$$

Пусть $\{k_{m,n}\}_{m\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} k_{m,n} = N_n \underset{p,q,r,d}{\lesssim} n, \tag{1.140}$$

$\Lambda_{m,n} \subset l_q^{\tilde\nu_{m,n}}$ — экстремальное подпространство для $\vartheta_{k_{m,n}}(B_p^{\tilde\nu_{m,n}}, \, l_q^{\tilde\nu_{m,n}})$, $E_{m,n} : l_q^{\tilde\nu_{m,n}} \to \Lambda_{m,n}$ — соответствующее экстремальное отображение. Через $I_{m,n}$ обозначим тождественный оператор в $\mathbb{R}^{\tilde\nu_{m,n}}$. Положим

$$Ef = S_{0,n,\varepsilon}(f) + \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} A_{m,n}^{-1} E_{m,n} A_{m,n}(S_{m+1,n,\varepsilon}(f) - S_{m,n,\varepsilon}(f)) \tag{1.141}$$

(эта сумма конечная). Достаточно доказать, что последовательность $\{k_{m,n}\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ можно выбрать так, что

$$\|f - Ef\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{r,d,q,p,a,\alpha,\beta,c_0}{\lesssim} (\|gv\|_{\varkappa} + \varepsilon)n^{-\theta_{p,q,r,d}}. \tag{1.142}$$

В самом деле, из (1.136) и (1.140) следует, что $E(\operatorname{span}\hat{W}^r_{p,g}(\Omega))$ содержится в подпространстве размерности $\tilde{N}_n \underset{p,q,r,d}{\lesssim} n$. Отметим также, что если отображения $E_{m,n}$ линейны (это требуется при оценке аппроксимативных и гельфандовских чисел), то отображение E линейно и непрерывно. Поэтому из (1.142) следуют требуемые оценки для чисел Колмогорова и аппроксимативных чисел. При оценке чисел Гельфанда рассматриваем подпространство Λ^n, заданное равенствами

$$S_{0,n,\varepsilon}(f) = 0, \quad E_{m,n}A_{m,n}(S_{m+1,n,\varepsilon}(f) - S_{m,n,\varepsilon}(f)) = 0$$

(тогда $\operatorname{codim}\Lambda^n \underset{p,q,r,d}{\lesssim} n$ и $Ef = 0$ для любой функции $f \in \Lambda^n$).

Из (1.138) следует, что найдется такое $C_*(d)$, что $\tilde{\nu}_{m,n} \leqslant C_*(d)\cdot 2^m n$. Положим $\overline{\nu}_{m,n} = \lceil C_*(d)\cdot 2^m n\rceil$, $\gamma_m = \vartheta_{k_{m,n}}(B_p^{\overline{\nu}_{m,n}},\, l_q^{\overline{\nu}_{m,n}})$. Отметим, что

$$\vartheta_{k_{m,n}}(B_p^{\tilde{\nu}_{m,n}},\, l_q^{\tilde{\nu}_{m,n}}) \leqslant \gamma_m. \tag{1.143}$$

Пусть $f \in \hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$. Тогда, учитывая пункты 2 и 3 леммы 1.4.4, получаем

$$\begin{gathered}\|S_{m+1,n,\varepsilon}(f) - S_{m,n,\varepsilon}(f)\|_{L_{p,q,\tilde{T}_{m,n,\varepsilon},v}(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \|f - S_{m+1,n,\varepsilon}(f)\|_{L_{p,q,\tilde{T}_{m,n,\varepsilon},v}(\Omega)} + \|f - S_{m,n,\varepsilon}(f)\|_{L_{p,q,\tilde{T}_{m,n,\varepsilon},v}(\Omega)} \underset{p,q,r,d}{\lesssim} \\ \lesssim \|f - S_{m+1,n,\varepsilon}(f)\|_{L_{p,q,\hat{T}_{m,n,\varepsilon},v}(\Omega)} + \|f - S_{m,n,\varepsilon}(f)\|_{L_{p,q,\hat{T}_{m,n,\varepsilon},v}(\Omega)} \overset{(1.114)}{\underset{r,d,q,p,a,\alpha,\beta,c_0}{\lesssim}} \\ \lesssim (\|gv\|_{\varkappa} + \varepsilon)(2^m n)^{-\frac{\delta}{d}}.\end{gathered}$$

Отсюда, из (1.137), (1.139), (1.141) и (1.143) следует, что

$$\begin{gathered}\|f - Ef\|_{L_{q,v}(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} \|A^{-1}_{m,n}(I_{m,n} - E_{m,n})A_{m,n}(S_{m+1,n,\varepsilon}(f) - S_{m,n,\varepsilon}(f))\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{r,d,q,p,a,\alpha,\beta,c_0}{\lesssim} \\ \lesssim (\|gv\|_{\varkappa} + \varepsilon)\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} \gamma_m\cdot(2^m n)^{-\frac{\delta}{d}}.\end{gathered}$$

Остается воспользоваться леммой 1.4.6. □

1.5 Доказательство оценки снизу s-чисел

При доказательстве оценки снизу также используем обобщение метода дискретизации В.Е. Майорова [43].

Пусть X, Y — нормированные пространства, $B \subset X$, $A \in L(X, Y)$. Тогда

$$d_n(A(B),\, Y) \leqslant \|A\| d_n(B,\, X). \tag{1.144}$$

Если Z — нормированное пространство, $J : Z \to X$ — линейный непрерывный инъективный оператор, то из определения аппроксимативных и гельфандовских чисел следует, что

$$a_n(AJ) \leqslant \|A\| a_n(J), \quad c_n(AJ) \leqslant \|A\| c_n(J). \tag{1.145}$$

Лемма 1.5.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *— область,* $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$*,* $G_1, \ldots, G_m \subset \Omega$ *— попарно не перекрывающиеся области, и пусть* $\psi_1, \ldots, \psi_m \in W^r_{p,g}(\Omega)$*,* $\left\|\frac{\nabla^r\psi_j}{g}\right\|_{L_p(\Omega)} = 1$*,* $\operatorname{supp}\psi_j \subset G_j$*,*

$$\|\psi_j\|_{L_{q,v}(G_j)} \geqslant M, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{1.146}$$

Пусть $B = W^r_{p,g}(\Omega) \cap \operatorname{span}\{\psi_j\}_{j=1}^m$*. Тогда для любого* $n \in \{0, \ldots, m\}$

$$\vartheta_n(B, L_{q,v}(\Omega)) \geqslant M \cdot \vartheta_n(B^m_p, l^m_q).$$

Если $p > q$ *и вместо(1.146) выполнены неравенства*

$$\|\psi_j\|_{L_{q,v}(G_j)} \geqslant M_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{1.147}$$

где $M_1 \geqslant M_2 \geqslant \ldots \geqslant M_m > 0$*, то*

$$\vartheta_n(B, L_{q,v}(\Omega)) \geqslant \left(\sum_{j=n+1}^m M_j^{\frac{pq}{p-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}. \tag{1.148}$$

Доказательство. Пусть $X = \operatorname{span}\{\psi_j\}_{j=1}^m \subset L_{q,v}(\Omega)$. Из определения чисел Гельфанда и теоремы Хана – Банаха следует, что

$$c_n(B, L_{q,v}(\Omega)) = c_n(B, X).$$

Докажем, что

$$d_n(B, L_{q,v}(\Omega)) \geqslant d_n(B, X), \quad a_n(B, L_{q,v}(\Omega)) \geqslant a_n(B, X).$$

Для этого построим проектор $Q : L_{q,v}(\Omega) \to X$ такой, что $\|Q\| \leqslant 1$ и применим (1.144), (1.145). Пусть $X_j = \operatorname{span}\{\psi_j\}$. Обозначим через $L^{(j)}_{q,v}(\Omega)$ множество функций в $L_{q,v}(\Omega)$ с носителем в G_j. Так как $\dim X_j = 1$, то существует проектор $Q_j : L^{(j)}_{q,v}(G) \to X_j$, $\|Q_j\| \leqslant 1$. Положим $Q(f) = \sum\limits_{j=1}^m Q_j(f\chi_{G_j})$. Так как множества G_j попарно не пересекаются, то $\|Q\| \leqslant 1$.

Определим изоморфизм $T : X \to \mathbb{R}^m$ равенством

$$T\left(\sum_{j=1}^m c_j\psi_j\right) = (c_1, \ldots, c_m).$$

Так как $\left\|\frac{\nabla^r\psi_j}{g}\right\|_{L_p(\Omega)} = 1$, то $\sum\limits_{j=1}^m c_j\psi_j \in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено тогда и только тогда, когда $(c_1, \ldots, c_m) \in B^m_p$. Поэтому $T(W^r_{p,g}(\Omega) \cap X) = B^m_p$. Докажем, что $\|T\|_{L_{q,v}(G)\to l^m_q} \leqslant M^{-1}$. В самом деле, если $f = \sum\limits_{j=1}^m c_j\psi_j$, то $\|Tf\|_{l^m_q} = \left(\sum\limits_{j=1}^m |c_j|^q\right)^{1/q}$,

$$\|f\|_{L_{q,v}(G)} = \left(\sum_{j=1}^m |c_j|^q \|\psi_j\|^q_{L_{q,v}(G_j)}\right)^{1/q} \geqslant M\|Tf\|_{l^m_q}.$$

В силу (1.144) и (1.145),

$$\vartheta_n(B^m_p, l^m_q) = \vartheta_n(T(B), l^m_q) \leqslant$$
$$\leqslant \|T\|_{L_{q,v}(G)\to l^m_q}\vartheta_n(B, X) \leqslant M^{-1}\vartheta_n(B, X).$$

Оценка (1.148) получается аналогично, с применением (1.131). Лемма доказана. □

Отметим, что из этой леммы следуют оценки снизу для гельфандовских и линейных поперечников множества $W^r_{p,g}(\Omega)$.

Следствие 1.5.1. *Пусть выполнены условия леммы 1.5.1. Тогда*

$$d_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \geqslant M\cdot d_n(B^m_p,\, l^m_q),$$
$$\lambda_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \geqslant M\cdot \lambda_n(B^m_p,\, l^m_q),$$
$$d^n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \geqslant M\cdot d^n(B^m_p,\, l^m_q).$$

Лемма 1.5.2. *Пусть $U\subset\Omega$ — конечное объединение кубов Δ_i, $1\leqslant i\leqslant i_0$, $g|_{\Delta_i}=a_i$, $v|_{\Delta_i}=b_i$, $g|_{\Omega\setminus U}=0$, $v|_{\Omega\setminus U}=0$. Положим $W^r_{p,g,U}(\Omega)=W^r_{p,g}(\Omega)\cap C_0^\infty(U)$. Тогда*

$$\varliminf_{n\to\infty}\vartheta_n(W^r_{p,g,U}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega))n^{\theta_{p,q,r,d}} \underset{p,q,r,d}{\gtrsim} \|gv\|_{\varkappa}.$$

Доказательство. Пусть $J=\{i\in\overline{1,\, i_0}:\ a_ib_i\neq 0\}\neq\varnothing$, $\widetilde{K}=\bigcup_{i\in J}\Delta_i$, $N\geqslant n$. Для каждого $i\in J$ положим

$$n_i=\left(\left[\left(\frac{(a_ib_i)^{\varkappa}|\Delta_i|}{\sum\limits_{j\in J}(a_jb_j)^{\varkappa}|\Delta_j|}2N\right)^{1/d}\right]+1\right)^d, \qquad m:=\sum_{i\in J}n_i.$$

Тогда при достаточно больших N

$$2\frac{(a_ib_i)^{\varkappa}|\Delta_i|}{\sum\limits_{j\in J}(a_jb_j)^{\varkappa}|\Delta_j|}N\leqslant n_i\leqslant 4\frac{(a_ib_i)^{\varkappa}|\Delta_i|}{\sum\limits_{j\in J}(a_jb_j)^{\varkappa}|\Delta_j|}N, \quad 2N\leqslant m\leqslant 4N. \tag{1.149}$$

Пусть функция $\varphi_0\in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ имеет носитель в $(0,\, 1)$, $\varphi_0\not\equiv 0$. Положим $\varphi(x)=c\prod_{l=1}^d\varphi_0(x_l)$, где x_l — l-я координата точки $x\in\mathbb{R}^d$, а c выбирается так, чтобы $\displaystyle\int_{[0,\,1]^d}|\nabla^r\varphi(x)|^p\,dx=1$.

Пусть $i\in J$. Разделим Δ_i на n_i равных кубов

$$\Delta_{i,j}=x_{ij}+\left(\frac{|\Delta_i|}{n_i}\right)^{1/d}[0,\,1]^d$$

и положим $\varphi_{ij}(x)=a_i|\Delta_{i,j}|^{\frac{r}{d}-\frac{1}{p}}\varphi\Big(\Big(\frac{n_i}{|\Delta_i|}\Big)^{1/d}(x-x_{ij})\Big)$. Тогда $\left\|\frac{\nabla^r\varphi_{ij}}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}=1$,

$$\|\varphi_{ij}\|_{L_{q,v}(\Omega)}\underset{p,q,r,d}{\asymp}a_ib_i|\Delta_{i,j}|^{\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}=a_ib_i\left(\frac{|\Delta_i|}{n_i}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\overset{(1.149)}{\underset{p,q,r,d}{\asymp}}$$
$$\asymp\left(\sum_{j\in J}(a_jb_j)^{\varkappa}|\Delta_j|\right)^{\frac{1}{\varkappa}}=\|gv\|_{\varkappa}N^{-\frac{\delta}{d}}.$$

Остается применить лемму 1.5.1 и теоремы G, H, взяв $N=n$, а также $N=\lceil n^{\hat{q}/2}\rceil$ в случае $p<q$, $\hat{q}>2$. $\square$

Доказательство теоремы 2: оценка снизу. Пусть $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — возрастающие последовательности кусочно-постоянных функций, такая что $g_k(x)\underset{k\to\infty}{\to}g(x)$, $v_k(x)\underset{k\to\infty}{\to}v(x)$ (см. определение класса $L^+(\Omega)$). По теореме Б. Леви, $\|g_kv_k\|_{\varkappa}\underset{k\to\infty}{\to}\|gv\|_{\varkappa}$.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и обозначим $\hat{g} = g_k$, $\hat{v} = v_k$. Тогда $W^r_{p,\hat{g}}(\Omega) \subset W^r_{p,g}(\Omega)$ и существует множество $U \subset \Omega$, являющееся конечным объединением кубов Δ_i, $1 \leqslant i \leqslant i_0$, таким, что $\hat{g}|_{\Delta_i} = \mathrm{const}$, $\hat{v}|_{\Delta_i} = \mathrm{const}$, $\hat{g}|_{\Omega\setminus U} = 0$, $\hat{v}|_{\Omega\setminus U} = 0$.

Напомним, что $\hat{W}^r_{p,g}(\Omega) = \{f - \hat{P}f : \ f \in W^r_{p,g}(\Omega)\}$. Положим

$$W = \{f - \hat{P}f : \ f \in W^r_{p,\hat{g},U}(\Omega)\}$$

(см. обозначение в формулировке леммы 1.5.2). Тогда $W \subset \hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$, поэтому достаточно показать, что при достаточно больших n выполнено $\vartheta_n(W, L_{q,\hat{v}}(\Omega)) \underset{p,q,r,d}{\gtrsim} \|\hat{g}\hat{v}\|_{\varkappa} n^{-\theta_{p,q,r,d}}$.

Так как веса $\hat{g}$, $\hat{v}$ ограничены, то из замечания 1.4.1 следует, что оператор $\hat{P} : \operatorname{span} W^r_{p,\hat{g},U}(\Omega) \to L_{q,\hat{v}}(\Omega)$ ограничен.

Сначала оценим снизу колмогоровские и аппроксимативные числа. Пусть $\Lambda \subset L_{q,\hat{v}}(\Omega)$ — подпространство размерности не выше n, $T : \operatorname{span} W \to \Lambda$ (при оценке аппроксимативных чисел предполагаем, что отображение T линейно и непрерывно). Положим $\tilde{T}f = \hat{P}f + T(f - \hat{P}f)$. Тогда образ отображения $\tilde{T}$ содержится в пространстве $\Lambda + \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ размерности $n + \dim \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$. Если отображение T линейно и непрерывно, то таким же является $\tilde{T} : \operatorname{span} W^r_{p,\hat{g},U}(\Omega) \to L_{q,\hat{v}}(\Omega)$. Из леммы 1.5.2 следует, что при достаточно больших n выполнено

$$\sup_{h\in W} \|h - Th\|_{L_{q,\hat{v}}(\Omega)} = \sup_{f\in W^r_{p,\hat{g},U}(\Omega)} \|f - \hat{P}f - T(f - \hat{P}f)\|_{L_{q,\hat{v}}(\Omega)} =$$
$$= \sup_{f\in W^r_{p,\hat{g},U}(\Omega)} \|f - \tilde{T}f\|_{L_{q,\hat{v}}(\Omega)} \underset{p,q,r,d}{\gtrsim} \|\hat{g}\hat{v}\|_{\varkappa} n^{-\theta_{p,q,r,d}}.$$

Теперь оценим числа Гельфанда. Пусть $T : \operatorname{span} W \to \mathbb{R}^n$ — линейное непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $\hat{T} : \operatorname{span} W \to \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$, $\hat{T}(f) = (T(f), \hat{P}(f))$. Это отображение линейно и непрерывно. Отсюда и из леммы 1.5.2 следует, что при достаточно больших n выполнено

$$\sup\{\|f\|_{L_{q,\hat{v}}(\Omega)} : \ Tf = 0, \ f \in W\} =$$
$$= \sup\{\|f - \hat{P}f\|_{L_{q,\hat{v}}(\Omega)} : \ T(f - \hat{P}f) = 0, \ f \in W^r_{p,\hat{g},U}(\Omega)\} \geqslant$$
$$\geqslant \sup\{\|f\|_{L_{q,\hat{v}}(\Omega)} : \ Tf = 0, \ \hat{P}f = 0, \ f \in W^r_{p,\hat{g},U}(\Omega)\} \underset{p,q,r,d}{\gtrsim} \|\hat{g}\hat{v}\|_{\varkappa} n^{-\theta_{p,q,r,d}}.$$

Теорема доказана. □

В заключение отметим, что из (3) следует, что для линейных поперечников $\lambda_n(\hat{W}^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega))$ выполнены такие же порядковые оценки, как для аппроксимативных чисел, а для гельфандовских поперечников $d^n(\hat{W}^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega))$ — такие же порядковые оценки, как для гельфандовских чисел.

Глава 2

Теоремы вложения и поперечники весовых классов Соболева с весами, монотонными по одной переменной

В этой главе будет доказана теорема 3.

2.1 Построение специального разбиения куба по функции множества

Обозначения $\mathcal{K}$, $\Xi_s(K)$, $\Xi(K)$ такие же, как в предыдущей главе.

Через $\mathcal{R}$ обозначим совокупность множеств $R \stackrel{d}{=} \Delta\backslash\Delta'$, где $\Delta \in \mathcal{K}$, $\Delta' \in \Xi(\Delta)\backslash\{\Delta\}$. Заметим, что замыкания кубов Δ и Δ' по множеству $R \in \mathcal{R}$ находятся однозначно. Будем их обозначать Δ_R и Δ'_R соответственно:

$$R = \Delta_R\backslash\Delta'_R. \tag{2.1}$$

Пусть $\Delta \stackrel{d}{=} \prod_{j=1}^d [\alpha_j, \beta_j]$ — параллелепипед. Введем следующие операции над множеством Δ:

$$p_{d-1}(\Delta) = \prod_{j=1}^{d-1}[\alpha_j, \beta_j],$$

$$\Gamma_0(\Delta) = \left(\prod_{j=1}^{d-1}(\alpha_j, \beta_j)\right) \times \{\alpha_d\}, \quad \Gamma_1(\Delta) = \left(\prod_{j=1}^{d-1}(\alpha_j, \beta_j)\right) \times \{\beta_d\},$$

$$\Delta_+ = \left(\prod_{j=1}^{d-1}[\alpha_j, \beta_j]\right) \times [\beta_d, 2\beta_d - \alpha_d],$$

$$\Delta_- = \left(\prod_{j=1}^{d-1}[\alpha_j, \beta_j]\right) \times [2\alpha_d - \beta_d, \alpha_d], \tag{2.2}$$

$$\Delta^\lambda = p_{d-1}(\Delta) \times [\lambda\alpha_d + (1-\lambda)\beta_d, \beta_d], \quad \lambda \in [0, 1], \tag{2.3}$$

$$\Delta(\mu) = p_{d-1}(\Delta) \times [\alpha_d, \alpha_d + \mu(\beta_d - \alpha_d)], \quad \mu \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Обозначим через $\tilde{\mathcal{R}}$ совокупность множеств вида $M = R\backslash(\Delta'_R)_+$, где $R \in \mathcal{R}$ и $\Gamma_1(\Delta'_R) \cap \Gamma_1(\Delta_R) = \varnothing$. При этом определим следующие операции над множеством M:

$$\Delta_M = \Delta_R, \ \ \Delta'_M = \Delta'_R, \ \ \Delta''_M = \Delta''_R = (\Delta'_R)_+. \tag{2.5}$$

Для $M \in \Xi(K)$ будем считать, что

$$\Delta'_M = \Delta''_M = \varnothing, \ \ \Delta_M = M. \tag{2.6}$$

Если $M \in \mathcal{R}$ и $\Gamma_1(\Delta'_M) \subset \Gamma_1(\Delta_M)$, то также положим $\Delta''_M = \varnothing$.

Для $R \in \mathcal{R}$ и $\tilde{R} \in \tilde{\mathcal{R}}$ обозначим

$$\Gamma_0(R) = \Gamma_0(\Delta_R)\backslash\overline{\Gamma_0(\Delta'_R)}, \ \ \Gamma_1(R) = \Gamma_1(\Delta_R)\backslash\overline{\Gamma_1(\Delta'_R)},$$
$$\Gamma_0(\tilde{R}) = \Gamma_0(\Delta_{\tilde{R}})\backslash\overline{\Gamma_0(\Delta'_{\tilde{R}})}, \ \ \Gamma_1(\tilde{R}) = \Gamma_1(\Delta_{\tilde{R}})\backslash\overline{\Gamma_1(\Delta''_{\tilde{R}})}$$

(черта над множеством здесь означает замыкание),

$$R_\pm = (\Delta_R)_\pm, \quad \tilde{R}_\pm = (\Delta_{\tilde{R}})_\pm. \tag{2.7}$$

Замечание 2.1.1. Если M, $N \in \Xi(K) \cup \mathcal{R} \cup \tilde{\mathcal{R}}$ и $\Gamma_0(M) \cap \Gamma_0(N) \neq \varnothing$ (или $\Gamma_1(M) \cap \Gamma_1(N) \neq \varnothing$), то M и N перекрываются.

Для множеств вида $E = E' \times \{z\}$, где $E' \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $z \in \mathbb{R}$, определим отображение $E \mapsto z^d(E)$ равенством $z^d(E) := z$.

Для каждого $K \in \mathcal{K}$ определим разбиение $Q_s(K)$ индукцией по $s \in \mathbb{Z}_+$. Положим $Q_0(K) = \{K\}$. Пусть разбиение $Q_s(K)$ построено для любого $K \in \mathcal{K}$. Построим $Q_{s+1}(K)$. Упорядочим элементы $\Xi_1(K) = \{\Delta^1_j, \ j = \overline{1, \, 2^d}\}$ так, чтобы

$$\{\Delta^1_j, \ j = \overline{2^{d-1}+1, \, 2^d}\} = \{\Delta^1_j \in \Xi_1(K) : \Gamma_0(\Delta^1_j) \subset \Gamma_0(K)\}. \tag{2.8}$$

Положим

$$Q_{s+1}(K) = \{\Delta^1_j : j = \overline{1, \, 2^{d-1}}\} \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{2^{d-1}} Q_s(\Delta^1_{k+2^{d-1}}) \right).$$

Обозначим через $\tilde{Q}_s(K)$ семейство кубов $\Delta \in Q_s(K)$ таких, что $\Gamma_0(\Delta) \subset \Gamma_0(K)$.

Лемма 2.1.1. *1. Все элементы $Q_s(K)$ принадлежат $\cup_{l=0}^s \Xi_l(K)$; при этом,*

$$\{\Delta \in Q_s(K) : \Gamma_1(\Delta) \subset \Gamma_1(K)\} = Q_1(K)\backslash\tilde{Q}_1(K), \ \textit{если } s \geqslant 1, \tag{2.9}$$

$$\tilde{Q}_s(K) = \{\Delta \in \Xi_s(K) : \Gamma_0(\Delta) \subset \Gamma_0(K)\}; \tag{2.10}$$

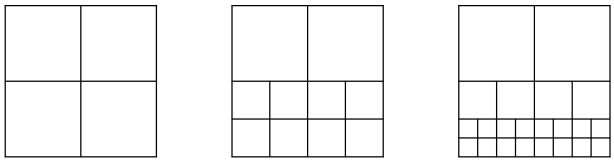
2. $\operatorname{card} Q_s(K) = 2^{s(d-1)} + \sum\limits_{k=1}^{s} 2^{k(d-1)}$*;*

3. $\operatorname{card} \tilde{Q}_s(K) = 2^{s(d-1)}$*;*

4. для любых s, $t \in \mathbb{Z}_+$ выполнено

$$(Q_s(K)\backslash\tilde{Q}_s(K)) \bigcup \left(\bigcup_{\Delta \in \tilde{Q}_s(K)} Q_t(\Delta) \right) = Q_{s+t}(K);$$

5. если $\Delta \in \Xi_t(K)$, $t \in \mathbb{Z}_+$, и $\Gamma_0(\Delta) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$, то для любого $s \in \mathbb{Z}_+$ куб Δ содержится в некотором элементе разбиения $Q_s(K)$;



$Q_1(K)$ $\quad$ $Q_2(K)$ $\quad$ $Q_3(K)$

Рис. 2.1:

6. *если* $\Delta \in Q_s(K) \backslash \tilde{Q}_s(K)$, *то найдется такое* $t \leqslant s$, *что* $\Delta \in Q_t(K) \backslash \tilde{Q}_t(K)$, $\Delta_- \in \tilde{Q}_t(K)$.

На рисунке 2.1 изображены разбиения $Q_s(K)$ при $s = 1, 2, 3$.

Доказательство. При $s = 0$ свойства 1–6 легко проверяются. Пусть $Q_s(K)$ имеет эти свойства для любого $K \in \mathcal{K}$ и любого $s \leqslant m$. Докажем их для $Q_{m+1}(K)$. В самом деле, в силу (2.8) и предположения индукции, элементы $Q_m(\Delta^1_j)$, $j = \overline{2^{d-1}+1,\, 2^d}$, принадлежат $\cup_{l=0}^{m} \Xi_l(\Delta^1_j) \subset \cup_{l=1}^{m+1} \Xi_l(K)$. Равенство (2.9) следует из определения $Q_{m+1}(K)$. Наконец, по предположению индукции

$$\begin{gathered}\tilde{Q}_{m+1}(K) = \cup_{k=1}^{2^{d-1}} \tilde{Q}_m(\Delta^1_{k+2^{d-1}}) = \\ = \cup_{k=1}^{2^{d-1}} \{\Delta \in \Xi_m(\Delta^1_{k+2^{d-1}}) : \Gamma_0(\Delta) \subset \Gamma_0(\Delta^1_{k+2^{d-1}})\} = \\ = \{\Delta \in \Xi_{m+1}(K) : \Gamma_0(\Delta) \subset \Gamma_0(K)\}.\end{gathered}$$

Тем самым, доказано свойство 1. Далее,

$$\operatorname{card} Q_{m+1}(K) = 2^{d-1} + \sum_{k=1}^{2^{d-1}} \operatorname{card} Q_m(\Delta^1_{k+2^{d-1}}) = 2^{d-1} + 2^{(m+1)(d-1)} + \sum_{j=1}^{m} 2^{(j+1)(d-1)},$$

$$\operatorname{card} \tilde{Q}_{m+1}(K) = \sum_{k=1}^{2^{d-1}} \operatorname{card} \tilde{Q}_m(\Delta^1_{k+2^{d-1}}) = 2^{(m+1)(d-1)}$$

в силу предположения индукции. Отсюда следует 2 и 3.

Докажем 4. Пусть $t \in \mathbb{Z}_+$. Имеем

$$(Q_{m+1}(K) \backslash \tilde{Q}_{m+1}(K)) \bigcup \left(\bigcup_{\Delta \in \tilde{Q}_{m+1}(K)} Q_t(\Delta) \right) =$$

$$= \{\Delta^1_j : j = \overline{1,\, 2^{d-1}}\} \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{2^{d-1}} Q_m(\Delta^1_{k+2^{d-1}}) \backslash \tilde{Q}_m(\Delta^1_{k+2^{d-1}}) \right) \bigcup$$

$$\bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{2^{d-1}} \bigcup_{\Delta \in \tilde{Q}_m(\Delta^1_{k+2^{d-1}})} Q_t(\Delta) \right) =$$

$$= \{\Delta^1_j : j = \overline{1,\, 2^{d-1}}\} \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{2^{d-1}} Q_{m+t}(\Delta^1_{k+2^{d-1}}) \right) = Q_{m+1+t}(K).$$

Предпоследнее равенство выполнено в силу предположения индукции, последнее — по определению $Q_{m+1+t}(K)$.

Докажем 5. Заметим, что $t \geqslant 1$. Если $\Delta \subset \Delta_j^1$, $j = \overline{1,\, 2^{d-1}}$, то утверждение доказано. Пусть $\Delta \subset \Delta_j^1$, $j = \overline{2^{d-1}+1,\, 2^d}$. Тогда $\Delta \in \Xi_{t-1}(\Delta_j^1)$ и $\Gamma_0(\Delta) \cap \Gamma_0(\Delta_j^1) = \varnothing$. По предположению индукции, Δ содержится в некотором элементе разбиения $Q_m(\Delta_j^1)$, который принадлежит $Q_{m+1}(K)$.

Докажем 6. Если $\Delta \in Q_1(K)\backslash\tilde{Q}_1(K)$, то утверждение доказано (в этом случае $t = 1$). Если $\Delta \in Q_m(\Delta^1_{k+2^{d-1}})\backslash\tilde{Q}_m(\Delta^1_{k+2^{d-1}})$ для некоторого $k = 1, \dots, 2^{d-1}$, то по предположению индукции найдется такое $t \leqslant m$, что $\Delta \in Q_t(\Delta^1_{k+2^{d-1}})\backslash\tilde{Q}_t(\Delta^1_{k+2^{d-1}})$ и $\Delta_- \in \tilde{Q}_t(\Delta^1_{k+2^{d-1}})$. Значит, $\Delta \in Q_{t+1}(K)\backslash\tilde{Q}_{t+1}(K)$ и $\Delta_- \in \tilde{Q}_{t+1}(K)$. $\square$

Обозначим
$$n(s,\, d) = \sum_{k=1}^{s} 2^{k(d-1)} + 2^{s(d-1)},$$
$$n_1(s,\, d) = \sum_{k=1}^{s} 2^{k(d-1)}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad d \in \mathbb{N} \cap [2,\, \infty).$$
Пусть $K \in \mathcal{K}$, $A \subset K$, P — разбиение K. Обозначим
$$P|_A = \{M \cap A |\, M \in P, \ \ \mathrm{mes}\,(M \cap A) > 0\}.$$

Для пары кубов Δ_1, $\Delta_2 \in \Xi(\Delta_1)$ обозначим через $s(\Delta_2,\, \Delta_1)$ такое $s \in \mathbb{Z}_+$, что $\Delta_2 \in \Xi_s(\Delta_1)$; для $R \in \mathcal{R}$ такого, что $\Delta_R \in \Xi(\Delta_1)$, положим $s(R,\, \Delta_1) = s(\Delta_R,\, \Delta_1)$.

Определение 2.1.1. Скажем, что разбиение T куба Q имеет свойство $(*)$, если

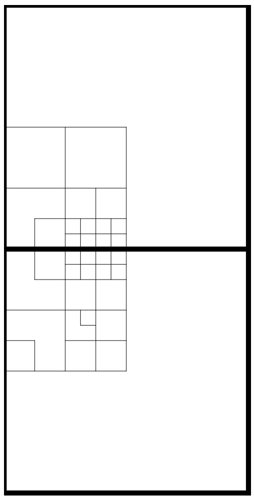
- каждый элемент T принадлежит $\Xi(Q)$ или $\mathcal{R}$;
- если $R \in \mathcal{R} \cap T$, то $\Delta_R \in \Xi(Q)$.

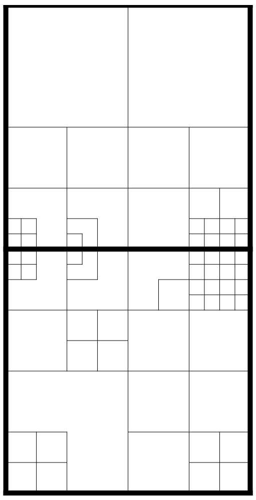
Лемма 2.1.2. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ — замкнутый куб, $T = T(K_-)$ — разбиение K_- со свойством $(*)$. Положим*
$$T' = T'(K_-) = \{M \in T : \Gamma_1(M) \subset \Gamma_1(K_-)\},$$
$N(T) = \mathrm{card}\, T'$. Тогда существует разбиение $T_+(K)$ куба K со следующими свойствами:

1. *каждый элемент $T_+(K)$ принадлежит $\Xi(K)$ или $\mathcal{R}$;*
2. *если $R \in \mathcal{R} \cap T_+(K)$, то $\Delta_R \in \Xi(K)$;*
3. *$\{M \in T_+(K) : \Gamma_1(M) \subset \Gamma_1(K)\}$ либо совпадает с $Q_1(K)\backslash\tilde{Q}_1(K)$, либо совпадает с $\{K\}$, либо имеет вид $\{R\}$, где $R \in \mathcal{R}$, $\Delta_R = K$ и $\Gamma_0(\Delta_R') \subset \Gamma_0(K)$;*
4. *если $M \in T_+(K)$ и $\Gamma_0(M) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$, то $M \in \Xi(K)$, $\Gamma_0(M_-) \subset \Gamma_0(K)$ и $\{\tilde{M} \in T_+(K) : \Gamma_1(\tilde{M}) \cap \Gamma_0(M) \neq \varnothing\}$ либо совпадает с $Q_1(M_-)\backslash\tilde{Q}_1(M_-)$, либо совпадает с $\{M_-\}$, либо имеет вид $\{R_M\}$, где $R_M \in \mathcal{R}$, $\Delta_{R_M} = M_-$ и $\Gamma_0(\Delta'_{R_M}) \subset \Gamma_0(K)$;*
5. *если $M \in T_+(K) \cap \Xi(K)$ и $\Gamma_0(M) \subset \Gamma_0(K)$, то либо $M_- \in T'$, либо существует элемент $R_M \in T' \cap \mathcal{R}$ такой, что $\Delta_{R_M} = M_-$ и $\Gamma_1(\Delta'_{R_M}) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$;*
6. *если $R \in T_+(K) \cap \mathcal{R}$, то $\Gamma_0(\Delta_R') \subset \Gamma_0(K)$ и $(\Delta_R)_-\backslash(\Delta_R')_- \in T'$;*
7. *выполнена оценка*
$$\mathrm{card}\, T_+(K) \leqslant 6N(T) - 3; \tag{2.11}$$

8. *пусть* $K_1 \in \Xi(K)$, $\Gamma_0(K_1) \subset \Gamma_0(K)$, $T_1 := T|_{(K_1)_-}$, $\tau(K, K_1, T)$ *— множество элементов разбиения* $T_+(K)$, *не перекрывающихся с* K_1. *Тогда*
$$(T_1)_+(K_1) = T_+(K)|_{K_1}$$
и если $K_1 \ne K$, *то*
$$\begin{gathered}\operatorname{card} \tau(K, K_1, T) \leqslant \\ \max\{9 \operatorname{card}\{M \in T'(K_-) : \Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(K_1) = \varnothing\} - 3, 0\};\end{gathered} \tag{2.12}$$
9. *пусть* $K_1 \in \Xi(K)$, $\Gamma_0(K_1) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$. *Тогда* $T_+(K)|_{K_1} = \{K_1\}$;
10. *если* $M \in T'(K) \cap \mathcal{R}$, $\Delta_M = K_-$ *и* $\Gamma_1(\Delta'_M) \subset \Gamma_0(K)$, *то* $T_+(K) = \{K \backslash (\Delta'_M)_+\} \cup (T|_{\Delta'_M})_+((\Delta'_M)_+)$, *а если* $\hat{s} := \min\{s(\tilde{M}, K_-) : \tilde{M} \in T'\} \geqslant 1$, *то*
$$T_+(K) = (Q_{\hat{s}}(K) \backslash \tilde{Q}_{\hat{s}}(K)) \bigcup \left(\bigcup_{\Delta \in \tilde{Q}_{\hat{s}}(K)} \{\tilde{M} \in T_+(K) : \tilde{M} \subset \Delta\} \right).$$

На рисунке 2.2 изображены два примера построения разбиения $T_+(K)$ по заданному разбиению T куба K_-.





1 *2*

Рис. 2.2:

Доказательство. Для каждого куба $K \in \mathcal{K}$ и разбиения $T = T(K_-)$ со свойством $(*)$ обозначим
$$s_*(K, T) = \min\{s(M, K_-) : M \in T'\},$$
$$s^*(K, T) = \max\{s(M, K_-) : M \in T'\}.$$

Построим $T_+(K)$ индукцией по $s^*(K, T)$. Если $s^*(K, T) = 0$ (т.е. $T = \{K_-\}$ или $T = \{R\}$, $R \in \mathcal{R}$, $\Gamma_1(\Delta'_R) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$), то полагаем $T_+(K) = \{K\}$. Все свойства разбиения $T_+(K)$ в этом случае легко проверяются. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ и разбиения $T_+(K)$ определены для всех пар (K, T) таких, что $s^*(K, T) \leqslant m$; при этом, для $T_+(K)$ выполнены свойства 1–10. Построим $T_+(K)$ для всех (K, T) таких, что $s^*(K, T) = m + 1$.

Случай 1. Если $s_*(K, T) = 0$, то существует элемент $M_1 \in T'$ такой, что $s(M_1, K_-) = 0$. Так как $m+1 > 0$, то существует элемент $M_2 \in T'$ такой, что $s(M_2, K_-) > 0$. Значит, $M_1 \in \mathcal{R}$ и $\Gamma_1(\Delta'_{M_1}) \subset \Gamma_0(K)$. Положим $\tilde{\Delta} = \Delta'_{M_1}$, $\Delta = (\tilde{\Delta})_+$,

$$\tilde{T} = \tilde{T}(\tilde{\Delta}) = \{M \in T : M \subset \tilde{\Delta}\}, \quad \tilde{T}' = \tilde{T}'(\tilde{\Delta}) = \{M \in \tilde{T} : \Gamma_1(M) \subset \Gamma_1(\tilde{\Delta})\},$$

$R = K \backslash \Delta$. Так как $\tilde{\Delta} \in \Xi_{s_1}(K_-)$ для некоторого $s_1 \in \mathbb{N}$, то разбиение $\tilde{T}(\tilde{\Delta})$ куба $\tilde{\Delta}$ обладает свойством $(*)$ и для каждого $M \in \tilde{T}$ выполнено $s(M, \tilde{\Delta}) = s(M, K) - s_1$. Значит, $s^*(\Delta, \tilde{T}) = m + 1 - s_1 \leqslant m$. По предположению индукции, определено разбиение $\tilde{T}_+(\Delta)$, для которого выполнены свойства 1–10. Положим

$$T_+(K) = \{R\} \cup \{M : M \in \tilde{T}_+(\Delta)\}.$$

Покажем, что для $T_+(K)$ выполнены свойства 1–10. Свойства 1, 2, 3 и 10 сразу вытекают из построения.

Докажем 4. Пусть $M \in T_+(K)$, $\Gamma_0(M) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$. Тогда $M \subset \Delta$ и в силу предположения индукции, $M \in \Xi(\Delta) \subset \Xi(K)$ и $\Gamma_0(M_-) \subset \Gamma_0(\Delta) \subset \Gamma_0(K)$. Если $\tilde{M} \in T_+(K)$ и $\Gamma_1(\tilde{M}) \cap \Gamma_0(M) \neq \varnothing$, то $\tilde{M} \in \tilde{T}_+(\Delta)$. По предположению индукции,

$$\{\tilde{M} \in \tilde{T}_+(\Delta) : \Gamma_1(\tilde{M}) \cap \Gamma_0(M) \neq \varnothing\} = \begin{cases} Q_1(M_-) \backslash \tilde{Q}_1(M_-), \\ \{M_-\}, \\ \{R_M\}, \text{ где } R_M \in \mathcal{R}. \end{cases}$$

При этом, в третьем случае $\Delta_{R_M} = M_-$ и $\Gamma_0(\Delta'_{R_M}) \subset \Gamma_0(\Delta) \subset \Gamma_0(K)$.

Докажем 5. Пусть $\Delta_1 \in T_+(K) \cap \Xi(K)$ и $\Gamma_0(\Delta_1) \subset \Gamma_0(K)$. Тогда $\Delta_1 \in \tilde{T}_+(\Delta) \cap \Xi(\Delta)$ и $\Gamma_0(\Delta_1) \subset \Gamma_0(\Delta)$. По предположению индукции, $(\Delta_1)_- \in \tilde{T}'(\tilde{\Delta}) \subset T'(K_-)$ или $(\Delta_1)_- = R_{\Delta_1} \cup \Delta'_{R_{\Delta_1}}$, где $R_{\Delta_1} \in \mathcal{R} \cap \tilde{T}'(\tilde{\Delta}) \subset \mathcal{R} \cap T'(K_-)$ и $\Gamma_1(\Delta'_{R_{\Delta_1}}) \cap \Gamma_0(\Delta) = \varnothing$ (а значит, $\Gamma_1(\Delta'_{R_{\Delta_1}}) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$).

Докажем 6. Пусть $R_1 \in T_+(K) \cap \mathcal{R}$. Если $R_1 \subset \Delta$, то по предположению индукции $\Gamma_0(\Delta'_{R_1}) \subset \Gamma_0(\Delta) \subset \Gamma_0(K)$, $(\Delta_{R_1})_- \backslash (\Delta'_{R_1})_- \in \tilde{T}'(\tilde{\Delta}) \subset T'(K_-)$. Если $R_1 = R$, то $(\Delta_{R_1})_- = K_-$, $(\Delta'_{R_1})_- = \Delta_- = \tilde{\Delta}$, $K_- \backslash \tilde{\Delta} = M_1 \in T'$ и $\Gamma_0(\Delta'_{R_1}) = \Gamma_0(\Delta) \subset \Gamma_0(K)$.

Докажем 7. Заметим, что $N(\tilde{T}) = N(T) - 1$. Поэтому, воспользовавшись предположением индукции, получаем

$$\operatorname{card} T_+(K) = 1 + \operatorname{card} \tilde{T}_+(\Delta) \leqslant 1 + 6N(\tilde{T}) - 3 = \\ = 1 + 6(N(T) - 1) - 3 \leqslant 6N(T) - 3.$$

Докажем 8. Если $K_1 = K$, то утверждение тривиально. Пусть $K_1 \in \Xi_s(K)$, $s \geqslant 1$. Если $K_1 \subset R$, то $T_1 = \{(K_1)_-\}$, $(T_1)_+(K_1) = \{K_1\} = T_+(K)|_{K_1}$, $\tau(K, K_1, T) = \tilde{T}_+(\Delta)$. Поэтому в силу свойства 7 для $\tilde{T}_+(\Delta)$, которое выполнено по предположению индукции,

$$\operatorname{card} \tau(K, K_1, T) = \operatorname{card} \tilde{T}_+(\Delta) \leqslant \\ \leqslant 6N(\tilde{T}) - 3 = 6 \operatorname{card}\{M \in T'(K_-) : \Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(K_1) = \varnothing\} - 3.$$

Если $K_1 \supset \Delta$ и включение является строгим, то

$$T_1 = \{M_1 \cap (K_1)_-\} \cup \tilde{T} = \{(K_1)_- \backslash \tilde{\Delta}\} \cup \tilde{T},$$

поэтому $s^*(K_1, T_1) \leqslant s^*(K, T) - 1 = m$ и по предположению индукции (см. свойство 10)

$$(T_1)_+(K_1) = \{K_1 \backslash \Delta\} \cup \tilde{T}_+(\Delta).$$

Значит,

$$(T_1)_+(K_1) = \{R \cap K_1\} \cup \tilde{T}_+(\Delta) = T_+(K)|_{K_1}, \quad \operatorname{card} \tau(K, K_1, T) = 0.$$

Пусть $K_1 \subset \Delta$. Тогда $T_1 = \{\mathrm{mes}\,(M \cap (K_1)_-) > 0 | M \in \tilde{T}\}$. Поэтому, в силу предположения индукции, $(T_1)_+(K_1) = \tilde{T}_+(\Delta)|_{K_1} = T_+(K)|_{K_1}$. Далее, $\tau(K, K_1, T) = \{R\} \cup \tau(\Delta, K_1, \tilde{T})$,

$$\{M \in T'(K_-) : \Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(K_1) = \varnothing\} =$$
$$= \{M_1\} \cup \{M \in \tilde{T}'(\tilde{\Delta}) : \Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(K_1) = \varnothing\},$$

так что

$$\mathrm{card}\,\tau(K, K_1, T) = 1 + \mathrm{card}\,\tau(\Delta, K_1, \tilde{T}) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \max\{9\,\mathrm{card}\,\{M \in \tilde{T}' : \Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(K_1) = \varnothing\} - 3, 0\} \leqslant$$
$$\leqslant 9\,\mathrm{card}\,\{M \in T' : \Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(K_1) = \varnothing\} - 3.$$

Докажем 9. Так как $\Gamma_0(\Delta) \subset \Gamma_0(K)$ и $\Gamma_0(K_1) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$, то либо $K_1 \subset R$, либо $K_1 \subset \Delta$. В первом случае $T_+(K)|_{K_1} = \{R \cap K_1\} = \{K_1\}$, во втором случае в силу предположения индукции $\tilde{T}_+(\Delta)|_{K_1} = \{K_1\}$, так что $T_+(K)|_{K_1} = \tilde{T}_+(\Delta)|_{K_1} = \{K_1\}$.

Случай 2. Пусть $s_* = s_*(K, T) \geqslant 1$. Рассмотрим разбиение

$$Q_{s_*}(K) = \{\Delta_j^{s_*},\ j = \overline{1,\, n(s_*,\, d)}\};$$

при этом,

$$\{j : \Gamma_0(\Delta_j^{s_*}) \subset \Gamma_0(K)\} = \{n_1(s_*,\, d) + 1,\, \dots,\, n_1(s_*,\, d) + 2^{s_*(d-1)}\}.$$

Положим $\Delta_j = \Delta^{s_*}_{j+n_1(s_*,\, d)}$, $\tilde{\Delta}_j = (\Delta_j)_-$, $j = \overline{1,\, 2^{s_*(d-1)}}$. Тогда в силу (2.10)

$$\{\tilde{\Delta}_j : j = \overline{1,\, 2^{s_*(d-1)}}\} = \{\tilde{\Delta} \in \Xi_{s_*}(K_-) : \Gamma_1(\tilde{\Delta}) \subset \Gamma_0(K)\}.$$

Из определения $s_*(K, T)$ следует, что для любого $M \in T'$ выполнено $\Delta_M \in \cup_{s \geqslant s_*} \Xi_s(K_-)$, поэтому существует $j \in \{1,\, \dots,\, 2^{s_*(d-1)}\}$ такое, что $M \subset \tilde{\Delta}_j$. Положим

$$\tilde{T}_j = \tilde{T}_j(\tilde{\Delta}_j) = T|_{\tilde{\Delta}_j},$$
$$\tilde{T}'_j(\tilde{\Delta}_j) = \{M \in \tilde{T}_j(\tilde{\Delta}_j) : \Gamma_1(M) \subset \Gamma_0(K)\} = \{M \in T'(K_-) : M \subset \tilde{\Delta}_j\}.$$

При этом, для любого $M \in \tilde{T}'_j(\tilde{\Delta}_j)$ выполнено $s(M, \tilde{\Delta}_j) = s(M, K_-) - s_*(K, T)$. Отсюда следует, что $s^*(\Delta_j, \tilde{T}_j) \leqslant s^*(K, T) - s_*(K, T) \leqslant m + 1 - 1 = m$. Значит, по предположению индукции, для каждого $j = \overline{1,\, 2^{s_*(d-1)}}$ существует разбиение $\hat{T}_j = (\tilde{T}_j)_+(\Delta_j)$ куба Δ_j со свойствами 1–10. Положим

$$\begin{aligned} T_+(K) &= \{\Delta_j^{s_*} : j = \overline{1,\, n_1(s_*,\, d)}\} \bigcup \left(\textstyle\bigcup_{j=1}^{2^{s_*(d-1)}} \hat{T}_j\right) = \\ &= (Q_{s_*}(K) \backslash \tilde{Q}_{s_*}(K)) \bigcup \left(\textstyle\bigcup_{j=1}^{2^{s_*(d-1)}} \hat{T}_j\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Проверим свойства 1–10 для разбиения $T_+(K)$. Свойства 1, 2 и 10 выполнены по построению, свойство 3 выполнено, поскольку

$$\{M \in T_+(K) : \Gamma_1(M) \subset \Gamma_1(K)\} =$$
$$= \{M \in Q_{s_*}(K) : \Gamma_1(M) \subset \Gamma_1(K)\} \overset{(2.9)}{=} Q_1(K) \backslash \tilde{Q}_1(K).$$

Докажем 4. Пусть $M \in T_+(K)$, $\Gamma_0(M) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$. Если $M \in Q_{s_*}(K) \backslash \tilde{Q}_{s_*}(K)$, то из леммы 2.1.1 (свойство 6) следует, что найдется такое $t \leqslant s_*$, что $M \in Q_t(K) \backslash \tilde{Q}_t(K)$ и $M_- \in \tilde{Q}_t(K)$. Значит, $\Gamma_0(M_-) \subset \Gamma_0(K)$ по определению $\tilde{Q}_t(K)$. Обозначим $G(M) = \{\tilde{M} \in T_+(K) : \Gamma_1(\tilde{M}) \cap \Gamma_0(M) \neq \varnothing\}$. Если $t < s_*$, то

$$G(M) = \{\tilde{M} \in Q_{s_*}(K) \backslash \tilde{Q}_{s_*}(K) : \Gamma_1(\tilde{M}) \cap \Gamma_0(M) \neq \varnothing\} =$$
$$= \{\tilde{M} \in Q_{s_*}(K) : \Gamma_1(\tilde{M}) \cap \Gamma_0(M) \neq \varnothing\}.$$

В силу леммы 2.1.1 (свойство 4)

$$Q_{s_*}(K) = (Q_t(K)\backslash\tilde{Q}_t(K))\bigcup\left(\bigcup_{\hat{\Delta}\in\tilde{Q}_t(K)} Q_{s_*-t}(\hat{\Delta})\right),$$

поэтому

$$G(M) = \{\tilde{M}\in Q_{s_*-t}(M_-) : \Gamma_1(\tilde{M})\cap\Gamma_0(M)\ne\varnothing\} \overset{(2.9)}{=} Q_1(M_-)\backslash\tilde{Q}_1(M_-).$$

Если $t = s_*$, то $M = (\Delta_j)_+$ для некоторого $j = \overline{1,\,2^{s_*(d-1)}}$ и утверждение следует из свойства 3 разбиения $\hat{T}_j$.

Если $M\in\hat{T}_j$, то по предположению индукции $M\in\Xi(\Delta_j)\subset\Xi(K)$ и $\Gamma_0(M_-)\subset\Gamma_0(\Delta_j)\subset\Gamma_0(K)$. Далее,

$$\{\tilde{M}\in T_+(K) : \Gamma_1(\tilde{M})\cap\Gamma_0(M)\ne\varnothing\} =$$
$$= \{\tilde{M}\in\hat{T}_j : \Gamma_1(\tilde{M})\cap\Gamma_0(M)\ne\varnothing\} = \begin{cases} Q_1(M_-)\backslash\tilde{Q}_1(M_-), \\ \{M_-\}, \\ \{R_M\},\ \text{где } R_M\in\mathcal{R}\end{cases}$$

в силу предположения индукции. При этом, в третьем случае $\Delta_{R_M} = M_-$ и $\Gamma_0(\Delta'_{R_M})\subset\Gamma_0(\Delta_j)\subset\Gamma_0(K)$.

Докажем 5. Если $M\in T_+(K)\cap\Xi(K)$ и $\Gamma_0(M)\subset\Gamma_0(K)$, то найдется такое $j = \overline{1,\,2^{s_*(d-1)}}$, что $M\subset\Delta_j$. По предположению индукции, $M_-\in\tilde{T}'_j(\tilde{\Delta}_j)\subset T'(K_-)$ или $M_- = R_M\cup\Delta'_{R_M}$, где $R_M\in\mathcal{R}\cap\tilde{T}'_j(\tilde{\Delta}_j)\subset\mathcal{R}\cap T'(K_-)$ и $\Gamma_1(\Delta'_{R_M})\cap\Gamma_0(\Delta_j)=\varnothing$ (а значит, $\Gamma_1(\Delta'_{R_M})\cap\Gamma_0(K)=\varnothing$).

Докажем 6. Если $R\in T_+(K)\cap\mathcal{R}$, то найдется такое $j = \overline{1,\,2^{s_*(d-1)}}$, что $\Delta_R\subset\Delta_j$. По предположению индукции, $\Gamma_0(\Delta'_R)\subset\Gamma_0(\Delta_j)\subset\Gamma_0(K)$ и $(\Delta_R)_-\backslash(\Delta'_R)_-\in\tilde{T}'_j(\tilde{\Delta}_j)\subset T'(K_-)$.

Докажем 7. В силу предположения индукции, формулы (2.13), равенства

$$\sum_{j=1}^{2^{s_*(d-1)}} N(\tilde{T}_j) = N(T)$$

и условий $d\geqslant 2$, $s_*\geqslant 1$ получаем

$$\operatorname{card} T_+(K) = \sum_{k=1}^{s_*} 2^{k(d-1)} + \sum_{j=1}^{2^{s_*(d-1)}} \operatorname{card}\hat{T}_j \leqslant$$
$$\leqslant 2^{d-1}\cdot\frac{2^{s_*(d-1)}-1}{2^{d-1}-1} + \sum_{j=1}^{2^{s_*(d-1)}} (6N(\tilde{T}_j)-3) \leqslant$$
$$\leqslant 2\cdot(2^{s_*(d-1)}-1) + 6N(T) - 3\cdot 2^{s_*(d-1)} = 6N(T) - 2^{s_*(d-1)} - 2 \leqslant 6N(T)-3.$$

Докажем 8. Положим $s = s(K_1,\,K)$ (см. обозначение перед формулировкой леммы). Рассмотрим два случая: $s_*(K,\,T)\geqslant s$ и $s_*(K,\,T)<s$.

Пусть $s_*(K,\,T)\geqslant s$. Если $s=0$, то $K_1=K$ и доказывать нечего. Пусть $s\geqslant 1$. Каждый элемент разбиения $Q_{s_*}(K)$ либо не перекрывается с K_1, либо содержится в K_1. В самом деле, если $\Delta\in Q_{s_*}(K)$ и выполнено строгое включение $\Delta\supset K_1$, то $\Delta\in\tilde{Q}_{s_*}(K)$ (так как $\Gamma_0(K_1)\subset\Gamma_0(K)$). В силу (2.10), $\Delta\in\Xi_{s_*}(K)$, поэтому $s_*<s$ — противоречие.

Если $s_*=s$, то $K_1=\Delta_{k_*}$ для некоторого $k_*\in\{1,\,\dots,\,2^{s_*(d-1)}\}$ и $T_+(K)|_{K_1} \overset{(2.13)}{=} \hat{T}_{k_*}$,

$$(T_1)_+(K_1) = (T|_{(K_1)_-})_+(K_1) = (\tilde{T}_{k_*})_+(\Delta_{k_*}) = \hat{T}_{k_*}.$$

Пусть $s_* > s$. Обозначим

$$J_1 = \{j : \Delta_j^{s_*} \in Q_{s_*}(K)\backslash \tilde{Q}_{s_*}(K),\ \Delta_j^{s_*} \subset K_1\},$$
$$J_2 = \{j : \Delta_j^{s_*} \in \tilde{Q}_{s_*}(K),\ \Delta_j^{s_*} \subset K_1\}.$$

Тогда

$$T_+(K)|_{K_1} = \{\Delta_j^{s_*} : j \in J_1\} \cup \{M \in (\tilde{T}_k)_+(\Delta_k),\ k + n_1(s_*,\, d) \in J_2\}. \tag{2.14}$$

Из (2.10) следует, что $K_1 \in \tilde{Q}_s(K)$ и

$$\hat{\Delta} \in \tilde{Q}_{s_*-s}(K_1) \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{N} :\ k + n_1(s_*,\, d) \in J_2,\ \hat{\Delta} = \Delta_k. \tag{2.15}$$

В силу утверждения 4 из леммы 2.1.1 имеем

$$\{\Delta_j^{s_*} : j \in J_1\} = Q_{s_*-s}(K_1)\backslash \tilde{Q}_{s_*-s}(K_1). \tag{2.16}$$

Заметим, что $\sigma := s_*(K_1,\, T_1) \geqslant s_* - s \geqslant 1$, $s^*(K_1,\, T_1) \leqslant s^*(K,\, T) - s = m + 1 - s \leqslant m$ и разбиение T_1 имеет свойство $(*)$. По предположению индукции, определено разбиение $(T_1)_+(K_1)$ со свойствами (1)–(10). В частности (см. свойство 10),

$$(T_1)_+(K_1) = (Q_\sigma(K_1)\backslash \tilde{Q}_\sigma(K_1)) \bigcup \left(\bigcup_{\hat{\Delta} \in \tilde{Q}_\sigma(K_1)} \{M \in (T_1)_+(K_1) : M \subset \hat{\Delta}\} \right).$$

Применив утверждение 4 из леммы 2.1.1, получаем

$$\begin{gathered} (T_1)_+(K_1) = \\ (Q_{s_*-s}(K_1)\backslash \tilde{Q}_{s_*-s}(K_1)) \bigcup \left(\bigcup\nolimits_{\hat{\Delta} \in \tilde{Q}_{s_*-s}(K_1)} Q_{\sigma-s_*+s}(\hat{\Delta})\backslash \tilde{Q}_{\sigma-s_*+s}(\hat{\Delta}) \right) \bigcup \\ \bigcup \left(\bigcup\nolimits_{\hat{\Delta} \in \tilde{Q}_\sigma(K_1)} \{M \in (T_1)_+(K_1) : M \subset \hat{\Delta}\} \right) = \\ = (Q_{s_*-s}(K_1)\backslash \tilde{Q}_{s_*-s}(K_1)) \bigcup \left(\bigcup\nolimits_{\hat{\Delta} \in \tilde{Q}_{s_*-s}(K_1)} \{M \in (T_1)_+(K_1) : M \subset \hat{\Delta}\} \right) \overset{(2.15)}{=} \\ = (Q_{s_*-s}(K_1)\backslash \tilde{Q}_{s_*-s}(K_1)) \bigcup \left(\bigcup\nolimits_{k+n_1(s_*,\, d) \in J_2} \{M \in (T_1)_+(K_1) : M \subset \Delta_k\} \right). \end{gathered} \tag{2.17}$$

Поскольку

$$\tilde{T}_k(\tilde{\Delta}_k) = T|_{\tilde{\Delta}_k} = (T|_{(K_1)_-})|_{\tilde{\Delta}_k} = T_1|_{\tilde{\Delta}_k},\ \ k + n_1(s_*,\, d) \in J_2,$$

и разбиение T_1 имеет свойство $(*)$, то в силу свойства (8) разбиения $(T_1)_+(K_1)$, примененного к Δ_k, выполнено

$$(\tilde{T}_k)_+(\Delta_k) = (T_1)_+(K_1)|_{\Delta_k} \overset{(2.17)}{=} \{M \in (T_1)_+(K_1) : M \subset \Delta_k\}. \tag{2.18}$$

Тем самым,

$$\begin{gathered} T_+(K)|_{K_1} \overset{(2.14),(2.16),(2.18)}{=} (Q_{s_*-s}(K_1)\backslash \tilde{Q}_{s_*-s}(K_1)) \bigcup \\ \bigcup \left(\bigcup_{k+n_1(s_*,\, d) \in J_2} \{M \in (T_1)_+(K_1) : M \subset \Delta_k\} \right) \overset{(2.17)}{=} (T_1)_+(K_1). \end{gathered}$$

Докажем оценку для $\operatorname{card} \tau(K,\, K_1,\, T)$. Обозначим через K_j, $j = \overline{2,\, 2^{s(d-1)}}$, элементы $\tilde{Q}_s(K)$, не перекрывающиеся с K_1. Пусть $T_j = T|_{(K_j)_-}$,

$$T'_j = \{M \in T' : M \subset (K_j)_-\}$$

(любой элемент T' принадлежит некоторому T'_j, поскольку $s_*(K,\, T) \geqslant s$). Так же, как для $j = 1$, получаем

$$(T_j)_+(K_j) = T_+(K)|_{K_j} = \{M \in T_+(K) : M \subset K_j\}.$$

В силу свойства (4) из леммы 2.1.1,

$$Q_{s_*}(K)\backslash\tilde{Q}_{s_*}(K) = (Q_s(K)\backslash\tilde{Q}_s(K))\bigcup\left(\bigcup_{j=1}^{2^{s(d-1)}} Q_{s_*-s}(K_j)\backslash\tilde{Q}_{s_*-s}(K_j)\right).$$

Значит,

$$\begin{gathered}\operatorname{card}\tau(K,\,K_1,\,T) = \sum_{k=1}^{s} 2^{k(d-1)} + \sum_{j=2}^{2^{s(d-1)}} \operatorname{card} T_+(K)|_{K_j} = \\ = 2^{d-1}\cdot\frac{2^{s(d-1)}-1}{2^{d-1}-1} + \sum_{j=2}^{2^{s(d-1)}} \operatorname{card}(T_j)_+(K_j) \overset{(2.11)}{\leqslant} \\ \leqslant 2(2^{s(d-1)}-1) + \sum_{j=2}^{2^{s(d-1)}}(6\operatorname{card}T'_j - 3) \leqslant 6\sum_{j=2}^{2^{s(d-1)}}\operatorname{card}T'_j \leqslant 9\sum_{j=2}^{2^{s(d-1)}}\operatorname{card}T'_j - 3\end{gathered}$$

(в последнем неравенстве использовалось соотношение $s(d-1)\geqslant 1$). Остается заметить, что

$$\{M\in T' : \Gamma_1(M)\cap\Gamma_0(K_1)=\varnothing\} = \cup_{j=2}^{2^{s(d-1)}} T'_j.$$

Пусть $s_*(K,\,T)<s$. Тогда существует $j=\overline{1,\,2^{s_*(d-1)}}$ такое, что $K_1\subset\Delta_j$. Поэтому

$$T_1 = T|_{(K_1)_-} = (T|_{\tilde{\Delta}_j})|_{(K_1)_-} = \tilde{T}_j|_{(K_1)_-}.$$

В силу предположения индукции (т.к. $s^*(\Delta_j,\,\tilde{T}_j)\leqslant m$) и равенства $\hat{T}_j = T_+(K)|_{\Delta_j}$ (которое следует из (2.13)) получаем

$$(T_1)_+(K_1) = (\tilde{T}_j)_+(\Delta_j)|_{K_1} = \hat{T}_j|_{K_1} = (T_+(K)|_{\Delta_j})|_{K_1} = T_+(K)|_{K_1}.$$

Докажем оценку для $\operatorname{card}\tau(K,\,K_1,\,T)$. Имеем

$$\begin{gathered}\operatorname{card}\tau(K,\,K_1,\,T) = \sum_{k=1}^{s_*}2^{k(d-1)} + \sum_{i\neq j}\operatorname{card}\hat{T}_i + \operatorname{card}\tau(\Delta_j,\,K_1,\,\tilde{T}_j) \overset{(2.11),(2.12)}{\leqslant} \\ \leqslant 2(2^{s_*(d-1)}-1) + \sum_{i\neq j}(6\operatorname{card}\tilde{T}'_i(\tilde{\Delta}_i)-3) + \\ +\max\{0,\,9\operatorname{card}\{M\in\tilde{T}'_j(\tilde{\Delta}_j) : \Gamma_1(M)\cap\Gamma_0(K_1)=\varnothing\}-3\}\leqslant \\ \leqslant 6\sum_{i\neq j}\operatorname{card}\tilde{T}'_i(\tilde{\Delta}_i) + 9\operatorname{card}\{M\in\tilde{T}'_j(\tilde{\Delta}_j) : \Gamma_1(M)\cap\Gamma_0(K_1)=\varnothing\}\leqslant \\ \leqslant 9\sum_{i\neq j}\operatorname{card}\tilde{T}'_i(\tilde{\Delta}_i) - 3 + 9\operatorname{card}\{M\in\tilde{T}'_j(\tilde{\Delta}_j) : \Gamma_1(M)\cap\Gamma_0(K_1)=\varnothing\}\leqslant \\ \leqslant 9\operatorname{card}\{M\in T'(K_-) : \Gamma_1(M)\cap\Gamma_0(K_1)=\varnothing\}-3\end{gathered}$$

(в предпоследнем неравенстве использовалось соотношение $s_*(d-1)\geqslant 1$).

Докажем 9. Так как $\Gamma_0(K_1)\cap\Gamma_0(K)=\varnothing$, то в силу леммы 2.1.1 (свойство 5) либо $K_1\subset\Delta_k^{s_*}$ для некоторого $k=\overline{1,\,n_1(s_*,\,d)}$, либо $K_1\subset\Delta_j$ для некоторого $j=\overline{1,\,2^{s_*(d-1)}}$. В первом случае $T_+(K)|_{K_1}=\{\Delta_k^{s_*}\cap K_1\}=\{K_1\}$, во втором случае $T_+(K)|_{K_1}=\hat{T}_j|_{K_1}=\{K_1\}$ в силу предположения индукции. □

Пусть построено разбиение $P(K,\,\gamma)$ из леммы 1.3.2. Построим по нему разбиения $\tilde{P}(K,\,\gamma)$ и $P_*(K,\,\gamma)$. Положим (см. формулы (2.5) и (2.6))

$$\begin{gathered}\tilde{P}(K,\,\gamma) = \{\Delta''_M : \Delta''_M\subset M,\ \ \Delta''_M\neq\varnothing,\ \ M\in P(K,\,\gamma)\} \\ \bigcup\{M\backslash\Delta''_M : M\in P(K,\,\gamma)\}\end{gathered}$$

(то есть вместо элементов M рассматривается их разбиение на два подмножества: Δ''_M и его дополнение до M).

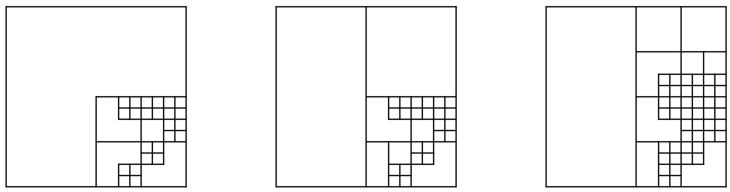
Для того, чтобы определить разбиение $P_*(K,\gamma)$, сначала построим разбиение P_M для каждого $M\in\tilde P(K,\gamma)$. Если $\Gamma_0(M)\subset\Gamma_0(K)$, то положим $T_{M_-}=\{M_-\}$, $P_M=\{M\}$. Пусть $\Gamma_0(M)\cap\Gamma_0(K)=\varnothing$. Напомним, что M_- задается формулами (2.2) и (2.7), а Δ_M — формулами (2.1), (2.5) и (2.6). Положим

$$T_{M_-}=P(K,\gamma)|_{M_-},\quad P_M=(T_{M_-})_+(\Delta_M)|_M, \tag{2.19}$$

$$P_*(K,\gamma)=\cup_{M\in\tilde P(K,\gamma)}P_M. \tag{2.20}$$

Таким образом, если $Z\in P_*(K,\gamma)$, то найдутся множества $M\in\tilde P(K,\gamma)$ и $A\in(T_{M_-})_+(\Delta_M)$ такие, что $Z=M\cap A$.

На рисунке 2.3 изображен пример разбиения $P(K,\gamma)$ (a) и построенных по нему разбиений $\tilde P(K,\gamma)$ (b) и $P_*(K,\gamma)$ (c).



a *b* *c*

Рис. 2.3:

Пусть $M\in\tilde P(K,\gamma)$. Скажем, что $M\in\mathcal{M}_1$, если $M\in\Xi(K)$ или $\Gamma_0(\Delta'_M)\cap\Gamma_0(\Delta_M)=\varnothing$ (заметим, что $\tilde P(K,\gamma)\cap\mathcal{R}\subset\mathcal{M}_1$), и обозначим $\mathcal{M}_2=\tilde P(K,\gamma)\backslash\mathcal{M}_1$ (т.е. $M\in\mathcal{M}_2$, если $M\in\tilde{\mathcal{R}}$ и $\Gamma_0(\Delta'_M)\subset\Gamma_0(\Delta_M)$).

Предложение 2.1.1. *Пусть $K\in\mathcal{K}$, T — разбиение куба K со свойством $(*)$ из определения 2.1.1. Пусть $\Delta\in\Xi(K)$. Тогда*

$$\operatorname{card}\{M\in T: M\cap\Delta\overset{d}{\neq}\varnothing,\ \ \Delta_M\backslash\Delta\overset{d}{\neq}\varnothing\}\leqslant 1.$$

Доказательство. Пусть $M_1,\,M_2\in T$, $M_1\neq M_2$, $M_i\cap\Delta\overset{d}{\neq}\varnothing$, $\Delta_{M_i}\backslash\Delta\overset{d}{\neq}\varnothing$, $i=1,\,2$. Тогда $\Delta_{M_i}\supset\Delta$, $i=1,\,2$, поэтому $\Delta_{M_1}\cap\Delta_{M_2}\overset{d}{\neq}\varnothing$. Без ограничения общности, $\Delta_{M_1}\supset\Delta_{M_2}$. Так как T является разбиением, то $\Delta_{M_2}\subset\Delta'_{M_1}$. Из условий $M_2\cap\Delta\overset{d}{\neq}\varnothing$ и $\Delta_{M_2}\backslash\Delta\overset{d}{\neq}\varnothing$ соответственно получаем $\Delta'_{M_1}\cap\Delta\overset{d}{\neq}\varnothing$ и $\Delta'_{M_1}\backslash\Delta\overset{d}{\neq}\varnothing$. Значит, $\Delta\subset\Delta'_{M_1}$ и $M_1\cap\Delta\overset{d}{=}\varnothing$ — противоречие. □

Лемма 2.1.3. *Выполнена оценка*

$$\operatorname{card}P_*(K,\gamma)\underset{d}{\lesssim}\left\lfloor\frac{\Phi(K)}{\gamma}\right\rfloor+1. \tag{2.21}$$

Доказательство. Если $\Phi(K)\leqslant 3\gamma$, то $P(K,\gamma)=\tilde P(K,\gamma)=P_*(K,\gamma)=\{K\}$ и в этом случае (2.21) доказано.

Пусть $\Phi(K)>3\gamma$. Тогда

$$\operatorname{card}\tilde P(K,\gamma)\leqslant 2\operatorname{card}P(K,\gamma). \tag{2.22}$$

Пусть $M \in \tilde{P}(K, \gamma)$. Положим

$$T'_{M_-} = \{\tilde{M} \in T_{M_-} : \Gamma_1(\tilde{M}) \subset \Gamma_0(\Delta_M)\}.$$

Из (2.11) следует, что

$$\operatorname{card} P_M \leqslant 6 \operatorname{card} T'_{M_-}. \tag{2.23}$$

Этой оценкой будем пользоваться, если $M \in \mathcal{M}_1$. Если $M \in \mathcal{M}_2$, то

$$\begin{gathered}
P_M = \{\tilde{M} \cap M : \tilde{M} \in (T_{M_-})_+(\Delta_M),\ \tilde{M} \cap \Delta'_M \overset{d}{=} \varnothing,\ \tilde{M} \cap M \overset{d}{\neq} \varnothing\} \\
\bigcup \{\tilde{M} \cap M : \tilde{M} \in (T_{M_-})_+(\Delta_M),\ \tilde{M} \cap \Delta'_M \overset{d}{\neq} \varnothing,\ \tilde{M} \cap M \overset{d}{\neq} \varnothing\} \\
\subset \{\tilde{M} \cap M : \tilde{M} \in (T_{M_-})_+(\Delta_M),\ \tilde{M} \cap \Delta'_M \overset{d}{=} \varnothing\} \\
\bigcup \{\tilde{M} \cap M : \tilde{M} \in (T_{M_-})_+(\Delta_M),\ \tilde{M} \cap \Delta'_M \overset{d}{\neq} \varnothing,\ \Delta_{\tilde{M}} \backslash \Delta'_M \overset{d}{\neq} \varnothing\}.
\end{gathered}$$

Второе из множеств в правой части содержит не более одного элемента в силу предложения 2.1.1. Отсюда и из (2.12) получаем

$$\operatorname{card} P_M \leqslant 9 \operatorname{card} \{\tilde{M} \in T'_{M_-} : \Gamma_1(\tilde{M}) \cap \Gamma_0(\Delta'_M) = \varnothing\} + 1. \tag{2.24}$$

Если $\tilde{M} \in T'_{M_-}$, то либо $\tilde{M} \in P(K, \gamma)$ и $\tilde{M} \subset M_-$, либо найдется множество $E \in P(K, \gamma)$ такое, что $\tilde{M} = E \cap M_- \overset{d}{\neq} \varnothing$ и $\Delta_E \backslash M_- \overset{d}{\neq} \varnothing$. Поэтому в силу предложения 2.1.1

$$\begin{gathered}
\operatorname{card} T'_{M_-} \leqslant \operatorname{card} \{\tilde{M} \in P(K, \gamma) : \tilde{M} \subset M_-,\ \Gamma_1(\tilde{M}) \subset \Gamma_0(\Delta_M)\} + 1 = \\
= \operatorname{card} \{\tilde{M} \in P(K, \gamma) : \Gamma_1(\tilde{M}) \subset \Gamma_0(\Delta_M)\} + 1, \\
\operatorname{card} \{\tilde{M} \in T'_{M_-} : \Gamma_1(\tilde{M}) \cap \Gamma_0(\Delta'_M) = \varnothing\} \leqslant \\
\leqslant \operatorname{card} \{\tilde{M} \in P(K, \gamma) : \tilde{M} \subset M_-,\ \Gamma_1(\tilde{M}) \subset \Gamma_0(M)\} + 1 = \\
= \operatorname{card} \{\tilde{M} \in P(K, \gamma) : \Gamma_1(\tilde{M}) \subset \Gamma_0(M)\} + 1.
\end{gathered}$$

Поэтому для $M \in \mathcal{M}_1$ получаем

$$\operatorname{card} P_M \overset{(2.23)}{\leqslant} 6 \operatorname{card} \{\tilde{M} \in P(K, \gamma) : \Gamma_1(\tilde{M}) \subset \Gamma_0(M)\} + 6, \tag{2.25}$$

а для $M \in \mathcal{M}_2$ —

$$\operatorname{card} P_M \overset{(2.24)}{\leqslant} 9 \operatorname{card} \{\tilde{M} \in P(K, \gamma) : \Gamma_1(\tilde{M}) \subset \Gamma_0(M)\} + 10. \tag{2.26}$$

Обозначим

$$\Lambda(M) = \{\tilde{M} \in P(K, \gamma) : \Gamma_1(\tilde{M}) \subset \Gamma_0(M)\}.$$

Покажем, что если $M, N \in \tilde{P}(K, \gamma)$, $M \neq N$, $\tilde{M} \in \Lambda(M)$, $\tilde{N} \in \Lambda(N)$, то $\tilde{M} \neq \tilde{N}$. В самом деле, если $\tilde{M} = \tilde{N}$, то $\Gamma_0(M) \cap \Gamma_0(N) \neq \varnothing$. Тогда M и N перекрываются (см. замечание 2.1.1) — противоречие.

Таким образом,

$$\begin{gathered}
\operatorname{card} P_*(K, \gamma) \overset{(2.20)}{=} \sum_{M \in \tilde{P}(K, \gamma)} \operatorname{card} P_M = \sum_{M \in \mathcal{M}_1} \operatorname{card} P_M + \sum_{M \in \mathcal{M}_2} \operatorname{card} P_M \overset{(2.25),(2.26)}{\leqslant} \\
\leqslant \sum_{M \in \mathcal{M}_1} 6 \operatorname{card} \Lambda(M) + 6 \operatorname{card} \mathcal{M}_1 + \sum_{M \in \mathcal{M}_2} 9 \operatorname{card} \Lambda(M) + 10 \operatorname{card} \mathcal{M}_2 \leqslant \\
\leqslant 10 \operatorname{card} \tilde{P}(K, \gamma) + 9 \sum_{M \in \tilde{P}(K, \gamma)} \operatorname{card} \Lambda(M) \leqslant 19 \operatorname{card} \tilde{P}(K, \gamma).
\end{gathered}$$

Осталось воспользоваться (2.22) и оценкой числа элементов $P(K, \gamma)$. $\square$

Построим разбиение $P_{**}(K, \gamma)$, являющееся измельчением $P_*(K, \gamma)$. Пусть $Z \in P_*(K, \gamma)$, $Z = M \cap A$, где M — элемент $\tilde{P}(K, \gamma)$, содержащий Z, $A \in (T_{M_-})_+(\Delta_M)$. Если $A \in \mathcal{R}$, $\Delta'_M \neq \varnothing$ и $\Delta'_M \subset \Delta'_A$ (при этом включение строгое), то Z разбиваем на два подмножества $Z \backslash (\Delta'_A)_+$ и $Z \cap (\Delta'_A)_+$ и включаем их в $P_{**}(K, \gamma)$. В остальных случаях в $P_{**}(K, \gamma)$ включаем само Z.

Из леммы 2.1.3 получаем

Следствие 2.1.1. *Выполнена оценка*

$$\operatorname{card} P_{**}(K, \gamma) \underset{d}{\lesssim} \left\lfloor \frac{\Phi(K)}{\gamma} \right\rfloor + 1.$$

Пусть $Z \in P_{**}(K, \gamma)$. Обозначим через M_Z элемент $\tilde{P}(K, \gamma)$, содержащий Z; если $M_Z \in \tilde{\mathcal{R}}$, то положим $R_Z = M_Z \cup \Delta''_{M_Z} \in P(K, \gamma)$, в остальных случаях положим $R_Z = M_Z$ (и тогда R_Z содержится в некотором элементе разбиения $P(K, \gamma)$).

Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — конечное объединение параллелепипедов. Скажем, что $E \in \mathcal{R}^*$, если $E \overset{d}{=} \Pi \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2)$, где $\Pi = \prod_{j=1}^d [\alpha_j, \beta_j]$, $\Pi_i = \prod_{j=1}^d [\alpha_j^i, \beta_j^i] \subset \Pi$ или $\Pi_i = \varnothing$, $i = 1, 2$, Π_1 и Π_2 не перекрываются; при этом, $p_{d-1}(\Pi)$ является кубом,

$$p_{d-1}(\Pi_i) \in \cup_{k \geqslant 1} \Xi_k(p_{d-1}(\Pi)), \text{ если } \Pi_i \neq \varnothing, \ \ i = 1, 2, \tag{2.27}$$

$$\beta_1 - \alpha_1 \leqslant \beta_d - \alpha_d \leqslant 2(\beta_1 - \alpha_1), \ \ \beta_1^i - \alpha_1^i \leqslant \beta_d^i - \alpha_d^i \leqslant 4(\beta_1^i - \alpha_1^i), \ \ i = 1, 2. \tag{2.28}$$

В этом случае положим

$$\Gamma_0(E) = \Gamma_0(\Pi) \backslash (\overline{\Gamma_0(\Pi_1)} \cup \overline{\Gamma_0(\Pi_2)}) \quad \text{(если это множество непусто)}.$$

Лемма 2.1.4. *Пусть $\gamma > 0$, $Z \in P_{**}(K, \gamma)$. Тогда $Z \in \mathcal{R}^*$. При этом, соответствующие замкнутые параллелепипеды $\Pi = \Pi(Z)$, $\Pi_1 = \Pi_1(Z) \subset \Pi(Z)$, $\Pi_2 = \Pi_2(Z) \subset \Pi(Z)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства:*

1. $\Pi(Z) \in \Xi(K)$;
2. *если*

   $$j \in J(Z) := \{i = 1, 2 : \Pi_i(Z) \neq \varnothing, \ \Gamma_1(\Pi_i(Z)) \cap \Gamma_1(\Pi(Z)) = \varnothing\},$$

   то $\Pi_j(Z)^{1/4} \subset R_Z$;
3. *множества из системы*

   $$\{\Pi_j(Z)^{1/4} : Z \in P_{**}(K, \gamma), \ j \in J(Z)\}$$

   попарно не перекрываются.

На рисунке 2.4 приведены три примера. Изображены множества Δ_{M_Z}, их разбиения $(T_{(M_Z)_-})_+(\Delta_{M_Z})$ и кубы Δ'_{M_Z}, Δ''_{M_Z}. Жирными линиями выделена граница множества Z.

Доказательство. Пусть $\tilde{Z}$ — элемент разбиения $P_*(K, \gamma)$, содержащий Z. Тогда $\tilde{Z} = M_Z \cap A$, где $A \in (T_{(M_Z)_-})_+(\Delta_{M_Z})$. При этом, можно считать, что кубы Δ_{M_Z}, Δ'_{M_Z}, Δ''_{M_Z}, Δ_A, Δ'_A и Δ''_A замкнуты.

Если $Z = \tilde{Z}$, то Δ'_{M_Z} и Δ'_A не перекрываются или $\Delta'_{M_Z} \supset \Delta'_A$ (по построению $P_{**}(K, \gamma)$), $\Pi(Z) = \Delta_A \in \Xi(K)$ и свойство 1 доказано. Положим

$$\Pi_1(Z) = (\Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z}) \cap \Pi(Z), \ \ \Pi_2(Z) = \Delta'_A \backslash \Delta'_{M_Z}$$

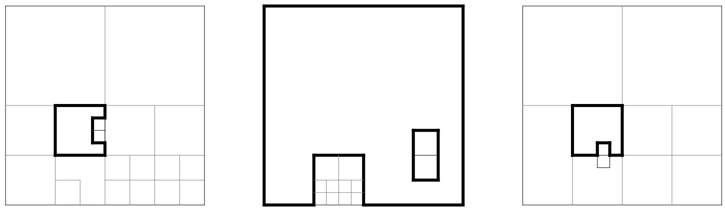


Рис. 2.4:

(т.е. если Δ'_{M_Z} и Δ'_A не перекрываются, то $\Pi_2(Z) = \Delta'_A$, если $\Delta'_{M_Z} \supset \Delta'_A$, то $\Pi_2(Z) = \varnothing$). Чтобы получить $Z = \Pi(Z) \backslash (\Pi_1(Z) \cup \Pi_2(Z)) \in \mathcal{R}^*$, достаточно проверить, что Δ''_{M_Z} и Δ'_A не перекрываются. В самом деле, если $\Delta'_A \neq \varnothing$, то $\Gamma_0(\Delta'_A) \subset \Gamma_0(\Delta_{M_Z})$ (см. лемму 2.1.2, свойство 6). С другой стороны, $\Gamma_0(\Delta''_{M_Z}) \cap \Gamma_0(\Delta_{M_Z}) = \varnothing$, так что если $\Delta''_{M_Z} \cap \Delta'_A \overset{d}{\neq} \varnothing$, то $\Delta''_{M_Z} \subset \Delta'_A$ и включение строгое. Значит, выполнено строгое включение $\Delta'_{M_Z} \subset \Delta'_A$ — противоречие.

Докажем свойство 2. Пусть $j \in J(Z)$. Тогда возможны следующие случаи:

- $j = 1$, т.е. $\Pi_j(Z) = (\Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z}) \cap \Pi(Z)$. В этом случае $\Pi_j(Z)^{1/4} \subset (\Delta''_{M_Z})^{1/2} \subset R_Z$.

- $j = 2$, т.е. $\Pi_j(Z) = \Delta'_A$. Тогда $\Pi_j(Z)$ не перекрывается с Δ'_{M_Z} (иначе $\Pi_2(Z) = \varnothing$), поэтому $\Pi_j(Z)^{1/4} \subset \Pi_j(Z) \subset R_Z$.

Пусть $Z \neq \tilde{Z}$. Тогда $\Delta'_{M_Z} \neq \varnothing$, выполнено строгое включение $\Delta'_{M_Z} \subset \Delta'_A$, $\Delta''_{M_Z} \subset \Delta'_A \cup \Delta''_A$ и либо $Z = \tilde{Z} \cap \Delta''_A = \Delta''_A \backslash \Delta''_{M_Z}$, либо $Z = \tilde{Z} \backslash \Delta''_A = \Delta_A \backslash (\Delta'_A \cup \Delta''_A)$. В первом случае $\Pi(Z) = \Delta''_A$, $\Pi_1(Z) = \varnothing$ или $\Pi_1(Z) = \Delta''_{M_Z} \subset R_Z$, $\Pi_2(Z) = \varnothing$. Во втором случае $\Pi(Z) = \Delta_A$, $\Pi_1(Z) = \Delta'_A \cup \Delta''_A$, $\Pi_2(Z) = \varnothing$, $\Pi_1(Z)^{1/4} = (\Delta''_A)^{1/2} \subset R_Z$. Тем самым, свойства 1 и 2 выполнены.

Проверим свойство 3. Пусть Z_1, $Z_2 \in P_{**}(K, \gamma)$, $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ — элементы $P_*(K, \gamma)$, содержащие Z_1 и Z_2 соответственно. Тогда $\tilde{Z}_i = M_{Z_i} \cap A_i$, где $A_i \in (T_{(M_{Z_i})_-})_+(\Delta_{M_{Z_i}})$, $i = 1, 2$. Если $\Delta_{M_{Z_1}} \cap \Delta_{M_{Z_2}} \overset{d}{=} \varnothing$ или $\Delta_{A_1} \cap \Delta_{A_2} \overset{d}{=} \varnothing$, то утверждение доказано. Пусть без ограничения общности $\Delta_{M_{Z_1}} \supset \Delta_{M_{Z_2}}$, а кубы Δ_{A_1} и Δ_{A_2} перекрываются. Так как

$$\tilde{P}(K, \gamma)|_{\Delta_{M_{Z_1}}} = \{M_{Z_1}\} \cup \left(\tilde{P}(K, \gamma)|_{\Delta'_{M_{Z_1}}}\right) \cup \left(\{\Delta''_{M_{Z_1}}\} \backslash \{\varnothing\}\right),^{1}$$

то есть три возможности расположения M_{Z_1} и M_{Z_2}:
а) $\Delta_{M_{Z_2}} \subset \Delta'_{M_{Z_1}}$, б) $M_{Z_2} = \Delta''_{M_{Z_1}}$, в) $M_{Z_1} = M_{Z_2}$.

В случае в) можно считать, что $\Delta_{A_1} \supset \Delta_{A_2}$.

Пусть $Z_1 = \tilde{Z}_1$. Рассмотрим три случая.

1. $\Delta_{M_{Z_2}} \subset \Delta'_{M_{Z_1}}$. Если $1 \in J(Z_1)$, то $\Pi_1(Z_1) = (\Delta'_{M_{Z_1}} \cup \Delta''_{M_{Z_1}}) \cap \Delta_{A_1}$, $\Pi_1(Z_1)^{1/4} \subset \Delta''_{M_{Z_1}}$, поэтому $\Pi_1(Z_1)^{1/4}$ не перекрывается с $\Delta_{M_{Z_2}}$ и, тем более, с $\Pi_j(Z_2)^{1/4}$. Если $2 \in J(Z_1)$, то $\Delta'_{A_1} = \Pi_2(Z_1)$ не перекрывается с $\Delta'_{M_{Z_1}}$ и, тем более, $\Pi_2(Z_1)^{1/4}$ не перекрывается с $\Pi_j(Z_2)^{1/4}$.

2. $M_{Z_2} = \Delta''_{M_{Z_1}}$. Тогда $\Pi_1(Z_2) = \varnothing$. Если $J(Z_2) \neq \varnothing$, то $A_2 \in \mathcal{R}$ и $\Gamma_0(\Delta'_{A_2}) \subset \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_2}}) = \Gamma_0(\Delta''_{M_{Z_1}})$ (см. лемму 2.1.2, свойство 6). Поэтому $\Pi_2(Z_2) = \Delta'_{A_2}$

[1] То есть множество $\Delta''_{M_{Z_1}}$ включается в разбиение, если оно непусто

не перекрывается с $(\Delta''_{M_{Z_1}})^{1/2} \supset \Pi_1(Z_1)^{1/4}$ (последнее включение выполнено в случае $1 \in J(Z_1)$). Если $\Pi_2(Z_1) \neq \varnothing$, то $\Pi_2(Z_1)$ не перекрывается с $\Delta''_{M_{Z_1}}$. В самом деле, $\Pi_2(Z_1) = \Delta'_{A_1}$ и в силу леммы 2.1.2 (свойство 6),

$$\Gamma_0(\Delta'_{A_1}) \subset \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_1}}). \tag{2.29}$$

Если кубы $\Pi_2(Z_1)$ и $\Delta''_{M_{Z_1}}$ перекрываются, то либо $\Delta'_{A_1} \subset \Delta''_{M_{Z_1}}$ и $\Gamma_0(\Delta'_{A_1}) \cap \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_1}}) = \varnothing$ (противоречие с (2.29)), либо $\Delta'_{A_1} \supset \Delta'_{M_{Z_1}}$ и включение является строгим, а значит, $Z_1 \neq \tilde{Z}_1$ по определению $P_{**}(K, \gamma)$.

3. $M_{Z_1} = M_{Z_2}$, $\Delta_{A_1} \supset \Delta_{A_2}$. Последнее включение является строгим, иначе $Z_1 = Z_2$. Поэтому

$$\Delta_{A_2} \subset \Delta'_{A_1}, \tag{2.30}$$

так как $A_2 \in (T_{(M_{Z_1})_-})_+(\Delta_{M_{Z_1}})$. Из леммы 2.1.2 (свойство 6) следует, что

$$\Gamma_0(\Delta'_{A_1}) \subset \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_1}}). \tag{2.31}$$

Рассмотрим возможные взаимные расположения $\Delta'_{M_{Z_1}}$ и Δ'_{A_1}. Случай $\Delta'_{M_{Z_1}} \supset \Delta'_{A_1}$ невозможен, поскольку тогда $Z_2 \subset \Delta_{A_2} \subset \Delta'_{A_1} \subset \Delta'_{M_{Z_1}}$ не перекрывается с $M_{Z_1} = M_{Z_2}$. Случай строгого включения $\Delta'_{A_1} \supset \Delta'_{M_{Z_1}} \neq \varnothing$ также невозможен, поскольку тогда $Z_1 \neq \tilde{Z}_1$. Значит,

$$\Delta'_{M_{Z_1}} \cap \Delta'_{A_1} \overset{d}{=} \varnothing, \quad \Delta''_{M_{Z_1}} \cap \Delta'_{A_1} \overset{d}{=} \varnothing \tag{2.32}$$

(второе равенство следует из включения (2.31) и первого равенства). Поэтому $\Pi_1(Z_1) = (\Delta'_{M_{Z_1}} \cup \Delta''_{M_{Z_1}}) \cap \Delta_{A_1}$, $\Pi_2(Z_1) = \Delta'_{A_1}$. Тем самым, если $1 \in J(Z_1)$, то $\Pi_1(Z_1)^{1/4} \subset \Delta''_{M_{Z_1}}$ не перекрывается с Δ'_{A_1} и, тем более, с $\Pi_j(Z_2)^{1/4}$, так как $\Pi_j(Z_2)^{1/4} \subset \Delta_{A_2} \overset{(2.30)}{\subset} \Delta'_{A_1}$. Покажем, что $\Pi_2(Z_1)^{1/4}$ не перекрывается с $\Pi_j(Z_2)^{1/4}$ при $j \in J(Z_2)$. В самом деле, из (2.30), (2.32) и включения $\Delta'_{A_2} \subset \Delta_{A_2}$ следует, что $\Delta'_{M_{Z_2}} = \Delta'_{M_{Z_1}}$ не перекрывается с Δ'_{A_2}, поэтому $Z_2 = \tilde{Z}_2$. Значит,

$$\Pi_1(Z_2) = (\Delta'_{M_{Z_2}} \cup \Delta''_{M_{Z_2}}) \cap \Delta_{A_2} = (\Delta'_{M_{Z_1}} \cup \Delta''_{M_{Z_1}}) \cap \Delta_{A_2} \overset{(2.30),(2.32)}{=} \varnothing,$$

$\Pi_2(Z_2) = \Delta'_{A_2}$. Из леммы 2.1.2 (свойство 6) следует, что

$$\Gamma_0(\Delta'_{A_2}) \subset \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_2}}) = \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_1}}),$$

и в силу (2.30) получаем строгое включение $\Gamma_0(\Delta'_{A_2}) \subset \Gamma_0(\Delta'_{A_1})$. Значит, $\Delta'_{A_2} \subset \Delta'_{A_1} \backslash (\Delta'_{A_1})^{1/2}$. Последнее множество не перекрывается с $(\Delta'_{A_1})^{1/4} = \Pi_2(Z_1)^{1/4}$; тем более, $\Pi_2(Z_2)^{1/4} = (\Delta'_{A_2})^{1/4}$ не перекрывается с $\Pi_2(Z_1)^{1/4}$.

Пусть $Z_1 \neq \tilde{Z}_1$. Тогда из построения $P_{**}(K, \gamma)$ и определения $\Pi_j(Z_1)$ получаем $Z_1 = \Delta_{A_1} \backslash (\Delta'_{A_1} \cup \Delta''_{A_1})$ или $Z_1 = \Delta''_{A_1} \backslash \Delta''_{M_{Z_1}}$,

$$\Delta'_{M_{Z_1}} \neq \varnothing, \ \ \Delta'_{M_{Z_1}} \subset \Delta'_{A_1} \text{ (строгое включение)}, \ \Pi_1(Z_1)^{1/4} \subset \Delta''_{A_1}, \ \ \Pi_2(Z_1) = \varnothing. \tag{2.33}$$

Отсюда следует, что либо $\Delta''_{M_{Z_1}} \subset \Delta'_{A_1}$, либо $\Delta''_{M_{Z_1}} \in \Xi_k(\Delta''_{A_1})$ для некоторого $k \geqslant 1$ и $\Gamma_0(\Delta''_{M_{Z_1}}) \subset \Gamma_0(\Delta''_{A_1})$, поэтому

$$(\Delta''_{A_1})^{1/2} \cap \Delta''_{M_{Z_1}} \overset{d}{=} \varnothing. \tag{2.34}$$

Рассмотрим три случая.

1. $\Delta_{M_{Z_2}} \subset \Delta'_{M_{Z_1}}$. Из (2.33) получаем, что $\Pi_1(Z_1)^{1/4} \subset \Delta''_{A_1}$ не перекрывается с $(\Pi_j(Z_2))^{1/4} \subset \Delta_{M_{Z_2}} \subset \Delta'_{M_{Z_1}} \subset \Delta'_{A_1}$.

2. $M_{Z_2} = \Delta''_{M_{Z_1}}$. Тогда $Z_2 = \tilde{Z}_2$ и

$$\begin{gathered} \text{если } J(Z_2) \neq \varnothing, \text{ то } J(Z_2) = \{2\}, \\ \exists k \geqslant 1 : \Pi_2(Z_2) \in \Xi_k(\Delta''_{M_{Z_1}}) \text{ и } \Gamma_0(\Pi_2(Z_2)) \subset \Gamma_0(\Delta''_{M_{Z_1}}) \end{gathered} \tag{2.35}$$

(см. лемму 2.1.2, свойство 6).

Если $Z_1 = \Delta_{A_1} \backslash (\Delta'_{A_1} \cup \Delta''_{A_1})$, то в силу (2.34) множество $\Pi_1(Z_1)^{1/4} = (\Delta''_{A_1})^{1/2}$ не перекрывается с $\Delta''_{M_{Z_1}} \supset (\Pi_j(Z_2))^{1/4}$. Пусть $Z_1 = \Delta''_{A_1} \backslash \Delta''_{M_{Z_1}}$. Из (2.35) следует, что для любого $j \in J(Z_2)$ параллелепипед $\Pi_j(Z_2)$ не перекрывается с множеством $\Pi_1(Z_1)^{1/4}$, которое либо пусто, либо совпадает с $(\Delta''_{M_{Z_1}})^{1/4}$.

3. $M_{Z_1} = M_{Z_2}$ и $\Delta_{A_2} \subset \Delta_{A_1}$. Если включение строгое, то $\Delta_{A_2} \subset \Delta'_{A_1}$ и $\Delta_{A_2} \cap \Delta''_{A_1} \overset{d}{=} \varnothing$. Значит, из (2.33) получаем, что $\Pi_1(Z_1)^{1/4} \subset \Delta''_{A_1}$ не перекрывается с $\Pi_j(Z_2)^{1/4} \subset \Delta_{A_2}$. Если $\Delta_{A_1} = \Delta_{A_2}$, то $\tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_2$ и поэтому можно считать, что $Z_1 = \Delta_{A_1} \backslash (\Delta'_{A_1} \cup \Delta''_{A_1})$, $Z_2 = \Delta''_{A_1} \backslash \Delta''_{M_{Z_1}}$. В этом случае либо $J(Z_2) = \varnothing$, либо $J(Z_2) = \{1\}$ и $\Pi_1(Z_2)^{1/4} \subset \Delta''_{M_{Z_1}}$. Последнее множество в силу (2.34) не перекрывается с $(\Delta''_{A_1})^{1/2} = \Pi_1(Z_1)^{1/4}$.

$\square$

Замечание 2.1.2. Из построения следует, что

- если $Z = \tilde{Z}$, то $\Pi(Z) = \Delta_A$, $\Pi_1(Z) = (\Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z}) \cap \Delta_A$, $\Pi_2(Z) = \Delta'_A \backslash \Delta'_{M_Z}$ (при этом, Δ'_A не перекрывается с Δ'_{M_Z} или $\Delta'_A \subset \Delta'_{M_Z}$),

- если $Z \neq \tilde{Z}$, то $\Pi(Z) = \Delta_A$, $\Pi_1(Z) = \Delta'_A \cup \Delta''_A$, $\Pi_2(Z) = \varnothing$ или $\Pi(Z) = \Delta''_A \subset \Delta_A$, $\Pi_1(Z) \overset{d}{=} \Delta''_{M_Z} \cap \Delta''_A$, $\Pi_2(Z) = \varnothing$ (при этом, $\Delta'_{M_Z} \neq \varnothing$ и выполнено строгое включение $\Delta'_{M_Z} \subset \Delta'_A$).

Во всех случаях $A \cap \Pi(Z) \overset{d}{\neq} \varnothing$. Здесь $\tilde{Z} = M_Z \cap A$, $A \in (T_{(M_Z)_-})_+(\Delta_{M_Z})$.

Замечание 2.1.3. Если $\Gamma_0(\Pi(Z)) \subset \Gamma_0(K)$, то $\Pi_2(Z) = \varnothing$, а для $\Pi_1(Z)$ есть три возможности: 1) $\Pi_1(Z) = \varnothing$, 2) $\Pi_1(Z) \in \Xi(\Pi)$ и $\Gamma_1(\Pi_1(Z)) \subset \Gamma_1(\Pi(Z))$, 3) $(\Pi_1(Z))^{1/2} \in \Xi(\Pi(Z))$ и $\Gamma_1(\Pi_1(Z)) \cap \Gamma_1(\Pi(Z)) = \varnothing$.

Предложение 2.1.2. *Пусть $K \in \mathcal{K}$, Δ, $\tilde{\Delta} \in \Xi(K)$, $|\tilde{\Delta}| \leqslant |\Delta|$ и $\tilde{\Delta}$ перекрывается с $\Delta \cup \Delta_-$. Тогда*

$$\tilde{\Delta} \overset{d}{\subset} \Delta \text{ или } \tilde{\Delta} \overset{d}{\subset} \Delta_-. \tag{2.36}$$

Доказательство. Если $p_{d-1}(\tilde{\Delta}) \cap p_{d-1}(\Delta) \overset{d-1}{=} \varnothing$, то $\tilde{\Delta}$ и $\Delta \cup \Delta_-$ не перекрываются. Отсюда и из неравенства $|\tilde{\Delta}| \leqslant |\Delta|$ получаем, что $p_{d-1}(\tilde{\Delta}) \overset{d-1}{\subset} p_{d-1}(\Delta)$.

Пусть $\Delta \overset{d}{=} p_{d-1}(\Delta) \times [\alpha, \beta]$, $\tilde{\Delta} \overset{d}{=} p_{d-1}(\tilde{\Delta}) \times [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$. Тогда $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \subset [\alpha, \beta]$ или $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \subset [2\alpha - \beta, \alpha]$. Отсюда следует (2.36). $\square$

Лемма 2.1.5. *Пусть $\gamma > 0$. Тогда для любого $Z \in P_{**}(K, \gamma)$ такого, что $\Gamma_0(\Pi(Z)) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$, существует множество $B(Z)$ со следующими свойствами:*

1. *$B(Z)$ содержится в некотором элементе $E(Z)$ разбиения $P(K,\gamma)$;*

2. *$Z \cup B(Z) \in \mathcal{R}^*$. Соответствующие замкнутые параллелепипеды $\Pi = \hat{\Pi}(Z)$, $\Pi_1 = \hat{\Pi}_1(Z)$, $\Pi_2 = \hat{\Pi}_2(Z)$ можно выбрать так, чтобы $\Pi_j(Z) \subset \hat{\Pi}_j(Z) \subset \hat{\Pi}(Z)$, $j = 1, 2$, $\Pi(Z) = \hat{\Pi}(Z)^{2/3}$ и $B(Z) \subset \hat{\Pi}(Z)\backslash\Pi(Z)$. Если $\hat{\Pi}_j(Z)$ не перекрывается с $\Pi(Z)$, то $((\hat{\Pi}_j(Z))^{1/5})_+$ также не перекрывается с $\Pi(Z)$.*

При этом,

$$\{B(Z) : Z \in P_{**}(K,\gamma), \Gamma_0(\Pi(Z)) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing\} \tag{2.37}$$

является системой попарно неперекрывающихся множеств.

На рисунке 2.5 приведены три примера. Изображены множества Δ_{M_Z}, их разбиения $(T_{(M_Z)_-})_+(\Delta_{M_Z})$, кубы Δ'_{M_Z}, Δ''_{M_Z}, параллелепипеды $\hat{\Pi}(Z)$, $\hat{\Pi}_1(Z)$ и $\hat{\Pi}_2(Z)$. Жирными линиями выделена граница множества $Z \cup B(Z)$.

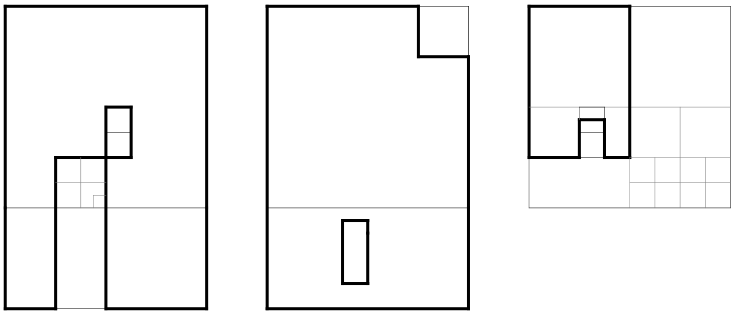


Рис. 2.5:

Доказательство. Пусть $\tilde{Z}$ — элемент $P_*(K,\gamma)$, содержащий Z. Обозначим $\Delta = \Delta_{M_Z}$, $T = P(K,\gamma)|_{\Delta_-}$, $T'(\Delta_-) = \{U \in T : \Gamma_1(U) \subset \Gamma_1(\Delta_-)\}$. Тогда $\tilde{Z} = M_Z \cap A$, где $A \in T_+(\Delta)$. При этом, можно считать, что Δ_{M_Z}, Δ'_{M_Z}, Δ''_{M_Z}, Δ_A, Δ'_A и Δ''_A замкнуты, и если $A \in \mathcal{K}$, то A замкнуто.

Построим множество $B(Z)$, проверим, что оно удовлетворяет условиям 1 и 2 и, кроме того, докажем

Утверждение ($\star$)**.** Если $Z_1 \in P_{**}(K,\gamma)$, $Z_1 \neq Z$, $\Pi(Z_1)$ перекрывается с $\hat{\Pi}(Z)$ и $|\Pi(Z_1)| \leqslant |\Pi(Z)|$, то $\Pi(Z_1)_-$ не перекрывается с $B(Z)$.

Для таких Z_1 будем обозначать через $\tilde{Z}_1$ элемент $P_*(K,\gamma)$, содержащий Z_1, через A_1 — элемент $(T_{(M_{Z_1})_-})_+(\Delta_{M_{Z_1}})$, содержащий $\tilde{Z}_1$.

Напомним, что если $M_Z \in \tilde{\mathcal{R}}$, то $R_Z = M_Z \cup \Delta''_{M_Z}$, в остальных случаях $R_Z = M_Z$. Из определения $\tilde{P}(K,\gamma)$ следует, что если $\Delta'_{M_Z} \neq \varnothing$, то $R_Z \in P(K,\gamma)$, а если $\Delta'_{M_Z} = \varnothing$, то либо $R_Z \in P(K,\gamma)$, либо существует множество $\hat{R}_Z \in P(K,\gamma)$ такое, что $R_Z = \Delta''_{\hat{R}_Z} \subset \hat{R}_Z$.

Случай 1. Пусть $\Gamma_0(A) \cap \Gamma_0(\Delta) = \varnothing$. Тогда $A \in \Xi(\Delta)$,

$$\Gamma_0(A_-) \subset \Gamma_0(\Delta) \tag{2.38}$$

(см. лемму 2.1.2, свойство 4) и $Z = \tilde{Z}$ по определению $P_{**}(K,\gamma)$. Если $A_- \subset \Delta'_{M_Z}$ или $A \subset \Delta'_{M_Z}$, то $A \subset \Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z}$, т.е. A не перекрывается с M_Z — противоречие. Значит, есть три подслучая:

$$1.\ A \cup A_- \subset R_Z, \quad 2.\ \Delta'_{M_Z} \in \cup_{k\geqslant 1}\Xi_k(A), \quad 3.\ \Delta'_{M_Z} \in \cup_{k\geqslant 1}\Xi_k(A_-). \tag{2.39}$$

В подслучае 1 множество A не перекрывается с Δ''_{M_Z} (действительно, если $A \subset \Delta''_{M_Z}$, то $A \cap M_Z \overset{d}{=} \varnothing$, если $A \supset \Delta''_{M_Z} \overset{d}{\neq} \varnothing$, то $\Delta'_{M_Z} \subset A \cup A_-$). Значит, $Z = A$. Положим $B(Z) = A_-^{1/2}$. Свойство 1 выполнено с $E(Z) = R_Z$ или $E(Z) = \hat{R}_Z$, свойство 2 выполнено с $\hat{\Pi}(Z) = A \cup A_-^{1/2}$, $\hat{\Pi}_1(Z) = \hat{\Pi}_2(Z) = \varnothing$.

В подслучае 2 имеем $A_- \subset M_Z$. Полагаем

$$B(Z) = A_-^{1/2} \backslash (\Delta'_{M_Z})_-. \tag{2.40}$$

Тогда свойство 1 выполнено с $E(Z) = R_Z \in P(K, \gamma)$, свойство 2 выполнено с $\hat{\Pi}(Z) = A \cup A_-^{1/2}$,

$$\hat{\Pi}_1(Z) = \left(A \cap (\Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z})\right) \cup \left(A_-^{1/2} \cap (\Delta'_{M_Z})_-\right), \quad \hat{\Pi}_2(Z) = \varnothing.$$

В самом деле, равенство $\Pi(Z) = \hat{\Pi}(Z)^{2/3}$ и включения $B(Z) \subset \hat{\Pi}(Z) \backslash \Pi(Z)$, $\Pi_j(Z) \subset \hat{\Pi}_j(Z)$, $j = 1, 2$, следуют из замечания 2.1.2, включения $\hat{\Pi}_j(Z) \subset \hat{\Pi}(Z)$ выполнены по построению. Далее, $\hat{\Pi}_1(Z)$ перекрывается с $\Pi(Z)$, а множество $((\hat{\Pi}_2(Z))^{1/5})_+$ пусто.

В подслучае 3 положим

$$B(Z) = A_-^{1/2} \backslash (\Delta'_{M_Z} \cup (\Delta'_{M_Z})_- \cup ((\Delta'_{M_Z})^{1/2})_+). \tag{2.41}$$

Свойство 1 выполнено с $E(Z) = R_Z \in P(K, \gamma)$, свойство 2 выполнено с $\hat{\Pi}(Z) = A \cup A_-^{1/2}$,

$$\hat{\Pi}_1(Z) = \left(A \cap \Delta''_{M_Z}\right) \cup \left(A_-^{1/2} \cap (\Delta'_{M_Z} \cup ((\Delta'_{M_Z})^{1/2})_+ \cup (\Delta'_{M_Z})_-)\right), \quad \hat{\Pi}_2(Z) = \varnothing.$$

Проверим, что если $\hat{\Pi}_1(Z) \cap \Pi(Z) \overset{d}{=} \varnothing$, то $((\hat{\Pi}_1(Z))^{1/5})_+ \cap \Pi(Z) \overset{d}{=} \varnothing$; остальные утверждения доказываются так же, как в подслучае 2. Можно считать, что $\hat{\Pi}_1(Z) \neq \varnothing$. Так как $\Delta'_{M_Z} \subset A_-$, то $\Delta''_{M_Z} \subset A \cup A_-$. Если $\Delta''_{M_Z} \subset A$, то $\hat{\Pi}_1(Z) \cap \Pi(Z) \overset{d}{\neq} \varnothing$. Значит, $\Delta''_{M_Z} \subset A_-$, поэтому $(\hat{\Pi}_1(Z))^{1/5} \subset ((\Delta'_{M_Z})^{1/2})_+$, $((\hat{\Pi}_1(Z))^{1/5})_+ \subset \Delta''_{M_Z}$.

Докажем утверждение $(\star)$. Пусть $Z_1 \in P_{**}(K, \gamma)$, $Z_1 \neq Z$, $|\Pi(Z_1)| \leqslant |\Pi(Z)|$ и $\Pi(Z_1)$ перекрывается с $\hat{\Pi}(Z)$. Так как $\Pi(Z_1) \cap \hat{\Pi}(Z) \overset{d}{\neq} \varnothing$ и $|\Pi(Z_1)| \leqslant |\Pi(Z)|$, то

$$\Pi(Z_1) \subset A \cup A_- \tag{2.42}$$

(см. предложение 2.1.2).

Сначала рассмотрим случай $M_{Z_1} = M_Z$. Тогда $A_1 \in T_+(\Delta)$. В силу замечания 2.1.2, если $Z_1 = \tilde{Z}_1$, то $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$, а если $Z_1 \neq \tilde{Z}_1$, то $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$ или $\Pi(Z_1) = (\Delta'_{A_1})_+$.

Пусть $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$. Тогда либо $\Delta_{A_1} \subset A$, либо $\Delta_{A_1} \subset A_-$. Если $\Delta_{A_1} \subset A$, то $A_1 = A$ (поскольку $A \in T_+(\Delta)$ и $A_1 \in T_+(\Delta)$) и $Z_1 = \tilde{Z}_1 = Z$ — противоречие. Пусть $\Delta_{A_1} \in \Xi(A_-)$. Тогда $\Delta_{A_1} \cap (A_-)^{1/2} \overset{d}{\neq} \varnothing$. Положим

$$S = \{\tilde{A} \in T_+(\Delta) : \Gamma_1(\tilde{A}) \cap \Gamma_0(A) \neq \varnothing\}.$$

По лемме 2.1.2 (см. свойство 4), есть три возможности:

- $S = Q_1(A_-) \backslash \tilde{Q}_1(A_-)$. Тогда множество

  $$\{\tilde{A} \in T_+(\Delta) : \tilde{A} \text{ перекрывается с } (A_-)^{1/2}\}$$

  совпадает с S, так что $A_1 \in Q_1(A_-) \backslash \tilde{Q}_1(A_-)$. Значит, $\Pi(Z_1)_- = (A_1)_- \in \tilde{Q}_1(A_-)$ не перекрывается с $(A_-)^{1/2} \supset B(Z)$.

- $S = \{A_-\}$. Тогда $\Pi(Z_1) = A_1 = A_-$ и $\Pi(Z_1)_- = (A_1)_- = (A_-)_-$ не перекрывается с $(A_-)^{1/2}$.

- $S = \{\hat{R}\}$, $\hat{R} \in \mathcal{R}$, $\Delta_{\hat{R}} = A_-$, $\Gamma_0(\Delta'_{\hat{R}}) \subset \Gamma_0(\Delta)$. Тогда $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1} = \Delta_{\hat{R}}$ и $\Pi(Z_1)_- = (\Delta_{\hat{R}})_- = (A_-)_-$ не перекрывается с $(A_-)^{1/2}$.

Пусть $\Pi(Z_1) = (\Delta'_{A_1})_+$. Из (2.42) следует, что $(\Delta'_{A_1})_+ \subset A$ или $(\Delta'_{A_1})_+ \subset A_-$. Так как $\Delta'_{A_1} \subset \Delta$ и выполнено (2.38), то $\Delta'_{A_1} \subset A \cup A_-$. По построению $P_{**}(K, \gamma)$, $\Delta'_{M_Z} = \Delta'_{M_{Z_1}} \subset \Delta'_{A_1} \subset A \cup A_-$. Это возможно только для подслучаев 2 и 3 из (2.39).

Пусть $\Pi(Z_1) \subset A$. Если $\Pi(Z_1) = (\Delta'_{A_1})_+ \in \cup_{k\geqslant 1}\Xi_k(A)$, то $\Gamma_0(\Delta'_{A_1}) \cap \Gamma_0(\Delta) = \varnothing$ (иначе $\Gamma_0(A) \subset \Gamma_0(\Delta)$). Так как $A_1 \in T_+(\Delta)$, то в силу леммы 2.1.2 (см. свойство 6) выполнено включение $\Gamma_0(\Delta'_{A_1}) \subset \Gamma_0(\Delta)$ — противоречие. Тем самым, $\Pi(Z_1) = A$, поэтому A_1 и $A = (\Delta'_{A_1})_+$ перекрываются, но не совпадают — противоречие с тем, что A и A_1 являются элементами разбиения $T_+(\Delta)$.

Пусть $\Pi(Z_1) \subset A_-$. Если $\Pi(Z_1) = A_-$, то $\Gamma_0((\Delta'_{A_1})_+) = \Gamma_0(\Pi(Z_1)) = \Gamma_0(A_-) \overset{(2.38)}{\subset} \Gamma_0(\Delta)$. Это противоречит тому, что $\Gamma_0((\Delta'_{A_1})_+) \cap \Gamma_0(\Delta) = \varnothing$. Если $\Pi(Z_1) \in \cup_{k\geqslant 1}\Xi_k(A_-)$, то $\Pi(Z_1) \subset (A_-)^{1/2}$. В самом деле, если $\Pi(Z_1) \subset A_-\backslash(A_-)^{1/2}$, то $\Pi(Z_1)$ не перекрывается с $A \cup (A_-)^{1/2} = \hat{\Pi}(Z)$. Тем самым, $(\Delta'_{A_1})_+ \subset (A_-)^{1/2}$. Так как $\Gamma_0(\Delta'_{A_1}) \subset \Gamma_0(\Delta)$ (лемма 2.1.2, свойство 6), то $\Pi(Z_1) \in Q_1(A_-)\backslash\tilde{Q}_1(A_-)$. Значит, $\Pi(Z_1)_- \subset A_-\backslash A_-^{1/2}$, так что $\Pi(Z_1)_- \cap B(Z) \overset{d}{=} \varnothing$.

Теперь докажем утверждение ($\star$) для случая $M_{Z_1} \neq M_Z$. Заметим, что M_{Z_1} перекрывается с $A \cup A_- \subset \Delta_{M_Z}$ (так как $Z_1 \subset \Pi(Z_1) \overset{(2.42)}{\subset} A \cup A_-$ и $Z_1 \subset M_{Z_1}$). Поэтому $M_{Z_1} \subset \Delta'_{M_Z}$ или $M_{Z_1} = \Delta''_{M_Z}$. Рассмотрим каждый из подслучаев (2.39).

- Пусть $A \cup A_- \subset R_Z$. Случай $M_{Z_1} \subset \Delta'_{M_Z}$ невозможен, так как $\Pi(Z_1) \subset A \cup A_-$ не перекрывается с Δ'_{M_Z}. В случае $M_{Z_1} = \Delta''_{M_Z}$ множество Δ''_{M_Z} перекрывается с $A \cup A_-$; так как $\Delta'_{M_Z} \subset \Delta$ и выполнено (2.38), то $\Delta'_{M_Z} \subset A \cup A_-$ — противоречие.

- Пусть $\Delta'_{M_Z} \in \cup_{k\geqslant 1}\Xi_k(A)$. Если $M_{Z_1} = \Delta''_{M_Z}$, то $\Pi(Z_1)_- \subset \Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z}$ не перекрывается с $B(Z)$ (так как $\Delta'_{M_Z} \subset A$, $B(Z) \subset A_-$). Если $M_{Z_1} \subset \Delta'_{M_Z}$, то $\Pi(Z_1)_- \subset \Delta'_{M_Z} \cup (\Delta'_{M_Z})_-$ не перекрывается с $B(Z)$ (поскольку $\Delta'_{M_Z} \subset A$, $B(Z) \subset A_-$, а $(\Delta'_{M_Z})_-$ не перекрывается с $B(Z)$ в силу (2.40)).

- Пусть $\Delta'_{M_Z} \in \cup_{k\geqslant 1}\Xi_k(A_-)$. Если $M_{Z_1} \subset \Delta'_{M_Z}$, то $\Pi(Z_1)_- \subset \Delta'_{M_Z} \cup (\Delta'_{M_Z})_-$ и поэтому не перекрывается с $B(Z)$ в силу (2.41). Пусть $M_{Z_1} = \Delta''_{M_Z}$. Тогда $\tilde{Z}_1 = Z_1$ по определению $P_{**}(K, \gamma)$, $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$, $\Pi(Z_1)_- \subset \Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z}$ и $\Pi(Z_1)_- \neq \Delta''_{M_Z}$. Если $\Pi(Z_1)_- \subset \Delta'_{M_Z} \cup ((\Delta'_{M_Z})^{1/2})_+$, то $\Pi(Z_1)_- \cap B(Z) \overset{d}{=} \varnothing$ в силу (2.41). Пусть $\Pi(Z_1)_- \subset (\Delta''_{M_Z})^{1/2}$. Так как в этом случае $\Gamma_0(\Delta_{A_1}) \cap \Gamma_0(M_{Z_1}) = \varnothing$, то по лемме 2.1.2 (свойство 4) получаем $A_1 = \Delta_{A_1} = Z_1$ и $\Gamma_0((A_1)_-) \subset \Gamma_0(M_{Z_1})$. Это противоречит тому, что $(\Delta_{A_1})_- = \Pi(Z_1)_- \subset (\Delta''_{M_Z})^{1/2} = (M_{Z_1})^{1/2}$.

Случай 2. Пусть $\Gamma_0(A) \subset \Gamma_0(\Delta)$. Возможны следующие подслучаи:

1. $A \in \Xi(\Delta)$. Тогда $Z = \tilde{Z}$ (по построению $P_{**}(K, \gamma)$) и либо $A_- \in T'(\Delta_-)$, либо $A_- = R \cup \Delta'_R$, где $R \in \mathcal{R} \cap T'(\Delta_-)$ и
$$\Gamma_1(\Delta'_R) \cap \Gamma_0(A) = \varnothing \tag{2.43}$$
(см. лемму 2.1.2, свойство 5). Полагаем в первом случае $B(Z) = A_-^{1/2}\backslash(\Delta'_{M_Z})_-$, во втором —
$$B(Z) = A_-^{1/2}\backslash(\Delta'_R \cup (\Delta'_R)_- \cup ((\Delta'_R)^{1/2})_+ \cup (\Delta'_{M_Z})_-).$$

Отсюда сразу получаем свойство 1. Свойство 2 выполнено с $\hat{\Pi}(Z) = A \cup (A_-)^{1/2}$,

$$\hat{\Pi}_1(Z) = \big(A \cap (\Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z})\big) \cup (A_-^{1/2} \cap (\Delta'_{M_Z})_-),$$

$\hat{\Pi}_2(Z) = \varnothing$ в первом случае,

$$\hat{\Pi}_2(Z) = \Big(A_-^{1/2} \cap \big(\Delta'_R \cup ((\Delta'_R)^{1/2})_+ \cup (\Delta'_R)_-\big)\Big) \backslash (\Delta'_{M_Z})_-$$

во втором случае. В самом деле, из замечания 2.1.2 следует, что $\Pi(Z) = A$, $\Pi_1(Z) = A \cap (\Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z})$, $\Pi_2(Z) = \varnothing$, откуда получаем, что $\Pi_j(Z) \subset \hat{\Pi}_j(Z)$, $\Pi(Z) = \hat{\Pi}(Z)^{2/3}$ и $B(Z) \subset \hat{\Pi}(Z) \backslash \Pi(Z)$.

Пусть $\hat{\Pi}_1(Z)$ не перекрывается с $\Pi(Z)$. Покажем, что $\hat{\Pi}_1(Z) = \varnothing$. В самом деле, $A \cap (\Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z}) \overset{d}{=} \varnothing$. Если $\hat{\Pi}_1(Z) \neq \varnothing$, то $(\Delta'_{M_Z})_- \cap A_-^{1/2} \overset{d}{\neq} \varnothing$ и $p_{d-1}(\Delta'_{M_Z}) \cap p_{d-1}(A) \overset{d-1}{\neq} \varnothing$. Из условия $\Gamma_0(A) \subset \Gamma_0(\Delta)$ получаем $\Gamma_0(\Delta'_{M_Z}) \subset \Gamma_0(\Delta)$ (иначе $(\Delta'_{M_Z})_- \subset \Delta$ не перекрывается с $(A_-)^{1/2}$). Значит, $\Delta'_{M_Z} \cap A \overset{d}{\neq} \varnothing$ и $\hat{\Pi}_1(Z) \cap \Pi(Z) \overset{d}{\neq} \varnothing$.

Пусть $\hat{\Pi}_2(Z) \neq \varnothing$. Тогда $((\Delta'_R)^{1/2})_+ \subset (\Delta'_R)_+ \subset A_-^{1/2}$ в силу (2.43). Если $(\Delta'_{M_Z})_-$ не перекрывается с $A_-^{1/2} \cap (\Delta'_R \cup ((\Delta'_R)^{1/2})_+ \cup (\Delta'_R)_-)$, то $(\hat{\Pi}_2(Z))^{1/5} \subset ((\Delta'_R)^{1/2})_+$ и $((\hat{\Pi}_2(Z))^{1/5})_+ \subset (\Delta'_R)_+ \subset A_-^{1/2}$. Пусть $(\Delta'_{M_Z})_-$ перекрывается с $A_-^{1/2} \cap (\Delta'_R \cup ((\Delta'_R)^{1/2})_+ \cup (\Delta'_R)_-)$. Так как $\Delta'_{M_Z} \subset \Delta$, то в этом случае $\Gamma_1((\Delta'_{M_Z})_-) \subset \Gamma_0(\Delta)$; отсюда и из (2.43) получаем, что $(\Delta'_R)_+ \subset (\Delta'_{M_Z})_-$. Значит, либо $\hat{\Pi}_2(Z) = A_-^{1/2} \cap (\Delta'_R)_-$ и $\Delta'_R \subset (\Delta'_{M_Z})_-$, либо $\hat{\Pi}_2(Z) = A_-^{1/2} \cap (\Delta'_R \cup (\Delta'_R)_-)$. Поэтому $((\hat{\Pi}_2(Z))^{1/5})_+ \subset (\Delta'_{M_Z})_-$ не перекрывается с $\Pi(Z)$.

Докажем утверждение $(\star)$. Так как $\Pi(Z_1)$ перекрывается с $\hat{\Pi}(Z) = A \cup (A_-)^{1/2}$ и $|\Pi(Z_1)| \leqslant |\Pi(Z)|$, то

$$\Pi(Z_1) \subset A \cup A_- \tag{2.44}$$

в силу предложения 2.1.2. Отсюда и из включений $Z_1 \subset \Pi(Z_1)$, $Z_1 \subset M_{Z_1}$ следует, что M_{Z_1} перекрывается с $A \cup A_-$. Значит, есть следующие возможности:

$$\text{(a) } M_{Z_1} = M_Z, \quad \text{(b) } M_{Z_1} = \Delta''_{M_Z}, \quad \text{(c) } M_{Z_1} \subset \Delta'_{M_Z},$$

$$\text{(d) } \Delta_{M_{Z_1}} \supset A_-, \ M_{Z_1} \cap A \overset{d}{=} \varnothing,$$

$$\text{(e) } A_- = R \cup \Delta'_R, \ \ M_{Z_1} = \Delta''_R, \quad \text{(f) } A_- = R \cup \Delta'_R, \ \ M_{Z_1} \subset \Delta'_R,$$

$$\text{(g) } A_- \in T'(\Delta_-), \ M_{Z_1} = \Delta''_{\hat{E}} \in \cup_{k \geqslant 1} \Xi_k(A_-), \text{ где } \hat{E} \in P(K, \gamma).$$

Рассмотрим каждый из этих случаев.

(a) $M_{Z_1} = M_Z$. Если $\Pi(Z_1) = \Delta''_{A_1}$, то $\Pi(Z_1)_- = \Delta'_{A_1} \subset \Delta_{M_Z}$ и поэтому не перекрывается с $B(Z)$. Пусть $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$. Из (2.44) следует, что $\Delta_{A_1} \subset A$ или $\Delta_{A_1} \subset A_-$. Во втором случае $\Delta_{A_1} \cap M_{Z_1} \overset{d}{=} \varnothing$ — противоречие. Значит, $\Delta_{A_1} \subset A$; так как A_1, $A \in T_+(\Delta)$, то $A_1 = A$ и $Z_1 = Z$. Тем самым, случай $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$ невозможен.

(b) $M_{Z_1} = \Delta''_{M_Z}$. Тогда $(\Pi(Z_1))_- \subset \Delta''_{M_Z} \cup \Delta'_{M_Z} \subset \Delta$ и поэтому не перекрывается с $B(Z) \subset \Delta_-$.

(c) $M_{Z_1} \subset \Delta'_{M_Z}$. Тогда $(\Pi(Z_1))_- \subset \Delta'_{M_Z} \cup (\Delta'_{M_Z})_-$ не перекрывается с $B(Z) \subset A_-^{1/2} \backslash (\Delta'_{M_Z})_-$.

(d) $\Delta_{M_{Z_1}} \supset A_-$, $M_{Z_1} \cap A \stackrel{d}{=} \varnothing$.

Пусть $\Pi(Z_1) = \Delta''_{A_1}$. Тогда $\Pi(Z_1)_- = \Delta'_{A_1}$ и $\Gamma_0(\Pi(Z_1)_-) = \Gamma_0(\Delta'_{A_1}) \subset \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_1}})$ в силу леммы 2.1.2 (свойство 6). Предположим, что $(\Pi(Z_1))_-$ перекрывается с $(A_-)^{1/2}$. Если $\Pi(Z_1)_- \subset (A_-)^{1/2}$, то $\Gamma_0(\Pi(Z_1)_-) \cap \Gamma_0(A_-) = \varnothing$; так как $A_- \subset \Delta_{M_{Z_1}}$, то $\Gamma_0(\Pi(Z_1)_-) \cap \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_1}}) = \varnothing$ — противоречие. Пусть $\Pi(Z_1)_- \supset A_-$. Так как

$$|\Pi(Z_1)_-| = |\Pi(Z_1)| \leqslant |\Pi(Z)| = |A| = |A_-|,$$

то $\Pi(Z_1)_- = A_-$ и $\Pi(Z_1) = A$, т.е. $\Pi(Z_1) \cap M_{Z_1} \stackrel{d}{=} \varnothing$ — противоречие.

Пусть $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$. Если $\Gamma_0(\Delta_{A_1}) \subset \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_1}})$, то $(\Delta_{A_1})_- = (\Pi(Z_1))_-$ не перекрывается с $\Delta_{M_{Z_1}}$ и, тем более, с $(A_-)^{1/2} \supset B(Z)$. Если $\Gamma_0(\Delta_{A_1}) \cap \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_1}}) = \varnothing$, то $A_1 \in \Xi(\Delta_{M_{Z_1}})$ и

$$\Gamma_0((A_1)_-) \subset \Gamma_0(\Delta_{M_{Z_1}}) \tag{2.45}$$

(см. лемму 2.1.2, свойство 4). Покажем, что $(\Pi(Z_1))_- = (A_1)_-$ не перекрывается с $(A_-)^{1/2} \supset B(Z)$. В самом деле, иначе из (2.45) и включения $A_- \subset \Delta_{M_{Z_1}}$ следует, что $(A_1)_- \supset A_-$. Так как $|\Delta_{A_1}| = |\Pi(Z_1)| \leqslant |\Pi(Z)| = |A|$, то $(A_1)_- = A_-$ и $A_1 = A$ не перекрывается с M_{Z_1} — противоречие.

(e) $A_- = R \cup \Delta'_R$, $M_{Z_1} = \Delta''_R$. Тогда $Z_1 = \tilde{Z}_1$ по построению $P_{**}(K, \gamma)$, $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$, при этом $(\Pi(Z_1))_- \subset \Delta'_R$ или $(\Pi(Z_1))_- \subset \Delta''_R$. В первом случае $\Pi(Z_1)_-$ не перекрывается с $B(Z)$ по определению $B(Z)$. Во втором случае $\Gamma_0(A_1) \cap \Gamma_0(\Delta''_R) = \varnothing$, поэтому $A_1 \in \Xi(\Delta''_R)$ и $\Gamma_0((A_1)_-) \subset \Gamma_0(\Delta''_R)$ (см. лемму 2.1.2, свойство 4). Значит, $(\Pi(Z_1))_- = (A_1)_- \subset \Delta''_R \backslash (\Delta''_R)^{1/2} = ((\Delta'_R)^{1/2})_+$ и поэтому $(\Pi(Z_1))_- \cap B(Z) \stackrel{d}{=} \varnothing$.

(f) $A_- = R \cup \Delta'_R$, $M_{Z_1} \subset \Delta'_R$. Тогда $(\Pi(Z_1))_- \subset \Delta'_R \cup (\Delta'_R)_-$ не перекрывается с $B(Z)$.

(g) $A_- \in T'(\Delta_-)$, $M_{Z_1} = \Delta''_{\hat{E}} \in \cup_{k \geqslant 1} \Xi_k(A_-)$, где $\hat{E} \in P(K, \gamma)$. Тогда $(\Pi(Z_1))_- \subset \Delta'_{\hat{E}} \cup \Delta''_{\hat{E}}$. Так как $A_- \in T'(\Delta_-)$, то $\Gamma_0(\Delta''_{\hat{E}}) \subset \Gamma_0(A_-)$ и $\Delta'_{\hat{E}} \cap A_- \stackrel{d}{=} \varnothing$, $\Delta''_{\hat{E}} \cap (A_-)^{1/2} \stackrel{d}{=} \varnothing$. Значит, $(\Delta'_{\hat{E}} \cup \Delta''_{\hat{E}}) \cap B(Z) \stackrel{d}{=} \varnothing$.

2. $A \in \mathcal{R}$. Тогда $\Gamma_0(\Delta'_A) \subset \Gamma_0(\Delta)$, $\tilde{B}(Z) := (\Delta_A)_- \backslash (\Delta'_A)_- \in T'(\Delta_-)$ (см. лемму 2.1.2, свойство 6) и поэтому $\tilde{B}(Z)$ содержится в элементе $\tilde{E}(Z)$ разбиения $P(K, \gamma)$. Кроме того, $\Gamma_0(\Delta_A) \subset \Gamma_1(\Delta_{\tilde{E}(Z)})$. В самом деле, иначе $\Delta_{\tilde{E}(Z)} \supset \Delta$, $\Delta'_{\tilde{E}(Z)} = (\Delta'_A)_-$, $\Delta''_{\tilde{E}(Z)} = \Delta'_A$ и $\tilde{E}(Z) \backslash \Delta''_{\tilde{E}(Z)} \in \tilde{P}(K, \gamma)$ перекрывается с Δ. Поэтому $\tilde{E}(Z) \backslash \Delta''_{\tilde{E}(Z)} \subset \Delta$ и $\Delta_{\tilde{E}(Z)} \subset \Delta$ — противоречие. Значит, $\Gamma_1(\Delta'_{\tilde{E}(Z)}) = \Gamma_1((\Delta'_A)_-) \subset \Gamma_1(\Delta_{\tilde{E}(Z)})$. Тем самым, по определению $\tilde{P}(K, \gamma)$,

$$(\Delta_A)_- \backslash (\Delta'_A)_- \subset \tilde{E}(Z) \in \tilde{P}(K, \gamma). \tag{2.46}$$

Обозначим $C_{M_Z} := (\Delta'_{M_Z})_-$, $C_A := (\Delta'_A)_-$.

- Если $\Delta'_A \subset \Delta'_{M_Z}$, то $Z = \tilde{Z}$ по построению $P_{**}(K, \gamma)$; тогда полагаем

$$B(Z) = (\Delta_A)_-^{1/2} \backslash ((\Delta'_{M_Z})_- \cup (C_{M_Z})_-);$$

так как $(\Delta'_A)_- \subset (\Delta'_{M_Z})_-$, то

$$B(Z) \subset \tilde{B}(Z) \subset \tilde{E}(Z) =: E(Z)$$

и

$$B(Z) \cap ((\Delta'_A)_- \cup (C_A)_-) \stackrel{d}{=} \varnothing. \tag{2.47}$$

Свойство 2 выполнено с $\hat{\Pi}(Z) = \Delta_A \cup (\Delta_A)_-^{1/2}$,

$$\hat{\Pi}_1(Z) = (\Delta''_{M_Z} \cup \Delta'_{M_Z} \cup (\Delta'_{M_Z})_- \cup (C_{M_Z})_-) \cap \hat{\Pi}(Z), \;\; \hat{\Pi}_2(Z) = \varnothing$$

в силу замечания 2.1.2 и включения $\Delta'_{M_Z} \subset \Delta_A = \Pi(Z)$.

- Если $\Delta'_{M_Z} \neq \varnothing$, $\Delta'_A \supset \Delta'_{M_Z}$ и включение строгое, то в силу замечания 2.1.2 либо $Z = \Delta_A \backslash (\Delta'_A \cup \Delta''_A)$, либо $Z = \Delta''_A \backslash \Delta''_{M_Z}$. В первом случае полагаем

$$B(Z) = (\Delta_A)_-^{1/2} \backslash ((\Delta'_A)_- \cup (C_A)_-).$$

Тогда $B(Z) \subset \tilde{B}(Z) \subset \tilde{E}(Z) =: E(Z)$,

$$B(Z) \cap (\Delta'_{M_Z} \cup (\Delta'_{M_Z})_-) \stackrel{d}{=} \varnothing. \tag{2.48}$$

Свойство 2 выполнено с $\hat{\Pi}(Z) = \Delta_A \cup (\Delta_A)_-^{1/2}$,

$$\hat{\Pi}_1(Z) = (\Delta''_A \cup \Delta'_A \cup (\Delta'_A)_- \cup ((\Delta'_A)_-)_-) \cap \hat{\Pi}(Z), \;\; \hat{\Pi}_2(Z) = \varnothing$$

в силу замечания 2.1.2 и включения $\Delta'_A \subset \Delta_A = \Pi(Z)$. Во втором случае полагаем

$$B(Z) = (\Delta'_A)^{1/2} \backslash (\Delta'_{M_Z} \cup (\Delta'_{M_Z})_- \cup ((\Delta'_{M_Z})^{1/2})_+). \tag{2.49}$$

Свойство 1 выполнено, поскольку $B(Z) \subset R_Z =: E(Z)$, свойство 2 выполнено с

$$\hat{\Pi}(Z) = \Delta''_A \cup (\Delta'_A)^{1/2},$$
$$\hat{\Pi}_1(Z) \stackrel{d}{=} (\Delta''_{M_Z} \cap \Delta''_A) \cup \left((\Delta'_{M_Z} \cup (\Delta'_{M_Z})_- \cup ((\Delta'_{M_Z})^{1/2})_+ \right) \cap (\Delta'_A)^{1/2} \right),$$

$\hat{\Pi}_2(Z) = \varnothing$. В самом деле, достаточно показать, что если $\hat{\Pi}_1(Z)$ не перекрывается с $\Pi(Z)$, то $(\hat{\Pi}_1(Z)^{1/5})_+$ также не перекрывается с $\Pi(Z)$ (остальные утверждения следуют из замечания 2.1.2). Так как $\Delta'_{M_Z} \subset \Delta'_A$ и $\Delta''_{M_Z} \cap \Delta''_A \stackrel{d}{=} \varnothing$, то $\Delta''_{M_Z} \subset \Delta'_A$. Далее, $\hat{\Pi}_1(Z)^{1/5} \subset ((\Delta'_{M_Z})^{1/2})_+$ и поэтому $(\hat{\Pi}_1(Z)^{1/5})_+ \subset \Delta''_{M_Z}$ не перекрывается с $\Delta''_A = \Pi(Z)$.

- Если $\Delta'_{M_Z} = \varnothing$ или не перекрывается с Δ'_A, то $Z = \tilde{Z}$ по построению $P_{**}(K, \gamma)$. Полагаем

$$B(Z) = (\tilde{B}(Z) \cap (\Delta_A)_-^{1/2}) \backslash ((\Delta'_{M_Z})_- \cup (C_A)_-) \subset \tilde{E}(Z) =: E(Z).$$

Свойство 2 выполнено с

$$\hat{\Pi}(Z) = \Delta_A \cup (\Delta_A)_-^{1/2},$$
$$\hat{\Pi}_1(Z) \stackrel{d}{=} ((\Delta'_{M_Z})_- \cap (\Delta_A)_-^{1/2}) \cup ((\Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z}) \cap \Delta_A),$$
$$\hat{\Pi}_2(Z) = \Delta'_A \cup (((\Delta'_A)_- \cup (C_A)_-) \cap (\Delta_A)_-^{1/2}).$$

В самом деле, $\Delta'_A \subset \Delta_A$ и $\hat{\Pi}_2(Z)$ перекрывается с $\Pi(Z) = \Delta_A$; если $\hat{\Pi}_1(Z)$ не перекрывается с $\Pi(Z)$, то $\Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z}$ не перекрывается с $\Delta_A \cup (\Delta_A)_-$ и $(\Delta'_{M_Z})_- \cap (\Delta_A)_-^{1/2} \stackrel{d}{=} \varnothing$, то есть $\hat{\Pi}_1(Z) \stackrel{d}{=} \varnothing$. Остальные утверждения следуют из замечания 2.1.2. Также отметим, что $\hat{\Pi}_1(Z) \cap \hat{\Pi}_2(Z) \stackrel{d}{=} \varnothing$.

Докажем утверждение ($\star$). Пусть $Z_1 \in P_{**}(K,\gamma)$, $Z_1 \neq Z$, $\Pi(Z_1)$ перекрывается с $\hat{\Pi}(Z)$ и $|\Pi(Z_1)| \leqslant |\Pi(Z)|$. Проверим, что $\Pi(Z_1)_-$ не перекрывается с $B(Z)$.

Пусть $\Pi(Z) = \Delta_A$. Тогда M_{Z_1} перекрывается с Δ_A или с $(\Delta_A)_-$ (в самом деле, $Z_1 \subset M_{Z_1}$ и

$$Z_1 \subset \Pi(Z_1) \subset \Delta_A \cup (\Delta_A)_- \tag{2.50}$$

в силу предложения 2.1.2). Значит, есть следующие возможности:

$$\text{(a) } M_{Z_1} = M_Z, \quad \text{(b) } M_{Z_1} = \Delta''_{M_Z}, \quad \text{(c) } M_{Z_1} \subset \Delta'_{M_Z},$$

$$\text{(d) } \Delta_{M_{Z_1}} \supset A_-,\ M_{Z_1} \cap \Delta_A \overset{d}{=} \varnothing, \quad \text{(e) } \Delta_{M_{Z_1}} \in \cup_{k\geqslant 1}\Xi_k(A_-).$$

Заметим, что в случае (e) $M_{Z_1} \subset (\Delta'_A)_-$. В самом деле, иначе M_{Z_1} перекрывается с $(\Delta_A)_- \backslash (\Delta'_A)_- \subset \tilde{E}(Z) \in \tilde{P}(K,\gamma)$ (см. (2.46)). Так как $\tilde{P}(K,\gamma)$ является разбиением, то тогда $M_{Z_1} = \tilde{E}(Z)$ и $\Delta_{M_{Z_1}} \supset A_-$.

Рассмотрим каждый из случаев (a)–(e).

(a) $M_{Z_1} = M_Z$. Если $\Pi(Z_1) = \Delta''_{A_1}$, то $\Pi(Z_1)_- = \Delta'_{A_1} \subset \Delta_{M_Z}$ и поэтому не перекрывается с $B(Z)$. Пусть $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$. Из (2.50) следует, что $\Delta_{A_1} \subset \Delta_A$ или $\Delta_{A_1} \subset (\Delta_A)_-$. Во втором случае $\Delta_{A_1} \cap M_{Z_1} \overset{d}{=} \varnothing$ — противоречие. Значит, $\Delta_{A_1} \subset \Delta_A$. Так как $Z_1 \neq Z$, то $\Delta_{A_1} \subset \Delta'_A$ и $\Pi(Z_1)_- = (\Delta_{A_1})_- \subset \Delta'_A \cup (\Delta'_A)_-$ и поэтому не перекрывается с $B(Z)$ по определению $B(Z)$ или в силу (2.47).

(b) $M_{Z_1} = \Delta''_{M_Z}$. Тогда $\Pi(Z_1)_- \subset \Delta'_{M_Z} \cup \Delta''_{M_Z} \subset \Delta_{M_Z}$ не перекрывается с $B(Z) \subset A_-$.

(c) $M_{Z_1} \subset \Delta'_{M_Z}$. Тогда $\Pi(Z_1)_- \subset \Delta'_{M_Z} \cup (\Delta'_{M_Z})_-$ не перекрывается с $B(Z)$ по построению или в силу (2.48).

(d) $\Delta_{M_{Z_1}} \supset A_-$, $M_{Z_1} \cap \Delta_A \overset{d}{=} \varnothing$. Тогда доказательство точно такое же, как в случае (d) для $A \in \Xi(\Delta)$.

(e) $M_{Z_1} \subset (\Delta'_A)_-$. Тогда $\Pi(Z_1)_- \subset (\Delta'_A)_- \cup ((\Delta'_A)_-)_-$ и поэтому не перекрывается с $B(Z)$ по определению $B(Z)$ или в силу (2.47).

Пусть $\Pi(Z) = \Delta''_A$, т.е. $Z = \Delta''_A \backslash \Delta''_{M_Z}$ (см. замечание 2.1.2). Тогда множество $B(Z)$ задается формулой (2.49). Далее, $\Pi(Z_1) \subset \Delta''_A$ или $\Pi(Z_1) \subset \Delta'_A$ в силу предложения 2.1.2. Значит, M_{Z_1} перекрывается с Δ_{M_Z}, так что получаем три случая:

(a) $M_{Z_1} = M_Z$. Тогда A_1, $A \in T_+(\Delta)$, $A_1 \cap \Pi(Z_1) \overset{d}{\neq} \varnothing$ (так как оба эти множества содержат Z_1), $\Pi(Z_1) \subset \Delta'_A \cup \Delta''_A \subset \Delta_A$, и, значит, либо $A_1 = A$, либо $A_1 \subset \Delta'_A$. В первом случае $\Pi(Z_1) = \Delta''_A$ (так как $|\Delta_A| > |\Delta''_A|$, $|\Pi(Z_1)| \leqslant |\Pi(Z)|$) и $Z_1 = Z$ — противоречие. Рассмотрим второй случай. Пусть $\Gamma_0(\Delta_{A_1}) \cap \Gamma_0(\Delta'_A) = \varnothing$. Тогда $A_1 \in \Xi(\Delta'_A)$, $\Gamma_0((A_1)_-) \subset \Gamma_0(\Delta'_A)$ (см. лемму 2.1.2, свойство 4) и $\Pi(Z_1) = A_1$ (по построению $P_{**}(K,\gamma)$ и в силу замечания 2.1.2). Значит, $\Pi(Z_1)_-$ не перекрывается с $(\Delta'_A)^{1/2}$ и, тем более, с $B(Z)$ (см. (2.49)). Пусть $\Gamma_0(\Delta_{A_1}) \subset \Gamma_0(\Delta'_A)$. Если $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$, то $\Pi(Z_1)_- \subset (\Delta'_A)_-$ и поэтому не перекрывается с $B(Z)$. Если $\Pi(Z_1) = \Delta''_{A_1}$, то $\Pi(Z_1)_- = \Delta'_{A_1}$ не перекрывается с $(\Delta'_A)^{1/2} \supset B(Z)$, так как $\Gamma_0(\Delta'_{A_1}) \subset \Gamma_0(\Delta_{A_1}) \subset \Gamma_0(\Delta'_A)$ и $\Delta'_{A_1} \in \cup_{k\geqslant 1}\Xi_k(\Delta_{A_1})$.

(b) $M_{Z_1} = \Delta''_{M_Z}$. Тогда $Z_1 = \tilde{Z}_1$ по построению $P_{**}(K,\gamma)$ и $\Pi(Z_1) = \Delta_{A_1}$ в силу замечания 2.1.2. Если $\Gamma_0(\Delta_{A_1}) \subset \Gamma_0(\Delta''_{M_Z})$, то $\Pi(Z_1)_- \subset \Delta'_{M_Z}$ и поэтому не перекрывается с $B(Z)$ в силу (2.49). Если $\Gamma_0(\Delta_{A_1}) \cap \Gamma_0(\Delta''_{M_Z}) = \varnothing$, то $A_1 \in \Xi(\Delta''_{M_Z})$ и $\Gamma_0((A_1)_-) \subset \Gamma_0(\Delta''_{M_Z})$ (см. лемму 2.1.2, свойство 4). Значит, $(A_1)_- \subset ((\Delta'_{M_Z})^{1/2})_+$ и поэтому $\Pi(Z_1)_-$ не перекрывается с $B(Z)$ в силу (2.49).

(c) $M_{Z_1} \subset \Delta'_{M_Z}$. Тогда $\Pi(Z_1)_- \subset \Delta'_{M_Z} \cup (\Delta'_{M_Z})_-$ и поэтому не перекрывается с $B(Z)$ в силу (2.49).

Остается показать, что (2.37) является системой неперекрывающихся множеств. В самом деле, пусть Z, $Z_1 \in P_{**}(K,\gamma)$, $Z \neq Z_1$. Без ограничения общности, $|\Pi(Z_1)| \leqslant |\Pi(Z)|$. Если $\Pi(Z_1) \cap \hat{\Pi}(Z) \overset{d}{\neq} \varnothing$, то в силу утверждения $(\star)$ множество $B(Z)$ не перекрывается с $\Pi(Z_1)_-$ и, тем более, с $B(Z_1)$. Если $\Pi(Z_1) \cap \hat{\Pi}(Z) \overset{d}{=} \varnothing$, то $\Pi(Z_1)_-$ не перекрывается с $\hat{\Pi}(Z) \backslash \Pi(Z)$. Значит, $B(Z) \cap B(Z_1) \overset{d}{=} \varnothing$. $\square$

Пусть $K \in \mathcal{K}$, $\Phi(K) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $T_n := P\left(K, n^{-1}\Phi(K)\right)$, $\tilde{T}_n = \tilde{P}\left(K, n^{-1}\Phi(K)\right)$, $T_n^* = P_*\left(K, n^{-1}\Phi(K)\right)$.

Из пункта 4 леммы 1.3.3 получаем

Следствие 2.1.2. *Пусть l, $m \in \mathbb{N}$, $l \leqslant 2m$. Тогда любой элемент разбиения $\tilde{T}_m$ перекрывается с не более, чем $2C(d)$ элементами разбиения $\tilde{T}_l$.*

Лемма 2.1.6. *Пусть l, $m \in \mathbb{N}$, $l \leqslant 2m$. Тогда любой элемент разбиения T_m^* перекрывается с не более, чем $C_*(d) := 36C^2(d)$ элементами разбиения T_l^*.*

Доказательство. Пусть $Z \in T_m^*$, M — элемент разбиения $\tilde{T}_m$ такой, что $Z \subset M$. Если $\Gamma_0(Z) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$, то существует множество $A \in (T_m|_{(\Delta_M)_-})_+(\Delta_M)$ такое, что $Z = A \cap M$. Если $\Gamma_0(Z) \subset \Gamma_0(K)$, то $Z = M$; в этом случае положим $A = \Delta_M$.

Обозначим через $\{U_j\}_{j=1}^k$ множество элементов разбиения $\tilde{T}_l$, перекрывающихся с Z. Из следствия 2.1.2 вытекает, что $k \leqslant 2C(d)$. Пусть $j \in \{1, \dots, k\}$ и $\Gamma_0(\Delta_{U_j}) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$. Положим $T_{l,+}(\Delta_{U_j}) := (T_l|_{(\Delta_{U_j})_-})_+(\Delta_{U_j})$. Из (2.19) и (2.20) следует, что $T_l^*|_{U_j} = T_{l,+}(\Delta_{U_j})|_{U_j}$. Оценим сверху число элементов $T_{l,+}(\Delta_{U_j})$, перекрывающихся с Z.

Случай 1. Пусть $z^d(\Gamma_0(\Delta_A)) > z^d(\Gamma_0(U_j))$. Тогда $\Delta_A \subset \Delta_{U_j}$ и $\Gamma_0(\Delta_A) \cap \Gamma_0(\Delta_{U_j}) = \varnothing$. Значит, по лемме 2.1.2 (свойство 9), $T_{l,+}(\Delta_{U_j})|_{\Delta_A} = \{\Delta_A\}$ и поэтому Z перекрывается с одним элементом разбиения $T_{l,+}(\Delta_{U_j})$.

Случай 2. Пусть $z^d(\Gamma_0(\Delta_A)) = z^d(\Gamma_0(U_j))$. Тогда $z^d(\Gamma_0(M)) \leqslant z^d(\Gamma_0(U_j))$.

Положим $T_{Z,j} = T_l|_{(\Delta_A)_- \cap (\Delta_{U_j})_-}$.

Пусть существует множество $E \in T_l$ такое, что $E \cap (\Delta_A)_- \cap (\Delta_{U_j})_- \overset{d}{\neq} \varnothing$, $z^d(\Gamma_1(E \cap (\Delta_A)_- \cap (\Delta_{U_j})_-)) = z^d(\Gamma_0(U_j))$ и $z^d(\Gamma_1(E)) > z^d(\Gamma_0(U_j))$. Тогда Δ_E перекрывается с Δ_{U_j}. Так как T_l является разбиением и $U_j \in \tilde{T}_l$, то $\Delta'_E \supset \Delta_{U_j}$; так как $E \cap (\Delta_{U_j})_- \overset{d}{\neq} \varnothing$, то $\Gamma_0(\Delta_{U_j}) \subset \Gamma_0(\Delta'_E)$. Значит, $T_l|_{(\Delta_{U_j})_-} = \{(\Delta_{U_j})_-\}$. В силу леммы 2.1.2 (см. свойство 7), $\operatorname{card} T_{l,+}(\Delta_{U_j}) \leqslant 3$.

Далее считаем, что

$$\begin{gathered} z^d(\Gamma_1(E)) = z^d(\Gamma_0(U_j)) \quad \text{для любого} \quad E \in T_l \quad \text{такого, что} \\ E \cap (\Delta_A)_- \cap (\Delta_{U_j})_- \overset{d}{\neq} \varnothing, \quad z^d(\Gamma_1(E \cap (\Delta_A)_- \cap (\Delta_{U_j})_-)) = z^d(\Gamma_0(U_j)). \end{gathered} \tag{2.51}$$

1. Пусть $z^d(\Gamma_0(M)) < z^d(\Gamma_0(U_j))$. Тогда
$$(\Delta_A)_- \subset \Delta_M. \tag{2.52}$$
Если $\Delta'_M \supset (\Delta_A)_-$, то $\Delta_A \subset \Delta'_M \cup \Delta''_M$, то есть A не перекрывается с M — противоречие. Поэтому $(\Delta_A)_- \backslash \Delta'_M \overset{d}{\neq} \varnothing$ и $\Gamma_1(\Delta'_M) \not\supset \Gamma_0(\Delta_A)$. Значит, есть две возможности:

   (a) $\Gamma_1(\Delta'_M) \cap \Gamma_0(\Delta_A) = \varnothing$. В силу (2.52), множество $(\Delta_A)_- \backslash \Delta'_M$ содержится в некотором элементе разбиения T_m, поэтому из леммы 1.3.3 и замечания 2.1.1 получаем, что
$$\begin{gathered}\operatorname{card}\{\tilde E \in T_{Z,j} : \Gamma_1(\tilde E) \subset \Gamma_0(\Delta_{U_j} \cap \Delta_A)\} \overset{(2.51)}{=} \\ = \operatorname{card}\{\tilde E \in T_l : \Gamma_1(\tilde E) \cap \Gamma_0(\Delta_{U_j} \cap \Delta_A) \neq \varnothing\} \leqslant \\ \leqslant \operatorname{card}\{\tilde E \in T_l : \Gamma_1(\tilde E) \cap \Gamma_1((\Delta_A)_-) \neq \varnothing\} = \\ = \operatorname{card}\{\tilde E \in T_l : \Gamma_1(\tilde E) \cap \Gamma_1((\Delta_A)_- \backslash \Delta'_M) \neq \varnothing\} \leqslant \\ \leqslant \operatorname{card}\{\tilde E \in T_l : \tilde E \cap ((\Delta_A)_- \backslash \Delta'_M) \overset{d}{\neq} \varnothing\} \leqslant C(d).\end{gathered}$$
   Значит, в силу леммы 2.1.2 (см. свойства 7 и 8) получаем
$$\operatorname{card} T_{l,+}(\Delta_{U_j})|_{\Delta_A} = \operatorname{card}(T_{Z,j})_+(\Delta_A \cap \Delta_{U_j}) \leqslant 6C(d),$$
   то есть Z перекрывается с не более, чем $6C(d)$ элементами $T_{l,+}(\Delta_{U_j})$.

   (b) $\Delta'_M \neq \varnothing$, $\Gamma_1(\Delta'_M) \subset \Gamma_0(\Delta_A)$, при этом включение строгое. Тогда $\Delta''_M \subset \Delta_A$ и $R := (\Delta_A)_- \backslash \Delta'_M \overset{(2.52)}{\subset} M = \Delta_M \backslash (\Delta'_M \cup \Delta''_M)$. В силу леммы 1.3.3,
$$\operatorname{card}\{\tilde E \in T_l : \tilde E \cap R \overset{d}{\neq} \varnothing\} \leqslant C(d). \tag{2.53}$$
   Так как $z^d(\Gamma_0(M)) < z^d(\Gamma_0(A))$, то из леммы 2.1.2 (свойство 4) следует, что $A \in \Xi(\Delta_M)$ и $Z = A \cap M = \Delta_A \backslash \Delta''_M$. В силу леммы 2.1.2 (свойство 8), предложения 2.1.1 и замечания 2.1.1
$$T_{l,+}(\Delta_{U_j})|_{\Delta_A} = (T_{Z,j})_+(\Delta_{U_j} \cap \Delta_A),$$
$$\begin{gathered}\operatorname{card} T_{l,+}(\Delta_{U_j})|_Z \leqslant \operatorname{card}\{E \backslash \Delta''_M \overset{d}{\neq} \varnothing : E \in (T_{Z,j})_+(\Delta_{U_j} \cap \Delta_A)\} \leqslant \\ \leqslant \operatorname{card}\{E \in (T_{Z,j})_+(\Delta_{U_j} \cap \Delta_A) : E \cap \Delta''_M \overset{d}{=} \varnothing\} + \\ + \operatorname{card}\{E \in (T_{Z,j})_+(\Delta_{U_j} \cap \Delta_A) : E \cap \Delta''_M \overset{d}{\neq} \varnothing,\ \Delta_E \backslash \Delta''_M \overset{d}{\neq} \varnothing\} \leqslant \\ \leqslant \operatorname{card}\{E \in (T_{Z,j})_+(\Delta_{U_j} \cap \Delta_A) : E \cap \Delta''_M \overset{d}{=} \varnothing\} + 1 \overset{(2.12)}{\leqslant} \\ \leqslant 9 \operatorname{card}\{\tilde E \in T_{Z,j} : \Gamma_1(\tilde E) \subset \Gamma_0(\Delta_{U_j} \cap \Delta_A),\ \Gamma_1(\tilde E) \cap \Gamma_0(\Delta''_M) = \varnothing\} + 1 \\ \overset{(2.51)}{\leqslant} 9 \operatorname{card}\{\tilde E \in T_l : \Gamma_1(\tilde E) \cap \Gamma_1(R) \neq \varnothing\} + 1 \leqslant \\ \leqslant 9 \operatorname{card}\{\tilde E \in T_l : \tilde E \cap R \overset{d}{\neq} \varnothing\} + 1 \overset{(2.53)}{\leqslant} 18C(d).\end{gathered}$$
   Значит, Z перекрывается с не более, чем $18C(d)$ элементами $T_{l,+}(\Delta_{U_j})$.

2. Пусть $z^d(\Gamma_0(\Delta_A)) = z^d(\Gamma_0(M)) = z^d(\Gamma_0(\Delta_{U_j}))$. Возможны два случая.

(a) $A\in\Xi(K)$. Обозначим

$$T'_m|_{A_-}=\{E\in T_m|_{A_-}:\Gamma_1(E)\subset\Gamma_0(A)\}.$$

Тогда из леммы 2.1.2 (свойство 5) следует, что $\operatorname{card}T'_m|_{A_-}=1$, то есть $T'_m|_{A_-}=\{E_0\}$. В силу леммы 1.3.3, E_0 перекрывается с не более, чем $C(d)$ элементами T_l. Значит, $(\Delta_{U_j})_-\cap E_0$ перекрывается с не более, чем $C(d)$ элементами T_l. В силу замечания 2.1.1,

$$\operatorname{card}\{E\in T_l|_{(\Delta_{U_j}\cap A)_-}:\Gamma_1(E)\subset\Gamma_0(\Delta_{U_j}\cap A)\}\leqslant$$

$$\leqslant\operatorname{card}\{E\in T_l|_{(\Delta_{U_j}\cap A)_-}:E\cap E_0\overset{d}{\neq}\varnothing\}\leqslant C(d).$$

Из леммы 2.1.2 (свойства 7, 8) получаем, что разбиение $T_{l,+}(\Delta_{U_j})|_A=(T_l|_{(\Delta_{U_j}\cap A)_-})_+(\Delta_{U_j}\cap A)$ содержит не более $6C(d)$ элементов.

(b) $A\in\mathcal{R}$. В силу леммы 2.1.2 (свойство 6), $\Gamma_0(\Delta'_A)\subset\Gamma_0(\Delta_A)$ и $R:=(\Delta_A)_-\backslash(\Delta'_A)_-\in T_m|_{(\Delta_A)_-}$. По лемме 1.3.3, R перекрывается с не более, чем $C(d)$ элементами T_l. В силу предложения 2.1.1, леммы 2.1.2 (свойство 8) и замечания 2.1.1,

$$\operatorname{card}\{E\in T_{l,+}(\Delta_{U_j}):E\cap A\overset{d}{\neq}\varnothing\}=$$

$$=\operatorname{card}\{E\in T_{l,+}(\Delta_{U_j})|_{\Delta_A}:E\backslash\Delta'_A\overset{d}{\neq}\varnothing\}\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname{card}\{E\in(T_{Z,j})_+(\Delta_A\cap\Delta_{U_j}):E\cap\Delta'_A\overset{d}{=}\varnothing\}+$$
$$+\operatorname{card}\{E\in(T_{Z,j})_+(\Delta_A\cap\Delta_{U_j}):E\cap\Delta'_A\overset{d}{\neq}\varnothing,\ \Delta_E\backslash\Delta'_A\overset{d}{\neq}\varnothing\}\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname{card}\{E\in(T_{Z,j})_+(\Delta_A\cap\Delta_{U_j}):E\cap\Delta'_A\overset{d}{=}\varnothing\}+1\overset{(2.12)}{\leqslant}$$
$$\leqslant 9\operatorname{card}\{\tilde E\in T_{Z,j}:\Gamma_1(\tilde E)\subset\Gamma_0(\Delta_A\cap\Delta_{U_j}),\ \Gamma_1(\tilde E)\cap\Gamma_0(\Delta'_A)=\varnothing\}+1$$
$$\overset{(2.51)}{\leqslant}9\operatorname{card}\{\tilde E\in T_l:\tilde E\cap R\overset{d}{\neq}\varnothing\}+1\leqslant 18C(d).$$

Случай 3. Пусть $z^d(\Gamma_0(\Delta_A))<z^d(\Gamma_0(U_j))$. Тогда $\Delta_{U_j}\cup(\Delta_{U_j})_-\subset\Delta_A\subset\Delta_M$. Если $\Delta'_M\supset(\Delta_{U_j})_-$, то $U_j\subset\Delta'_M\cup\Delta''_M$ и поэтому U_j не перекрывается с Z. Значит, $(\Delta_{U_j})_-\backslash\Delta'_M\overset{d}{\neq}\varnothing$. Кроме того, $\Gamma_1(\Delta'_M)\not\supset\Gamma_0(\Delta_{U_j})$. Поэтому остаются две возможности.

1. $\Gamma_1(\Delta'_M)\cap\Gamma_0(\Delta_{U_j})=\varnothing$. Тогда в силу замечания 2.1.1 и леммы 1.3.3

$$\operatorname{card}\{E\in T_l|_{(\Delta_{U_j})_-}:\Gamma_1(E)\subset\Gamma_0(\Delta_{U_j})\}\leqslant$$

$$\leqslant\operatorname{card}\{E\in T_l|_{(\Delta_{U_j})_-}:E\cap((\Delta_{U_j})_-\backslash\Delta'_M)\overset{d}{\neq}\varnothing\}\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname{card}\{E\in T_l|_{(\Delta_{U_j})_-}:E\cap(\Delta_M\backslash\Delta'_M)\overset{d}{\neq}\varnothing\}\leqslant C(d).$$

Из леммы 2.1.2 (свойство 7) получаем, что $\operatorname{card}T_{l,+}(\Delta_{U_j})\leqslant 6C(d)$.

2. $\Delta'_M\neq\varnothing$, $\Gamma_1(\Delta'_M)\subset\Gamma_0(\Delta_{U_j})$ и включение строгое. Так как $\Delta'_A=\varnothing$ или $\Gamma_0(\Delta'_A)\subset\Gamma_0(\Delta_A)$, $(\Delta_{U_j})_-\subset\Delta_A$ и U_j перекрывается с $Z=A\cap M$, то $\Delta'_A\cap\Delta_{U_j}\overset{d}{=}\varnothing$, поэтому $Z\cap\Delta_{U_j}=\Delta_{U_j}\backslash\Delta''_M$. Из предложения 2.1.1, леммы 2.1.2 (свойство 8) и леммы 1.3.3 следует, что

$$\operatorname{card}\{E\in T_{l,+}(\Delta_{U_j}):E\cap Z\overset{d}{\neq}\varnothing\}=$$

$$=\operatorname{card}\{E\in T_{l,+}(\Delta_{U_j}):E\cap(\Delta_{U_j}\backslash\Delta''_M)\overset{d}{\neq}\varnothing\}\leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{card}\{E \in T_{l,+}(\Delta_{U_j}) : E \cap \Delta''_M \overset{d}{=} \varnothing\} +$$
$$+\operatorname{card}\{E \in T_{l,+}(\Delta_{U_j}) : E \cap \Delta''_M \overset{d}{\neq} \varnothing,\ \Delta_E \backslash \Delta''_M \overset{d}{\neq} \varnothing\} \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{card}\{E \in T_{l,+}(\Delta_{U_j}) : E \cap \Delta''_M \overset{d}{=} \varnothing\} + 1 \overset{(2.12)}{\leqslant}$$
$$\leqslant 9\operatorname{card}\{\tilde{E} \in T_l|_{(\Delta_{U_j})_-} : \Gamma_1(\tilde{E}) \subset \Gamma_1((\Delta_{U_j})_-),\ \Gamma_1(\tilde{E}) \cap \Gamma_0(\Delta''_M) = \varnothing\} + 1 \leqslant$$
$$\leqslant 9\operatorname{card}\{\tilde{E} \in T_l|_{(\Delta_{U_j})_-} : \Gamma_1(\tilde{E}) \cap \Gamma_1((U_j)_- \backslash \Delta'_M) \overset{d}{\neq} \varnothing\} + 1 \leqslant$$
$$\leqslant 9\operatorname{card}\{\tilde{E} \in T_l|_{(\Delta_{U_j})_-} : \tilde{E} \cap M \overset{d}{\neq} \varnothing\} + 1 \leqslant 18C(d)$$

(предпоследнее неравенство следует из замечания 2.1.1 и включения $(\Delta_{U_j})_- \subset \Delta_M$).

Итак, в каждом из случаев мы получили, что Z перекрывается с не более, чем $18C(d)$ элементами $T_{l,+}(\Delta_{U_j})$, $j = \overline{1,\, k}$. Так как $k \leqslant 2C(d)$, то Z перекрывается с не более, чем $36C^2(d)$ элементами T_l^*. □

Из следствия 2.1.1 и леммы 2.1.6 получаем

Следствие 2.1.3. *Пусть* $T_n^{**} = P_{**}(K,\, n^{-1}\Phi(K))$. *Тогда*

(1) $\operatorname{card} T_n^{**} \underset{d}{\lesssim} n$;

(2) *существует* $C_{**}(d) \in \mathbb{N}$ *такое, что для любых* $l,\, m \in \mathbb{N}$, $l \leqslant 2m$, *выполнено следующее утверждение: любой элемент разбиения* T_m^{**} *перекрывается с не более, чем* $C_{**}(d)$ *элементами разбиения* T_l^{**}.

Пусть $E = \prod_{j=1}^d [\alpha_j,\, \beta_j]$, $\beta_1 - \alpha_1 = \dots = \beta_{d-1} - \alpha_{d-1}$. Обозначим $l(E) = \beta_1 - \alpha_1$, $h(E) = \beta_d - \alpha_d$.

Предложение 2.1.3. *Пусть* $\gamma > 0$, $Z \in P_{**}(K,\, \gamma)$, $Z = \Pi \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2)$, $\Pi = \Pi(Z)$, $\Pi_1 = \Pi_1(Z)$, $\Pi_2 = \Pi_2(Z)$ *определены в лемме 2.1.4; если* $\Gamma_0(\Pi) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$, *то* $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}(Z)$, $\hat{\Pi}_1 = \hat{\Pi}_1(Z)$, $\hat{\Pi}_2 = \hat{\Pi}_2(Z)$ *определим в соответствии с леммой 2.1.5, если* $\Gamma_0(\Pi) \subset \Gamma_0(K)$, *то* $\hat{\Pi} := \Pi \cup (\Pi_-)^{1/2}$, $\hat{\Pi}_i := \Pi_i$, $i = 1,\, 2$. *Пусть* $I \subset \{1,\, 2\}$, $E \subset \Pi$ *— параллелепипед, не перекрывающийся с* $\cup_{i\in I}\hat{\Pi}_i$, *при этом*

$$p_{d-1}(E) \in \Xi(p_{d-1}(\Pi)) \text{ и } l(E) \leqslant l(\Pi_i),\ \ i \in I. \tag{2.54}$$

Пусть $\nu = \frac{h(E)}{l(E)}$. *Тогда существует покрытие* $\mathcal{P}$ *множества* E *замкнутыми кубами* K_j *со следующими свойствами:*

1. $\operatorname{card} \mathcal{P} \underset{d}{\lesssim} \lceil \nu \rceil$;
2. *если* $\hat{K}_j$ *— параллелепипед, такой, что* $(\hat{K}_j)^{2/3} = K_j$, *то* $\hat{K}_j \subset \hat{\Pi}$ *и* $\hat{K}_j$ *не перекрывается с* $\hat{\Pi}_i \backslash (\Pi_i)^{1/4}$, $i \in I$; *если при этом* $\Gamma_1(\Pi_i) \subset \Gamma_1(\Pi)$, *то* $\hat{K}_j$ *не перекрывается с* $\hat{\Pi}_i$;
3. $p_{d-1}(K_j) \in \Xi_4(p_{d-1}(E))$;
4. $z^d(\Gamma_0(E)) < z^d(\Gamma_1(K_j)) \leqslant z^d(\Gamma_1(E))$.

Доказательство. Покажем, что $\Pi \cap \hat{\Pi}_i = \Pi_i$ и, значит, $p_{d-1}(\Pi_i) = p_{d-1}(\hat{\Pi}_i)$. Случай $\Gamma_0(\Pi) \subset \Gamma_0(K)$ тривиален. Пусть $\Gamma_0(\Pi) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$. Тогда $\Pi_i \subset \Pi \cap \hat{\Pi}_i$ по леммам 2.1.4 и 2.1.5. Поскольку Π_i и $\Pi \cap \hat{\Pi}_i$ являются замкнутыми параллелепипедами, то достаточно проверить, что $(\Pi\cap\hat{\Pi}_i)\backslash\Pi_i$ имеет пустую внутренность. Без ограничения общности, $i = 1$. Пусть $x \in (\Pi\cap\hat{\Pi}_1)\backslash\Pi_1$. Тогда из условия $x \in \hat{\Pi}_1$ следует, что $x \notin Z$; при этом, $x \in \Pi$, так что $x \in \Pi_1 \cup \Pi_2$. Но $x \notin \Pi_1$, то есть $x \in \Pi_2$. Тем самым, $(\Pi \cap \hat{\Pi}_1)\backslash\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \hat{\Pi}_2$. Так как $\hat{\Pi}_1$ не перекрывается с $\hat{\Pi}_2$, то $(\Pi \cap \hat{\Pi}_1)\backslash\Pi_1$ имеет пустую внутренность.

Покроем E кубами K_j, $1 \leqslant j \leqslant s_1 \leqslant 2^{4d}\lceil\nu\rceil \underset{d}{\lesssim} \lceil\nu\rceil$, со свойствами 3 и 4. Из свойства 3 и (2.54) следует, что

$$h(K_j) \leqslant \frac{1}{16}h(\Pi), \quad l(\hat{K}_j) = l(K_j) = \frac{1}{16}l(E) \leqslant \frac{1}{16}l(\Pi_i), \ \ i \in I. \tag{2.55}$$

Докажем свойство 2. Сначала проверим включение $\hat{K}_j \subset \hat{\Pi}$. В самом деле, достаточно показать, что $z^d(\Gamma_0(\hat{K}_j)) \geqslant z^d(\Gamma_0(\hat{\Pi}))$. Это соотношение следует из неравенств

$$z^d(\Gamma_0(\hat{K}_j)) = z^d(\Gamma_1(\hat{K}_j)) - h(\hat{K}_j) =$$
$$= z^d(\Gamma_1(\hat{K}_j)) - \frac{3}{2}h(K_j) \overset{(2.55)}{\geqslant} z^d(\Gamma_1(\hat{K}_j)) - \frac{3}{32}h(\Pi),$$
$$z^d(\Gamma_0(\hat{\Pi})) = z^d(\Gamma_0(\Pi)) - \frac{1}{2}h(\Pi) \leqslant$$
$$\leqslant z^d(\Gamma_1(K_j)) - \frac{1}{2}h(\Pi) = z^d(\Gamma_1(\hat{K}_j)) - \frac{1}{2}h(\Pi).$$

Пусть $i \in I$, $1 \leqslant s \leqslant s_1$. Покажем, что $\hat{K}_s$ и $\hat{\Pi}_i\backslash(\Pi_i)^{1/4}$ не перекрываются, а если $\Gamma_1(\Pi_i) \subset \Gamma_1(\Pi)$, то $\hat{K}_s$ и $\hat{\Pi}_i$ не перекрываются. Из условий (2.54) и $p_{d-1}(\Pi_i) \in \Xi(p_{d-1}(\Pi))$ следует, что либо $p_{d-1}(E)$ и $p_{d-1}(\hat{\Pi}_i)$ не перекрываются, либо $p_{d-1}(E) \subset p_{d-1}(\hat{\Pi}_i)$. В первом случае $\hat{K}_s$ не перекрывается с $\hat{\Pi}_i$ (поскольку $p_{d-1}(\hat{K}_s) \subset p_{d-1}(E)$).

Рассмотрим второй случай. Так как E не перекрывается с $\hat{\Pi}_i$, то $z^d(\Gamma_0(E)) \geqslant z^d(\Gamma_1(\hat{\Pi}_i))$ или $z^d(\Gamma_1(E)) \leqslant z^d(\Gamma_0(\hat{\Pi}_i))$. Если выполнено второе неравенство, то $\hat{K}_s$ не перекрывается с $\hat{\Pi}_i$ (поскольку $z^d(\Gamma_1(\hat{K}_s)) \leqslant z^d(\Gamma_1(E))$).

Остается рассмотреть случай $p_{d-1}(E) \subset p_{d-1}(\hat{\Pi}_i)$, $z^d(\Gamma_0(E)) \geqslant z^d(\Gamma_1(\hat{\Pi}_i))$. Отметим, что тогда $\Gamma_1(\Pi_i) \cap \Gamma_1(\Pi) = \varnothing$.

Если $\hat{\Pi}_i$ перекрывается с Π, то в силу равенства $\Pi_i = \hat{\Pi}_i \cap \Pi$ получаем $\Gamma_1(\Pi_i) = \Gamma_1(\hat{\Pi}_i)$. Из условий $h(\Pi_i^{1/4}) \geqslant \frac{l(\hat{\Pi}_i)}{4}$, $h(\hat{K}_s) = \frac{3}{2}l(\hat{K}_s) \overset{(2.55)}{\leqslant} \frac{3}{32}l(\hat{\Pi}_i)$ и $z^d(\Gamma_0(E)) < z^d(\Gamma_1(K_s))$ следует, что

$$z^d(\Gamma_0(\hat{K}_s)) \geqslant z^d(\Gamma_1(K_s)) - \frac{3}{32}l(\hat{\Pi}_i) \geqslant z^d(\Gamma_0(E)) - \frac{l(\hat{\Pi}_i)}{4} \geqslant$$
$$\geqslant z^d(\Gamma_1(\hat{\Pi}_i)) - \frac{l(\hat{\Pi}_i)}{4} \geqslant z^d(\Gamma_1(\Pi_i)) - h(\Pi_i^{1/4}) = z^d(\Gamma_0(\Pi_i^{1/4}))$$

и поэтому $\hat{K}_s \cap \hat{\Pi}_i \subset \Pi_i^{1/4}$.

Пусть $\hat{\Pi}_i$ не перекрывается с Π. Тогда $\Gamma_0(\Pi) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$, и по лемме 2.1.5, $(\hat{\Pi}_i^{1/5})_+$ не перекрывается с Π. Значит, $z^d(\Gamma_0(\Pi)) \geqslant z^d(\Gamma_1(\hat{\Pi}_i)) + h(\hat{\Pi}_i^{1/5})$. Из условий $h(\hat{\Pi}_i^{1/5}) \geqslant \frac{l(\hat{\Pi}_i)}{5}$, $h(\hat{K}_s) \overset{(2.55)}{\leqslant} \frac{3}{32}l(\hat{\Pi}_i)$, $z^d(\Gamma_0(E)) < z^d(\Gamma_1(K_s))$ и $E \subset \Pi$ следует, что

$$z^d(\Gamma_0(\hat{K}_s)) \geqslant z^d(\Gamma_1(\hat{K}_s)) - \frac{3}{32}l(\hat{\Pi}_i) \geqslant z^d(\Gamma_0(E)) - \frac{l(\hat{\Pi}_i)}{5} \geqslant$$
$$\geqslant z^d(\Gamma_0(\Pi)) - h(\hat{\Pi}_i^{1/5}) \geqslant z^d(\Gamma_1(\hat{\Pi}_i))$$

и поэтому $\hat{K}_s$ не перекрывается с $\hat{\Pi}_i$. $\square$

2.2 Поточечная оценка приближения функции из класса W^r_∞ полиномом через интегральный оператор

Предложение 2.2.1. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $0 = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_k$, $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = 1$, $\Delta_k = \{(x_1, \ldots, x_{d-1})\}$, $\Delta_i = \prod_{j=1}^{d-1}[\sigma^i_j, \tau^i_j]$, $\tau^i_1 - \sigma^i_1 = \cdots = \tau^i_{d-1} - \sigma^i_{d-1} = l_i$, $0 \leqslant i \leqslant k$. *Для* $1 \leqslant i \leqslant k$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}) \in [0, 1]^{d-1}$ *положим*

$$s(t) = \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}},$$

$$y_j = y_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}, t) =$$

$$= (1 - s(t))((1-\lambda_j)\sigma^{i-1}_j + \lambda_j \tau^{i-1}_j) + s(t)((1-\lambda_j)\sigma^i_j + \lambda_j\tau^i_j), \ \ 1 \leqslant j \leqslant d-1,$$

$$y_d = y_d(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}, t) = (1 - s(t))(x_d - H_k + H_{i-1}) + s(t)(x_d - H_k + H_i)$$

и обозначим через $J(y_1, \ldots, y_d)$ *якобиан отображения* $\varphi : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}, t) \mapsto (y_1, \ldots, y_d)$. *Пусть* $0 < c \leqslant C$ *таковы, что*

$$cl_i \leqslant H_k - H_i \leqslant Cl_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant k,$$

$$c\frac{H_i - H_{i-1}}{H_k} \leqslant t_i - t_{i-1} \leqslant C\frac{H_i - H_{i-1}}{H_k}, \ \ 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Тогда $|J(y_1, \ldots, y_d)| \underset{c,C}{\asymp} H_k(x_d - y_d)^{d-1}$.

На рисунке 2.6 изображен пример для $k = 4$.

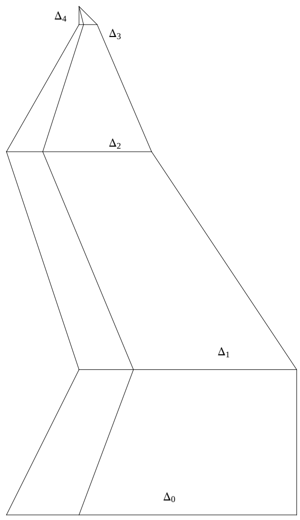


Рис. 2.6:

Доказательство. Матрица Якоби отображения φ является верхнетреугольной и на ее диагонали стоят числа $\frac{\partial y_j}{\partial \lambda_j}$, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, и $\frac{\partial y_d}{\partial t}$, при этом

$$\frac{\partial y_j}{\partial \lambda_j} = (1 - s(t))l_{i-1} + s(t)l_i \underset{c,C}{\asymp}$$

$$\asymp (1 - s(t))(H_k - H_{i-1}) + s(t)(H_k - H_i) = x_d - y_d, \ \ 1 \leqslant j \leqslant d-1,$$

$$\frac{\partial y_d}{\partial t} = \frac{1}{t_i - t_{i-1}}(x_d - H_k + H_i - x_d + H_k - H_{i-1}) \underset{c,C}{\asymp} H_k.$$

Отсюда получаем утверждение. □

Теорема I. (см. [41], [143]). *Пусть* $\Pi = \prod_{j=1}^{d}[\alpha_j,\, \beta_j] \subset \mathbb{R}^d$ *— параллелепипед,* $f : \Pi \to \mathbb{R}$ *— липшицева функция,* $\varphi : p_{d-1}(\Pi) \to \mathbb{R}$, $\varphi(x') = f(x',\, \alpha_d)$, $p > 1$. *Тогда* $\|\varphi\|_{L_1(p_{d-1}(\Pi))} \underset{p,\Pi}{\lesssim} \|f\|_{L_p(\Pi)} + \|\nabla f\|_{L_p(\Pi)}$.

Пусть $m,\, \nu \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}^d$. Скажем, что $E \in \mathcal{R}^*_{m,\nu}$, если

$$E = \Pi \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2), \tag{2.56}$$

где

$$\Pi = \prod_{j=1}^{d}[\alpha_j,\, \beta_j], \quad \Pi_i = \prod_{j=1}^{d}[\alpha_j^i,\, \beta_j^i] \subset \Pi \text{ или } \Pi_i = \varnothing, \quad i = 1,\, 2; \tag{2.57}$$

при этом, $p_{d-1}(\Pi)$ является кубом,

$$p_{d-1}(\Pi_i) \in \cup_{k \geqslant m} \Xi_k(p_{d-1}(\Pi)), \quad i = 1,\, 2, \text{ если } \Pi_i \neq \varnothing, \tag{2.58}$$

$$\beta_1 - \alpha_1 < \beta_d - \alpha_d \leqslant 2(\beta_1 - \alpha_1), \quad \beta_1^i - \alpha_1^i \leqslant \beta_d^i - \alpha_d^i \leqslant \nu(\beta_1^i - \alpha_1^i), \quad i = 1,\, 2. \tag{2.59}$$

Если при этом

$$\beta_d - \alpha_d \geqslant \gamma(\beta_1 - \alpha_1) \tag{2.60}$$

для некоторого $\gamma > 1$, то будем говорить, что $E \in \mathcal{R}^*_{m,\nu,\gamma}$.

Для $E \in \mathcal{R}^*_{m,\nu}$, $\lambda \in (0,\, 1)$, $\mu \in \mathbb{N}$ положим

$$E_{\lambda,\mu} = \Pi^{1-\lambda} \backslash (\Pi_1(\mu) \cup \Pi_2(\mu)), \quad \lambda \in (0,\, 1), \quad \mu \in \mathbb{N}$$

(см. обозначения (2.3), (2.4)). Заметим, что $E_{\lambda,\mu} \subset E$.

Лемма 2.2.1. *Для любых* $\lambda \in (0,\, 1)$, $\nu \in \mathbb{N}$ *существуют величины* $\mu \in \mathbb{N} \cap [2,\, \infty)$, $m_* \in \mathbb{N}$, $C_{\lambda,\nu,d} > 0$ *и* $M_{\lambda,\nu,d} > 0$ *такие, что для любой области* $E \in \mathcal{R}^*_{m_*,\nu}$ *и для любого* $x \in E_{\lambda,\mu}$ *существует множество* $G_x \subset E$*, замкнутое относительно* E*, а для любой липшицевой функции* $f : E \to \mathbb{R}$ *— число* P_f*, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *справедлива оценка*

$$|f(x) - P_f| \leqslant C_{\lambda,\nu,d} \int\limits_{G_x} |x - y|^{1-d} |\nabla f(y)|\, dy; \tag{2.61}$$

2. *для любого* $y \in G_x$ *выполнено* $x_d - y_d \geqslant M_{\lambda,\nu,d} \max_{1 \leqslant i \leqslant d-1} |x_i - y_i|$.

При этом, отображение $f \mapsto P_f$ *линейно, для* $p > 1$ *выполнена оценка*

$$|P_f| \underset{\Pi,\lambda,p}{\lesssim} \|\nabla f\|_{L_p(E \backslash E_{\lambda,1})} + \|f\|_{L_p(E \backslash E_{\lambda,1})}, \tag{2.62}$$

и если $f|_{\Gamma_0(E)} = 0$*, то* $P_f = 0$.

Доказательство. Определим параллелепипеды Π, Π_1, Π_2 равенством (2.56). Пусть $\Pi = \prod_{j=1}^{d}[\alpha_j,\, \beta_j]$, при этом $\beta_j - \alpha_j = l_*$, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, $l_* \leqslant \beta_d - \alpha_d \leqslant 2l_*$. Если $m_* \geqslant 2$, то существует $d-1$-мерный куб

$$\Delta = \prod_{j=1}^{d-1}[\sigma_j,\, \tau_j] \in \Xi_2(p_{d-1}(\Pi)) \tag{2.63}$$

такой, что $\Delta \times [\alpha_d, \beta_d]$ не перекрывается с $\Pi_1 \cup \Pi_2$.

Положим для $Z \subset \mathbb{R}^{d-1}$

$$Z_\lambda = Z \times \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \alpha_d + \frac{\lambda}{2}\beta_d \right\}. \tag{2.64}$$

Пусть $c \geqslant 1$, Δ_λ определено в соответствии с (2.64). Для каждой точки $x = (x_1, \dots, x_d) \in \Pi^{1-\lambda}$, $d-1$-мерного куба $\tilde{\Delta} = \prod_{j=1}^{d-1} [\tilde{\sigma}_j, \tilde{\tau}_j] \subset p_{d-1}(\Pi)$ и числа $\rho \in \left[0, \frac{\lambda l_*}{4}\right]$ таких, что

$$(x_1, \dots, x_{d-1}) \in \tilde{\Delta}, \quad \tilde{\tau}_1 - \tilde{\sigma}_1 = \dots = \tilde{\tau}_{d-1} - \tilde{\sigma}_{d-1} = \frac{\rho}{c}, \tag{2.65}$$

рассмотрим семейство кривых

$$\mathcal{H}(x, \tilde{\Delta}, \rho) = \{\gamma_\zeta(\cdot) : \zeta \in \Delta_\lambda\},$$

$$\gamma_\zeta(t) = \begin{cases} \frac{1-\tilde{\lambda}-t}{1-\tilde{\lambda}-\frac{\lambda}{2}}\zeta + \frac{t-\frac{\lambda}{2}}{1-\tilde{\lambda}-\frac{\lambda}{2}}\tilde{\zeta}, & t \in \left[\frac{\lambda}{2}, 1 - \tilde{\lambda}\right], \\ \frac{t+\tilde{\lambda}-1}{\tilde{\lambda}}x + \frac{1-t}{\tilde{\lambda}}\tilde{\zeta}, & t \in [1-\tilde{\lambda}, 1], \end{cases} \tag{2.66}$$

где

$$\tilde{\lambda} = \frac{\rho}{x_d - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\alpha_d - \frac{\lambda}{2}\beta_d}, \tag{2.67}$$

$$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d), \quad \tilde{\zeta} = (\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_d),$$
$$\zeta_j = (1-\lambda_j)\sigma_j + \lambda_j\tau_j, \quad \tilde{\zeta}_j = (1-\lambda_j)\tilde{\sigma}_j + \lambda_j\tilde{\tau}_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant d-1$$

(так как $\zeta \in \Delta_\lambda$, то $\lambda_j \in [0, 1]$),

$$\zeta_d \overset{(2.64)}{=} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\alpha_d + \frac{\lambda}{2}\beta_d, \quad \tilde{\zeta}_d = x_d - \rho. \tag{2.68}$$

Заметим, что из неравенств $\beta_d - \alpha_d \geqslant l_*$, $\rho \leqslant \frac{\lambda l_*}{4}$ и условия $x \in \Pi^{1-\lambda}$ (т.е. $x_d \geqslant (1-\lambda)\alpha_d + \lambda\beta_d$) следует, что $\tilde{\lambda} \leqslant \frac{1}{2}$ (поэтому $\frac{\lambda}{2} < \frac{1}{2} \leqslant 1 - \tilde{\lambda}$),

$$x_d - \zeta_d \geqslant \frac{\lambda l_*}{2} \quad \text{и} \quad \tilde{\zeta}_d - \zeta_d = x_d - \rho - \zeta_d \geqslant \frac{\lambda l_*}{4}. \tag{2.69}$$

Кроме того, $|\dot{\gamma}_\zeta(t)| \underset{\lambda}{\lesssim} l_*$ в силу (2.65) и (2.67).

Положим

$$\mathcal{G}_{l_*,\lambda,c} = \left\{ \mathcal{H}(x, \tilde{\Delta}, \rho) : x \in \Pi^{1-\lambda}, \ \rho \in \left[0, \frac{\lambda l_*}{4}\right], \ \tilde{\Delta} \text{ удовлетворяет (2.65)} \right\}.$$

Пусть B — d-мерный евклидов шар. Для семейства $\Gamma = \{\gamma_\zeta\}_{\zeta\in\Delta_\lambda} \in \mathcal{G}_{l_*,\lambda,c}$ обозначим

$$Q_{B,\Gamma} = \left\{ \zeta \in \Delta_\lambda : \exists t \in \left[\frac{\lambda}{2}, 1\right] : \gamma_\zeta(t) \in B \right\}.$$

Докажем

Утверждение ($\diamond$). Существует такое $c_0 = c_0(\lambda, d) \geqslant 1$, что для любых $l_* > 0$, $c \geqslant c_0$, s, $\tilde{s} \in (0, 1]$, для любого семейства $\Gamma \in \mathcal{G}_{l_*,\lambda,c}$ и любых шаров B, $\tilde{B}$ с радиусами $\frac{\lambda l_* s}{c^2}$ и $\frac{\lambda l_* \tilde{s}}{c^2}$ и центрами в точках $(y_1, \dots, y_{d-1}, (1-s)x_d + s\zeta_d)$ и $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{d-1}, (1-\tilde{s})x_d + \tilde{s}\zeta_d)$ соответственно найдется куб $\hat{\Delta} \in \Xi_4(\Delta)$ такой, что $(Q_{B,\Gamma} \cup Q_{\tilde{B},\Gamma}) \cap \hat{\Delta}_\lambda = \varnothing$.

Доказательство утверждения ($\diamond$). Пусть $\Gamma = \mathcal{H}(x, \tilde{\Delta}, \rho)$. Для $t, t' \in \left[\frac{\lambda}{2}, 1\right]$, $\gamma_\zeta(t)$, $\gamma_{\zeta'}(t') \in B$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \Delta_\lambda$, $\zeta' = (\zeta'_1, \dots, \zeta'_d) \in \Delta_\lambda$ определим λ_j, $\lambda'_j \in [0, 1]$ равенствами

$$\zeta_j \in (1-\lambda_j)\sigma_j + \lambda_j\tau_j, \quad \zeta'_j \in (1-\lambda'_j)\sigma_j + \lambda'_j\tau_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant d-1, \tag{2.70}$$

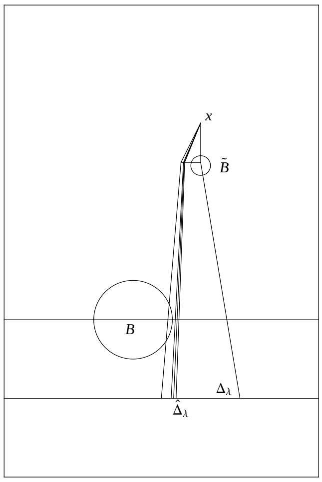


Рис. 2.7:

и положим

$$\tilde{\zeta}_j \in (1-\lambda_j)\tilde{\sigma}_j + \lambda_j\tilde{\tau}_j, \;\; \tilde{\zeta}'_j \in (1-\lambda'_j)\tilde{\sigma}_j + \lambda'_j\tilde{\tau}_j, \;\; 1 \leqslant j \leqslant d-1, \tag{2.71}$$

$\tilde{\zeta}_d = \tilde{\zeta}'_d = x_d - \rho$, $\tilde{\zeta} = (\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_d)$, $\tilde{\zeta}' = (\tilde{\zeta}'_1, \ldots, \tilde{\zeta}'_d)$.

Из (2.63) следует, что $\tau_j - \sigma_j = \frac{l_*}{4}$, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, поэтому

$$\frac{4\rho}{l_* c}(\zeta_j - \zeta'_j) = \frac{4\rho}{l_* c}(\tau_j - \sigma_j)(\lambda_j - \lambda'_j) = \frac{\rho}{c}\frac{\tilde{\zeta}_j - \tilde{\zeta}'_j}{\tilde{\tau}_j - \tilde{\sigma}_j} \overset{(2.65)}{=} \tilde{\zeta}_j - \tilde{\zeta}'_j. \tag{2.72}$$

Оценим диаметры множеств

$$Q^+_{B,\Gamma} = \left\{\zeta \in \Delta_\lambda : \exists t \in \left[1-\tilde{\lambda}, 1\right] : \gamma_\zeta(t) \in B\right\}$$

и

$$Q^-_{B,\Gamma} = \left\{\zeta \in \Delta_\lambda : \exists t \in \left[\frac{\lambda}{2}, 1-\tilde{\lambda}\right] : \gamma_\zeta(t) \in B\right\}.$$

Оценка диаметра $Q^+_{B,\Gamma}$. Из (2.69) следует, что при $c_0 > 2$

$$s(x_d - \zeta_d) - \frac{sl_*\lambda}{c^2} \geqslant \frac{sl_*\lambda}{2} - \frac{sl_*\lambda}{c^2} > \frac{sl_*\lambda}{4}. \tag{2.73}$$

Поэтому если $\rho = 0$, то $Q^+_{B,\Gamma} = \varnothing$, так как $x_d > (1-s)x_d + s\zeta_d + \frac{\lambda l_* s}{c^2}$.

Пусть $\rho > 0$, t, $t' \in [1-\tilde{\lambda}, 1]$, $\gamma_\zeta(t)$, $\gamma_{\zeta'}(t') \in B$. Оценим сверху $|\zeta - \zeta'|$. В силу (2.66),

$$\gamma_\zeta(t) \in [x, \tilde{\zeta}], \;\; \gamma_{\zeta'}(t') \in [x, \tilde{\zeta}']. \tag{2.74}$$

Пусть φ — угол при вершине x в треугольнике $(x, \tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}')$, h_x — длина высоты в этом треугольнике, проведенной из вершины x. Так как $x_d - \tilde{\zeta}_d = x_d - \tilde{\zeta}'_d = \rho$,

$$(x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \tilde{\Delta}, \;\; (\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_{d-1}) \in \tilde{\Delta}, \;\; (\tilde{\zeta}'_1, \ldots, \tilde{\zeta}'_{d-1}) \in \tilde{\Delta}$$

и длина ребра $\tilde{\Delta}$ равна $\frac{\rho}{c}$ (см. (2.65)), $c \geqslant 1$, то $h_x = \rho$, $|x - \tilde{\zeta}| \underset{d}{\lesssim} \rho$, $|x - \tilde{\zeta}'| \underset{d}{\lesssim} \rho$ и по теореме синусов $|\tilde{\zeta} - \tilde{\zeta}'| \leqslant M_1(d) \cdot \rho \sin\varphi$, где $M_1(d)$ зависит только от d. Так как $\gamma_\zeta(t) \in B$, $\gamma_{\zeta'}(t') \in B$, $(y_1, \ldots, y_{d-1}, (1-s)x_d + s\zeta_d)$ является центром шара B, а $\frac{sl_*\lambda}{c^2}$ — его радиусом, то

$$|\gamma_\zeta(t) - \gamma_{\zeta'}(t')| \leqslant \frac{2sl_*\lambda}{c^2} \tag{2.75}$$

и при $c_0 > 2$ имеем

$$\min\{|x-\gamma_\zeta(t)|,\,|x-\gamma_{\zeta'}(t')|\} \geqslant s(x_d-\zeta_d) - \frac{sl_*\lambda}{c^2} \overset{(2.73)}{\geqslant} \frac{sl_*\lambda}{4}. \qquad (2.76)$$

Из (2.74), (2.75), (2.76) и теоремы синусов следует, что $\sin\varphi \leqslant \frac{8}{c^2}$. Значит,

$$|\zeta-\zeta'| \overset{(2.72)}{\leqslant} \frac{l_*c}{4\rho} M_1(d)\cdot\rho\frac{8}{c^2} = \frac{2M_1(d)l_*}{c}. \qquad (2.77)$$

Оценка диаметра $Q^-_{B,\Gamma}$. Пусть $t,\,t' \in \left[\frac{\lambda}{2},\,1-\tilde\lambda\right]$, $\gamma_\zeta(t)$, $\gamma_{\zeta'}(t') \in B$. Положим

$$L = \{(\eta_1,\,\ldots,\,\eta_{d-1},\,\min\{x_d-\rho,\,(1-s)x_d+s\zeta_d\}),\;\; \eta_j\in\mathbb{R},\; 1\leqslant j\leqslant d-1\} \qquad (2.78)$$

и обозначим через $\mathbf{l}$ и $\mathbf{l}'$ прямые, содержащие отрезки

$$[\zeta,\,\tilde\zeta] \overset{(2.66)}{=} \left[\gamma_\zeta\left(\frac{\lambda}{2}\right),\,\gamma_\zeta(1-\tilde\lambda)\right] \quad\text{и}\quad [\zeta',\,\tilde\zeta'] \overset{(2.66)}{=} \left[\gamma_{\zeta'}\left(\frac{\lambda}{2}\right),\,\gamma_{\zeta'}(1-\tilde\lambda)\right]$$

соответственно. Пусть $\mathbf{l}$ и $\mathbf{l}'$ пересекают плоскость L в точках $\eta = (\eta_1,\,\ldots,\,\eta_d)$ и $\eta' = (\eta'_1,\,\ldots,\,\eta'_d)$ соответственно (в силу (2.68) и неравенства $\tilde\lambda \leqslant \frac{1}{2}$ эти точки определены однозначно).

Оценим сверху величину $|\eta-\eta'|$. Пусть ξ, ξ' — ортогональные проекции точек $\gamma_\zeta(t)$ и $\gamma_{\zeta'}(t')$ соответственно на плоскость L. Так как радиус шара B равен $\frac{\lambda l_* s}{c^2}$, $\gamma_\zeta(t)\in B$, $\gamma_{\zeta'}(t')\in B$, то

$$|\xi-\xi'| \leqslant |\gamma_\zeta(t)-\gamma_{\zeta'}(t')| \leqslant \frac{2\lambda l_* s}{c^2}. \qquad (2.79)$$

Пусть $\gamma_\zeta(t) = (a_1,\,\ldots,\,a_d)$. Из (2.66), второго равенства (2.68) и определения $Q^-_{B,\Gamma}$ следует, что $x_d-\rho \geqslant a_d$. Если $(1-s)x_d+s\zeta_d > x_d-\rho$, то

$$|\gamma_\zeta(t)-\xi| \overset{(2.78)}{=} x_d-\rho-a_d < (1-s)x_d+s\zeta_d-a_d \leqslant \frac{\lambda l_* s}{c^2}, \qquad (2.80)$$

если $(1-s)x_d+s\zeta_d \leqslant x_d-\rho$, то

$$|\gamma_\zeta(t)-\xi| \overset{(2.78)}{=} |(1-s)x_d+s\zeta_d-a_d| \leqslant \frac{\lambda l_* s}{c^2}. \qquad (2.81)$$

Аналогично оценивается $|\gamma_{\zeta'}(t')-\xi'|$.

Так как $\Delta\subset p_{d-1}(\Pi)$ и $\tilde\Delta\subset p_{d-1}(\Pi)$, то

$$|\zeta_j-\tilde\zeta_j| \leqslant l_*,\;\; |\zeta'_j-\tilde\zeta'_j| \leqslant l_*,\;\; 1\leqslant j\leqslant d-1.$$

Кроме того,

$$x_d-\zeta_d-\rho = x_d-\zeta'_d-\rho \overset{(2.69)}{\geqslant} \frac{\lambda l_*}{4},$$

поэтому прямые $\mathbf{l}$ и $\mathbf{l}'$ пересекают L под углами $\theta\in\left[\theta_*(\lambda),\,\frac{\pi}{2}\right]$ и $\theta'\in\left[\theta_*(\lambda),\,\frac{\pi}{2}\right]$ соответственно, где $\operatorname{ctg}\theta_*(\lambda) = \frac{4\sqrt{d-1}}{\lambda}$. Значит, $\max\{|\xi-\eta|,\,|\xi'-\eta'|\} \overset{(2.80),\,(2.81)}{\leqslant} \frac{\lambda l_* s}{c^2}\cdot\frac{4\sqrt{d-1}}{\lambda} = \frac{4\sqrt{d-1}l_* s}{c^2}$. Отсюда и из (2.79) получаем, что

$$|\eta-\eta'| \leqslant M_2(d)\frac{l_* s}{c^2}, \qquad (2.82)$$

где $M_2(d)$ — величина, зависящая только от d.

Если $(1-s)x_d+s\zeta_d > x_d-\rho$, то $\rho>0$, $|\eta-\eta'| = |\tilde\zeta-\tilde\zeta'| \overset{(2.72)}{=} \frac{4\rho}{l_*c}|\zeta-\zeta'|$ и $s<\frac{\rho}{x_d-\zeta_d}$, поэтому

$$|\zeta-\zeta'| \overset{(2.82)}{\leqslant} \frac{l_*c}{4\rho}\cdot M_2(d)\frac{l_*s}{c^2} \leqslant M_2(d)\frac{l_*^2\rho}{4\rho c(x_d-\zeta_d)} \overset{(2.69)}{\leqslant} M_2(d)\frac{l_*}{2\lambda c}.$$

Пусть $(1-s)x_d+s\zeta_d \leqslant x_d-\rho$. Тогда $\eta_j = \vartheta\tilde\zeta_j+(1-\vartheta)\zeta_j$, $\eta'_j = \vartheta\tilde\zeta'_j+(1-\vartheta)\zeta'_j$, $1\leqslant j\leqslant d$,

$$(1-s)x_d+s\zeta_d \overset{(2.78)}{=} \eta_d = \vartheta\tilde\zeta_d+(1-\vartheta)\zeta_d,$$

откуда

$$\vartheta = \frac{(1-s)(x_d-\zeta_d)}{\tilde\zeta_d-\zeta_d} \overset{(2.68)}{=} \frac{(1-s)(x_d-\zeta_d)}{x_d-\zeta_d-\rho}. \tag{2.83}$$

Имеем

$$|\eta-\eta'|^2 = \sum_{j=1}^{d-1}(\eta_j-\eta'_j)^2 = \sum_{j=1}^{d-1}\Big(\vartheta(\tilde\zeta_j-\tilde\zeta'_j)+(1-\vartheta)(\zeta_j-\zeta'_j)\Big)^2 \overset{(2.70),(2.71)}{=}$$
$$= \sum_{j=1}^{d-1}\big(\vartheta(\lambda_j-\lambda'_j)(\tilde\tau_j-\tilde\sigma_j)+(1-\vartheta)(\lambda_j-\lambda'_j)(\tau_j-\sigma_j)\big)^2 \overset{(2.63),(2.65)}{=}$$
$$= \left(\frac{\vartheta\rho}{c}+\frac{(1-\vartheta)l_*}{4}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{d-1}(\lambda_j-\lambda'_j)^2\right),$$

откуда

$$|\eta-\eta'| = \left(\frac{\vartheta\rho}{c}+\frac{(1-\vartheta)l_*}{4}\right)\sqrt{\sum_{j=1}^{d-1}(\lambda_j-\lambda'_j)^2} = \vartheta|\tilde\zeta-\tilde\zeta'|+(1-\vartheta)|\zeta-\zeta'| \overset{(2.83)}{=}$$
$$= \frac{s(x_d-\zeta_d)-\rho}{x_d-\zeta_d-\rho}|\zeta-\zeta'| + \frac{(1-s)(x_d-\zeta_d)}{x_d-\zeta_d-\rho}|\tilde\zeta-\tilde\zeta'| \overset{(2.67),\,(2.68),\,(2.72)}{=}$$
$$= \left(\frac{s-\tilde\lambda}{1-\tilde\lambda}+\frac{4\rho}{l_*c}\frac{1-s}{1-\tilde\lambda}\right)|\zeta-\zeta'|.$$

Значит,

$$|\zeta-\zeta'| \overset{(2.82)}{\leqslant} M_2(d)\frac{l_*s}{c^2}\cdot\left(\frac{s-\tilde\lambda}{1-\tilde\lambda}+\frac{4\rho}{l_*c}\frac{1-s}{1-\tilde\lambda}\right)^{-1}. \tag{2.84}$$

Если $\rho=0$, то $\tilde\lambda \overset{(2.67)}{=} 0$, поэтому $|\zeta-\zeta'|\leqslant M_2(d)\frac{l_*}{c^2}$.

Пусть $\rho>0$. Если $c>8$, то $x_d-\zeta_d \overset{(2.59)}{\leqslant} 2l_* < \frac{l_*c}{4}$, поэтому

$$\tilde\lambda \overset{(2.67),(2.68)}{=} \frac{\rho}{x_d-\zeta_d} > \frac{4\rho}{l_*c}.$$

Значит, максимум правой части (2.84) по $s\in[\tilde\lambda,\,1]$ достигается при $s=\tilde\lambda$ и равен

$$M_2(d)\frac{l_*\tilde\lambda}{c^2}\cdot\frac{l_*c}{4\rho} = M_2(d)\frac{l_*^2}{4c(x_d-\zeta_d)} \overset{(2.69)}{\leqslant} M_2(d)\frac{l_*}{2\lambda c}.$$

Тем самым,

$$|\zeta-\zeta'| \leqslant M_2(d)\frac{l_*}{2\lambda c}. \tag{2.85}$$

Итак, $Q_{B,\Gamma}$ представляется в виде объединения двух множеств, диаметры которых оцениваются неравенствами (2.77) и (2.85). Аналогично оцениваются диаметры множеств $Q^+_{\tilde B,\Gamma}$ и $Q^-_{\tilde B,\Gamma}$. Значит, при достаточно больших c множество $Q_{B,\Gamma}\cup Q_{\tilde B,\Gamma}$ содержится в объединении не более четырех шаров, каждый из которых пересекается с не более чем 2^{d-1} множествами вида Z_λ, $Z\in\Xi_4(\Delta)$. Так как $4\cdot 2^{d-1}<2^{4(d-1)}=\operatorname{card}\Xi_4(\Delta)$, то отсюда следует утверждение ($\diamond$).

Пусть $(\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_{d-1})\in[0,\,1]^{d-1}$. Положим

$$z(\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_{d-1})=((1-\lambda_1)\sigma_1+\lambda_1\tau_1,\,\dots,\,(1-\lambda_{d-1})\sigma_{d-1}+\lambda_{d-1}\tau_{d-1},\,\alpha_d)\\ \in\Delta\times\{\alpha_d\}. \tag{2.86}$$

Обозначим через $\overline{E}$ замыкание множества E. Для $x\in E_{\lambda,\mu}$ построим семейство ломаных $\overline{\gamma}_z(t)\in\overline{E}$, $t\in[0,\,1]$, $z\in\Delta\times\{\alpha_d\}$, и покажем, что существует величина $M_{\lambda,\nu,d}>0$ такая, что если $(\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_{d-1})\in[0,\,1]^{d-1}$, $y=(y_1,\,\dots,\,y_d)=\overline{\gamma}_{z(\lambda_1,\dots,\lambda_{d-1})}(t)$, то

$$x_d-y_d\geqslant M_{\lambda,\nu,d}\max_{1\leqslant i\leqslant d-1}|x_i-y_i|, \tag{2.87}$$

$$J(y)\underset{\lambda,\,\nu,\,d}{\asymp} l_*|x-y|^{d-1}, \tag{2.88}$$

где $J(y)$ — якобиан отображения $(\mu_1,\,\dots,\,\mu_{d-1},\,\tau)\ \mapsto\ \overline{\gamma}_{z(\mu_1,\dots,\mu_{d-1})}(\tau)$ в точке $(\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_{d-1},\,t)$.

Обозначим через B_i шары, описанные вокруг $\Pi_i=\prod_{j=1}^d[\alpha^i_j,\,\beta^i_j]$, $(a_{i,1},\,\dots,\,a_{i,d})$ — их центры, ρ_i — их радиусы, $l(\rho_i)=\beta^i_1-\alpha^i_1=\dots=\beta^i_{d-1}-\alpha^i_{d-1}$, $\tilde l(\rho_i)=\beta^i_d-\alpha^i_d$, $i=1,\,2$. Тогда в силу (2.59) найдутся такие константы $\chi(d,\,\nu)\in(0,\,1]$ и $\tilde\chi(d,\,\nu)\in(0,\,1]$, что

$$\chi(d,\,\nu)\rho_i\leqslant l(\rho_i)\leqslant 2\rho_i,\quad \tilde\chi(d,\,\nu)\rho_i\leqslant \tilde l(\rho_i)\leqslant 2\rho_i. \tag{2.89}$$

Пусть величина $c_0=c_0(\lambda,\,d)\geqslant 1$ определена в утверждении ($\diamond$). Положим $\delta(d,\,\nu)=\frac{\chi(d,\,\nu)}{2}$ и $c=\frac{2c_0^2}{\lambda\delta(d,\,\nu)}$. Тогда $c\geqslant\max\left\{c_0,\,\frac{2}{\chi(d,\,\nu)}\right\}$ и поэтому

$$\delta(d,\,\nu)c+1\leqslant c\chi(d,\,\nu). \tag{2.90}$$

Положим

$$\mu=\left\lceil\frac{2c^2}{\lambda\tilde\chi(d,\,\nu)}\right\rceil+1. \tag{2.91}$$

Рассмотрим три случая.

1. $x_d-a_{i,d}\geqslant\delta(d,\,\nu)c\rho_i$, $i=1,\,2$. Положим $s_i=\frac{x_d-a_{i,d}}{x_d-\zeta_d}$. Из определения c следует, что
$$\frac{\rho_i}{x_d-a_{i,d}}\leqslant\frac{\rho_i}{\delta(d,\,\nu)c\rho_i}=\frac{\lambda}{2c_0^2}\overset{(2.59)}{\leqslant}\frac{\lambda l_*}{c_0^2(x_d-\zeta_d)}=\frac{\lambda l_* s_i}{c_0^2(x_d-a_{i,d})},$$
то есть $\rho_i\leqslant\frac{\lambda l_* s_i}{c_0^2}$. Положим $\tilde\Delta=\{(x_1,\,\dots,\,x_{d-1})\}$. Тогда $\Gamma:=\mathcal{H}(x,\,\tilde\Delta,\,0)\in\mathcal{G}_{l_*,\,\lambda,\,c_0}$. Применим утверждение ($\diamond$) для семейства Γ и найдем куб $\hat\Delta=\prod_{j=1}^{d-1}[\hat\sigma_j,\,\hat\tau_j]\in\Xi_4(\Delta)$ такой, что $(Q_{B_1,\Gamma}\cup Q_{B_2,\Gamma})\cap\hat\Delta_\lambda=\varnothing$. Тогда для любой кривой $\gamma_\zeta\in\Gamma$, $\zeta\in\hat\Delta_\lambda$ и для любого $t\in\left[\frac{\lambda}{2},\,1\right]$ выполнено $\gamma_\zeta(t)\notin B_1\cup B_2\supset\Pi_1\cup\Pi_2$, то есть
$$\gamma_\zeta(t)\in E. \tag{2.92}$$

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) \in \Delta$, $\xi_j = (1-\lambda_j)\sigma_j + \lambda_j\tau_j$, $\lambda_j \in [0, 1]$, $1 \leqslant j \leqslant d-1$. Положим

$$\zeta_j(\xi) = (1-\lambda_j)\hat{\sigma}_j + \lambda_j\hat{\tau}_j, \;\; 1 \leqslant j \leqslant d-1, \;\; \zeta_d(\xi) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\alpha_d + \frac{\lambda}{2}\beta_d. \qquad (2.93)$$

Определим ломаные $\overline{\gamma}_\xi(t)$ равенствами

$$\begin{gathered} \overline{\gamma}_{\xi,j}(t) = \left(1 - \frac{2t}{\lambda}\right)\xi_j + \frac{2t}{\lambda}\zeta_j(\xi), \;\; 1 \leqslant j \leqslant d-1, \\ \overline{\gamma}_{\xi,d}(t) = (1-t)\alpha_d + t\beta_d, \;\; 0 \leqslant t \leqslant \tfrac{\lambda}{2}, \end{gathered} \qquad (2.94)$$

$$\overline{\gamma}_{\xi,j}(t) = \frac{1-t}{1-\frac{\lambda}{2}}\zeta_j(\xi) + \frac{t-\frac{\lambda}{2}}{1-\frac{\lambda}{2}}x_j, \;\; 1 \leqslant j \leqslant d, \;\; t \in \left[\frac{\lambda}{2}, 1\right]$$

(заметим, что $\overline{\gamma}_\xi(t) = \gamma_{\zeta(\xi)}(t)$ при $t \in \left[\frac{\lambda}{2}, 1\right]$). Так как выполнено (2.92) и $\Delta \times [\alpha_d, \beta_d]$ не перекрывается с $\Pi_1 \cup \Pi_2$, то $\overline{\gamma}_\xi(t) \in \overline{E}$ для любого $t \in [0, 1]$.

Утверждение (2.87) следует из неравенств

$$|x_j - \xi_j| \leqslant l_*, \;\; |x_j - \zeta_j(\xi)| \leqslant l_*, \;\; 1 \leqslant j \leqslant d-1, \;\; x_d - \zeta_d(\xi) \overset{(2.69)}{\geqslant} \frac{\lambda l_*}{2}. \qquad (2.95)$$

Для доказательства утверждения (2.88) применим предложение 2.2.1 с $H_0 = 0$, $H_1 = \zeta_d(\xi) - \alpha_d = \frac{\lambda}{2}(\beta_d - \alpha_d)$, $H_2 = x_d - \alpha_d$, $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\lambda}{2}$, $t_2 = 1$, $\Delta_0 = \Delta$, $\Delta_1 = \hat{\Delta}$, $\Delta_2 = \{(x_1, \ldots, x_{d-1})\}$, $l_0 \overset{(2.63)}{=} \frac{l_*}{4}$, $l_1 = 2^{-6}l_*$ (так как $\hat{\Delta} \in \Xi_4(\Delta)$) и $l_2 = 0$, воспользовавшись неравенствами (2.95).

2. $x_d - a_{1,d} < \delta(d, \nu)c\rho_1$ и $x_d - a_{2,d} \geqslant \frac{2c^2}{\lambda}\rho_2$ (аналогично рассматривается случай $x_d - a_{2,d} < \delta(d, \nu)c\rho_2$ и $x_d - a_{1,d} \geqslant \frac{2c^2}{\lambda}\rho_1$). Пусть $p_{d-1}(\Pi_1) \in \Xi_{k_1}(p_{d-1}(\Pi))$. Выберем замкнутый куб $\tilde{\Delta} \in \Xi_{k_1}(p_{d-1}(\Pi))$ так, чтобы $(x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \tilde{\Delta}$. Покажем, что если $z^d(\Gamma_0(\Pi_1)) < x_d$, то $\tilde{\Delta}$ не перекрывается с $p_{d-1}(\Pi_1)$. В самом деле, предположим обратное. Так как $x \notin \Pi_1$, то существует $\tilde{\mu} \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$ такое, что $x \in \Pi_1(\tilde{\mu}) \backslash \Pi_1(\tilde{\mu} - 1)$. Тогда $\left(\tilde{\mu} - \frac{3}{2}\right)\tilde{l}(\rho_1) \leqslant x_d - a_{1,d} < \delta(d, \nu)c\rho_1$. Поэтому $\tilde{\mu} \overset{(2.89)}{<} \frac{3}{2} + \frac{\delta(d,\nu)c}{\tilde{\chi}(d,\nu)}$. Так как $x \in E_{\lambda,\mu}$, то $x \notin \Pi_1(\mu)$ и поэтому $\mu \leqslant \tilde{\mu} - 1$, т.е. $\mu < \frac{1}{2} + \frac{\delta(d,\nu)c}{\tilde{\chi}(d,\nu)}$, и в силу (2.91) получаем $2c < \lambda\delta(d, \nu) \leqslant \lambda$ — противоречие, так как $c \geqslant 1$.

Обозначим
$$h = \max\{x_d - z^d(\Gamma_0(\Pi_1)), 0\}.$$
Покажем, что $h \leqslant cl(\rho_1)$. В самом деле,

$$h \leqslant \delta(d, \nu)c\rho_1 + \frac{1}{2}\tilde{l}(\rho_1) \overset{(2.89)}{\leqslant} (\delta(d, \nu)c + 1)\rho_1 \overset{(2.90)}{\leqslant} c\chi(d, \nu)\rho_1 \overset{(2.89)}{\leqslant} cl(\rho_1).$$

Заметим также, что $h \leqslant \frac{\lambda l_*}{4}$, если $E \in \mathcal{R}^*_{m_*,\nu}$ и m_* достаточно велико (минимальное значение m_*, при котором выполнено это неравенство, зависит только от λ и $c = c(\lambda, d, \nu)$).

Пусть $\tilde{\Delta}' \subset \tilde{\Delta}$ — куб со стороной $\frac{h}{c}$, $(x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \tilde{\Delta}'$. Рассмотрим семейство ломаных $\tilde{\gamma}_\zeta(t) \in \mathcal{H}(x, \tilde{\Delta}', h)$, $t \in \left[\frac{\lambda}{2}, 1\right]$. Тогда $\mathcal{H}(x, \tilde{\Delta}', h) \in \mathcal{G}_{l_*, \lambda, c}$. Положим $s = \frac{x_d - a_{2,d}}{x_d - \zeta_d}$. Тогда

$$\rho_2 \leqslant \frac{\lambda(x_d - a_{2,d})}{2c^2} = \frac{\lambda(x_d - \zeta_d)s}{2c^2} \overset{(2.59)}{\leqslant} \frac{\lambda l_* s}{c^2}.$$

Поэтому, в силу утверждения $(\diamond)$, найдется куб $\hat{\Delta} = \prod_{j=1}^{d-1}[\hat{\sigma}_j,\, \hat{\tau}_j] \in \Xi_4(\Delta)$ такой, что $Q_{B_2,\Gamma} \cap \hat{\Delta}_\lambda = \varnothing$.

Определим $\zeta(\xi) = (\zeta_1(\xi),\, \dots,\, \zeta_d(\xi))$ формулой (2.93), а $\overline{\gamma}_{\xi,j}(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{\lambda}{2}$ — формулой (2.94); при $\frac{\lambda}{2} \leqslant t \leqslant 1$ положим $\overline{\gamma}_\xi(t) = \tilde{\gamma}_{\zeta(\xi)}(t)$. Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\overline{\gamma}_\xi(t) \in \overline{E}$ для любого $t \in \left[0,\, \frac{\lambda}{2}\right]$. Так как $Q_{B_2,\Gamma} \cap \hat{\Delta}_\lambda = \varnothing$, то $\overline{\gamma}_\xi(t) \notin \Pi_2$ для любого $t \in \left[\frac{\lambda}{2},\, 1\right]$. Если $t \in \left[\frac{\lambda}{2},\, 1 - \tilde{\lambda}\right)$, то $\overline{\gamma}_{\xi,d}(t) < z^d(\Gamma_0(\Pi_1))$ по определению h и в силу (2.66), поэтому $\overline{\gamma}_\xi(t) \notin \Pi_1$. Если $t \in [1 - \tilde{\lambda},\, 1]$, то

$$(\overline{\gamma}_{\xi,1}(t),\, \dots,\, \overline{\gamma}_{\xi,d-1}(t)) \in$$
$$\in [(\overline{\gamma}_{\xi,1}(1-\tilde{\lambda}),\, \dots,\, \overline{\gamma}_{\xi,d-1}(1-\tilde{\lambda})),\, (x_1,\, \dots,\, x_{d-1})] \subset \tilde{\Delta}.$$

Так как $\tilde{\Delta}$ не перекрывается с $p_{d-1}(\Pi_1)$ или $z^d(\Gamma_0(\Pi_1)) \geqslant x_d$, то $\overline{\gamma}_\xi(t) \notin \operatorname{int}\Pi_1$. Тем самым, $\overline{\gamma}_\xi(t) \in \overline{E}$ для любого $t \in \left[\frac{\lambda}{2},\, 1\right]$.

Утверждение (2.87) следует из определения куба $\tilde{\Delta}'$ и неравенств (2.95). Для доказательства утверждения (2.88) применяем предложение 2.2.1 с $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\lambda}{2}$, $t_2 = 1 - \tilde{\lambda}$, $t_3 = 1$, где $\tilde{\lambda} = \frac{h}{x_d - \zeta_d(\xi)}$, $H_0 = 0$, $H_1 = \zeta_d(\xi) - \alpha_d = \frac{\lambda}{2}(\beta_d - \alpha_d)$, $H_2 = x_d - h - \alpha_d$, $H_3 = x_d - \alpha_d$, $\Delta_0 = \Delta$, $\Delta_1 = \hat{\Delta}$, $\Delta_2 \in \Xi_4(\tilde{\Delta}')$, $\Delta_3 = \{(x_1,\, \dots,\, x_{d-1})\}$, $l_0 = \frac{l_*}{4}$, $l_1 = 2^{-6}l_*$, $l_2 = \frac{2^{-4}h}{c}$, $l_3 = 0$. Условия этого предложения следуют из определения куба $\tilde{\Delta}'$, неравенств (2.95) и $h \leqslant \frac{\lambda l_*}{4}$.

3. $x_d - a_{i,d} < \frac{2c^2}{\lambda}\rho_i$, $i = 1, 2$, и не выполнено условие случая 1. Пусть $p_{d-1}(\Pi_i) \in \Xi_{k_i}(p_{d-1}(\Pi))$. Выберем $\tilde{\Delta}_i \in \Xi_{k_i}(p_{d-1}(\Pi))$ так, чтобы $(x_1,\, \dots,\, x_{d-1}) \in \tilde{\Delta}_i$, $i = 1, 2$. Можно считать, что $\tilde{\Delta}_1 \cap \tilde{\Delta}_2 \overset{d}{\neq} \varnothing$ (а значит, $\tilde{\Delta}_1 \subset \tilde{\Delta}_2$ или $\tilde{\Delta}_2 \subset \tilde{\Delta}_1$). В самом деле, если $\tilde{\Delta}_1 \cap \tilde{\Delta}_2 \overset{d}{=} \varnothing$, то $(x_1,\, \dots,\, x_{d-1})$ принадлежит некоторой общей k-мерной грани кубов $\tilde{\Delta}_1$ и $\tilde{\Delta}_2$ $(0 \leqslant k \leqslant d-1)$. В этом случае один из кубов заменяем на его отражение относительно этой грани. Далее, как и в пункте 2, если $z^d(\Gamma_0(\Pi_i)) < x_d$, то куб $\tilde{\Delta}_i$ не перекрывается с $p_{d-1}(\Pi_i)$ (иначе, аналогично определив $\tilde{\mu}$, получим неравенство $\left(\tilde{\mu} - \frac{3}{2}\right)\tilde{l}(\rho_i) \leqslant x_d - a_{i,d} < \frac{2c^2}{\lambda}\rho_i$; отсюда и из неравенства $\mu \leqslant \tilde{\mu} - 1$ получаем противоречие с (2.89) и (2.91)). Положим

$$h_i = \max\{0,\, x_d - z^d(\Gamma_0(\Pi_i))\}.$$

Покажем, что

$$h_i \leqslant \left(1 + \frac{2c^2}{\lambda}\right)\rho_i. \tag{2.96}$$

В самом деле, если $z^d(\Gamma_1(\Pi_i)) \geqslant x_d$, то $h_i \leqslant \tilde{l}(\rho_i) \overset{(2.89)}{\leqslant} 2\rho_i$. Если $z^d(\Gamma_1(\Pi_i)) < x_d$, то $h_i \leqslant \frac{1}{2}\tilde{l}(\rho_i) + x_d - a_{i,d} \leqslant \rho_i + \frac{2c^2}{\lambda}\rho_i$. Отсюда и из (2.89) получаем неравенство $h_i \leqslant \frac{1}{\chi(d,\,\nu)}\left(1 + \frac{2c^2}{\lambda}\right)l(\rho_i)$. Положим $\tilde{C} = \chi(d,\,\nu)\left(1 + \frac{2c^2}{\lambda}\right)^{-1}$.

Определим кубы $\tilde{\Delta}'_i \subset \tilde{\Delta}_i$. Пусть без ограничения общности $h_1 \leqslant h_2$.

(a) $l(\rho_1) \geqslant l(\rho_2)$. Обозначим $\tilde{\Delta}'_i$ куб со стороной длины $\tilde{C}h_i$, полученный гомотетическим сжатием $\tilde{\Delta}_2$ относительно точки $(x_1,\, \dots,\, x_{d-1})$. Тогда $\tilde{\Delta}'_1 \subset \tilde{\Delta}'_2 \subset \tilde{\Delta}_2 \subset \tilde{\Delta}_1$.

(b) $l(\rho_1) < l(\rho_2)$. Обозначим $\tilde{\Delta}'_1$ куб со стороной длины $\tilde{C}h_1$, полученный гомотетическим сжатием $\tilde{\Delta}_1$ относительно точки $(x_1,\, \dots,\, x_{d-1})$. Тогда $\tilde{\Delta}'_1 \subset \tilde{\Delta}_1 \subset \tilde{\Delta}_2$. Через $\tilde{\Delta}'_2$ обозначим куб со стороной длины $\tilde{C}h_2$, содержащийся в $\tilde{\Delta}_2$ и содержащий $\tilde{\Delta}'_1$.

Из построения также следует, что

$$(x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \tilde{\Delta}'_1 \subset \tilde{\Delta}'_2. \tag{2.97}$$

Теперь строим ломаные $\overline{\gamma}_z(t)$. Пусть $z = (z_1, \ldots, z_{d-1}) \in \Delta$,

$$z_j = (1-\lambda_j)\sigma_j + \lambda_j\tau_j, \ \ \lambda_j \in [0, 1], \ \ 1 \leqslant j \leqslant d-1,$$

$\tilde{\Delta}'_i = \prod_{j=1}^{d-1}[\tilde{\sigma}^i_j, \tilde{\tau}^i_j]$, $\tilde{\alpha}_d = \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\alpha_d + \frac{\lambda}{2}\beta_d$, $\tilde{\lambda}_i = \frac{h_i}{x_d-\tilde{\alpha}_d}$, $i=1, 2$. Из (2.89), (2.96) и неравенства $x_d \geqslant (1-\lambda)\alpha_d + \lambda\beta_d$ следует, что если $E \in \mathcal{R}^*_{m_*,\nu}$ и m_* достаточно велико, то

$$\tilde{\lambda}_i \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \text{ поэтому } x_d - \tilde{\alpha}_d - h_i \geqslant \frac{3}{4}(x_d - \tilde{\alpha}_d) \geqslant \frac{3\lambda l_*}{8} \tag{2.98}$$

(минимальное значение m_*, для которых выполнены эти неравенства, зависит от λ, d и ν). Отсюда также следует, что $\frac{\lambda}{2} < 1-\tilde{\lambda}_i$. Положим

$$\overline{\gamma}_{z,j}(t) = z_j, \ \ 1 \leqslant j \leqslant d-1, \ \overline{\gamma}_{z,d}(t) = (1-t)\alpha_d + t\beta_d, \ \ t \in \left[0, \frac{\lambda}{2}\right],$$

$$\overline{\gamma}_{z,j}(t) = \frac{1-\tilde{\lambda}_2-t}{1-\tilde{\lambda}_2-\frac{\lambda}{2}}z_j + \frac{t-\frac{\lambda}{2}}{1-\tilde{\lambda}_2-\frac{\lambda}{2}}((1-\lambda_j)\tilde{\sigma}^2_j + \lambda_j\tilde{\tau}^2_j), \ \ 1 \leqslant j \leqslant d-1,$$

$$\overline{\gamma}_{z,d}(t) = \frac{1-\tilde{\lambda}_2-t}{1-\tilde{\lambda}_2-\frac{\lambda}{2}}\tilde{\alpha}_d + \frac{t-\frac{\lambda}{2}}{1-\tilde{\lambda}_2-\frac{\lambda}{2}}(x_d-h_2), \ \ t \in \left[\frac{\lambda}{2}, 1-\tilde{\lambda}_2\right],$$

$$\overline{\gamma}_{z,j}(t) = \frac{1-\tilde{\lambda}_1-t}{\tilde{\lambda}_2-\tilde{\lambda}_1}((1-\lambda_j)\tilde{\sigma}^2_j + \lambda_j\tilde{\tau}^2_j) + \frac{t-1+\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_2-\tilde{\lambda}_1}((1-\lambda_j)\tilde{\sigma}^1_j + \lambda_j\tilde{\tau}^1_j),$$
$$1 \leqslant j \leqslant d-1,$$

$$\overline{\gamma}_{z,d}(t) = \frac{1-\tilde{\lambda}_1-t}{\tilde{\lambda}_2-\tilde{\lambda}_1}(x_d-h_2) + \frac{t-1+\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_2-\tilde{\lambda}_1}(x_d-h_1), \ \ t \in [1-\tilde{\lambda}_2, 1-\tilde{\lambda}_1],$$

$$\overline{\gamma}_{z,j}(t) = \frac{1-t}{\tilde{\lambda}_1}((1-\lambda_j)\tilde{\sigma}^1_j + \lambda_j\tilde{\tau}^1_j) + \frac{t-1+\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_1}x_j, \ \ 1 \leqslant j \leqslant d-1,$$

$$\overline{\gamma}_{z,d}(t) = \frac{1-t}{\tilde{\lambda}_1}(x_d-h_1) + \frac{t-1+\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_1}x_d, \ \ t \in [1-\tilde{\lambda}_1, 1].$$

Проверим, что $\overline{\gamma}_z(t) \in \overline{E}$. Если $t \in [0, 1-\tilde{\lambda}_2]$, то это следует из неравенства $\overline{\gamma}_{z,d}(t) \leqslant \min\{z^d(\Gamma_0(\Pi_1)), z^d(\Gamma_0(\Pi_2))\}$. Если $t \in [1-\tilde{\lambda}_2, 1-\tilde{\lambda}_1]$, то $\overline{\gamma}_{z,d}(t) \leqslant z^d(\Gamma_0(\Pi_1))$ (поэтому $\overline{\gamma}_z(t) \notin \operatorname{int}\Pi_1$) и $(\overline{\gamma}_{z,1}(t), \ldots, \overline{\gamma}_{z,d-1}(t)) \overset{(2.97)}{\in} \tilde{\Delta}'_2 \subset \tilde{\Delta}_2$; так как $\tilde{\Delta}_2$ не перекрывается с $p_{d-1}(\Pi_2)$ или $x_d \leqslant z^d(\Gamma_0(\Pi_2))$, то $\overline{\gamma}_z(t) \notin \operatorname{int}\Pi_2$. Если $t \in (1-\tilde{\lambda}_1, 1]$ и $\tilde{\lambda}_1 > 0$, то $x_d > z^d(\Gamma_0(\Pi_i))$, $i=1, 2$,

$$(\overline{\gamma}_{z,1}(t), \ldots, \overline{\gamma}_{z,d-1}(t)) \overset{(2.97)}{\in} \tilde{\Delta}'_1 \overset{(2.97)}{\subset} \tilde{\Delta}_1 \cap \tilde{\Delta}'_2 \subset \tilde{\Delta}_1 \cap \tilde{\Delta}_2,$$

а последнее множество не перекрывается с $p_{d-1}(\Pi_1) \cup p_{d-1}(\Pi_2)$.

Утверждение (2.87) следует из определения кубов $\tilde{\Delta}'_i$, включения (2.97) и второго неравенства (2.98). Для доказательства утверждения (2.88) применим предложение 2.2.1 с $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\lambda}{2}$, $t_2 = 1-\tilde{\lambda}_2$, $t_3 = 1-\tilde{\lambda}_1$, $t_4 = 1$, $H_0 = 0$, $H_1 = \frac{\lambda}{2}(\beta_d - \alpha_d)$, $H_2 = x_d - h_2 - \alpha_d$, $H_3 = x_d - h_1 - \alpha_d$, $H_4 = x_d - \alpha_d$, $\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta$, $\Delta_2 = \tilde{\Delta}'_2$, $\Delta_3 = \tilde{\Delta}'_3$, $\Delta_4 = \{(x_1, \ldots, x_{d-1})\}$, $l_0 = l_1 = \frac{l_*}{4}$, $l_2 = \tilde{C}h_2$, $l_3 = \tilde{C}h_1$ и $l_4 = 0$, учитывая неравенство (2.98).

Заметим также, что во всех случаях

$$|\dot{\overline{\gamma}}_z(t)| \underset{\lambda,\nu,d}{\lesssim} l_*. \tag{2.99}$$

Теперь определим P_f. Для каждого $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}) \in [0, 1]^{d-1}$ выполнено

$$f(x) = f(z(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1})) + \int\limits_0^1 \langle \nabla f, \dot{\overline{\gamma}}_{z(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1})}(t)\rangle \, dt,$$

где $z(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1})$ определено формулой (2.86). Проинтегрировав по $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}) \in [0, 1]^{d-1}$, получаем

$$f(x) = \int\limits_{[0,1]^{d-1}} f(z(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}))\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{d-1} +$$

$$+ \int\limits_{[0,1]^{d-1}} \int\limits_0^1 \langle \nabla f, \dot{\overline{\gamma}}_{z(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1})}(t)\rangle \, dt \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{d-1}.$$

Положив

$$P_f = \int\limits_{[0,1]^{d-1}} f(z(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}))\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{d-1},$$

$$G_x = \{\overline{\gamma}_{z(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1})}(t), \;\; t \in [0, 1], \;\; (\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}) \in [0, 1]^{d-1}\} \cap E$$

и воспользовавшись тем, что $\overline{\gamma}_{z(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1})}(t) \in \overline{E}$ и $|\overline{E} \backslash E| = 0$, получаем

$$|f(x) - P_f| \leqslant \int\limits_{[0,1]^{d-1}} \int\limits_0^1 |\langle \nabla f, \dot{\overline{\gamma}}_{z(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1})}(t)\rangle| \, dt \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{d-1} \overset{(2.99)}{\underset{\lambda,\nu,d}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \int\limits_{G_x} |\nabla f(y)| \cdot l_* |J(y)|^{-1} \, dy \overset{(2.88)}{\underset{\lambda,\nu,d}{\lesssim}} \int\limits_{G_x} |\nabla f(y)| \cdot |x - y|^{1-d} \, dy.$$

Линейность отображения $f \mapsto P_f$ сразу следует из определения. Если $f|_{\Gamma_0(E)} = 0$, то $P_f = 0$, поскольку $z(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}) \in \Delta \times \{\alpha_d\} \subset \Gamma_0(E)$. Докажем (2.62). В самом деле, положим $\Pi_0 = \Delta \times [\alpha_d, (1-\lambda)\alpha_d + \lambda\beta_d] \overset{d}{\subset} E \backslash E_{\lambda,1}$. В силу теоремы I, $|P_f| \underset{p,\Pi,\lambda}{\lesssim} \|f\|_{L_p(\Pi_0)} + \|\nabla f\|_{L_p(\Pi_0)}$. □

Пусть $\lambda \in (0, 1)$, μ, ν, $m_* \in \mathbb{N}$, $E = \Pi \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2) \in \mathcal{R}^*_{m_*,\nu}$, $\Pi = \prod_{j=1}^d [\alpha_j, \beta_j]$, $\Pi_i = \prod_{j=1}^d [\alpha_j^i, \beta_j^i]$, $l_* = \beta_1 - \alpha_1 = \cdots = \beta_{d-1} - \alpha_{d-1}$, функции $\underline{\varphi}$, $\overline{\varphi} : \prod_{j=2}^{d-1} [\alpha_j, \beta_j] \to \mathbb{R}_+$ липшицевы с константой L (относительно евклидовой нормы в $\mathbb{R}^{d-2}$),

$$\exists L' \in (0, 1] : \; \forall \zeta \in \prod_{j=2}^{d-1} [\alpha_j, \beta_j] \quad \overline{\varphi}(\zeta) - \underline{\varphi}(\zeta) \in [L' l_*, (L')^{-1} l_*]. \tag{2.100}$$

Для $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{d-1}) \in p_{d-1}(\Pi)$ положим

$$\begin{gathered} w(\zeta) = (w_1(\zeta), \ldots, w_{d-1}(\zeta)) = \\ = \left(\tfrac{\beta_1 - \zeta_1}{l_*} \underline{\varphi}(\zeta_2, \ldots, \zeta_{d-1}) + \tfrac{\zeta_1 - \alpha_1}{l_*} \overline{\varphi}(\zeta_2, \ldots, \zeta_{d-1}), \zeta_2, \ldots, \zeta_{d-1}\right), \end{gathered} \tag{2.101}$$

для $(\zeta', \zeta_d) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{d-1}, \zeta_d) \in \Pi$ положим

$$\psi(\zeta', \zeta_d) = (\psi_1(\zeta', \zeta_d), \ldots, \psi_d(\zeta', \zeta_d)) = (w_1(\zeta'), \ldots, w_{d-1}(\zeta'), \zeta_d) \tag{2.102}$$

и обозначим $D^\psi = w(p_{d-1}(\Pi))$, $E^\psi = \psi(E)$, $E^\psi_{\lambda,\mu} = \psi(E_{\lambda,\mu})$, $\Gamma_0(E^\psi) = \psi(\Gamma_0(E))$.

Для линейного оператора $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ через $\|T\|$ обозначим его операторную норму (относительно стандартной евклидовой нормы на $\mathbb{R}^k$).

Лемма 2.2.2. *Пусть $\mu \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$, $m_* \in \mathbb{N}$, $C_{\lambda,\nu,d} > 0$ и $M_{\lambda,\nu,d} > 0$ определены по $\lambda \in (0, 1)$ и $\nu \in \mathbb{N}$ в соответствии с леммой 2.2.1. Тогда для любой липшицевой функции $f : E^\psi \to \mathbb{R}$ найдется константа P_f^ψ, а для любого $x \in E^\psi_{\lambda,\mu}$ — множество $G_x^\psi \subset E^\psi$ (замкнутое в E^ψ) такие, что*

$$|f(x) - P_f^\psi| \underset{L,L',d}{\lesssim} C_{\lambda,\nu,d} \int\limits_{G_x^\psi} |\nabla f(y)| \cdot |x-y|^{1-d}\, dy$$

и для любого $y \in G_x^\psi$ выполнено

$$x_d - y_d \underset{L,L',d}{\gtrsim} M_{\lambda,\nu,d} \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |x_i - y_i|.$$

При этом, отображение $f \mapsto P_f^\psi$ линейно и для $p > 1$

$$|P_f^\psi| \underset{p,\Pi,\psi,\lambda}{\lesssim} \|\nabla f\|_{L_p(E^\psi\setminus E^\psi_{\lambda,1})} + \|f\|_{L_p(E^\psi\setminus E^\psi_{\lambda,1})}; \tag{2.103}$$

если $f|_{\Gamma_0(E^\psi)} = 0$, то $P_f^\psi = 0$.

Доказательство. Пусть $f^\psi(\xi) = f(\psi(\xi))$, $\xi \in E$, $P_f^\psi = P_{f^\psi}$ определена в лемме 2.2.1. Тогда отображение $f \mapsto P_{f^\psi}$ линейно как композиция линейных отображений $f \mapsto f^\psi$ и $f^\psi \mapsto P_{f^\psi}$. Для каждого $\xi \in E_{\lambda,\mu}$ определим множество G_ξ в соответствии с леммой 2.2.1 и для $x \in E^\psi_{\lambda,\mu}$ положим $G_x^\psi = \psi(G_{\psi^{-1}(x)})$. Тогда

$$|f(x) - P_f^\psi| = |f^\psi(\psi^{-1}(x)) - P_{f^\psi}| \leqslant C_{\lambda,\nu,d} \int\limits_{G_{\psi^{-1}(x)}} |\nabla f^\psi(\eta)| \cdot |\psi^{-1}(x) - \eta|^{1-d}\, d\eta.$$

Положим

$$\|w'\| = \operatorname{ess\,sup}_{\zeta\in p_{d-1}(\Pi)} \|w'(\zeta)\|, \quad \|(w^{-1})'\| = \operatorname{ess\,sup}_{z\in w(p_{d-1}(\Pi))} \|(w^{-1})'(z)\|,$$
$$\|\psi'\| = \operatorname{ess\,sup}_{\tilde\zeta\in\Pi} \|\psi'(\tilde\zeta)\|, \quad \|(\psi^{-1})'\| = \operatorname{ess\,sup}_{\tilde z\in\psi(\Pi)} \|(\psi^{-1})'(\tilde z)\|.$$

Оценим сверху эти величины. Имеем

$$\frac{\partial w_1(\zeta)}{\partial \zeta_1} = l_*^{-1}(\overline{\varphi}(\zeta_2, \dots, \zeta_{d-1}) - \underline{\varphi}(\zeta_2, \dots, \zeta_{d-1})),$$

$$\frac{\partial w_1(\zeta)}{\partial \zeta_j} = \frac{\beta_1 - \zeta_1}{l_*}\frac{\partial \underline{\varphi}(\zeta_2, \dots, \zeta_{d-1})}{\partial \zeta_j} + \frac{\zeta_1 - \alpha_1}{l_*}\frac{\partial \overline{\varphi}(\zeta_2, \dots, \zeta_{d-1})}{\partial \zeta_j}, \quad 2 \leqslant j \leqslant d-1,$$

$$\frac{\partial w_i(\zeta)}{\partial \zeta_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad 2 \leqslant i \leqslant d-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant d-1,$$

$(w^{-1})(z) = ((w^{-1})_1(z), \dots, (w^{-1})_{d-1}(z))$,

$$(w^{-1})_1(z) = \frac{l_*(z_1 - \overline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1}))}{\overline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1}) - \underline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1})} + \beta_1, \quad (w^{-1})_j(z) = z_j, \quad 2 \leqslant j \leqslant d-1,$$

$$\frac{\partial (w^{-1})_1(z)}{\partial z_1} = \frac{l_*}{\overline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1}) - \underline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1})},$$

при $2 \leqslant j \leqslant d-1$

$$\frac{\partial (w^{-1})_1(z)}{\partial z_j} = -\frac{l_*}{\overline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1}) - \underline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1})} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1})}{\partial z_j} -$$
$$- \frac{l_*(z_1 - \overline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1}))}{(\overline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1}) - \underline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1}))^2}\left(\frac{\partial \overline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1})}{\partial z_j} - \frac{\partial \underline{\varphi}(z_2, \dots, z_{d-1})}{\partial z_j}\right),$$

$\frac{\partial (w^{-1})_i(z)}{\partial z_j} = \delta_{ij}$, $2 \leqslant i \leqslant d-1$, $1 \leqslant j \leqslant d-1$. Из свойств функций $\overline{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ и из определения отображения ψ следует, что

$$\|w'\| \underset{L,L',d}{\lesssim} 1, \ \ \|(w^{-1})'\| \underset{L,L',d}{\lesssim} 1, \|\psi'\| \underset{L,L',d}{\lesssim} 1, \ \ \|(\psi^{-1})'\| \underset{L,L',d}{\lesssim} 1. \tag{2.104}$$

Пусть $y = \psi(\eta)$, $\xi = \psi^{-1}(x)$. Тогда

$$\|(\psi^{-1})'\|^{-1}|\xi - \eta| \underset{L}{\lesssim} |x-y| \leqslant \|\psi'\| \cdot |\xi - \eta|,$$

и в силу (2.104) получаем $|x-y| \underset{L,L',d}{\asymp} |\xi - \eta|$. Кроме того, $|\nabla f(y)| \underset{L,L',d}{\asymp} |\nabla f^\psi(\eta)|$ п.в. Отсюда

$$|f(x) - P_f^\psi| \underset{L,L',d}{\lesssim} C_{\lambda,\nu,d} \int\limits_{G_x^\psi} |\nabla f(y)| \cdot |x-y|^{1-d}\, dy.$$

Докажем второе утверждение. Имеем

$$x_d - y_d = \xi_d - \eta_d \geqslant M_{\lambda,\nu,d} \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |\xi_i - \eta_i| \underset{d}{\gtrsim}$$

$$\gtrsim M_{\lambda,\nu,d}\|w'\|^{-1} \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |x_i - y_i| \overset{(2.104)}{\underset{L,L',d}{\gtrsim}} M_{\lambda,\nu,d} \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |x_i - y_i|.$$

Соотношение (2.103) следует из (2.62) и (2.104). $\square$

Для $x = (x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ обозначим $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |x_i|$.

Рассмотрим область E, параллелепипед Π и функции $\underline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$: $\Pi \to \mathbb{R}_+$, определенные перед леммой 2.2.2, отображение ψ, заданное формулой (2.102), и соответствующую область $D^\psi \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Пусть для некоторого $L' \in (0, 1]$ выполнено (2.100), функции $\varphi_\pm : D^\psi \to \mathbb{R}$ липшицевы с константой L'' относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$ на $\mathbb{R}^{d-1}$, при этом

$$\forall \zeta \in D^\psi \quad \varphi_+(\zeta) - \varphi_-(\zeta) \in [L'l_*, \, (L')^{-1}l_*]. \tag{2.105}$$

Положим

$$\begin{gathered}\hat{\psi}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{d-1}, \zeta_d) = \\ = \left(\zeta_1, \ldots, \zeta_{d-1}, \left(1 - \tfrac{\zeta_d - \alpha_d}{\beta_d - \alpha_d}\right)\varphi_-(\zeta_1, \ldots, \zeta_{d-1}) + \tfrac{\zeta_d - \alpha_d}{\beta_d - \alpha_d}\varphi_+(\zeta_1, \ldots, \zeta_{d-1})\right),\end{gathered} \tag{2.106}$$

$E^{\psi,\hat\psi} = \hat\psi(E^\psi)$, $E^{\psi,\hat\psi}_{\lambda,\mu} = \hat\psi(E^\psi_{\lambda,\mu})$, $\Gamma_0(E^{\psi,\hat\psi}) = \hat\psi(\Gamma_0(E^\psi))$.

Лемма 2.2.3. *Пусть $\mu \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$, $m_* \in \mathbb{N}$, $C_{\lambda,\nu,d} > 0$ и $M_{\lambda,\nu,d} > 0$ определены по $\lambda \in (0, 1)$ и $\nu \in \mathbb{N}$ в соответствии с леммой 2.2.1. Тогда найдется такое $L_0 = L_0(L, L', d, M_{\lambda,\nu,d}) > 0$, что для любого $L'' \in [0, L_0]$ и для любой липшицевой функции $f : E^{\psi,\hat\psi} \to \mathbb{R}$ найдется константа $P_f^{\psi,\hat\psi}$, а для любого $x \in E^{\psi,\hat\psi}_{\lambda,\mu}$ — множество $G_x^{\psi,\hat\psi} \subset E^{\psi,\hat\psi}$ (замкнутое в $E^{\psi,\hat\psi}$), такие, что*

$$|f(x) - P_f^{\psi,\hat\psi}| \underset{L,L',d}{\lesssim} C_{\lambda,\nu,d} \int\limits_{G_x^{\psi,\hat\psi}} |\nabla f(y)| \cdot |x-y|^{1-d}\, dy \tag{2.107}$$

и для любого $y \in G_x^{\psi,\hat\psi}$ выполнено

$$x_d - y_d \underset{L,L',d}{\gtrsim} M_{\lambda,\nu,d} \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |x_i - y_i|. \tag{2.108}$$

При этом, отображение $f \mapsto P_f^{\psi,\hat\psi}$ линейно и для любого $p > 1$

$$|P_f^{\psi,\hat\psi}| \underset{p,\Pi,\lambda,\psi,\hat\psi}{\lesssim} \|\nabla f\|_{L_p(E^{\psi,\hat\psi} \setminus E^{\psi,\hat\psi}_{\lambda,1})} + \|f\|_{L_p(E^{\psi,\hat\psi} \setminus E^{\psi,\hat\psi}_{\lambda,1})}; \tag{2.109}$$

если $f|_{\Gamma_0(E^{\psi,\hat\psi})} = 0$, то $P_f^{\psi,\hat\psi} = 0$.

Доказательство. Положим $f^{\hat\psi}(\xi)=f(\hat\psi(\xi))$, $\xi\in E^\psi$. Для этой функции найдем константу $P_f^{\psi,\hat\psi}=P^\psi_{f^{\hat\psi}}$, а для $\xi\in E^\psi_{\lambda,\mu}$ — множество $G^\psi_\xi\subset E^\psi$ такие, что выполнены утверждения леммы 2.2.2. Пусть $\xi\in E^\psi_{\lambda,\mu}$, $x=\hat\psi(\xi)$, $G^{\psi,\hat\psi}_x=\hat\psi(G^\psi_\xi)$. Тогда

$$|f(x)-P_f^{\psi,\hat\psi}|=|f^{\hat\psi}(\xi)-P^\psi_{f^{\hat\psi}}|\underset{L,L',d}{\lesssim}C_{\lambda,\nu,d}\int\limits_{G^\psi_\xi}|\nabla f^{\hat\psi}(\eta)|\cdot|\xi-\eta|^{1-d}\,d\eta. \tag{2.110}$$

Положим

$$\|\hat\psi'\|=\operatorname{ess\,sup}_{\zeta\in\psi(\Pi)}\|\hat\psi'(\zeta)\|,\quad \|(\hat\psi^{-1})'\|=\operatorname{ess\,sup}_{z\in\hat\psi(\psi(\Pi))}\|(\hat\psi^{-1})'(z)\|.$$

Оценим сверху эти величины. Имеем $\frac{\partial\hat\psi_i}{\partial\zeta_j}(\zeta)=\delta_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant d-1$, $1\leqslant j\leqslant d$,

$$\frac{\partial\hat\psi_d}{\partial\zeta_j}(\zeta)=\left(1-\frac{\zeta_d-\alpha_d}{\beta_d-\alpha_d}\right)\frac{\partial\varphi_-(\zeta_1,\,\dots,\,\zeta_{d-1})}{\partial\zeta_j}+\frac{\zeta_d-\alpha_d}{\beta_d-\alpha_d}\frac{\partial\varphi_+(\zeta_1,\,\dots,\,\zeta_{d-1})}{\partial\zeta_j},$$
$$1\leqslant j\leqslant d-1,$$
$$\frac{\partial\hat\psi_d}{\partial\zeta_d}(\zeta)=\frac{\varphi_+(\zeta_1,\,\dots,\,\zeta_{d-1})-\varphi_-(\zeta_1,\,\dots,\,\zeta_{d-1})}{\beta_d-\alpha_d}.$$

Так как $\varphi_\pm$ липшицевы с константой $L''\leqslant L_0$, то $\left|\frac{\partial\hat\psi_d}{\partial\zeta_j}(\zeta)\right|\leqslant L_0$, $1\leqslant j\leqslant d-1$, и $\left|\frac{\partial\hat\psi_d}{\partial\zeta_d}(\zeta)\right|\overset{(2.59),(2.105)}{\leqslant}(L')^{-1}$ п.в.

Обозначим $\overline{z}=(z_1,\,\dots,\,z_{d-1})$. Если $z_j=\hat\psi_j(\zeta)$, то $\zeta_j=z_j$, $1\leqslant j\leqslant d-1$,

$$\zeta_d=\alpha_d+(\beta_d-\alpha_d)\frac{z_d-\varphi_-(\overline{z})}{\varphi_+(\overline{z})-\varphi_-(\overline{z})}.$$

Поэтому $\frac{\partial\zeta_i}{\partial z_j}(z)=\delta_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant d-1$, $1\leqslant j\leqslant d$,

$$\frac{\partial\zeta_d}{\partial z_j}(z)=(\beta_d-\alpha_d)\times$$
$$\times\left[-\frac{1}{\varphi_+(\overline{z})-\varphi_-(\overline{z})}\frac{\partial\varphi_-(\overline{z})}{\partial z_j}-\frac{z_d-\varphi_-(\overline{z})}{(\varphi_+(\overline{z})-\varphi_-(\overline{z}))^2}\frac{\partial(\varphi_+(\overline{z})-\varphi_-(\overline{z}))}{\partial z_j}\right],$$

$1\leqslant j\leqslant d-1$,

$$\frac{\partial\zeta_d}{\partial z_d}(z)=\frac{\beta_d-\alpha_d}{\varphi_+(\overline{z})-\varphi_-(\overline{z})}.$$

Поскольку $\left|\frac{\partial\varphi_\pm(z_1,\,\dots,\,z_{d-1})}{\partial z_j}\right|\leqslant L''\leqslant L_0$ п.в., $L'l_*\leqslant\varphi_+(z_1,\,\dots,\,z_{d-1})-\varphi_-(z_1,\,\dots,\,z_{d-1})\leqslant(L')^{-1}l_*$ и $l_*\leqslant\beta_d-\alpha_d\leqslant 2l_*$ в силу (2.59), то $\left|\frac{\partial\zeta_d}{\partial z_j}\right|\underset{L'}{\lesssim}L_0$, $1\leqslant j\leqslant d-1$, $\left|\frac{\partial\zeta_d}{\partial z_d}\right|\underset{L'}{\lesssim}1$. Если $L_0\leqslant 1$ достаточно мало, то

$$\|\hat\psi'\|\underset{L'}{\lesssim}1,\quad \|(\hat\psi')^{-1}\|\underset{L'}{\lesssim}1. \tag{2.111}$$

Тем самым, если $y=\hat\psi(\eta)$, то при малом L_0

$$\|(\hat\psi^{-1})'\|^{-1}\cdot|\xi-\eta|\underset{L}{\lesssim}|x-y|\underset{L}{\lesssim}\|\hat\psi'\|\cdot|\xi-\eta|\underset{L'}{\lesssim}|\xi-\eta|,$$

поэтому

$$|f(x)-P_f^{\psi,\hat\psi}|\underset{L,L',d}{\overset{(2.110)}{\lesssim}}C_{\lambda,\nu,d}\int\limits_{G^{\psi,\hat\psi}_x}|\nabla f(y)|\cdot|x-y|^{1-d}\,dy.$$

Теперь докажем второе утверждение. В силу леммы 2.2.2, найдется величина $\overline{C}_{L,L',d} > 0$ такая, что

$$\xi_d - \eta_d \geqslant \overline{C}_{L,L',d} M_{\lambda,\nu,d} \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |\xi_i - \eta_i|, \quad \eta \in G_\xi^\psi. \tag{2.112}$$

Значит,

$$\begin{gathered}
x_d - y_d = \left(1 - \frac{\xi_d - \alpha_d}{\beta_d - \alpha_d}\right)\varphi_-(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) + \frac{\xi_d - \alpha_d}{\beta_d - \alpha_d}\varphi_+(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) - \\
- \left(1 - \frac{\eta_d - \alpha_d}{\beta_d - \alpha_d}\right)\varphi_-(\eta_1, \ldots, \eta_{d-1}) - \frac{\eta_d - \alpha_d}{\beta_d - \alpha_d}\varphi_+(\eta_1, \ldots, \eta_{d-1}) = \\
= \frac{\xi_d - \eta_d}{\beta_d - \alpha_d}(\varphi_+(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) - \varphi_-(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})) + \\
+ \frac{\eta_d - \alpha_d}{\beta_d - \alpha_d}(\varphi_+(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) - \\
- \varphi_-(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) - \varphi_+(\eta_1, \ldots, \eta_{d-1}) + \varphi_-(\eta_1, \ldots, \eta_{d-1})) + \\
+ \varphi_-(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) - \varphi_-(\eta_1, \ldots, \eta_{d-1}) \overset{(2.59),\,(2.105)}{\geqslant} \\
\geqslant \frac{L'}{2}(\xi_d - \eta_d) - 3L'' \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |\xi_i - \eta_i| \overset{(2.112)}{\geqslant} \\
\geqslant \left(\frac{L'\overline{C}_{L,L',d} M_{\lambda,\nu,d}}{2} - 3L''\right) \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |\xi_i - \eta_i| \underset{L,L',d}{\gtrsim} \\
\gtrsim M_{\lambda,\nu,d} \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |x_i - y_i|
\end{gathered}$$

при достаточно малом L_0.

Соотношение (2.109) следует из (2.103) и (2.111). $\square$

Замечание 2.2.1. Из доказательства лемм 2.2.2 и 2.2.3 следует, что для любого $L'' \in (0,\, L_0(L, L', d, M_{\lambda,\nu,d}))$ выполнены соотношения (2.104) и (2.111).

Определение 2.2.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, m, $\nu \in \mathbb{N}$, $\gamma > 1$, L, $L'' > 0$, $L' \in (0,\, 1]$. Скажем, что $\Omega \in \mathcal{R}^*_{m,\nu,\gamma,L,L',L''}$, если найдутся

1. множество $E = E_\Omega \in \mathcal{R}^*_{m,\nu,\gamma}$, имеющее вид (2.56), (2.57),
2. функции $\underline{\varphi}$, $\overline{\varphi} : \prod_{j=2}^{d-1}[\alpha_j,\, \beta_j] \to \mathbb{R}$, являющиеся липшицевыми с константой L относительно евклидовой нормы на $\mathbb{R}^{d-2}$ и удовлетворяющие условию
$$(\overline{\varphi} - \underline{\varphi})\left(\prod_{j=2}^{d-1}[\alpha_j,\, \beta_j]\right) \subset [L'l_*,\, (L')^{-1}l_*],$$
где $l_* = \beta_1 - \alpha_1$,
3. функции $\varphi_\pm : D^\psi \to \mathbb{R}$, являющиеся липшицевыми с константой L'' относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$ и такие, что
$$(\varphi_+ - \varphi_-)(D^\psi) \subset [L'l_*,\, (L')^{-1}l_*],$$

для которых выполнено следующее условие: $D^\psi = w\left(\prod_{j=1}^{d-1}[\alpha_j,\, \beta_j]\right)$, $\Omega = E^{\psi,\hat{\psi}}$, где $w = w_\Omega$, $\psi = \psi_\Omega$ и $\hat{\psi} = \hat{\psi}_\Omega$ задаются формулами (2.101), (2.102) и (2.106) соответственно. В этом случае положим $\Gamma_0(\Omega) = \Gamma_0(E^{\psi,\hat{\psi}})$, а для $\lambda \in (0,\, 1)$, $\mu \in \mathbb{N}$ обозначим $\Omega_{\lambda,\mu} = E^{\psi,\hat{\psi}}_{\lambda,\mu}$.

Предложение 2.2.2. *Пусть* $m,\ \nu \in \mathbb{N}$, $\gamma > 1$, $L,\ L'' > 0$, $L' \in (0,\, 1]$, $\Omega \in \mathcal{R}^*_{m,\nu,\gamma,L,L',L''}$, $0 < \lambda \leqslant 1 - \frac{1}{\gamma}$, $\mu_1 \in \mathbb{N} \cap [2,\, +\infty)$, $\tilde\lambda = \frac{\lambda}{2-\lambda}$, $1 < \tilde\gamma \leqslant \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}$, $\tilde L' = L'\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$. *Тогда существует область* $\tilde\Omega \subset \Omega_{\lambda/2,\mu_1}$ *такая, что*

1. $\tilde\Omega \in \mathcal{R}^*_{m,\mu_1\nu,\tilde\gamma,L,\tilde L',L''}$,

2. $\Omega_{\lambda,\mu\mu_1} \subset \tilde\Omega_{\tilde\lambda,\mu}$ *для любого* $\mu \in \mathbb{N} \cap [2,\, +\infty)$,

3. $\Omega \backslash \Omega_{\lambda,1} \supset \tilde\Omega \backslash \tilde\Omega_{\tilde\lambda,1}$.

Доказательство. Сначала определим множество $E_{\tilde\Omega}$. Положим

$$\tilde\Pi = \Pi^{1-\frac{\lambda}{2}} = \left(\prod_{j=1}^{d-1} [\alpha_j,\, \beta_j]\right) \times [\tilde\alpha_d,\, \beta_d], \quad \tilde\alpha_d = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\alpha_d + \frac{\lambda}{2}\beta_d.$$

Тогда

$$\tilde\gamma l_* \leqslant \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\gamma l_* \overset{(2.60)}{\leqslant} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)(\beta_d - \alpha_d) = \beta_d - \tilde\alpha_d \leqslant \beta_d - \alpha_d \overset{(2.59)}{\leqslant} 2l_*. \tag{2.113}$$

Для $i = 1,\, 2$ определим $\tilde\Pi_i$ следующим образом. Если $\Pi_i(\mu_1) \cap \tilde\Pi \overset{d}{=} \varnothing$, то положим $\tilde\Pi_i = \varnothing$. Пусть $\Pi_i(\mu_1) \cap \tilde\Pi \overset{d}{\neq} \varnothing$,

$$\Pi_i(\mu_1) \cap \tilde\Pi = \left(\prod_{j=1}^{d-1} [\alpha^i_j,\, \beta^i_j]\right) \times [\tilde\alpha^i_d,\, \tilde\beta^i_d].$$

Тогда

$$\tilde\beta^i_d - \tilde\alpha^i_d \leqslant \mu_1(\beta^i_d - \alpha^i_d) \overset{(2.59)}{\leqslant} \mu_1\nu(\beta^i_1 - \alpha^i_1). \tag{2.114}$$

Если $\tilde\beta^i_d - \tilde\alpha^i_d \geqslant \beta^i_1 - \alpha^i_1$, то полагаем $\tilde\Pi_i = \Pi_i(\mu_1) \cap \tilde\Pi$. Если $\tilde\beta^i_d - \tilde\alpha^i_d < \beta^i_1 - \alpha^i_1$, то $\alpha^i_d \leqslant \tilde\alpha_d$ и $\tilde\alpha^i_d = \tilde\alpha_d$ (иначе $\Pi_i(\mu_1) \cap \tilde\Pi = \Pi_i(\mu_1) \cap \Pi \supset \Pi_i$ и получаем противоречие с неравенством $\beta^i_d - \alpha^i_d \geqslant \beta^i_1 - \alpha^i_1$). В этом случае полагаем

$$\tilde\Pi_i = \left(\prod_{j=1}^{d-1} [\alpha^i_j,\, \beta^i_j]\right) \times [\tilde\alpha_d,\, \tilde\alpha_d + \beta^i_1 - \alpha^i_1]. \tag{2.115}$$

Заметим, что

$$\tilde\alpha_d + \beta^i_1 - \alpha^i_1 \leqslant \tilde\alpha_d + \beta_1 - \alpha_1 \overset{(2.113)}{\leqslant} \tilde\alpha_d + \frac{1}{\tilde\gamma}(\beta_d - \tilde\alpha_d) \leqslant \beta_d,$$

поэтому $\tilde\Pi_i \subset \tilde\Pi$.

Положим $E_{\tilde\Omega} = \tilde E = \tilde\Pi \backslash (\tilde\Pi_1 \cup \tilde\Pi_2)$. Тогда

$$E_{\tilde\Omega} \in \mathcal{R}^*_{m,\,\mu_1\nu,\,\tilde\gamma} \tag{2.116}$$

в силу (2.113), (2.114) и построения $\tilde\Pi_i$. По определению, $E_{\lambda/2,\mu_1} = \Pi^{1-\frac{\lambda}{2}} \backslash (\Pi_1(\mu_1) \cup \Pi_2(\mu_1))$; так как

$$\tilde\Pi = \Pi^{1-\frac{\lambda}{2}}, \quad \tilde\Pi_i \supset \Pi_i(\mu_1) \cap \Pi^{1-\frac{\lambda}{2}}, \tag{2.117}$$

то

$$\tilde{E} \subset E_{\lambda/2,\mu_1}. \tag{2.118}$$

Покажем, что для любого $\mu \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$ выполнено

$$E_{\lambda,\mu\mu_1} \subset \tilde{E}_{\tilde{\lambda},\mu}. \tag{2.119}$$

В самом деле, $\Pi^{1-\lambda} = \tilde{\Pi}^{1-\tilde{\lambda}}$, так как

$$(1-\tilde{\lambda})\tilde{\alpha}_d + \tilde{\lambda}\beta_d = (1-\lambda)\alpha_d + \lambda\beta_d. \tag{2.120}$$

Проверим включение

$$\tilde{\Pi}_i(\mu) \subset \Pi_i(\mu\mu_1). \tag{2.121}$$

Если $\tilde{\Pi}_i = \varnothing$, то (2.121) тривиально. Если $\tilde{\Pi}_i = \Pi_i(\mu_1) \cap \tilde{\Pi}$, то (2.121) следует из неравенств $\alpha_d^i \leqslant \tilde{\alpha}_d^i$,

$$\tilde{\alpha}_d^i + \mu(\tilde{\beta}_d^i - \tilde{\alpha}_d^i) = \tilde{\beta}_d^i + (\mu-1)(\tilde{\beta}_d^i - \tilde{\alpha}_d^i) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_d^i + \mu_1(\beta_d^i - \alpha_d^i) + (\mu-1)\mu_1(\beta_d^i - \alpha_d^i) = \alpha_d^i + \mu\mu_1(\beta_d^i - \alpha_d^i).$$

Пусть параллелепипед $\tilde{\Pi}_i$ определяется формулой (2.115). Тогда (2.121) следует из неравенств $\alpha_d^i \leqslant \tilde{\alpha}_d$,

$$\tilde{\alpha}_d + \mu(\beta_1^i - \alpha_1^i) \overset{(2.59)}{\leqslant} \alpha_d^i + (\tilde{\alpha}_d - \alpha_d^i) + \mu(\beta_d^i - \alpha_d^i) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_d^i + \mu_1(\beta_d^i - \alpha_d^i) + \mu(\beta_d^i - \alpha_d^i) \leqslant \alpha_d^i + \mu_1\mu(\beta_d^i - \alpha_d^i)$$

(последнее неравенство верно, так как $\mu_1 \geqslant 2$, $\mu \geqslant 2$).

Покажем, что

$$E \backslash E_{\lambda,1} \supset \tilde{E} \backslash \tilde{E}_{\tilde{\lambda},1}. \tag{2.122}$$

В самом деле,

$$E \backslash E_{\lambda,1} = (\Pi \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2)) \backslash (\Pi^{1-\lambda} \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2)) = (\Pi \backslash \Pi^{1-\lambda}) \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2).$$

Из (2.117) и (2.120) соответственно следует, что

$$\tilde{\Pi}_i \supset \Pi_i(\mu_1) \cap \tilde{\Pi} \supset \Pi_i \cap \tilde{\Pi},\ i = 1, 2, \quad \text{и} \quad \Pi \backslash \Pi^{1-\lambda} \supset \tilde{\Pi} \backslash \tilde{\Pi}^{1-\tilde{\lambda}}.$$

Значит,

$$\tilde{E} \backslash \tilde{E}_{\tilde{\lambda},1} = (\tilde{\Pi} \backslash \tilde{\Pi}^{1-\tilde{\lambda}}) \backslash (\tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2) \subset (\tilde{\Pi} \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2)) \backslash \tilde{\Pi}^{1-\tilde{\lambda}} =$$
$$= (\tilde{\Pi} \backslash \tilde{\Pi}^{1-\tilde{\lambda}}) \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2) \subset (\Pi \backslash \Pi^{1-\lambda}) \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2) = E \backslash E_{\lambda,1}.$$

Положим $w_{\tilde{\Omega}} = w_\Omega$, $\psi_{\tilde{\Omega}} = \psi_\Omega|_{\tilde{\Pi}}$, $\hat{\psi}_{\tilde{\Omega}} = \hat{\psi}_\Omega|_{\psi_\Omega(\tilde{\Pi})}$. Отображение $\hat{\psi}_{\tilde{\Omega}}$ задается с помощью функций $\tilde{\varphi}_+ = \varphi_+$ и $\tilde{\varphi}_- = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\varphi_- + \frac{\lambda}{2}\varphi_+$. В самом деле, если $\zeta' \in D^\psi$, $\tilde{\alpha}_d \leqslant \zeta_d \leqslant \beta_d$, то

$$\left(1 - \frac{\zeta_d - \tilde{\alpha}_d}{\beta_d - \tilde{\alpha}_d}\right)\tilde{\varphi}_-(\zeta') + \frac{\zeta_d - \tilde{\alpha}_d}{\beta_d - \tilde{\alpha}_d}\tilde{\varphi}_+(\zeta') = \left(1 - \frac{\zeta_d - \alpha_d}{\beta_d - \alpha_d}\right)\varphi_-(\zeta') + \frac{\zeta_d - \alpha_d}{\beta_d - \alpha_d}\varphi_+(\zeta')$$

(это доказывается непосредственной проверкой). Положим $\tilde{\Omega} = \hat{\psi}_\Omega \circ \psi_\Omega(\tilde{E}) = \hat{\psi}_{\tilde{\Omega}} \circ \psi_{\tilde{\Omega}}(\tilde{E})$. Тогда из (2.113), (2.116) и определений отображения $\psi_{\tilde{\Omega}}$ и функций $\tilde{\varphi}_\pm$ следует, что $\tilde{\Omega} \in \mathcal{R}^*_{m,\mu_1\nu,\tilde{\gamma},L,\tilde{L}',L''}$. Из (2.118), (2.119) и (2.122) получаем включения $\tilde{\Omega} \subset \Omega_{\lambda/2,\mu_1}$, $\Omega_{\lambda,\mu\mu_1} \subset \tilde{\Omega}_{\tilde{\lambda},\mu}$ ($\mu \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$) и $\Omega \backslash \Omega_{\lambda,1} \supset \tilde{\Omega} \backslash \tilde{\Omega}_{\tilde{\lambda},1}$. □

Лемма 2.2.4. *Пусть* $L > 0$, $L' \in (0, 1]$, $\gamma > 1$, $0 < \lambda \leqslant 1 - \frac{1}{\gamma}$, ν, r, $d \in \mathbb{N}$. *Тогда найдутся такие* $\hat{m} = \hat{m}(\lambda, \nu, \gamma, r, d) \in \mathbb{N}$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}(\lambda, \nu, \gamma, r, d) \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$, $L'' = L''(\lambda, \nu, \gamma, r, d, L, L') > 0$, *что для любой области* $\Omega \in \mathcal{R}^*_{\hat{m},\nu,\gamma,L,L',L''}$ *и для любой функции* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *липшицевой со своими производными до* $r - 1$ *порядка, найдется полином* P_f *степени не выше* $r - 1$, *а для любого* $x \in \Omega_{\lambda,\hat{\mu}}$ — *множество* $G_x \subset \Omega$, *такие, что*

$$|f(x) - P_f| \underset{L,L',d,r,\lambda,\nu,\gamma}{\lesssim} \int\limits_{G_x} |\nabla^r f(y)| \cdot |x - y|^{r-d}\, dy \tag{2.123}$$

и для любого $y \in G_x$

$$x_d - y_d \underset{L,L',d,r,\lambda,\nu,\gamma}{\gtrsim} \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |x_i - y_i|. \tag{2.124}$$

При этом, множество

$$\mathcal{G} = \{(x, y) : x \in \Omega_{\lambda,\hat{\mu}},\ y \in G_x\}$$

замкнуто в $\Omega_{\lambda,\hat{\mu}} \times \Omega$, *а отображение* $f \mapsto P_f$ *линейно и для любого* $p > 1$

$$\|P_f\|_{L_\infty(\Omega)} \underset{p,\Omega,\psi,\hat{\psi},\lambda,\gamma,r}{\lesssim} \sum_{j=0}^{r} \|\nabla^j f\|_{L_p(\Omega\setminus\Omega_{\lambda,\,1})}; \tag{2.125}$$

в частности, если $f|_{\Omega\setminus\Omega_{\lambda,\,1}} = 0$, *то* $P_f = 0$.

Доказательство. Утверждение докажем индукцией по r. Пусть $r = 1$. Для каждого $\lambda \in (0, 1)$ и $\nu \in \mathbb{N}$ применим лемму 2.2.3 и найдем $m_* = m_*(\lambda, \nu, d) \in \mathbb{N}$, $\mu = \mu(\lambda, \nu, d) \in \mathbb{N}$ и $L_0 = L_0(L, L', d, M_{\lambda,\nu,d}) > 0$ такие, что для любого $L'' \in [0, L_0]$, любой области $\Omega \in \mathcal{R}^*_{m_*,\nu,\gamma,L,L',L''}$ и каждого $x \in \Omega_{\lambda,\mu}$ существует множество $G_x^{\psi,\hat{\psi}} = G_x^{\psi,\hat{\psi}}(\lambda) \subset \Omega$, для которого выполнены (2.107) и (2.108). Пусть

$$\mathcal{G}_1 = \{(x, y) : x \in \Omega_{\lambda,\mu},\ y \in G_x^{\psi,\hat{\psi}}(\lambda)\},$$

$\mathcal{G}$ — замыкание $\mathcal{G}_1$ в $\Omega_{\lambda,\mu} \times \Omega$,

$$G_x = \{y \in \Omega : (x, y) \in \mathcal{G}\}.$$

Это множество искомое. В самом деле, неравенство (2.123) следует из включения $G_x \supset G_x^{\psi,\hat{\psi}}(\lambda)$. Соотношение (2.124) следует из (2.108).

Пусть $k \geqslant 2$ и лемма верна для $r \leqslant k - 1$, докажем ее для $r = k$.

Применяем предположение индукции для $r = 1$ к числам L, L', $\lambda/2$, γ и ν и находим $\hat{m}_1 = \hat{m}_1(\lambda, \nu, \gamma, d)$, $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_1(\lambda, \nu, \gamma, d)$ и $L''_1 = L''_1(\lambda, \nu, \gamma, d, L, L')$. Для каждой области $\Omega \in \mathcal{R}^*_{\hat{m}_1,\nu,\gamma,L,L',L''_1}$ и каждого $y \in \Omega_{\lambda/2,\hat{\mu}_1}$ определяем множество $G_y \subset \Omega$. Тогда множество

$$\{(y, z) : y \in \Omega_{\lambda/2,\hat{\mu}_1},\ z \in G_y\}$$

замкнуто в $\Omega_{\lambda/2,\hat{\mu}_1} \times \Omega$ и для любого $z \in G_y$ выполнено

$$y_d - z_d \underset{L,L',d,\lambda,\nu,\gamma}{\gtrsim} \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |y_i - z_i|. \tag{2.126}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $|\alpha| = k - 1$. Выберем для функции $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^\alpha}$ константу $P_\alpha = P_\alpha(f)$ так, чтобы

$$\left|\frac{\partial^{k-1} f}{\partial y^\alpha}(y) - P_\alpha\right| \underset{L,L',d,\lambda,\nu,\gamma}{\lesssim} \int\limits_{G_y} \left|\nabla \frac{\partial^{k-1} f}{\partial z^\alpha}(z)\right| \cdot |y - z|^{1-d}\, dz,\ \ y \in \Omega_{\lambda/2,\hat{\mu}_1}, \tag{2.127}$$

отображение $f \mapsto P_\alpha(f)$ было линейным и

$$|P_\alpha(f)| \underset{p,\Omega,\psi,\hat{\psi},\lambda,\gamma}{\lesssim} \left\|\nabla^k f\right\|_{L_p(\Omega\backslash\Omega_{\lambda/2,1})} + \left\|\nabla^{k-1} f\right\|_{L_p(\Omega\backslash\Omega_{\lambda/2,1})};$$

в частности, если $\left.\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^\alpha}\right|_{\Omega\backslash\Omega_{\lambda/2,1}} = 0$, то $P_\alpha = 0$.

Положим $Q_f(x) = \sum\limits_{|\alpha|=k-1} \frac{P_\alpha(f)}{\alpha!} x^\alpha$. Тогда $\frac{\partial^{k-1} Q_f(x)}{\partial x^\beta} = P_\beta(f)$, $|\beta| = k-1$. Заметим, что отображение $f \mapsto Q_f$ линейно и

$$\|Q_f\|_{L_\infty(\Omega)} \underset{p,\Omega,\psi,\hat{\psi},\lambda,\gamma}{\lesssim} \left\|\nabla^k f\right\|_{L_p(\Omega\backslash\Omega_{\lambda/2,1})} + \left\|\nabla^{k-1} f\right\|_{L_p(\Omega\backslash\Omega_{\lambda/2,1})}. \qquad (2.128)$$

Кроме того, если $f|_{\Omega\backslash\Omega_{\lambda,1}} = 0$, то $\left.\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^\alpha}\right|_{\Omega\backslash\Omega_{\lambda/2,1}} = 0$ и поэтому $P_\alpha(f) = 0$ для любого α, $|\alpha| = k-1$, так что $Q_f = 0$.

Пусть $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{2-\lambda}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}$. Тогда $\tilde{\lambda} \leqslant 1 - \frac{1}{\tilde{\gamma}}$. Для $\mu_1 = \hat{\mu}_1$ определим область $\tilde{\Omega}$ в соответствии с предложением 2.2.2. Тогда $\tilde{\Omega} \subset \Omega_{\lambda/2,\hat{\mu}_1}$, $\Omega_{\lambda,\mu\hat{\mu}_1} \subset \tilde{\Omega}_{\tilde{\lambda},\mu}$ для любого $\mu \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$ и

$$\Omega\backslash\Omega_{\lambda,1} \supset \tilde{\Omega}\backslash\tilde{\Omega}_{\tilde{\lambda},1}. \qquad (2.129)$$

Кроме того, если $\Omega \in \mathcal{R}^*_{m,\nu,\gamma,L,L',L''}$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$, $L'' > 0$, то $\tilde{\Omega} \in \mathcal{R}^*_{m,\hat{\mu}_1\nu,\tilde{\gamma},L,\tilde{L}',L''}$, где $\tilde{L}' = L'\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$. Применив по предположению индукции при $r = k-1$ утверждение леммы для чисел $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\gamma}$, $\hat{\mu}_1\nu$, $\tilde{L} = L$, $\tilde{L}' = L'\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$, находим $\hat{m}_2$, $\hat{\mu}_2$ и L''_2. Положим $\hat{m} = \max\{\hat{m}_1, \hat{m}_2\}$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2$, $L'' = \min\{L''_1, L''_2\}$. Для каждой области $\Omega \in \mathcal{R}^*_{\hat{m},\nu,\gamma,L,L',L''}$ и каждого $x \in \tilde{\Omega}_{\tilde{\lambda},\hat{\mu}_2}$ находим множество $G_x^{k-1} \subset \tilde{\Omega}$ такое, что для любого $y \in G_x^{k-1}$

$$x_d - y_d \underset{L,L',\lambda,\nu,d,k,\gamma}{\gtrsim} \max_{1\leqslant i\leqslant d-1} |x_i - y_i| \qquad (2.130)$$

и множество

$$\{(x, y) : x \in \tilde{\Omega}_{\tilde{\lambda},\hat{\mu}_2},\, y \in G_x^{k-1}\}$$

замкнуто в $\tilde{\Omega}_{\tilde{\lambda},\hat{\mu}_2} \times \tilde{\Omega}$.

Для каждой функции f, липшицевой со своими производными до $k-1$ порядка, существует полином $\tilde{P}_f$ степени не выше $k-2$ такой, что для любого $x \in \Omega_{\lambda,\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2} \subset \tilde{\Omega}_{\tilde{\lambda},\hat{\mu}_2}$

$$|f(x) - Q_f(x) - \tilde{P}_f(x)| \underset{L,L',\lambda,\nu,d,k,\gamma}{\lesssim} \int\limits_{G_x^{k-1}} |\nabla^{k-1}(f - Q_f)(y)| \cdot |x-y|^{k-1-d}\, dy. \qquad (2.131)$$

При этом, отображение $f - Q_f \mapsto \tilde{P}_f$ линейно и

$$\|\tilde{P}_f\|_{L_\infty(\Omega)} \underset{p,\Omega,\psi,\hat{\psi},\lambda,\gamma,k}{\lesssim} \sum_{j=0}^{k-1} \|\nabla^j(f - Q_f)\|_{L_p(\tilde{\Omega}\backslash\tilde{\Omega}_{\tilde{\lambda},1})} \overset{(2.128),(2.129)}{\underset{p,\Omega,\psi,\hat{\psi},\lambda,\gamma,k}{\lesssim}} \sum_{j=0}^{k} \|\nabla^j f\|_{L_p(\Omega\backslash\Omega_{\lambda,1})}.$$

Значит, отображение $f \mapsto Q_f + \tilde{P}_f$ линейно и из (2.128) следует (2.125). Кроме того, если $f|_{\Omega\backslash\Omega_{\lambda,1}} = 0$, то $f|_{\tilde{\Omega}\backslash\tilde{\Omega}_{\tilde{\lambda},1}} = 0$ в силу (2.129), и по предположению индукции $\tilde{P}_f = 0$, так что $Q_f + \tilde{P}_f = 0$.

Применив (2.127) и (2.131) и учитывая, что $G_x^{k-1} \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega_{\lambda/2,\hat{\mu}_1}$, получаем, что

$$|f(x) - Q_f(x) - \tilde{P}_f(x)| \underset{L,L',\lambda,\nu,d,k,\gamma}{\lesssim} \int\limits_{G_x^{k-1}} |x-y|^{k-1-d} \int\limits_{G_y} |\nabla^k f(z)| \cdot |y-z|^{1-d}\, dz\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{G}_x} |x-y|^{k-1-d}|y-z|^{1-d}|\nabla^k f(z)|\,dy\,dz = \int\limits_{G_x^k} K(x,\,z)|\nabla^k f(z)|\,dz,$$

где
$$\mathcal{G}_x = \{(y,\,z)\in G_x^{k-1}\times\Omega : z\in G_y\} \text{ — измеримое множество},$$
$G_x^k := \operatorname{supp} K(x,\,\cdot) \subset \cup_{y\in G_x^{k-1}} G_y \subset \Omega$. Из (2.126) и (2.130) следует, что найдется константа $c = c(L,\,L',\,d,\,\lambda,\,\gamma,\,\nu,\,k) > 0$ такая, что для любых $y\in G_x^{k-1}$, $z\in G_y$ выполнено
$$x_d - y_d \geqslant c\max_{1\leqslant i\leqslant d-1}|x_i-y_i|, \quad y_d - z_d \geqslant c\max_{1\leqslant i\leqslant d-1}|y_i - z_i|,$$
поэтому для любого $z\in G_x^k$
$$x_d - z_d = (x_d-y_d)+(y_d-z_d)\geqslant$$
$$\geqslant c\max_{1\leqslant i\leqslant d-1}|x_i-y_i| + c\max_{1\leqslant i\leqslant d-1}|y_i-z_i| \geqslant c\max_{1\leqslant i\leqslant d-1}|x_i-z_i|$$
($y\in G_x^{k-1}$ таково, что $z\in G_y$).

Оценим сверху величину $K(x,\,z)$. Обозначим
$$D_{x,z,y_d} = \{(y_1,\,\dots,\,y_{d-1}) : x_d - y_d \geqslant c\max_{1\leqslant i\leqslant d-1}|x_i-y_i|,\; y_d-z_d\geqslant c\max_{1\leqslant i\leqslant d-1}|y_i-z_i|\}.$$

Тогда
$$K(x,\,z)\leqslant \int\limits_{z_d}^{x_d}\;\int\limits_{(y_1,\,\dots,\,y_{d-1})\in D_{x,z,y_d}} |x-y|^{k-1-d}|y-z|^{1-d}\,dy_1\,\dots\,dy_{d-1}\,dy_d.$$

Пусть $x_d - y_d \geqslant y_d - z_d$ (случай $x_d-y_d < y_d - z_d$ рассматривается аналогично). Тогда $|x-y| \underset{c,d}{\asymp} |x-z|$, $|y-z| \underset{c,d}{\asymp} y_d - z_d$. Значит,
$$K(x,\,z) \underset{c,k,d}{\lesssim} \int\limits_{z_d}^{x_d} |x-z|^{k-1-d}(y_d-z_d)^{1-d}(y_d-z_d)^{d-1}\,dy_d =$$
$$= |x-z|^{k-1-d}(x_d-z_d)\leqslant |x-z|^{k-d}.$$

Обозначим $\mathcal{G}$ замыкание множества $\{(x,\,z) : x\in\Omega_{\lambda,\hat\mu},\quad z\in G_x^k\}$ в $\Omega_{\lambda,\hat\mu}\times\Omega$. Множество
$$G_x = \{z\in\Omega : (x,\,z)\in\mathcal{G}\}$$
является искомым. □

2.3 Оценка нормы двухвесового интегрального оператора

Лемма 2.3.1. *Пусть $\vartheta_\pm : [0,\,1]^{d-1}\to[0,\,C]$ липшицевы с константой $\Lambda\leqslant\frac{C}{16}$ относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$, $U = \{x\in[0,\,1]^{d-1} : \vartheta_-(x) < \vartheta_+(x)\}\neq\varnothing$. Тогда существует не более, чем счетное разбиение T_U множества U со следующими свойствами:*

1. *$T_U\subset\Xi([0,\,1]^{d-1})$;*
2. *если $\Delta\in T_U\cap\Xi_m([0,\,1]^{d-1})$, $m\in\mathbb{Z}_+$, то для любого $x\in\Delta$ выполнено $2^{-m-2}C\leqslant \vartheta_+(x)-\vartheta_-(x)\leqslant 2^{-m}C$;*

3. если $\Delta \in T_U \cap \Xi_m([0,\,1]^{d-1})$, $x \in \Delta$, $y \in [0,\,1]^{d-1}$ *и* $\|x-y\|_\infty \leqslant \frac{2^{-m-4}C}{\Lambda}$, *то существует куб*
$$\Delta' \in T_U \cap \left(\bigcup_{k=m-2}^{m+1} \Xi_k([0,\,1]^{d-1})\right)$$
такой, что $y \in \Delta'$.

Доказательство. Пусть $A_0 = \max\{\vartheta_+(x) - \vartheta_-(x) : x \in U\}$. Выберем $m_1 \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы $A_0 \in (C \cdot 2^{-m_1-1},\, C \cdot 2^{-m_1}]$. Обозначим
$$T_0 = \{\Delta \in \Xi_{m_1}([0,\,1]^{d-1}) : \exists x_\Delta \in \Delta :$$
$$\vartheta_+(x_\Delta) - \vartheta_-(x_\Delta) = \max_{x\in\Delta}(\vartheta_+(x) - \vartheta_-(x)) \in (C \cdot 2^{-m_1-1},\, C \cdot 2^{-m_1}]\},$$
$T'_0 = \Xi_{m_1}([0,\,1]^{d-1}) \backslash T_0$. Тогда, если $x \in \Delta$, $\Delta \in T_0$, $y \in [0,\,1]^{d-1}$, $\|x-y\|_\infty \leqslant \frac{2^{-m_1-4}C}{\Lambda}$, то
$$\vartheta_+(y) - \vartheta_-(y) = \vartheta_+(x_\Delta) - \vartheta_-(x_\Delta) - (\vartheta_+(x_\Delta) - \vartheta_+(x)) -$$
$$-(\vartheta_-(x) - \vartheta_-(x_\Delta)) - (\vartheta_+(x) - \vartheta_+(y)) - (\vartheta_-(y) - \vartheta_-(x)) >$$
$$> C \cdot 2^{-m_1-1} - 2\Lambda \cdot 2^{-m_1} - 2C \cdot 2^{-m_1-4} \geqslant C \cdot 2^{-m_1-1} - 4C \cdot 2^{-m_1-4} = C \cdot 2^{-m_1-2}.$$

Пусть построены семейства неперекрывающихся кубов $T_j \subset \Xi_{m_1+j}([0,\,1]^{d-1})$, $j = \overline{0,\,s}$, и $T'_s \subset \Xi_{m_1+s}([0,\,1]^{d-1})$ такие, что

1. $T_0 \cup \dots \cup T_s \cup T'_s$ является разбиением $[0,\,1]^{d-1}$, для каждого $j = \overline{0,\,s}$, $\Delta \in T_j$ найдется точка $x_\Delta \in \Delta$ такая, что
$$\vartheta_+(x_\Delta) - \vartheta_-(x_\Delta) = \max_{x\in\Delta}(\vartheta_+(x) - \vartheta_-(x)) \in (C \cdot 2^{-m_1-j-1},\, C \cdot 2^{-m_1-j}],$$
для каждого $\Delta \in T'_s$, $x \in \Delta$ выполнено $\vartheta_+(x) - \vartheta_-(x) \leqslant C \cdot 2^{-m_1-s-1}$;

2. если $x \in \Delta$, $\Delta \in T_j$, $0 \leqslant j \leqslant s$, $y \in [0,\,1]^{d-1}$, $\|x-y\|_\infty \leqslant \frac{2^{-m_1-j-4}C}{\Lambda}$, то
$$\vartheta_+(y) - \vartheta_-(y) \in (2^{-m_1-j-2}C,\, 2^{-m_1-j+1}C]. \tag{2.132}$$
В частности, $\vartheta_+(x) - \vartheta_-(x) > 2^{-m_1-j-2}C$.

Покажем, что если выполнено (2.132) и $0 \leqslant j \leqslant s-1$, то $y \in \Delta'$, где $\Delta' \in \cup_{k=j-2}^{j+1} T_k$. В самом деле, $\vartheta_+(y) - \vartheta_-(y) > 2^{-m_1-s-1}C$, так что $\Delta' \notin T'_s$; если $\Delta' \in T_k$, $j+2 \leqslant k \leqslant s$, то из определения $x_{\Delta'}$ получаем
$$\vartheta_+(y) - \vartheta_-(y) \leqslant 2^{-m_1-k}C \leqslant 2^{-m_1-j-2}C;$$
если $\Delta' \in T_k$, $0 \leqslant k \leqslant j-3$, то в силу неравенства $\|y - x_{\Delta'}\|_\infty \leqslant 2^{-m_1-k} \leqslant \frac{2^{-m_1-k-4}C}{\Lambda}$ и свойства 1
$$\vartheta_+(y) - \vartheta_-(y) = \vartheta_+(x_{\Delta'}) - \vartheta_-(x_{\Delta'}) - (\vartheta_+(x_{\Delta'}) - \vartheta_+(y)) - (\vartheta_-(y) - \vartheta_-(x_{\Delta'})) >$$
$$> 2^{-m_1-k-1}C - 2\Lambda \cdot 2^{-m_1-k} \geqslant 2^{-m_1-k-1}C - 2 \cdot 2^{-m_1-k-4}C \geqslant$$
$$\geqslant 2^{-m_1-k-2}C \geqslant 2^{-m_1-j+1}C.$$
Получаем противоречие с (2.132).

Построим семейства кубов T_{s+1} и T'_{s+1}. Пусть
$$\tilde{T}_{s+1} = \{\tilde{\Delta} \in \Xi_1(\Delta) : \Delta \in T'_s\},$$
$$T_{s+1} = \{\Delta \in \tilde{T}_{s+1} : \exists x_\Delta \in \Delta :$$
$$\vartheta_+(x_\Delta) - \vartheta_-(x_\Delta) = \max_{x\in\Delta}(\vartheta_+(x) - \vartheta_-(x)) \in (C \cdot 2^{-m_1-s-2},\, C \cdot 2^{-m_1-s-1}]\},$$
$T'_{s+1} = \tilde{T}_{s+1} \backslash T_{s+1}$. Тогда свойство 1 семейства разбиений $T_0,\, \dots,\, T_{s+1},\, T'_{s+1}$ выполнено по построению и по предположению индукции. Для доказательства свойства 2 достаточно рассмотреть $x \in \Delta$, $\Delta \in T_{s+1}$. Пусть $\|x-y\|_\infty \leqslant \frac{2^{-m_1-s-5}C}{\Lambda}$. Тогда
$$\vartheta_+(y) - \vartheta_-(y) = \vartheta_+(x_\Delta) - \vartheta_-(x_\Delta) -$$
$$-(\vartheta_+(x_\Delta) - \vartheta_+(x)) - (\vartheta_-(x) - \vartheta_-(x_\Delta)) - (\vartheta_+(x) - \vartheta_+(y)) - (\vartheta_-(y) - \vartheta_-(x)) >$$
$$> C \cdot 2^{-m_1-s-2} - 2\Lambda \cdot 2^{-m_1-s-1} - 2C \cdot 2^{-m_1-s-5} \geqslant$$
$$\geqslant C \cdot 2^{-m_1-s-2} - 4C \cdot 2^{-m_1-s-5} = C \cdot 2^{-m_1-s-3},$$
$$\vartheta_+(y) - \vartheta_-(y) \leqslant C \cdot 2^{-m_1-s-1} + 4C \cdot 2^{-m_1-s-5} \leqslant C \cdot 2^{-m_1-s}.$$

Разбиение $T_U = \cup_{s=0}^{\infty} T_s$ является искомым. $\square$

С помощью непосредственной проверки доказывается

Предложение 2.3.1. *Пусть* $(X,\,\rho)$ *— метрическое пространство,* $f_1,\ f_2 : X \to \mathbb{R}$ *липшицевы с константой* L *и для любого* $x \in X$ *выполнены неравенства*

$$f_2(x) \geqslant c > 0, \quad |f_1(x)| \leqslant C, \quad f_2(x) \leqslant C.$$

Тогда функция $\frac{f_1}{f_2}$ *липшицева с константой* $\frac{2CL}{c^2}$.

Предложение 2.3.2. *Пусть* $d \geqslant 2$, $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^{d-1}$ *— куб,* $\Pi_i = \prod_{j=1}^d [\alpha_j^i,\, \beta_j^i]$,

$$\beta_d^i - \alpha_d^i \geqslant \beta_1^i - \alpha_1^i = \dots = \beta_{d-1}^i - \alpha_{d-1}^i, \tag{2.133}$$

$p_{d-1}(\Pi_i) \in \Xi(\Delta_0)$, $i = 1,\, 2$, $\alpha_d^2 \geqslant \alpha_d^1$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \overset{d}{=} \varnothing$, $\Delta \in \Xi(\Delta_0)$, ρ *— длина ребра куба* Δ. *Пусть* $c \in (0,\, 1]$, *функции* $\vartheta_\pm : \Delta_0 \to \mathbb{R}$ *липшицевы с константой* $\frac{c}{8}$ *относительно* $\|\cdot\|_\infty$ *и для любого* $\xi \in \Delta$ *выполнено*

$$c\rho \leqslant \vartheta_+(\xi) - \vartheta_-(\xi) \leqslant c^{-1}\rho. \tag{2.134}$$

Положим

$$G = \{(\xi,\, x_d) \in \mathbb{R}^d : \xi \in \operatorname{int}\Delta,\ \vartheta_-(\xi) < x_d < \vartheta_+(\xi)\},$$
$$\tilde G = G \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2), \qquad A = \{(\xi,\, x_d) \in G : x_d > \alpha_d^2\}.$$

Пусть $\mu \in \mathbb{N} \cap [2,\, +\infty)$ *и* $A\backslash(\Pi_1(\mu) \cup \Pi_2(\mu)) \neq \varnothing$. *Тогда*

$$|\tilde G| \underset{c,\,d}{\gtrsim} |G|. \tag{2.135}$$

Доказательство. Из (2.134) следует, что $|G| \underset{c,d}{\lesssim} \rho^d$. Если $\Delta \not\subset p_{d-1}(\Pi_1) \cup p_{d-1}(\Pi_2)$, то

$$|\Delta\backslash(p_{d-1}(\Pi_1) \cup p_{d-1}(\Pi_2))| \geqslant \frac{\rho}{4} \text{ при } d = 2,$$
$$|\Delta\backslash(p_{d-1}(\Pi_1) \cup p_{d-1}(\Pi_2))| \geqslant \left(1 - \frac{1}{2^{d-2}}\right)\rho^{d-1} \text{ при } d \geqslant 3.$$

Отсюда и из (2.134) получаем (2.135).

Докажем (2.135) в случае $\Delta \subset p_{d-1}(\Pi_1) \cup p_{d-1}(\Pi_2)$. Пусть

$$(\xi_*,\, t_*) \in A\backslash(\Pi_1(\mu) \cup \Pi_2(\mu)), \quad \xi_* \in \Delta.$$

Определим число $i_* \in \{1,\, 2\}$ и куб Δ^*. Если $\Delta \subset p_{d-1}(\Pi_2)$, то положим $i_* = 2$, если $\Delta \subset p_{d-1}(\Pi_1)$ и $\Delta \cap p_{d-1}(\Pi_2) \overset{d}{=} \varnothing$, то положим $i_* = 1$; в обоих случаях полагаем $\Delta^* = \Delta$. Если $\Delta \subset p_{d-1}(\Pi_1)$, $p_{d-1}(\Pi_2) \subset \Delta$ и второе включение строгое, то выберем куб $\Delta^* \in \Xi_1(\Delta)$ такой, что $\Delta^* \cap p_{d-1}(\Pi_2) \overset{d}{=} \varnothing$ и положим $i_* = 1$. Во всех трех случаях $\xi_* \in \Delta \subset p_{d-1}(\Pi_{i_*})$. Если $\Delta \not\subset p_{d-1}(\Pi_i)$, $i = 1,\, 2$, то $d = 2$ и отрезки $p_{d-1}(\Pi_1) \in \Xi_1(\Delta)$, $p_{d-1}(\Pi_2) \in \Xi_1(\Delta)$ не перекрываются. Тогда выберем $i_* \in \{1,\, 2\}$ так, чтобы $\xi_* \in p_{d-1}(\Pi_{i_*})$, и положим $\Delta^* = p_{d-1}(\Pi_{i_*})$.

Пусть ρ' — длина ребра куба Δ^*. По построению, $\Delta^* \subset p_{d-1}(\Pi_{i_*})$, при этом $\Delta^* = \Delta$ или $\Delta^* \in \Xi_1(\Delta)$. Значит,

$$\beta_1^{i_*} - \alpha_1^{i_*} \geqslant \rho' \geqslant \frac{\rho}{2}. \tag{2.136}$$

Из условий $\alpha_d^2 \geqslant \alpha_d^1$, $\xi_* \in p_{d-1}(\Pi_{i_*})$, $(\xi_*,\, t_*) \in A\backslash(\Pi_1(\mu) \cup \Pi_2(\mu))$ и $\mu \geqslant 2$ получаем

$$t_* \geqslant \alpha_d^{i_*} + \mu(\beta_d^{i_*} - \alpha_d^{i_*}) \geqslant 2\beta_d^{i_*} - \alpha_d^{i_*}, \tag{2.137}$$

$$\vartheta_+(\xi_*) - \max\{\vartheta_-(\xi_*),\, \beta_d^{i_*}\} \geqslant \min\{\vartheta_+(\xi_*) - \vartheta_-(\xi_*),\, t_* - \beta_d^{i_*}\} \overset{(2.134),(2.137)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \min\left\{c\rho,\, \beta_d^{i_*} - \alpha_d^{i_*}\right\} \overset{(2.133)}{\geqslant} \min\left\{c\rho,\, \beta_1^{i_*} - \alpha_1^{i_*}\right\} \overset{(2.136)}{\geqslant} \min\left\{c\rho,\, \frac{\rho}{2}\right\} \geqslant \frac{c\rho}{2}$$

(поскольку $c \leqslant 1$).

Так как функции $\vartheta_\pm$ липшицевы с константой $\frac{c}{8}$ и длина ребра куба Δ^* не превосходит ρ, то для любого $\xi \in \Delta^*$ выполнено $\vartheta_+(\xi) - \max\{\vartheta_-(\xi),\, \beta_d^{i_*}\} \geqslant \frac{c\rho}{2} - 2\frac{c\rho}{8} = \frac{c\rho}{4}$.

Положим
$$G^* = \{(\xi,\, x_d) \in \tilde{G} : \xi \in \operatorname{int}\Delta^*\}.$$

Если $i_* = 1$, то $(\operatorname{int}\Delta^*) \cap p_{d-1}(\Pi_2) = \varnothing$; если $i_* = 2$, то либо $(\operatorname{int}\Delta^*) \cap p_{d-1}(\Pi_1) = \varnothing$, либо $p_{d-1}(\Pi_2) \cap p_{d-1}(\Pi_1) \underset{d}{\neq} \varnothing$ и $\beta_d^2 \geqslant \beta_d^1$ (иначе в силу неравенства $\alpha_d^2 \geqslant \alpha_d^1$ получим $\Pi_2 \cap \Pi_1 \underset{d}{\neq} \varnothing$). Отсюда следует, что

$$G^* \supset \left\{(\xi,\, x_d) : \xi \in \operatorname{int}\Delta^*,\ \max\{\vartheta_-(\xi),\, \beta_d^{i_*}\} < x_d < \vartheta_+(\xi)\right\},$$
$$|\tilde{G}| \geqslant |G^*| \geqslant (\rho')^{d-1}\frac{c\rho}{4} \overset{(2.136)}{\geqslant} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{d-1}\frac{c\rho}{4} \underset{c,\,d}{\gtrsim} \rho^d \underset{c,\,d}{\gtrsim} |G|.$$

$\square$

Скажем, что $E \in \mathcal{R}^{**}_{m,\nu,\gamma}$ (соответственно $\Omega \in \mathcal{R}^{**}_{m,\nu,\gamma,L,L',L''}$), если $E \in \mathcal{R}^{*}_{m,\nu,\gamma}$ (соответственно $\Omega \in \mathcal{R}^{*}_{m,\nu,\gamma,L,L',L''}$, см. определение 2.2.1) и параллелепипеды Π_1, Π_2 из (2.57) не перекрываются.

Лемма 2.3.2. *Пусть $L > 0$, $L' \in (0, 1]$, $M_0 \in (0, 1]$, $L'' \in (0, M_0)$, $\lambda = \frac{1}{3}$, $\nu = 4$, $\gamma = \frac{3}{2}$, $\hat{\mu} \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$, $\Omega \in \mathcal{R}^{**}_{1,\nu,\gamma,L,L',L''}$ (при этом $\Omega_{\lambda,\hat{\mu}}$, D^ψ, $\varphi_\pm$ такие, как в определении 2.2.1). Пусть для каждой точки $x \in \Omega_{\lambda,\hat{\mu}}$ определено множество $G_x \subset \Omega$ такое, что для любого $y \in G_x$ выполнено*

$$x_d - y_d \geqslant M_0 \max_{1 \leqslant i \leqslant d-1} |x_i - y_i| \tag{2.138}$$

и множество $\{(x,\, y) : x \in \Omega_{\lambda,\hat{\mu}},\ y \in G_x\}$ измеримо. Пусть функции $\tilde{\varphi}_\pm : D^\psi \to \mathbb{R}$ липшицевы с константой L'' относительно $\|\cdot\|_\infty$,

$$\varphi_-(x') \leqslant \tilde{\varphi}_\pm(x') \leqslant \varphi_+(x')$$

для любого $x' \in D^\psi$. Обозначим

$$A = \{(x',\, x_d) \in \Omega : \tilde{\varphi}_-(x') < x_d < \tilde{\varphi}_+(x')\},$$
$$A_{\lambda,\hat{\mu}} = \{(x',\, x_d) \in \Omega_{\lambda,\hat{\mu}} : \tilde{\varphi}_-(x') < x_d < \tilde{\varphi}_+(x')\}.$$

Пусть $r > 0$ (не обязательно целое), $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Тогда найдется такое $L''_* = L''_*(L,\, L',\, d,\, M_0) \in (0, M_0)$, что в случае $L'' < L''_*$ выполнено порядковое неравенство

$$\left(\int\limits_{A_{\lambda,\hat{\mu}}} \left|\int\limits_{A \cap G_x} f(y)|x-y|^{r-d}\, dy\right|^q dx\right)^{1/q} \underset{q,p,r,d,L,L',M_0}{\lesssim} |A|^{1/\varkappa} \left(\int\limits_A |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}. \tag{2.139}$$

Доказательство. Пусть множества E, Π, Π_1 и Π_2, функции $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ и отображения w, ψ, $\hat{\psi}$ такие, как в определении 2.2.1. Обозначим $\hat{\Delta} = \prod_{j=1}^{d-1}[\alpha_j,\, \beta_j]$, $l_* = \beta_1 - \alpha_1 = \dots = \beta_{d-1} - \alpha_{d-1}$,

$$C = \frac{\beta_d - \alpha_d}{l_*} \overset{(2.59),(2.60)}{\in} \left[\frac{3}{2},\, 2\right]. \tag{2.140}$$

В силу замечания 2.2.1, при

$$L'' \in (0,\, L_0(L, L', d, M_{1/3,4,d})) \tag{2.141}$$

выполнены соотношения (2.104) и (2.111).

Положим

$$\vartheta_\pm(\zeta) = \alpha_d + (\beta_d - \alpha_d)\frac{\tilde{\varphi}_\pm(w(\zeta)) - \varphi_-(w(\zeta))}{\varphi_+(w(\zeta)) - \varphi_-(w(\zeta))}.$$

Тогда $\hat{\psi} \circ \psi(\zeta,\, \vartheta_\pm(\zeta)) = (w(\zeta),\, \tilde{\varphi}_\pm(w(\zeta)))$. Из предложения 2.3.1, порядковых неравенств (2.104) и соотношений

$$\inf_{\xi \in D^\psi} (\varphi_+(\xi) - \varphi_-(\xi)) \overset{(2.105)}{\geqslant} L' l_*,$$

$$\sup_{\xi \in D^\psi} (\varphi_+(\xi) - \varphi_-(\xi)) \overset{(2.105)}{\leqslant} (L')^{-1} l_*, \quad \beta_d - \alpha_d \overset{(2.59)}{\leqslant} 2l_*$$

следует, что функции $\vartheta_\pm$ липшицевы относительно $\|\cdot\|_\infty$ с константой $C_0 L''$, где $C_0 = C_0(L,\, L',\, d)$.

Положим

$$G = \{x' \in D^\psi : \tilde{\varphi}_-(x') < \tilde{\varphi}_+(x')\}, \;\; U = w^{-1}(G).$$

Тогда $U = \{\zeta \in \hat{\Delta} : \vartheta_-(\zeta) < \vartheta_+(\zeta)\}$. Без ограничения общности можно считать, что $U \neq \varnothing$. Если

$$L'' < \frac{C}{16 C_0}, \tag{2.142}$$

то, по лемме 2.3.1, существует не более, чем счетное разбиение $T_U = \{\hat{\Delta}_j\}_{j \in I}$ множества U такое, что

1. $\hat{\Delta}_j \in \Xi(\hat{\Delta})$ для любого $j \in I$;
2. если $\hat{\Delta}_j \in \Xi_m(\hat{\Delta})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то для любого $\zeta \in \hat{\Delta}_j$ выполнено
$$2^{-m-2} C l_* \leqslant \vartheta_+(\zeta) - \vartheta_-(\zeta) \leqslant 2^{-m} C l_*; \tag{2.143}$$
3. если $\zeta \in \hat{\Delta}_j$, $\hat{\Delta}_j \in \Xi_m(\hat{\Delta})$, $\eta \in \hat{\Delta}$, $\|\eta - \zeta\|_\infty \leqslant \frac{2^{-m-4} \cdot C l_*}{C_0 L''}$, то $\eta \in \hat{\Delta}_i$ для некоторого $i \in I$ такого, что
$$\hat{\Delta}_i \in \Xi_{m-2}(\hat{\Delta}) \cup \Xi_{m-1}(\hat{\Delta}) \cup \Xi_m(\hat{\Delta}) \cup \Xi_{m+1}(\hat{\Delta}).$$

Пусть $\Delta_j = w(\hat{\Delta}_j)$,

$$K_j = \{(\xi,\, t) : \xi \in \Delta_j, \;\; \tilde{\varphi}_-(\xi) \leqslant t \leqslant \tilde{\varphi}_+(\xi)\}.$$

Тогда $\{\Delta_j\}_{j \in I}$ является разбиением множества G, а $\{K_j\}_{j \in I}$ — разбиением множества A. Так как функции $\vartheta_\pm$ липшицевы с константой $\frac{C}{16}$, а функции $\overline{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ липшицевы с константой L, то в силу (2.104), (2.111) и (2.143) найдется такая константа $R = R(L,\, L',\, d) > 1$, что

1. если $\hat{\Delta}_j \in \Xi_m(\hat{\Delta})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то для некоторой точки $\hat{z}_j \in K_j$ выполнены включения
$$B_{2^{-m} R^{-1} l_*}(\hat{z}_j) \subset K_j \subset B_{2^{-m} R l_*}(\hat{z}_j); \tag{2.144}$$

2. если $\xi \in \Delta_j$, $\hat{\Delta}_j \in \Xi_m(\hat{\Delta})$, $\eta \in D^\psi$, $\|\xi - \eta\|_\infty \leqslant \frac{2^{-m}l_*}{RL''}$, то $\eta \in \Delta_i$ для некоторого $i \in I$ такого, что

$$\hat{\Delta}_i \in \Xi_{m-2}(\hat{\Delta}) \cup \Xi_{m-1}(\hat{\Delta}) \cup \Xi_m(\hat{\Delta}) \cup \Xi_{m+1}(\hat{\Delta}).$$

Пусть $x = (\xi, x_d) \in K_j \cap \Omega_{\lambda,\hat{\mu}}$, $\xi \in \Delta_j$, $\hat{\Delta}_j \in \Xi_m(\hat{\Delta})$, $z = (\zeta, z_d) \in G_x$, $\zeta \in D^\psi$, $z_d \geqslant \tilde{\varphi}_-(\zeta)$. Покажем, что при

$$L'' < \frac{M_0}{4R^2} \tag{2.145}$$

выполнено

$$\|\xi - \zeta\|_\infty \leqslant \frac{Rl_* \cdot 2^{-m+2}}{M_0} \leqslant \frac{2^{-m}l_*}{RL''}, \text{ и } \zeta \in \Delta_i, \;\; \hat{\Delta}_i \in \bigcup_{s=m-2}^{m+1} \Xi_s(\hat{\Delta}). \tag{2.146}$$

В самом деле, из (2.138) следует, что $x_d - z_d \geqslant M_0\|\xi - \zeta\|_\infty$. Так как $x \in K_j$ и $\hat{\Delta}_j \in \Xi_m(\hat{\Delta})$, то $0 \leqslant x_d - \tilde{\varphi}_-(\xi) \overset{(2.144)}{\leqslant} Rl_* \cdot 2^{-m+1}$. Значит,

$$M_0\|\xi - \zeta\|_\infty \leqslant x_d - z_d \leqslant x_d - \tilde{\varphi}_-(\zeta) =$$
$$= x_d - \tilde{\varphi}_-(\xi) + \tilde{\varphi}_-(\xi) - \tilde{\varphi}_-(\zeta) \leqslant Rl_* \cdot 2^{-m+1} + L''\|\xi - \zeta\|_\infty,$$

так что в силу (2.145)

$$\|\xi - \zeta\|_\infty \leqslant \frac{Rl_* \cdot 2^{-m+1}}{M_0 - L''} \leqslant \frac{Rl_* \cdot 2^{-m+2}}{M_0} \leqslant \frac{2^{-m}l_*}{RL''}.$$

Пусть $\Gamma_0(\Pi_j) = \{(\zeta', (1-\lambda_j)\alpha_d + \lambda_j\beta_d) : \zeta' \in p_{d-1}(\Pi_j)\}$, $j = 1, 2$. Без ограничения общности, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Положим $\hat{\varphi}_j(\xi) = (1-\lambda_j)\varphi_-(\xi) + \lambda_j\varphi_+(\xi)$, $\xi \in D^\psi$, $j = 1, 2$. Тогда $\hat{\varphi}_1$ и $\hat{\varphi}_2$ липшицевы с константой L''. Пусть

$$A_1 = \{(\xi, x_d) \in A : \xi \in D^\psi, \;\; \tilde{\varphi}_-(\xi) < x_d < \hat{\varphi}_1(\xi)\},$$
$$A_2 = \{(\xi, x_d) \in A : \xi \in D^\psi, \;\; \hat{\varphi}_1(\xi) < x_d < \hat{\varphi}_2(\xi)\},$$
$$A_3 = \{(\xi, x_d) \in A : \xi \in D^\psi, \;\; \hat{\varphi}_2(\xi) < x_d < \tilde{\varphi}_+(\xi)\},$$
$$A_4 = \{(\xi, x_d) \in A : \xi \in D^\psi, \;\; \tilde{\varphi}_-(\xi) < x_d < \hat{\varphi}_2(\xi)\}.$$

Покажем, что при достаточно малом L'' выполнены оценки

$$\left(\int\limits_{A_j \cap \Omega_{\lambda,\hat{\mu}}} \left|\int\limits_{A \cap G_x} f(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^q dx\right)^{1/q} \underset{q,p,r,d,L,L',M_0}{\lesssim} |A|^{1/\varkappa}\|f\|_{L_p(A)}, \tag{2.147}$$

$j = 1, 2, 3$. Отсюда будет следовать утверждение леммы.

Докажем (2.147) для $j = 3$. Пусть $i \in I$. Если $\hat{\Delta}_i \in \Xi_m(\hat{\Delta})$, то из (2.140) и (2.143) следуют неравенства (2.134) с $c = \frac{1}{4}$ и $\rho = 2^{-m}l_*$. Поэтому из предложения 2.3.2 и соотношений (2.104), (2.111) следует, что при

$$L'' < \frac{1}{32C_0} \tag{2.148}$$

найдется такое $l_0 = l_0(L, L', d) \in \mathbb{N}$, что если $A_3 \cap \Omega_{\lambda,\hat{\mu}} \cap (\operatorname{int} K_i) \neq \varnothing$, то $|K_i \cap \Omega| \geqslant 2^{-l_0}|K_i|$.

Обозначим

$$I' = \{i \in I : |K_i \cap \Omega| \geqslant 2^{-l_0}|K_i|\},$$
$$A^*_{\lambda,\hat{\mu}} = (\cup_{i \in I'} K_i) \cap \Omega_{\lambda,\hat{\mu}}.$$

Тогда $|(A_3\cap\Omega_{\lambda,\hat\mu})\backslash A^*_{\lambda,\hat\mu}| = 0$, и для доказательства (2.147) при $j=3$ достаточно проверить, что

$$\left(\int\limits_{A^*_{\lambda,\hat\mu}}\left|\int\limits_{A\cap G_x} f(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^q dx\right)^{1/q} \underset{q,p,r,d,L,L',M_0}{\lesssim} |A|^{1/\varkappa}\|f\|_{L_p(A)}. \tag{2.149}$$

Обозначим для каждого $j\in I$ через $S(j)$ множество индексов $i\in I$ таких, что для некоторых $\xi\in\Delta_j$ и $\zeta\in\Delta_i$ выполнено первое утверждение (2.146), где $m\in\mathbb{Z}_+$ таково, что $\hat\Delta_j\in\Xi_m(\hat\Delta)$ (а значит, для $\hat\Delta_i$ выполнено второе утверждение (2.146)). Поэтому

$$\forall i\in I\quad \operatorname{card}\{j: i\in S(j)\} \underset{R,M_0}{\lesssim} 1. \tag{2.150}$$

Также отметим, что

$$j\in S(j). \tag{2.151}$$

Пусть $x\in K_j\cap\Omega_{\lambda,\hat\mu}$, $\hat\Delta_j\in\Xi_m(\hat\Delta)$. Обозначим $\tilde\Omega_j=\cup_{i\in S(j)}K_i$, $\hat\Omega_j=\tilde\Omega_j\cap\Omega$. Из (2.144), (2.151) и определения I' следует, что для $j\in I'$

$$|\hat\Omega_j|\geqslant|K_j\cap\Omega| \underset{d,L,L'}{\gtrsim} |K_j| \underset{d,L,L'}{\gtrsim} (2^{-m}l_*)^d. \tag{2.152}$$

Кроме того, так как $G_x\subset\Omega$ и для $z\in G_x\cap A$ выполнено (2.146), то

$$G_x\cap A\subset\hat\Omega_j,\quad x\in K_j\cap\Omega_{\lambda,\hat\mu}. \tag{2.153}$$

Из соотношений (2.144), (2.146), определения K_i и липшицевости функций $\tilde\varphi_\pm$ с константой $L''<M_0$ следует, что множество $\tilde\Omega_j$ содержится в шаре радиуса $R_1\cdot 2^{-m}l_*$, где $R_1=R_1(L,\,L',\,d,\,M_0)>0$. Поэтому силу теоремы E и неравенства Гельдера для любого $j\in I'$ имеем

$$\int\limits_{K_j\cap\Omega_{\lambda,\,\hat\mu}}\left|\int\limits_{\hat\Omega_j} f(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^q dx \underset{q,p,r,d,L,L',M_0}{\lesssim}$$

$$\lesssim (2^{-m}l_*)^{qd/\varkappa}\|f\|^q_{L_p(\hat\Omega_j)} \overset{(2.152)}{\underset{q,p,r,d,L,L'}{\lesssim}} |\hat\Omega_j|^{q/\varkappa}\|f\|^q_{L_p(\hat\Omega_j)}.$$

Значит,

$$\int\limits_{A^*_{\lambda,\hat\mu}}\left|\int\limits_{A\cap G_x} f(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^q dx \overset{(2.153)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\sum_{j\in I'}\int\limits_{K_j\cap\Omega_{\lambda,\,\hat\mu}}\left|\int\limits_{\hat\Omega_j} f(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^q dx \underset{q,p,r,d,L,L',M_0}{\lesssim}$$

$$\lesssim\sum_{j\in I'}|\hat\Omega_j|^{q/\varkappa}\|f\|^q_{L_p(\hat\Omega_j)} =: \mathcal{S}.$$

Если $q<p$, то по неравенству Гельдера

$$\mathcal{S}\leqslant\left(\sum_{j\in I'}|\hat\Omega_j|^{\frac{qp}{(p-q)\varkappa}}\right)^{1-\frac{q}{p}}\left(\sum_{j\in I'}\|f\|^p_{L_p(\hat\Omega_j)}\right)^{q/p} \overset{(1.84),(2.150)}{\underset{p,q,r,d,L,L',M_0}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \left(\sum_{j\in I'}|\hat{\Omega}_j|\right)^{q/\varkappa}\|f\|^q_{L_p(A)} \underset{p,q,r,d,L,L',M_0}{\overset{(2.150)}{\lesssim}} |A|^{q/\varkappa}\|f\|^q_{L_p(A)}.$$

Если $q\geqslant p$, то
$$\mathcal{S} \overset{(1.84)}{\leqslant} \left(\sum_{j\in I'}|\hat{\Omega}_j|^{p/\varkappa}\|f\|^p_{L_p(\hat{\Omega}_j)}\right)^{q/p} \underset{p,q,r,d,L,L',M_0}{\overset{(2.150)}{\lesssim}}$$
$$\lesssim \max_{j\in I'}|\hat{\Omega}_j|^{q/\varkappa}\|f\|^q_{L_p(A)} \underset{p,q,r,d,L,L',M_0}{\lesssim} |A|^{q/\varkappa}\|f\|^q_{L_p(A)}.$$

Чтобы доказать (2.147) для $j=1,\,2$, применяем проведенные выше рассуждения, взяв вместо A области A_1 и A_4 соответственно (воспользовавшись тем, что если $L''<M_0$, то $A\cap G_x\subset A_1$ для любого $x\in A_1$, $A\cap G_x\subset A_4$ для любого $x\in A_2$).

Константу L''_* выбираем в соответствии с неравенствами (2.141), (2.142), (2.145) и (2.148). $\square$

Лемма 2.3.3. *Пусть $L>0$, $L'\in(0,\,1]$, $M_0\in(0,\,1]$, $\lambda=\frac{1}{3}$, $\nu=4$, $\gamma=\frac{3}{2}$, $\hat{\mu}\in\mathbb{N}\cap[2,\,\infty)$. Определим величину $L''_*=L''_*(L,\,L',\,d,\,M_0)\in(0,\,M_0)$ в соответствии с леммой 2.3.2. Пусть $L''\in\left(0,\,\frac{L''_*}{\sqrt{d-1}}\right)$, $\Omega\in\mathcal{R}^{**}_{1,\nu,\gamma,L,L',L''}$ (при этом $\varphi_\pm$, D^ψ, $\Omega_{\lambda,\hat{\mu}}$ такие, как в определении 2.2.1); $\tilde{\varphi}:D^\psi\to\mathbb{R}$ липшицева с константой L'' относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$, $\varphi_-(x')\leqslant\tilde{\varphi}(x')\leqslant\varphi_+(x')$, $x'\in D^\psi$. Пусть для каждого $x\in\Omega_{\lambda,\hat{\mu}}$ определено множество $G_x\subset\Omega$ такое, что для любого $y\in G_x$ выполнено неравенство (2.138) и множество*

$$\{(x,\,y):x\in\Omega_{\lambda,\hat{\mu}},\ y\in G_x\}$$

измеримо. Положим

$$\Omega_{\tilde{\varphi}}=\{(x',\,x_d)\in\Omega:\tilde{\varphi}(x')<x_d<\varphi_+(x')\},$$

$\tilde{\Omega}_{\lambda,\hat{\mu}}=\Omega_{\tilde{\varphi}}\cap\Omega_{\lambda,\hat{\mu}}$. Пусть $g:\Omega\to\mathbb{R}_+$, $v:\Omega_{\tilde{\varphi}}\to\mathbb{R}_+$ — измеримые функции, $g|_{\Omega\setminus\Omega_{\tilde{\varphi}}}=0$, $(g|_{\Omega_{\tilde{\varphi}}},\,v)\in\mathcal{E}_{L''}$ (см. определение 3), $r>0$ (не обязательно целое), $\frac{r}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}>0$, $1<p\leqslant\infty$, $1\leqslant q<\infty$. Тогда

$$\left(\int\limits_{\tilde{\Omega}_{\lambda,\hat{\mu}}} v^q(x)\left|\int\limits_{G_x} g(y)f(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^q dx\right)^{1/q} \underset{q,p,r,d,L,L',M_0}{\lesssim} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega_{\tilde{\varphi}})}\|f\|_{L_p(\Omega_{\tilde{\varphi}})}. \quad (2.154)$$

Доказательство. Пусть функции φ^0_k и φ^1_k заданы в соответствии с определением 3 ($k\in\mathbb{Z}$). Эти функции липшицевы с константой $L''<\frac{L''_*}{\sqrt{d-1}}$ относительно евклидовой нормы $|\cdot|$, поэтому они липшицевы с константой $L''\sqrt{d-1}<L''_*$ относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$. Без ограничения общности, можно считать, что $g(x',\,x_d)=2^k$ при $\varphi^0_k(x')<x_d\leqslant\varphi^0_{k+1}(x')$, $v(x',\,x_d)=2^{-k}$ при $\varphi^1_k(x')\leqslant x_d<\varphi^1_{k+1}(x')$, $f\geqslant0$ и что

$$f|_{\Omega\setminus\Omega_{\tilde{\varphi}}}=0. \quad (2.155)$$

Левая часть (2.154) выпукла по g и по v. Если $\varkappa\leqslant1$, то в силу обратного неравенства Минковского правая часть (2.154) вогнута по g и по v, поэтому в силу леммы 1.4.1 неравенство достаточно проверить для

$$g(x',\,x_d)=\begin{cases}1, & \text{если } x_d>\varphi^0_k(x'),\\ 0, & \text{если } x_d\leqslant\varphi^0_k(x'),\end{cases}\qquad v(x',\,x_d)=\begin{cases}1, & \text{если } x_d<\varphi^1_l(x'),\\ 0, & \text{если } x_d\geqslant\varphi^1_l(x'),\end{cases} \quad (2.156)$$

$k, l \in \mathbb{Z}_+$. Продолжим функцию v единицей на $\Omega\backslash\Omega_{\tilde\varphi}$. Пусть $x = (x', x_d)$, $y = (y', y_d) \in G_x$, $x_d < \varphi^1_l(x')$. Так как $L'' < M_0$, то $y_d < \varphi^1_l(y')$; кроме того, если $x_d \leqslant \varphi^0_k(x')$, то $y_d \leqslant \varphi^0_k(y')$, так что левая часть (2.154) равна

$$\left(\int\limits_{E_{k,l}\cap\tilde\Omega_{\lambda,\hat\mu}} \left|\int\limits_{E_{k,l}\cap G_x} f(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^q dx\right)^{1/q},$$

где $E_{k,l} = \{x \in \Omega : \varphi^0_k(x') < x_d < \varphi^1_l(x')\}$. Применим лемму 2.3.2 для $\tilde\varphi_+ = \varphi^1_l$, $\tilde\varphi_- = \varphi^0_k$ и получим, что левая часть (2.154) оценивается сверху величиной

$$C|E_{k,l}|^{1/\varkappa}\|f\|_{L_p(\Omega)} = C\|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)}\|f\|_{L_p(\Omega)} \stackrel{(2.155)}{=} C\|gv\|_{L_\varkappa(\Omega_{\tilde\varphi})}\|f\|_{L_p(\Omega_{\tilde\varphi})},$$

где $C = C(q, p, r, d, L, L', M_0) \in (0, +\infty)$.

Рассмотрим случай $\varkappa > 1$. При $p < q$ и $1 < q \leqslant p < \infty$ рассуждения проводятся точно так же, как при доказательстве леммы 1.4.2 (см. шаг 5).

Рассмотрим случай $p = \infty$, $\frac{1}{\varkappa} = \frac{r}{d} + \frac{1}{q} < 1$. Нужно доказать порядковое неравенство

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega_{\lambda,\hat\mu}} v^q(x)\left|\int\limits_{G_x} g(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^q dx\right)^{1/q} \underset{q,r,d,L,L',M_0}{\lesssim} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega_{\tilde\varphi})}. \qquad (2.157)$$

Положим $w = v^\varkappa$. Тогда (2.157) переписывается в виде

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega_{\lambda,\hat\mu}} w^{\frac{q}{\varkappa}}(x)\left|\int\limits_{G_x} g(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^q dx\right)^{\varkappa/q} \underset{q,r,d,L,L',M_0}{\lesssim} \int\limits_{\Omega_{\tilde\varphi}} g^\varkappa(x)w(x)\,dx.$$

Так как $\frac{q}{\varkappa} > 1$, то левая часть выпукла по w. В силу леммы 1.4.1, соотношение (2.157) достаточно доказать для функций v вида (2.156).

Пусть $E = \{x : \ w(x) = 1\}$. Тогда интеграл по $x \in \tilde\Omega_{\lambda,\hat\mu}$ можно заменить на интеграл по $x \in \tilde\Omega_{\lambda,\hat\mu} \cap E$. Значит, остается проверить порядковое неравенство

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega_{\lambda,\hat\mu}\cap E} \left|\int\limits_{G_x} g(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right|^q dx\right)^{1/q} \underset{q,r,d,L,L',M_0}{\lesssim} \|g\|_{L_\varkappa(E)}. \qquad (2.158)$$

Так как $L'' < M_0$, то для любого $x \in \tilde\Omega_{\lambda,\hat\mu} \cap E$ выполнено $G_x \subset E$. Поэтому вместо функции g можно рассмотреть $g\cdot\chi_E$, и (2.158) следует из теоремы E, условия $\varkappa > 1$ и равенства $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\varkappa} = 0$.

Остается рассмотреть случай $q = 1$. Тогда $\frac{1}{\varkappa} = \frac{r}{d} + \frac{1}{p'}$. Нужно доказать порядковое неравенство

$$\int\limits_{\tilde\Omega_{\lambda,\hat\mu}} v(x)\int\limits_{G_x} g(y)f(y)|x-y|^{r-d}\,dy\,dx \underset{p,r,d,L,L',M_0}{\lesssim} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega_{\tilde\varphi})}\|f\|_{L_p(\Omega_{\tilde\varphi})}. \qquad (2.159)$$

Положим
$$\tilde G_y = \left\{x \in \Omega_{\tilde\varphi} : x_d - y_d \geqslant M_0 \max_{1\leqslant i\leqslant d-1}|x_i - y_i|\right\}.$$

Переставляя пределы интегрирования в левой части (2.159) и учитывая (2.155), получаем, что она не превосходит

$$\int\limits_{\Omega_{\tilde\varphi}} f(y)g(y)\int\limits_{\tilde G_y} v(x)|x-y|^{r-d}\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L_p(\Omega_{\tilde\varphi})}\left(\int\limits_{\Omega_{\tilde\varphi}} g^{p'}(y)\left|\int\limits_{\tilde G_y} v(x)|x-y|^{r-d}\,dx\right|^{p'}dy\right)^{1/p'}.$$

Далее повторяем рассуждения, которые проводились для случая $p=\infty$ и получаем (2.159). □

Пусть $\Omega\in\mathcal{R}^{**}_{1,\nu,\gamma,L,L',L''}$ (при этом $\varphi_\pm$, D^ψ такие, как в определении 2.2.1), $\Omega'\subset\Omega$. Скажем, что $\Omega'\in\mathcal{U}_{L''}(\Omega)$, если найдется функция $\tilde\varphi: D^\psi\to\mathbb{R}$, липшицева с константой L'' относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$, такая, что $\varphi_-(x')\leqslant\tilde\varphi(x')\leqslant\varphi_+(x')$ для любого $x'\in D^\psi$ и

$$\Omega'=\{(x',\,x_d)\in\Omega:\tilde\varphi(x')<x_d<\varphi_+(x')\}.$$

Следствие 2.3.1. *Пусть $r,\,d\in\mathbb{N}$, $\lambda=\frac13$, $\nu=4$, $\gamma=\frac32$, $1<p\leqslant\infty$, $1\leqslant q<\infty$, $\frac rd+\frac1q-\frac1p>0$. Определим $\hat m=\hat m(\lambda,\,\nu,\,\gamma,\,r,\,d)$, $\hat\mu=\hat\mu(\lambda,\,\nu,\,\gamma,\,r,\,d)$ в соответствии с леммой 2.2.4. Тогда существует число $\hat L''=\hat L''(r,\,d,\,L,\,L')>0$ такое, что для любого $L''\in(0,\,\hat L'')$, любой области $\Omega\in\mathcal{R}^{**}_{\hat m,\nu,\gamma,L,L',L''}$ и каждого подмножества $\Omega'\in\mathcal{U}_{L''}(\Omega)$, любых функций $g:\Omega\to\mathbb{R}_+$, $v:\Omega'\to\mathbb{R}_+$ таких, что $g|_{\Omega\setminus\Omega'}=0$, $(g|_{\Omega'},\,v)\in\mathcal{E}_{L''}$, и для любой функции $f:\Omega\to\mathbb{R}$, липшицевой со своими производными до $r-1$ порядка, найдется полином P_f степени не выше $r-1$ такой, что*

$$\|f-P_f\|_{L_{q,v}(\Omega'\cap\Omega_{\lambda,\hat\mu})}\underset{q,p,r,d,L,L'}{\lesssim}\|gv\|_{L_\varkappa(\Omega')}\left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega')}. \tag{2.160}$$

При этом, отображение $f\mapsto P_f$ линейно и

$$\|P_f\|_{L_\infty(\Omega)}\underset{p,r,\Omega,\psi,\hat\psi,\lambda}{\lesssim}\sum_{j=0}^{r}\|\nabla^j f\|_{L_p(\Omega\setminus\Omega_{\lambda,1})}; \tag{2.161}$$

в частности, если $f|_{\Omega\setminus\Omega_{\lambda,1}}=0$, то $P_f=0$.

Доказательство. Определим множество G_x и полином P_f в соответствии с леммой 2.2.4 и обозначим через $M_0=M_0(L,\,L',\,r,\,d)\in(0,\,1]$ константу в порядковом неравенстве (2.124). Константу L'' выбираем так, чтобы выполнялись условия лемм 2.2.4 и 2.3.3. Тогда оценка (2.160) следует из неравенства (2.123) и соотношения (2.154), в котором вместо f подставлено $\left|\frac{\nabla^r f}{g}\right|$. Неравенство (2.161) следует из (2.125). □

2.4 Оценки s-чисел

Пусть $\hat K=\prod_{j=1}^d[\alpha_j,\,\beta_j]\subset\mathbb{R}^d$, $\beta_1-\alpha_1=\dots=\beta_{d-1}-\alpha_{d-1}=l_*$, $\beta_d-\alpha_d=\frac32 l_*$, $K=\hat K^{2/3}$ (отсюда следует, что K — куб), $\Delta=\prod_{j=2}^{d-1}[\alpha_j,\,\beta_j]$, функции $\underline{\varphi}$, $\overline{\varphi}:\Delta\to\mathbb{R}$ липшицевы с константой L относительно евклидовой нормы, $(\overline{\varphi} - \underline{\varphi})(\Delta) \subset [2L'l_*, \, (2L')^{-1}l_*]$ для некоторого $L' \in \left(0, \, \frac{1}{2}\right]$. Обозначим

$$D = \left\{ (x_1, \, \xi) \in \mathbb{R}^{d-1} : \xi \in \prod_{j=2}^{d-1} (\alpha_j, \, \beta_j), \;\; \underline{\varphi}(\xi) < x_1 < \overline{\varphi}(\xi) \right\}. \tag{2.162}$$

Пусть $\varphi_\pm : D \to \mathbb{R}$ липшицевы с константой L'' относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$, $(\varphi_+ - \varphi_-)(D) \subset [2L'l_*, \, (2L')^{-1}l_*]$, $\tau_+ = \varphi_+$, $\tau_- = \frac{2}{3}\varphi_- + \frac{1}{3}\varphi_+$,

$$\hat{\Omega} = \{(x', \, x_d) \in \mathbb{R}^d : x' \in D, \;\; \varphi_-(x') < x_d < \varphi_+(x')\},$$
$$\Omega = \{(x', \, x_d) \in \mathbb{R}^d : x' \in D, \;\; \tau_-(x') < x_d < \tau_+(x')\}.$$

Тогда замыкание области $\hat{\Omega}$ (соответственно Ω) совпадает с множеством $(\hat{\psi} \circ \psi)(\hat{K})$ (соответственно $(\hat{\psi} \circ \psi)(K)$), где отображения ψ и $\hat{\psi}$ задаются формулами (2.102) и (2.106) соответственно.

Предложение 2.4.1. *Пусть $\gamma > 1$, $m, \, \nu \in \mathbb{N}$, $Z \subset \hat{K}$, $Z \in \mathcal{R}^*_{m,\nu,\gamma}$. Тогда $(\hat{\psi} \circ \psi)(Z) \in \mathcal{R}^*_{m,\nu,\gamma,L,L',L''}$.*

Доказательство. По определению, $Z = \tilde{\Pi} \backslash (\tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2)$, где $\tilde{\Pi} = \prod_{j=1}^d [\tilde{\alpha}_j, \, \tilde{\beta}_j]$, $\tilde{\Pi}_i = \prod_{j=1}^d [\tilde{\alpha}^i_j, \, \tilde{\beta}^i_j]$ или $\tilde{\Pi}_i = \varnothing$, $i = 1, \, 2$; при этом, $\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1 = \dots = \tilde{\beta}_{d-1} - \tilde{\alpha}_{d-1}$, $\tilde{\beta}^i_1 - \tilde{\alpha}^i_1 = \dots = \tilde{\beta}^i_{d-1} - \tilde{\alpha}^i_{d-1}$,

$$\gamma(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1) \leqslant \tilde{\beta}_d - \tilde{\alpha}_d \leqslant 2(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1), \tag{2.163}$$

$\tilde{\beta}^i_1 - \tilde{\alpha}^i_1 \leqslant \tilde{\beta}^i_d - \tilde{\alpha}^i_d \leqslant \nu(\tilde{\beta}^i_1 - \tilde{\alpha}^i_1)$, $p_{d-1}(\tilde{\Pi}_i) \in \{\varnothing\} \cup \Big(\cup_{k \geqslant m} \Xi_k(p_{d-1}(\tilde{\Pi}))\Big)$, $i = 1, \, 2$.

Выберем $\lambda_j \in [0, \, 1]$, $\theta_j \in [0, \, 1]$ так, чтобы $\tilde{\alpha}_j = (1 - \lambda_j)\alpha_j + \lambda_j \beta_j$, $\tilde{\beta}_j = (1 - \theta_j)\alpha_j + \theta_j \beta_j$, $1 \leqslant j \leqslant d$. Положим

$$\underline{\vartheta} = (1 - \lambda_1)\underline{\varphi} + \lambda_1 \overline{\varphi}, \;\; \overline{\vartheta} = (1 - \theta_1)\underline{\varphi} + \theta_1 \overline{\varphi},$$
$$\tilde{\varphi}_- = (1 - \lambda_d)\varphi_- + \lambda_d \varphi_+, \;\; \tilde{\varphi}_+ = (1 - \theta_d)\varphi_- + \theta_d \varphi_+.$$

Тогда функции $\underline{\vartheta}$ и $\overline{\vartheta}$ липшицевы с константой L, $\tilde{\varphi}_\pm$ липшицевы с константой L'',

$$\psi(\tilde{\Pi}) = \tilde{D}^\psi \times [\tilde{\alpha}_d, \, \tilde{\beta}_d], \;\; \tilde{D}^\psi = \left\{ (t, \, \xi) : \xi \in \prod_{j=2}^{d-1} [\tilde{\alpha}_j, \, \tilde{\beta}_j], \;\; \underline{\vartheta}(\xi) \leqslant t \leqslant \overline{\vartheta}(\xi) \right\},$$
$$(\hat{\psi} \circ \psi)(\tilde{\Pi}) = \{(x', \, x_d) : x' \in \tilde{D}^\psi, \;\; \tilde{\varphi}_-(x') \leqslant x_d \leqslant \tilde{\varphi}_+(x')\}.$$

Пусть $\xi \in \prod_{j=2}^{d-1} [\tilde{\alpha}_j, \, \tilde{\beta}_j]$. Тогда

$$\overline{\vartheta}(\xi) - \underline{\vartheta}(\xi) = (\theta_1 - \lambda_1)(\overline{\varphi}(\xi) - \underline{\varphi}(\xi)) \in [2L'l_*(\theta_1 - \lambda_1), \, (2L')^{-1}l_*(\theta_1 - \lambda_1)],$$
$$\tilde{\varphi}_+(x') - \tilde{\varphi}_-(x') = (\theta_d - \lambda_d)(\varphi_+(x') - \varphi_-(x')) \in [2L'l_*(\theta_d - \lambda_d), \, (2L')^{-1}l_*(\theta_d - \lambda_d)],$$

при этом $l_*(\theta_1 - \lambda_1) = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1$,

$$l_*(\theta_d - \lambda_d) = (\beta_1 - \alpha_1)(\theta_d - \lambda_d) = (\beta_1 - \alpha_1)\frac{\tilde{\beta}_d - \tilde{\alpha}_d}{\beta_d - \alpha_d} =$$
$$= \frac{2}{3}(\tilde{\beta}_d - \tilde{\alpha}_d) \overset{(2.163)}{\in} \left[\frac{2}{3}(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1), \, \frac{4}{3}(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1)\right],$$

откуда

$$[2L'l_*(\theta_1 - \lambda_1), \, (2L')^{-1}l_*(\theta_1 - \lambda_1)] \subset \left[L'(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1), \, (L')^{-1}(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1)\right],$$
$$[2L'l_*(\theta_d - \lambda_d), \, (2L')^{-1}l_*(\theta_d - \lambda_d)] \subset \left[L'(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1), \, (L')^{-1}(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1)\right].$$

□

Пусть g, $v : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $gv \in L_\varkappa(\Omega)$, $(g, v) \in \mathcal{E}_\Lambda$ для некоторого $\Lambda \geqslant 0$. Введем на кубе K функцию множества Φ, заданную равенством

$$\Phi(E) = \int\limits_{(\hat{\psi}\circ\psi)(E)} (gv)^\varkappa\, dx. \tag{2.164}$$

Тогда Φ обладает свойствами (1.52) и (1.53).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$T_{n,k} = P_{**}\left(K,\, \frac{\Phi(K)}{2^k n}\right)$$

(см. стр. 86). В силу следствия 2.1.3 получаем

Предложение 2.4.2. *1. Выполнено неравенство $\nu_{n,k} := \operatorname{card} T_{n,k} \underset{d}{\lesssim} 2^k n$;*

2. *существует $C_{**}(d) \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ каждый элемент $T_{n,k}$ перекрывается с не более, чем $C_{**}(d)$ элементами $T_{n,k+1}$, и для любого $k \in \mathbb{N}$ каждый элемент $T_{n,k}$ перекрывается с не более, чем $C_{**}(d)$ элементами $T_{n,k-1}$.*

Обозначим элементы $T_{n,k}$ через $Z_j^{n,k}$, $1 \leqslant j \leqslant \nu_{n,k}$. Так как $P_{**}(K, \gamma)$ является измельчением разбиения $P(K, \gamma)$, то из леммы 1.3.2 следует, что

$$\Phi(Z_j^{n,k}) \leqslant 3\frac{\|gv\|^\varkappa_{L_\varkappa(\Omega)}}{2^k n}. \tag{2.165}$$

По лемме 2.1.4, $Z_j^{n,k} \in \mathcal{R}^*$ для любого $j \in \overline{1,\, \nu_{n,k}}$, т.е.

$$Z_j^{n,k} = \Pi(Z_j^{n,k}) \backslash (\Pi_1(Z_j^{n,k}) \cup \Pi_2(Z_j^{n,k})),$$

где $\Pi(Z_j^{n,k})$, $\Pi_1(Z_j^{n,k})$ и $\Pi_2(Z_j^{n,k})$ — параллелепипеды, удовлетворяющие условиям (2.27) и (2.28); при этом

1. если $\Pi_i(Z_j^{n,k}) \neq \varnothing$ и $\Gamma_1(\Pi_i(Z_j^{n,k})) \cap \Gamma_1(\Pi(Z_j^{n,k})) = \varnothing$ (т.е. $i \in J(Z_j^{n,k})$), то $(\Pi_i(Z_j^{n,k}))^{1/4} \subset R_{Z_j^{n,k}}$ (определение R_Z перед леммой 2.1.4); отсюда и из леммы 1.3.2 следует, что

$$\Phi((\Pi_i(Z_j^{n,k}))^{1/4}) \leqslant 3\frac{\|gv\|^\varkappa_{L_\varkappa(\Omega)}}{2^k n}; \tag{2.166}$$

2. множества из системы

$$\{(\Pi_i(Z_j^{n,k}))^{1/4} : 1 \leqslant j \leqslant \nu_{n,k},\ i \in J(Z_j^{n,k})\}$$

попарно не перекрываются.

Для $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $j = \overline{1,\, \nu_{n,k}}$ таких, что $\Gamma_0(\Pi(Z_j^{n,k})) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing$, определим множества $B(Z_j^{n,k})$ и параллелепипеды $\hat{\Pi}(Z_j^{n,k})$, $\hat{\Pi}_1(Z_j^{n,k})$, $\hat{\Pi}_2(Z_j^{n,k})$ в соответствии с леммой 2.1.5. Тогда

$$Z_j^{n,k} \cup B(Z_j^{n,k}) = \hat{\Pi}(Z_j^{n,k}) \backslash (\hat{\Pi}_1(Z_j^{n,k}) \cup \hat{\Pi}_2(Z_j^{n,k})) \in \mathcal{R}^*$$

и

$$\{B(Z_j^{n,k}) : 1 \leqslant j \leqslant \nu_{n,k},\ \ \Gamma_0(\Pi(Z_j^{n,k})) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing\}$$

является системой попарно неперекрывающихся множеств. Далее, $B(Z_j^{n,k})$ содержится в некотором элементе разбиения $P\left(K,\, \frac{\Phi(K)}{2^kn}\right)$, поэтому из леммы 1.3.2 следует, что

$$\Phi(B(Z_j^{n,k})) \leqslant 3\frac{\|gv\|^{\varkappa}_{L_\varkappa(\Omega)}}{2^kn}. \qquad (2.167)$$

Обозначим

$$\Pi_{j,n,k,i} = \begin{cases} (\Pi_i(Z_j^{n,k}))^{1/4}, \text{ если } i \in J(Z_j^{n,k}), \\ \varnothing, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$B_{j,n,k} = \begin{cases} B(Z_j^{n,k}), \text{ если } \Gamma_0(\Pi(Z_j^{n,k})) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing, \\ \varnothing, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$\breve{B}_{j,n,k} = \begin{cases} B(Z_j^{n,k}), \text{ если } \Gamma_0(\Pi(Z_j^{n,k})) \cap \Gamma_0(K) = \varnothing, \\ ((\Pi(Z_j^{n,k}))_-)^{1/2}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Из леммы 2.1.5 следует, что $B(Z_j^{n,k}) \subset ((\Pi(Z_j^{n,k}))_-)^{1/2}$, так что $\breve{B}_{j,n,k} \subset ((\Pi(Z_j^{n,k}))_-)^{1/2}$.

Положим

$$\Omega_j^{n,k} = (\hat\psi \circ \psi)(Z_j^{n,k}),$$

$$\tilde{A}_j^{n,k} = Z_j^{n,k} \cup B_{j,n,k} \cup \Pi_{j,n,k,1} \cup \Pi_{j,n,k,2}, \quad \tilde\Omega_j^{n,k} = (\hat\psi \circ \psi)(\tilde{A}_j^{n,k}),$$

$$\breve{A}_j^{n,k} = Z_j^{n,k} \cup \breve{B}_{j,n,k} \cup \Pi_{j,n,k,1} \cup \Pi_{j,n,k,2}.$$

Отметим, что $\breve{A}_j^{n,k} \subset \Pi(Z_j^{n,k}) \cup ((\Pi(Z_j^{n,k}))_-)^{1/2}$.

Пусть $S_0 = (\hat\psi \circ \psi)(\Gamma_0(K))$. Обозначим через $\mathrm{Lip}_0^r(\Omega)$ множество функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, липшицевых со всеми частными производными до $r-1$ порядка включительно, таких, что $\nabla^s f = 0$ в окрестности S_0, $0 \leqslant s \leqslant r-1$. Если $(g,\, v) \in \mathcal{E}_\Lambda$ для некоторого $\Lambda > 0$, то функция g отделена от нуля вне окрестности S_0, поэтому $\mathrm{Lip}_0^r(\Omega) \subset \mathrm{span}\, \hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$. Положим $\|f\|_{\hat{W}^r_{p,g}(\Omega)} = \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega)}$, $f \in \mathrm{Lip}_0^r(\Omega)$ (см. (14)).

Пусть $\Pi = \prod_{j=1}^d [\alpha_j,\, \beta_j]$, $\beta_1 - \alpha_1 = \dots = \beta_{d-1} - \alpha_{d-1}$. Напомним обозначения $l(\Pi) = \beta_1 - \alpha_1$, $h(\Pi) = \beta_d - \alpha_d$, введенные перед предложением 2.1.3.

Для области $G \subset \mathbb{R}^d$ и ее конечного разбиения $T = \{\Omega_i\}_{i=1}^{i_0}$ определим $\mathcal{S}_{r,T}(G)$ и $\|f\|_{L_{p,q,T,v}(\Omega)}$ формулами (1.102) и (1.103) соответственно.

Пусть $\hat{L}'' = \hat{L}''(r,\, d,\, L,\, L') > 0$ определено в следствии 2.3.1.

Лемма 2.4.1. *Пусть $L'' \in (0,\, \hat{L}'')$, $(g,\, v) \in \mathcal{E}_{L''}$. Тогда существует $s_* = s_*(r,\, d) \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \overline{1,\, \nu_{n,k}}$ найдется разбиение $P_{n,k,j}$ области $\Omega_j^{n,k}$ на не более, чем s_* непересекающихся измеримых множеств, удовлетворяющее следующему условию: для любой функции $f \in \mathrm{Lip}_0^r(\Omega)$ найдется функция $S_{n,k,j}(f) \in \mathcal{S}_{r,P_{n,k,j}}(\Omega_j^{n,k})$ такая, что*

$$\|f - S_{n,k,j}(f)\|_{L_{p,q,P_{n,k,j},v}(\Omega_j^{n,k})} \underset{p,q,r,d,L,L'}{\lesssim} \frac{1}{(2^kn)^{1/\varkappa}} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\tilde\Omega_j^{n,k})}. \qquad (2.168)$$

При этом, $f \mapsto S_{n,k,j}(f)$ линейно и непрерывно как отображение $(\mathrm{Lip}_0^r(\Omega),\, \|\cdot\|_{\hat{W}^r_{p,g}(\Omega)}) \to (\mathcal{S}_{r,P_{n,k,j}}(\Omega_j^{n,k}),\, \|\cdot\|_{L_{q,v}(\Omega)})$.

Доказательство. Продолжим функции f, g и $\frac{\nabla^r f}{g}$ нулем на $\hat\Omega$.

Определим $\hat m = \hat m(1/3,\, 4,\, 3/2,\, r,\, d)$, $\hat\mu = \hat\mu(1/3,\, 4,\, 3/2,\, r,\, d)$ в соответствии с леммой 2.2.4. Докажем, что достаточно найти семейство $\mathcal{G}_j^{n,k}$ областей $G_{j,s}^{n,k}$, $1 \leqslant s \leqslant s_*$, таких, что $G_{j,s}^{n,k} \subset \breve{A}_j^{n,k}$, $G_{j,s}^{n,k} \in \mathcal{R}^{**}_{\hat m,\,4,\,3/2}$ (см. стр. 124; соответствующие параллелепипеды обозначим $\Pi(G_{j,s}^{n,k})$, $\Pi_1(G_{j,s}^{n,k})$ и $\Pi_2(G_{j,s}^{n,k})$) и

$$Z_j^{n,k} \subset \cup_{s=1}^{s_*} (G_{j,s}^{n,k})_{1/3,\hat\mu}; \qquad (2.169)$$

при этом, если $\Gamma_0(\Pi(Z_j^{n,k}))\subset\Gamma_0(K)$, то либо

$$\Pi(G_{j,s}^{n,k})\subset K, \tag{2.170}$$

либо

$$\Pi(G_{j,s}^{n,k})\backslash(\Pi(G_{j,s}^{n,k}))^{2/3}\subset\hat{K}\backslash K. \tag{2.171}$$

В самом деле, $\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k}:=(\hat{\psi}\circ\psi)(G_{j,s}^{n,k})\in\mathcal{R}^{**}_{\hat{m},4,3/2,L,L',L''}$ в силу предложения 2.4.1. Обозначим $U_{j,s}^{n,k}=(\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k})_{1/3,\hat{\mu}}\cap\Omega$. Применяя следствие 2.3.1 (где в качестве Ω берется $\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k}$, а в качестве Ω' берется $\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k}\cap\Omega$), получаем, что для любой функции $f\in\mathrm{Lip}_0^r(\Omega)$ найдется полином P_f^s степени не выше $r-1$ такой, что

$$\begin{gathered}\|f-P_f^s\|_{L_{q,v}(U_{j,s}^{n,k})}\underset{p,q,r,d,L,L'}{\lesssim}\|gv\|_{L_\varkappa(\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k}\cap\Omega)}\left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k}\cap\Omega)}\leqslant\\ \leqslant\|gv\|_{L_\varkappa(\tilde{\Omega}_j^{n,k})}\left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\tilde{\Omega}_j^{n,k})}\end{gathered} \tag{2.172}$$

(последнее неравенство следует из включения $G_{j,s}^{n,k}\subset\breve{A}_j^{n,k}$, определения $\tilde{\Omega}_j^{n,k}$ и равенств $\breve{A}_j^{n,k}\cap K=\tilde{A}_j^{n,k}$, $(\hat{\psi}\circ\psi)(K)=\Omega$). При этом, отображение $f\mapsto P_f^s$ линейно. Докажем его непрерывность как отображения

$$(\mathrm{Lip}_0^r(\Omega),\,\|\cdot\|_{\hat{W}^r_{p,g}(\Omega)})\to L_{q,v}(\Omega).$$

Имеем $\|P_f^s\|_{L_\infty(U_{j,s}^{n,k})}\overset{(2.161)}{\leqslant}C\sum\limits_{t=0}^{r}\|\nabla^t f\|_{L_p(\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k}\backslash(\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k})_{1/3,1})}$, где константа C не зависит от функции f. Так как на множестве $\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k}\backslash(\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k})_{1/3,1}$ функция g ограничена (это следует из определения 3) и $f(x)=0$ в окрестности S_0, то $\sum\limits_{t=0}^{r}\|\nabla^t f\|_{L_p(\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k}\backslash(\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k})_{1/3,1})}\leqslant C_1\|\nabla^r f\|_{\hat{W}^r_{p,g}(\Omega)}$, где C_1 не зависит от f. Если $\Gamma_0(\Pi(Z_j^{n,k}))\cap\Gamma_0(K)=\varnothing$, то $(\Pi(Z_j^{n,k}))_-\subset K$, поэтому вес v на множестве $\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k}=(\hat{\psi}\circ\psi)(G_{j,s}^{n,k})\subset(\hat{\psi}\circ\psi)(\breve{A}_j^{n,k})\subset(\hat{\psi}\circ\psi)(\Pi(Z_j^{n,k})\cup((\Pi(Z_j^{n,k}))_-)^{1/2})$ ограничен. Если $\Gamma_0(\Pi(Z_j^{n,k}))\subset\Gamma_0(K)$ и $\Pi(G_{j,s}^{n,k})\subset K$, то вес v на $(\hat{\Omega}_{j,s}^{n,k})_{1/3,\hat{\mu}}$ ограничен. В обоих случаях $\|P_f^s\|_{L_{q,v}(U_{j,s}^{n,k})}\leqslant C_2\|P_f^s\|_{L_\infty(U_{j,s}^{n,k})}$, где C_2 не зависит от f. Если $\Gamma_0(\Pi(Z_j^{n,k}))\subset\Gamma_0(K)$ и выполнено (2.171), то в силу следствия 2.3.1 имеем $P_f^s=0$.

Оценим величину $\|gv\|_{L_\varkappa(\tilde{\Omega}_j^{n,k})}$. Имеем

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}_j^{n,k}}(gv)^\varkappa\,dx=\Phi(\tilde{A}_j^{n,k})=\Phi(Z_j^{n,k})+\Phi(\Pi_{j,n,k,1})+\Phi(\Pi_{j,n,k,2})+\Phi(B_{j,n,k}).$$

В силу неравенств (2.165), (2.166) и (2.167),

$$\|gv\|_{L_\varkappa(\tilde{\Omega}_j^{n,k})}\underset{p,q,r,d}{\lesssim}\frac{1}{(2^kn)^{1/\varkappa}}\|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)}. \tag{2.173}$$

Остается положить $\tilde{U}_{j,1}^{n,k}=U_{j,1}^{n,k}$, $\tilde{U}_{j,s}^{n,k}=U_{j,s}^{n,k}\backslash\cup_{i=1}^{s-1}U_{j,i}^{n,k}$, $2\leqslant s\leqslant s_*$, $P_{n,k,j}=\{\tilde{U}_{j,s}^{n,k}\}_{s=1}^{s_*}$, $S_{n,k,j}(f)|_{\tilde{U}_{j,s}^{n,k}}=P_f^s$. Тогда $\Omega_j^{n,k}\subset\cup_{s=1}^{s_*}\tilde{U}_{j,s}^{n,k}$ в силу (2.169) и

$$\|f-S_{n,k,j}(f)\|_{L_{p,q,P_{n,k,j},v}(\Omega_j^{n,k})}\underset{p,q,r,d,L,L'}{\lesssim}\sum_{s=1}^{s_*}\|f-P_f^s\|_{L_{q,v}(U_{j,s}^{n,k})}\overset{(2.172),(2.173)}{\underset{p,q,r,d,L,L'}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \frac{1}{(2^kn)^{1/\varkappa}}\|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)}\left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\tilde\Omega_j^{n,k})}$$

и (2.168) доказано.

Перейдем к построению семейства $\mathcal{G}_j^{n,k}$. Фиксируем n, k, j и обозначаем $Z = Z_j^{n,k}$, $\breve A = \breve A_j^{n,k}$, $\breve B = \breve B_{j,n,k}$, $\hat Z = Z\cup \breve B$, $\Pi = \Pi(Z_j^{n,k})$, $\Pi_i = \Pi_i(Z_j^{n,k})$,

$$\hat\Pi = \left\{\begin{array}{l} \hat\Pi(Z_j^{n,k}), \text{ если } \Gamma_0(\Pi)\cap\Gamma_0(K)=\varnothing,\\ \Pi\cup(\Pi_-)^{1/2}, \text{ если } \Gamma_0(\Pi)\subset\Gamma_0(K),\end{array}\right.$$

$$\hat\Pi_i = \left\{\begin{array}{l} \hat\Pi_i(Z_j^{n,k}), \text{ если } \Gamma_0(\Pi)\cap\Gamma_0(K)=\varnothing,\\ \Pi_i, \text{ если } \Gamma_0(\Pi)\subset\Gamma_0(K),\end{array}\right.$$

$i=1, 2$. Если $\Pi_i\ne\varnothing$, то $m_i\in\mathbb{Z}_+$ определяем равенством $p_{d-1}(\Pi_i)\in\Xi_{m_i}(p_{d-1}(\Pi))$; если $\Pi_i=\varnothing$, то полагаем $m_i=+\infty$. Далее считаем, что $m_1\leqslant m_2$.

Напомним, что в начале доказательства предложения 2.1.3 были получены равенства

$$\Pi\cap\hat\Pi_i=\Pi_i, \quad p_{d-1}(\Pi_i)=p_{d-1}(\hat\Pi_i), \quad i=1, 2. \tag{2.174}$$

Случай 1. Пусть $m_1\geqslant\hat m$, $m_2\geqslant\hat m$. Тогда полагаем $G_{j,1}^{n,k}=\hat Z\subset\breve A$. Из лемм 2.1.4 и 2.1.5, определения $\breve B$ и неравенств $m_1\geqslant\hat m$, $m_2\geqslant\hat m$ следует, что $\hat Z\in\mathcal{R}^{**}_{\hat m,4,3/2}$. Если $\Gamma_0(\Pi(Z))\subset\Gamma_0(K)$, то выполнено (2.171).

Имеем $Z=(\hat Z)_{1/3,\hat\mu}\cup E_1\cup E_2$, где $E_1=Z\cap\hat\Pi_1(\hat\mu)$, $E_2=(Z\cap\hat\Pi_2(\hat\mu))\backslash\hat\Pi_1(\hat\mu)$. Остальные элементы семейства $\mathcal{G}_j^{n,k}$ определяем в два этапа:

1. если $1\in J(Z)$, то строим множества $G_{j,s}^{n,k}\in\mathcal{G}_j^{n,k}$, $2\leqslant s\leqslant s_{**}$:

   (a) покрываем параллелепипед $(\hat\Pi_1(\hat\mu)\backslash\hat\Pi_1)\cap\Pi$ кубами K_t, $1\leqslant t\leqslant t_*\underset{d}{\lesssim}\hat\mu$ в соответствии с предложением 2.1.3 для $I=\{1\}$ (тогда $p_{d-1}(K_t)\in\Xi_4(p_{d-1}(\Pi_1))$),

   (b) строим семейство множеств $\mathcal{G}_{j,t}^{n,k}=\{G_{j,s}^{n,k}\}_{s_t+1\leqslant s\leqslant s_{t+1}}$ ($s_1=1$, $s_{t_*+1}=s_{**}$) такое, что $\{(G_{j,s}^{n,k})_{1/3,\hat\mu}\}_{s_t+1\leqslant s\leqslant s_{t+1}}$ образует покрытие множества $\Pi\cap(K_t\backslash\Pi_1)\backslash\hat\Pi_2=Z\cap K_t$;

   если $1\notin J(Z)$, то $E_1\overset{d}{=}\varnothing$ и построение не проводится;

2. если $E_2\overset{d}{\ne}\varnothing$, то строим множества $G_{j,s}^{n,k}\in\mathcal{G}_j^{n,k}$, $s_{**}+1\leqslant s\leqslant s_*$, такие, что $\{(G_{j,s}^{n,k})_{1/3,\hat\mu}\}_{s_{**}+1\leqslant s\leqslant s_*}$ является покрытием E_2.

Отметим, что если $\Gamma_0(\Pi(Z))\subset\Gamma_0(K)$, то в силу замечания 2.1.3 получаем $\hat\Pi_2=\Pi_2=\varnothing$ и шаг 2 не проводится.

Докажем (2.169), затем опишем шаги 1, (b) и 2 и проверим, что $G_{j,s}^{n,k}\subset\breve A_j^{n,k}$, $G_{j,s}^{n,k}\in\mathcal{R}^{**}_{\hat m,4,3/2}$ и что если $\Gamma_0(\Pi(Z))\subset\Gamma_0(K)$, то выполнено (2.170).

Имеем

$$\cup_{s=1}^{s_*}(G_{j,s}^{n,k})_{1/3,\hat\mu}=(\hat Z)_{1/3,\hat\mu}\cup\left(\cup_{t=1}^{t_*}\cup_{s=s_t+1}^{s_{t+1}}(G_{j,s}^{n,k})_{1/3,\hat\mu}\right)\cup\left(\cup_{s=s_{**}+1}^{s_*}(G_{j,s}^{n,k})_{1/3,\hat\mu}\right)\supset$$

$$\supset(\hat Z)_{1/3,\hat\mu}\cup\left(\cup_{t=1}^{t_*}(\Pi\cap(K_t\backslash\Pi_1))\backslash\hat\Pi_2\right)\cup E_2\overset{(2.174)}{=}$$

$$=(\hat Z)_{1/3,\hat\mu}\cup\left(\cup_{t=1}^{t_*}\left(K_t\cap(\Pi\backslash(\hat\Pi_1\cup\hat\Pi_2))\right)\right)\cup E_2\supset$$

$$\supset (\hat{Z})_{1/3,\hat{\mu}} \cup \Big(\Pi \cap \hat{\Pi}_1(\hat{\mu}) \backslash (\hat{\Pi}_1 \cup \hat{\Pi}_2)\Big) \cup E_2 \overset{(2.174)}{=}$$
$$= (\hat{Z})_{1/3,\hat{\mu}} \cup (\hat{\Pi}_1(\hat{\mu}) \cap Z) \cup E_2 = (\hat{Z})_{1/3,\hat{\mu}} \cup E_1 \cup E_2 = Z.$$

Опишем шаг 1, (b). Обозначим через $\hat{K}_t$ параллелепипед такой, что $K_t = \hat{K}_t^{2/3}$. Тогда $\hat{K}_t \overset{d}{\subset} (\hat{\Pi} \backslash \hat{\Pi}_1) \cup \Pi_1^{1/4}$ в силу предложения 2.1.3, поэтому

$$\hat{K}_t \backslash \hat{\Pi}_2 \subset \hat{Z} \cup \Pi_1^{1/4} \subset \check{A} \tag{2.175}$$

(напомним, что шаг 1 проводится в предположении $1 \in J(Z)$). Кроме того, из замечания 2.1.3 и из пунктов 3 и 4 предложения 2.1.3 следует, что $\hat{K}_t \subset K$ в случае $\Gamma_0(\Pi(Z)) \subset \Gamma_0(K)$.

Рассмотрим следующие случаи.

- $m_2 \geqslant m_1 + 5 + \hat{m} + \lceil \log_2 \hat{\mu} \rceil$. В силу свойства 3 из предложения 2.1.3, если $\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2 \overset{d}{\neq} \varnothing$, то

$$p_{d-1}(\hat{\Pi}_2) \in \Xi_{m_2-m_1-4}(p_{d-1}(\hat{K}_t)), \quad m_2 - m_1 - 4 \geqslant \hat{m}. \tag{2.176}$$

  1. $\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2 \overset{d}{=} \varnothing$ (если $\Gamma_0(\Pi(Z)) \subset \Gamma_0(K)$, то реализуется только этот случай). Тогда положим $\mathcal{G}^{n,k}_{j,t} = \{\hat{K}_t\}$; включение $\hat{K}_t \subset \check{A}$ следует из (2.175). Если $\Gamma_0(\Pi(Z)) \subset \Gamma_0(K)$, то выполнено (2.170).

  2. $\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2 \overset{d}{\neq} \varnothing$, $h(\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2) \geqslant l(\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2)$. Тогда из (2.176) и неравенств $h(\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2) \leqslant 4l(\hat{\Pi}_2) = 4l(\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2)$ следует, что $\hat{K}_t \backslash \hat{\Pi}_2 \in \mathcal{R}^{**}_{\hat{m},4,3/2}$. Положим $G^{n,k}_{j,s_t+1} = \hat{K}_t \backslash \hat{\Pi}_2$. Тогда $(\hat{K}_t \backslash \hat{\Pi}_2)_{1/3,\hat{\mu}} \supset K_t \backslash \hat{\Pi}_2(\hat{\mu})$. Включение $G^{n,k}_{j,s_t+1} \subset \check{A}$ следует из (2.175). Тем самым, остается построить остальные элементы так, чтобы семейство $\{(G^{n,k}_{j,s})_{1/3,\hat{\mu}}\}_{s_t+2 \leqslant s \leqslant s_{t+1}}$ образовало покрытие множества

  $$E'_t := \Big(\Pi \cap (K_t \backslash \Pi_1) \backslash \hat{\Pi}_2\Big) \backslash (K_t \backslash \hat{\Pi}_2(\hat{\mu})) = (K_t \backslash \Pi_1) \cap \Pi \cap (\hat{\Pi}_2(\hat{\mu}) \backslash \hat{\Pi}_2)$$

  и $G^{n,k}_{j,s}$ содержались в $\hat{\Pi}$ и не перекрывались с $\hat{\Pi}_i \backslash \Pi_{j,n,k,i}$, $i = 1, 2$ (тогда $G^{n,k}_{j,s} \subset \check{A}$). Если $E'_t \overset{d}{=} \varnothing$, то построение не проводится. Заметим, что $K_t \backslash \Pi_1$ является параллелепипедом (в силу свойства 3 из предложения 2.1.3 и неравенств $h(\Pi_1) \overset{(2.28)}{\geqslant} l(\Pi_1) \geqslant l(K_t) = h(K_t)$), поэтому E'_t является параллелепипедом и $p_{d-1}(E'_t) \overset{(2.176)}{=} p_{d-1}(\Pi_2)$. Пусть $\{K_{s,t}\}_{s_t+2 \leqslant s \leqslant s_{t+1}}$ — семейство кубов, образующее покрытие множества E'_t и определенное в соответствии с предложением 2.1.3 для $I = \{1, 2\}$ (тогда $s_{t+1} - s_t - 1 \underset{d}{\lesssim} \hat{\mu}$), $\hat{K}_{s,t}$ — параллелепипед, такой что $(\hat{K}_{s,t})^{2/3} = K_{s,t}$. Положим $G^{n,k}_{j,s} = \hat{K}_{s,t}$. Тогда $G^{n,k}_{j,s} \in \mathcal{R}^{**}_{\hat{m},4,3/2}$ и $(G^{n,k}_{j,s})_{1/3,\hat{\mu}} = K_{s,t}$.

  3. $\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2 \overset{d}{\neq} \varnothing$, $h(\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2) < l(\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2)$ и $K_t \cap \hat{\Pi}_2 \overset{d}{=} \varnothing$. Тогда $\Gamma_0(\hat{K}_t \cap \hat{\Pi}_2) \subset \Gamma_0(\hat{K}_t)$ (иначе $\hat{\Pi}_2 \subset \hat{K}_t$ и $h(\hat{\Pi}_2) < l(\hat{\Pi}_2)$ — противоречие с (2.28)). Пусть Δ — куб, такой, что $p_{d-1}(\Delta) = p_{d-1}(\hat{\Pi}_2)$ и $\Gamma_0(\Delta) \subset \Gamma_0(\hat{K}_t)$. Тогда $\hat{K}_t \backslash \Delta \in \mathcal{R}^{**}_{\hat{m},4,3/2}$ в силу (2.176),

  $$\hat{K}_t \backslash \Delta \subset \hat{K}_t \backslash \hat{\Pi}_2 \overset{(2.175)}{\subset} \check{A},$$
  $$h(\Delta(\hat{\mu})) = \hat{\mu} \cdot l(\Delta) = \hat{\mu} \cdot l(\hat{\Pi}_2) \overset{(2.176)}{=} \frac{16\hat{\mu} \cdot l(K_t)}{2^{m_2-m_1}} \leqslant \frac{1}{2} h(K_t)$$

  и $(\hat{K}_t \backslash \Delta)_{1/3,\hat{\mu}} = K_t$. Положим $\mathcal{G}^{n,k}_{j,t} = \{\hat{K}_t \backslash \Delta\}$.

4. $h(\hat{K}_t\cap\hat{\Pi}_2) < l(\hat{K}_t\cap\hat{\Pi}_2)$ и $K_t\cap\hat{\Pi}_2 \overset{d}{\neq} \varnothing$. Так как
$$h(\hat{\Pi}_2) \overset{(2.28)}{\leqslant} 4l(\hat{\Pi}_2) \overset{(2.176)}{\leqslant} 2^{2-m_2+m_1+4}l(\hat{K}_t) \leqslant \frac{h(K_t)}{2}, \tag{2.177}$$
то
$$z^d(\Gamma_0(\hat{\Pi}_2)) > z^d(\Gamma_0(\hat{K}_t)).$$
Поэтому
$$\Gamma_1(K_t\cap\hat{\Pi}_2) \subset \Gamma_1(K_t) \tag{2.178}$$
(иначе $\hat{\Pi}_2\subset\hat{K}_t$ и $h(\hat{\Pi}_2) < l(\hat{\Pi}_2)$ — противоречие с (2.28)).
Пусть Δ — куб, такой, что $\Gamma_1(\Delta)=\Gamma_0(\hat{\Pi}_2)$, $\hat{\Delta}$ — параллелепипед, $\hat{\Delta}^{2/3}=\Delta$. Тогда
$$h(\hat{K}_t\cap\hat{\Pi}_2)+h(\hat{\Delta}) \leqslant \frac{5}{2}l(\hat{\Pi}_2) \overset{(2.177)}{\leqslant} h(K_t),$$
поэтому $\hat{\Delta} \overset{(2.178)}{\subset} K_t\backslash\hat{\Pi}_2 \overset{(2.175)}{\subset} \check{A}$. Семейство
$$\mathcal{G}^{n,k}_{j,t} = \{\hat{K}_t\backslash(\Delta\cup\hat{\Pi}_2),\ \hat{\Delta}\}$$
является искомым. В самом деле, множества $(\hat{K}_t\backslash(\Delta\cup\hat{\Pi}_2))_{1/3,\hat{\mu}} = K_t\backslash(\Delta\cup\hat{\Pi}_2)$ и $(\hat{\Delta})_{1/3,\hat{\mu}}=\Delta$ образуют покрытие $K_t\backslash\hat{\Pi}_2$. В силу (2.175), $\hat{K}_t\backslash(\Delta\cup\hat{\Pi}_2)\subset\check{A}$. Ясно, что $\hat{\Delta}\in\mathcal{R}^{**}_{\hat{m},4,3/2}$; условие $\hat{K}_t\backslash(\Delta\cup\hat{\Pi}_2)\in\mathcal{R}^{**}_{\hat{m},4,3/2}$ выполнено в силу (2.176) и неравенства $h((\Delta\cup\hat{\Pi}_2)\cap\hat{K}_t)\leqslant 2l(\hat{\Pi}_2\cap\hat{K}_t)$.

- $m_2\leqslant m_1+4+\hat{m}+\lceil\log_2\hat{\mu}\rceil$ (в силу замечания 2.1.3, этот случай при $\Gamma_0(\Pi(Z))\subset\Gamma_0(K)$ не реализуется). Тогда существует разбиение множества $K_t\cap Z$ на параллелепипеды $Q_{t,s}$, $1\leqslant s\leqslant\hat{s}_t \underset{\hat{m},\,\hat{\mu},\,d}{\lesssim} 1$, такое, что $p_{d-1}(Q_{t,s})\in\Xi(p_{d-1}(K_t))$, $l(Q_{t,s})\leqslant l(\Pi_2)\leqslant l(\Pi_1)$ и $h(Q_{t,s})\leqslant 2l(Q_{t,s})$. Для каждого множества $Q_{t,s}$ строим покрытие кубами $K_{t,s,\sigma}$ ($1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_{s,t}\underset{d}{\lesssim}1$) в соответствии с предложением 2.1.3 (для $I=\{1,2\}$). Положим $\mathcal{G}^{n,k}_{j,t}=\{\hat{K}_{t,s,\sigma}\}_{1\leqslant s\leqslant\hat{s}_t,1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_{s,t}}$, где $\hat{K}_{t,s,\sigma}$ — параллелепипед, такой, что $(\hat{K}_{t,s,\sigma})^{2/3}=K_{t,s,\sigma}$. Тогда
$$\hat{K}_{t,s,\sigma}\subset\Big(\hat{\Pi}\backslash(\hat{\Pi}_1\cup\hat{\Pi}_2)\Big)\cup(\Pi_{j,n,k,1}\cup\Pi_{j,n,k,2})=\check{A}.$$

Опишем шаг 2. Если $\Gamma_0(\Pi(Z))\subset\Gamma_0(K)$, то $E_2\overset{d}{=}\varnothing$ в силу замечания 2.1.3. Пусть $E_2\overset{d}{\neq}\varnothing$. Заметим, что $E_2=\Pi\cap(\hat{\Pi}_2(\hat{\mu})\backslash\hat{\Pi}_2)\backslash\hat{\Pi}_1(\hat{\mu})$ является объединением не более, чем двух параллелепипедов $E_{2,1}$ и $E_{2,2}$, не перекрывающихся с $\hat{\Pi}_1\cup\hat{\Pi}_2$ (здесь использовалось неравенство $m_1\leqslant m_2$). При этом, $h(E_{2,i})/l(E_{2,i})\underset{\hat{\mu}}{\lesssim}1$, $i=1,2$. Применяя к каждому из этих параллелепипедов предложение 2.1.3 для $I=\{1,2\}$, получаем параллелепипеды $G^{n,k}_{j,s}$ такие, что $(G^{n,k}_{j,s})_{1/3,\hat{\mu}}$ являются кубами, образующими покрытие E_2, и
$$G^{n,k}_{j,s}\subset\Big(\hat{\Pi}\backslash(\hat{\Pi}_1\cup\hat{\Pi}_2)\Big)\cup(\Pi_{j,n,k,1}\cup\Pi_{j,n,k,2})=\check{A}.$$

Случай 2. Пусть $m_1<\hat{m}$, $\Gamma_0(\Pi(Z))\cap\Gamma_0(K)=\varnothing$.

1. $m_2\geqslant\hat{m}+m_1+5+\lceil\log_2\hat{\mu}\rceil$. Полагаем $\mathcal{Q}=\Xi_{m_1}(\Pi)$, $I=\{1\}$.

2. $m_2\leqslant\hat{m}+m_1+4+\lceil\log_2\hat{\mu}\rceil$. Полагаем $\mathcal{Q}=\Xi_{m_2}(\Pi)$, $I=\{1,2\}$.

Пусть $E \in \mathcal{Q}$. Так как $h(E) = l(E) \leqslant l(\Pi_i) \leqslant h(\Pi_i)$, $i \in I$, то $\Pi_E := E\backslash (\cup_{i\in I}\Pi_i)$ является параллелепипедом. Построим покрытие $\{K_{E,t}\}_{t=1}^{t_E}$ множества Π_E в соответствии с предложением 2.1.3 (если $\Pi_E \overset{d}{\neq} \varnothing$). Тогда $t_E \underset{d}{\lesssim} 1$. Если $\Pi_E \overset{d}{=} \varnothing$, то полагаем $t_E = 0$.

Если $I = \{1, 2\}$, то полагаем $\mathcal{G}_j^{n,k} = \{\hat{K}_{E,t}\}_{E\in\mathcal{Q},\, 1\leqslant t\leqslant t_E}$ (где $\hat{K}_{E,t}$ — параллелепипед, $(\hat{K}_{E,t})^{2/3} = K_{E,t}$). Ясно, что $\hat{K}_{E,t} \in \mathcal{R}^*_{\hat{m},4,3/2}$; включение $\hat{K}_{E,t} \subset \check{A}$ следует из предложения 2.1.3. Наконец,

$$\bigcup_{E\in\mathcal{Q}} \bigcup_{t=1}^{t_E} K_{E,t} \supset \bigcup_{E\in\mathcal{Q}} \Pi_E \supset Z.$$

Если $I = \{1\}$, то строим семейство $\mathcal{G}_{j,t}^{n,k} = \{G_{j,s}^{n,k}\}_{s_t+1\leqslant s\leqslant s_{t+1}}$ такое, что $G_{j,s}^{n,k} \subset \check{A}$, $G_{j,s}^{n,k} \in \mathcal{R}^*_{\hat{m},4,3/2}$ и $\{(G_{j,s}^{n,k})_{1/3,\hat{\mu}}\}_{s_t+1\leqslant s\leqslant s_{t+1}}$ образует покрытие множества $\Pi \cap (K_{E,t}\backslash\Pi_1)\backslash\hat{\Pi}_2$. Это делается так же, как в случае 1 (см. шаг 1, (b)). Полагаем $\mathcal{G}_j^{n,k} = \{G_{j,s}^{n,k}\}_{E\in\mathcal{Q},\, 1\leqslant t\leqslant t_E,\, s_t+1\leqslant s\leqslant s_{t+1}}$. Тогда

$$\bigcup_{E\in\mathcal{Q}} \bigcup_{t=1}^{t_E} \bigcup_{s=s_t+1}^{s_{t+1}} (G_{j,s}^{n,k})_{1/3,\hat{\mu}} \supset \bigcup_{E\in\mathcal{Q}} \bigcup_{t=1}^{t_E} \Big(\Pi \cap (K_{E,t}\backslash\Pi_1)\backslash\hat{\Pi}_2\Big) \supset$$
$$\supset \bigcup_{E\in\mathcal{Q}} \Big[(E\backslash\Pi_1) \cap \Big(\Pi\backslash(\Pi_1 \cup \hat{\Pi}_2)\Big)\Big] \overset{(2.174)}{=} \bigcup_{E\in\mathcal{Q}} (Z \cap E) = Z.$$

Случай 3. Пусть $m_1 < \hat{m}$, $\Gamma_0(\Pi(Z)) \subset \Gamma_0(K)$. Воспользуемся замечанием 2.1.3. Положим $\{K_s\}_{s=1}^{s_*} = \{E \in \Xi_{m_1}(\Pi) :\ E \cap \Pi_1 \overset{d}{=} \varnothing\}$. Это семейство кубов образует покрытие Z. Пусть $\hat{K}_s$ — параллелепипеды, такие, что $\hat{K}_s^{2/3} = K_s$. Положим $\mathcal{G}_j^{n,k} = \{\hat{K}_s\}_{s=1}^{s_*}$. Тогда $\hat{K}_s \in \mathcal{R}^{**}_{\hat{m},4,3/2}$, выполнено (2.170) или (2.171), $(\hat{K}_s)_{1/3,\hat{\mu}} = K_s$ и поэтому выполнено (2.169). Наконец, $\hat{K}_s \subset \hat{\Pi}$, и если $\hat{K}_s \cap \Pi_1 \overset{d}{\neq} \varnothing$, то $\Gamma_0(K_s) = \Gamma_1(\Pi_1)$. В этом случае $1 \in J(Z)$ и $\hat{K}_s\backslash K_s = \Pi_1^{1/4}$. Значит, $\hat{K}_s \subset \check{A}$. $\square$

Лемма 2.4.2. *Пусть выполнены условия леммы 2.4.1. Обозначим*

$$\hat{T}_{n,k} = \{E : \exists j \in \overline{1,\, \nu_{n,k}} :\ E \in P_{n,k,j}\}.$$

Тогда $\operatorname{card}\hat{T}_{n,k} \underset{r,d}{\lesssim} 2^k n$ *и для любой функции* $f \in \mathrm{Lip}_0^r(\Omega)$ *найдется функция* $S_{n,k}(f) \in \mathcal{S}_{r,\hat{T}_{n,k}}(\Omega)$ *такая, что*

$$\|f - S_{n,k}(f)\|_{L_{p,q,\hat{T}_{n,k},v}(\Omega)} \underset{p,q,r,d,L,L'}{\lesssim} (2^k n)^{-\frac{\delta}{d}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}. \tag{2.179}$$

При этом, $f \mapsto S_{n,k}(f)$ *линейно и непрерывно как отображение*

$$(\mathrm{Lip}_0^r(\Omega),\, \|\cdot\|_{\hat{W}^r_{p,g}(\Omega)}) \to L_{q,v}(\Omega).$$

Доказательство. Пусть функция $S_{n,k,j}(f)$ определена в лемме 2.4.1. Положим $S_{n,k}(f)|_{\Omega_j^{n,k}} = S_{n,k,j}(f)$. Тогда отображение $f \mapsto S_{n,k}(f)$ линейно и непрерывно. Из неравенств $\nu_{n,k} \underset{d}{\lesssim} 2^k n$ (см. предложение 2.4.2) и неравенства $\operatorname{card} P_{n,k,j} \leqslant s_*(r,\, d)$ (см. лемму 2.4.1) следует, что $\operatorname{card}\hat{T}_{n,k} \underset{r,d}{\lesssim} 2^k n$.

Докажем (2.179). Имеем

$$\|f - S_{n,k}(f)\|_{L_{p,q,\hat{T}_{n,k},v}(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^{\nu_{n,k}} \|f - S_{n,k,j}(f)\|^{\sigma_{p,q}}_{L_{p,q,P_{n,k,j},v}(\Omega_j^{n,k})}\right)^{\frac{1}{\sigma_{p,q}}} \underset{p,q,r,d,L,L'}{\overset{(2.168)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \left(\sum_{j=1}^{\nu_{n,k}} \|gv\|^{\sigma_{p,q}}_{L_\varkappa(\Omega)} (2^k n)^{-\sigma_{p,q}/\varkappa} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|^{\sigma_{p,q}}_{L_p(\tilde{\Omega}_j^{n,k})}\right)^{\frac{1}{\sigma_{p,q}}} =: M_{n,k}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{j=1}^{\nu_{n,k}} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|^p_{L_p(\tilde{\Omega}_j^{n,k})} = \sum_{j=1}^{\nu_{n,k}} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|^p_{L_p(\Omega_j^{n,k})} + \sum_{j=1}^{\nu_{n,k}} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|^p_{L_p(\hat{\psi}\circ\psi(B_{j,n,k}))} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu_{n,k}} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|^p_{L_p(\hat{\psi}\circ\psi(\Pi_{j,n,k,1}))} + \sum_{j=1}^{\nu_{n,k}} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|^p_{L_p(\hat{\psi}\circ\psi(\Pi_{j,n,k,2}))} \leqslant 3 \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|^p_{L_p(\Omega)},$$

так как множества в каждой из систем $\{Z_j^{n,k}\}_{j=1}^{\nu_{n,k}}$, $\{B_{j,n,k}\}_{j=1}^{\nu_{n,k}}$, $\{\Pi_{j,n,k,1},\, \Pi_{j,n,k,2}\}_{j=1}^{\nu_{n,k}}$ попарно не перекрываются в силу лемм 2.1.4 и 2.1.5, а отображение $\hat{\psi}\circ\psi$ является липшицевым гомеоморфизмом.

Значит, при $p \leqslant q$

$$M_{n,k} \leqslant 3^{1/p} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega)} (2^k n)^{-\frac{r}{d} - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega)},$$

откуда получаем (2.179). При $p > q$ соотношение (2.179) следует из неравенства Гельдера и условия $\nu_{n,k} \underset{d}{\lesssim} 2^k n$. □

Доказательство теоремы 3. Докажем, что множество $\hat{W}^r_{p,g}(\Omega)$ ограничено в $L_{q,v}(\Omega)$ и получим верхние оценки значений колмогоровских, гельфандовских и аппроксимативных чисел (из этих оценок будет следовать компактность вложения).

Без потери общности можно считать, что $g(x',\, x_d) = 2^k$ при $\varphi_k^0(x') < x_d \leqslant \varphi_{k+1}^0(x')$; в частности, функция g является неубывающей по x_d.

Так как область D имеет липшицеву границу, то ее можно покрыть областями D_i, $1 \leqslant i \leqslant i_0$, имеющими вид

$$D_i = \mathbb{T}_i\left(\{(t,\, \xi) : \xi \in \Delta_i,\ \underline{\varphi}_i(\xi) \leqslant t \leqslant \overline{\varphi}_i(\xi)\}\right),$$

где Δ_i — замкнутые $d-2$-мерные кубы, $\mathbb{T}_i : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^{d-1}$ — оператор поворота, $\overline{\varphi}_i$, $\underline{\varphi}_i : \Delta_i \to \mathbb{R}$ липшицевы с константой $L > 0$, $\min_{\Delta_i}(\overline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_i) > 0$. Положим

$$\hat{\mathbb{T}}_i(x_1,\, \ldots,\, x_{d-1},\, x_d) = (\mathbb{T}_i(x_1,\, \ldots,\, x_{d-1}),\, x_d),$$
$$\Omega_i = \{(x',\, x_d) : x' \in D_i,\ \ \tau_-(x') \leqslant x_d \leqslant \tau_+(x')\},$$
$$\varphi_+(x') = \tau_+(x'),\ \ \varphi_-(x') = \frac{3}{2}\tau_-(x') - \frac{1}{2}\tau_+(x'),$$
$$\hat{\Omega}_i = \{(x',\, x_d) : x' \in D_i,\ \ \varphi_-(x') \leqslant x_d \leqslant \varphi_+(x')\}.$$

Тогда функции $\varphi_\pm$ липшицевы с константой 2Λ,

$$\Omega_i = (\hat{\mathbb{T}}_i \circ \hat{\psi}_i \circ \psi_i)(K_i),\ \ \hat{\Omega}_i = (\hat{\mathbb{T}}_i \circ \hat{\psi}_i \circ \psi_i)(\hat{K}_i),$$

где K_i — d-мерные кубы, $\hat{K}_i^{2/3} = K_i$, а отображения ψ_i и $\hat{\psi}_i$ задаются формулами, аналогичными (2.102) и (2.106); вместо $\overline{\varphi}(\cdot)$ и $\underline{\varphi}(\cdot)$ берутся функции $\overline{\varphi}_i(\cdot)$ и $\underline{\varphi}_i(\cdot)$ соответственно, а вместо $\varphi_\pm(\cdot)$ — функции $\varphi_\pm(\mathbb{T}_i\cdot)$.

Пусть l_i — длина стороны Δ_i. Выберем $L' \in (0,\, 1/2)$ так, чтобы для каждого $i = 1,\, \dots,\, i_0$ выполнялись включения

$$(\overline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_i)(\Delta_i) \subset [2L'l_i,\, (2L')^{-1}l_i], \ \ (\varphi_+ - \varphi_-)(D_i) \subset [2L'l_i,\, (2L')^{-1}l_i].$$

Величину $\hat{L}'' = \hat{L}''(r,\, d,\, L,\, L')$ определим в соответствии со следствием 2.3.1. Пусть $k_* \in \mathbb{N}$ таково, что $L'' := \frac{\Lambda\sqrt{d-1}}{2^{k_*-1}} < \hat{L}''$. Обозначим $\{E_{ij}\}_{1\leqslant j\leqslant 2^{k_*(d-1)}} = \Xi_{k_*}(p_{d-1}(K_i))$, $K_{ij} = \{(x',\, x_d) \in K_i : x' \in E_{ij}\}$, $\hat{K}_{ij} = \{(x',\, x_d) \in \hat{K}_i : x' \in E_{ij}\}$, $\Omega_{ij} = (\hat{\mathbb{T}}_i \circ \hat{\psi}_i \circ \psi_i)(K_{ij})$, $\hat{\Omega}_{ij} = (\hat{\mathbb{T}}_i \circ \hat{\psi}_i \circ \psi_i)(\hat{K}_{ij})$.

Достаточно для каждого $i \in \overline{1,\, i_0}$, $j \in \overline{1,\, 2^{k_*(d-1)}}$ доказать ограниченность множества $\hat{W}^r_{p,g}(\Omega_{ij})$ в пространстве $L_{q,v}(\Omega_{ij})$ и получить порядковые неравенства

$$\vartheta_n(\hat{W}^r_{p,g}(\Omega_{ij}),\, L_{q,v}(\Omega_{ij})) \underset{p,q,r,d,L,L'}{\lesssim} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega_{ij})} n^{-\theta_{p,q,r,d}}. \qquad (2.180)$$

Фиксируем i и j, полагаем $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{ij} = \{(2^{k_*}x',\, x_d) : (x',\, x_d) \in \Omega_{ij}\}$, $\check{\Omega} = \check{\Omega}_{ij} = \{(2^{k_*}x',\, x_d) : (x',\, x_d) \in \hat{\Omega}_{ij}\}$, $\tilde{g}(x',\, x_d) = g(2^{-k_*}x',\, x_d)$, $\tilde{v}(x',\, x_d) = v(2^{-k_*}x',\, x_d)$, $(x',\, x_d) \in \tilde{\Omega}_{ij}$. Тогда $(\tilde{g},\, \tilde{v}) \in \mathcal{E}_{L''/\sqrt{d-1}}$ (поэтому $(\tilde{g},\, \tilde{v}) \in \mathcal{E}_{L''}$),

$$\vartheta_n(\hat{W}^r_{p,g}(\Omega_{ij}),\, L_{q,v}(\Omega_{ij})) \underset{p,q,r,d,k_*}{\lesssim} \vartheta_n(\hat{W}^r_{p,\tilde{g}}(\tilde{\Omega}_{ij}),\, L_{q,\tilde{v}}(\tilde{\Omega}_{ij}))$$

и $\|\tilde{g}\tilde{v}\|_{L_\varkappa(\tilde{\Omega}_{ij})} \underset{p,q,r,d,k_*}{\lesssim} \|gv\|_{L_\varkappa(\Omega_{ij})}$. Без потери общности можно считать, что $\hat{\mathbb{T}}_i$ — тождественный оператор.

Области $\tilde{\Omega}$ и $\check{\Omega}$ имеют вид

$$\tilde{\Omega} = \{(x',\, x_d) : x' \in \tilde{D},\ \tilde{\tau}_-(x') \leqslant x_d \leqslant \tilde{\tau}_+(x')\},$$
$$\check{\Omega} = \{(x',\, x_d) : x' \in \tilde{D},\ \tilde{\varphi}_-(x') \leqslant x_d \leqslant \tilde{\varphi}_+(x')\},$$

где $\tilde{D}$ задается формулой, аналогичной (2.162), $\tilde{\varphi}_\pm$ липшицевы с константой $\frac{L''}{\sqrt{d-1}}$ относительно евклидовой нормы (а значит, липшицевы с константой L'' относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$), $\tilde{\tau}_+ = \tilde{\varphi}_+$, $\tilde{\tau}_- = \frac{2}{3}\tilde{\varphi}_- + \frac{1}{3}\tilde{\varphi}_+$.

Положим

$$\Gamma_0(\tilde{\Omega}) = \{(x',\, \tilde{\tau}_-(x')) : x' \in \tilde{D}\}, \ \ \tilde{\Omega}_- = \{(x',\, x_d) : x' \in \tilde{D},\ \tilde{\varphi}_-(x') < x_d < \tilde{\tau}_-(x')\}.$$

Обозначим $C^\infty(\tilde{\Omega},\, \Gamma_0)$ множество гладких функций на $\tilde{\Omega}$, равных нулю в окрестности $\Gamma_0(\tilde{\Omega})$.

Утверждение (#). Множество $C^\infty(\tilde{\Omega},\, \Gamma_0) \cap \hat{W}^r_{p,\tilde{g}}(\tilde{\Omega})$ плотно в $\hat{W}^r_{p,\tilde{g}}(\tilde{\Omega})$ относительно нормы $\|f\|_{\hat{W}^r_{p,\tilde{g}}(\tilde{\Omega})} := \left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}}\right\|_{L_p(\tilde{\Omega})}$.

В самом деле, для достаточно малых $\varepsilon > 0$ положим

$$\overline{\Omega}_\varepsilon = \{(x',\, x_d) : x' \in \tilde{D},\ \tilde{\tau}_-(x') \leqslant x_d \leqslant \tilde{\tau}_+(x) - \varepsilon\},$$
$$\underline{\Omega}_\varepsilon = \{(x',\, x_d) : x' \in \tilde{D},\ \tilde{\tau}_-(x') + \varepsilon \leqslant x_d \leqslant \tilde{\tau}_+(x)\},$$
$$\Omega_\varepsilon = \{(x',\, x_d) : x' \in \tilde{D},\ \tilde{\tau}_-(x') + \varepsilon \leqslant x_d \leqslant \tilde{\tau}_+(x) - \varepsilon\}.$$

Из условия $(\tilde{g},\, \tilde{v}) \in \mathcal{E}_{L''}$ и определения 3 следует, что функция $\tilde{g}$ ограничена на $\overline{\Omega}_\varepsilon$ и отделена от нуля на $\underline{\Omega}_\varepsilon$.

Пусть $f_0 \in \hat{W}^r_{p,\tilde{g}}(\tilde{\Omega})$. Обозначим через f ее продолжение нулем на $\tilde{\Omega}_-$. Так как область $\tilde{\Omega}$ имеет липшицеву границу, то

$$\nabla^r f(x) = \begin{cases} \nabla^r f_0(x),\ x \in \tilde{\Omega}, \\ 0,\ x \in \tilde{\Omega}_- \end{cases}$$

(это доказывается индукцией по r с использованием аппроксимации функций $\frac{\partial^{r-1}f_0}{\partial x^\alpha}$ элементами $C^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon, \Gamma_0)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{W_p^1(\overline{\Omega}_\varepsilon)}$; здесь $|\alpha| = r-1$).

Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и для $x = (x', x_d) \in \tilde{\Omega}$ положим $f_\varepsilon(x', x_d) = f(x', x_d - \varepsilon)$. Тогда

$$\left\|\frac{\nabla^r f_\varepsilon}{\tilde{g}}\right\|^p_{L_p(\tilde{\Omega})} = \int\limits_{\overline{\Omega}_\varepsilon} \frac{|\nabla^r f(x', x_d)|^p}{|\tilde{g}(x', x_d+\varepsilon)|^p}\,dx \leqslant \left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}}\right\|^p_{L_p(\tilde{\Omega})} \leqslant 1$$

(здесь использовалось предположение о том, что $\tilde{g}$ возрастает по x_d). Покажем, что

$$\left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}} - \frac{\nabla^r f_\varepsilon}{\tilde{g}}\right\|_{L_p(\tilde{\Omega})} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.$$

В самом деле, для любого $\lambda > 0$ найдется такое $h > 0$, что $\left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}}\right\|_{L_p(\tilde{\Omega}\setminus\Omega_{2h})} < \lambda$. Тогда при $\varepsilon < h$ выполнено $\left\|\frac{\nabla^r f_\varepsilon}{\tilde{g}}\right\|_{L_p(\tilde{\Omega}\setminus\Omega_h)} < \lambda$. В самом деле,

$$\left\|\frac{\nabla^r f_\varepsilon}{\tilde{g}}\right\|^p_{L_p(\tilde{\Omega}\setminus\Omega_h)} = \int\limits_{\tilde{\Omega}\setminus\underline{\Omega}_h} \left|\frac{\nabla^r f(x', x_d-\varepsilon)}{\tilde{g}(x', x_d)}\right|^p dx + \int\limits_{\tilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega}_h} \left|\frac{\nabla^r f(x', x_d-\varepsilon)}{\tilde{g}(x', x_d)}\right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\tilde{\Omega}\setminus\underline{\Omega}_{h-\varepsilon}} \left|\frac{\nabla^r f(x', x_d)}{\tilde{g}(x', x_d+\varepsilon)}\right|^p dx + \int\limits_{\tilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega}_{h+\varepsilon}} \left|\frac{\nabla^r f(x', x_d)}{\tilde{g}(x', x_d+\varepsilon)}\right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\tilde{\Omega}\setminus\underline{\Omega}_{h-\varepsilon}} \left|\frac{\nabla^r f(x', x_d)}{\tilde{g}(x', x_d)}\right|^p dx + \int\limits_{\tilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega}_{h+\varepsilon}} \left|\frac{\nabla^r f(x', x_d)}{\tilde{g}(x', x_d)}\right|^p dx \leqslant \left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}}\right\|^p_{L_p(\tilde{\Omega}\setminus\Omega_{2h})} < \lambda^p$$

(здесь снова использовалось предположение о том, что $\tilde{g}$ возрастает по x_d).

На множестве $\Omega_{h/2}$ функция $\tilde{g}$ ограничена и отделена от нуля, поэтому остается воспользоваться тем, что $\|\nabla^r f - \nabla^r f_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_h)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Взяв достаточно малое $\varepsilon > 0$, получаем $\left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}} - \frac{\nabla^r f_\varepsilon}{\tilde{g}}\right\|_{L_p(\tilde{\Omega})} < 3\lambda$. Покажем, что найдется гладкая функция $\tilde{f}_\varepsilon$, равная нулю в окрестности $\Gamma_0(\tilde{\Omega})$ такая, что

$$\left\|\frac{\nabla^r f_\varepsilon}{\tilde{g}} - \frac{\nabla^r \tilde{f}_\varepsilon}{\tilde{g}}\right\|_{L_p(\tilde{\Omega})} < \lambda. \tag{2.181}$$

В самом деле, положим $\tilde{g}_\varepsilon(x', x_d) = \tilde{g}(x', x_d - \varepsilon)$, $(x', x_d) \in \underline{\Omega}_\varepsilon$. Тогда $\tilde{g}_\varepsilon \leqslant C_\varepsilon < \infty$. Поскольку $\nabla^r f_\varepsilon|_{\tilde{\Omega}\setminus\underline{\Omega}_\varepsilon} = 0$, $\tilde{g}|_{\underline{\Omega}_{\varepsilon/2}} \geqslant c_\varepsilon > 0$ и

$$\|\nabla^r f_\varepsilon\|_{L_p(\tilde{\Omega})} = C_\varepsilon \left\|\frac{\nabla^r f_\varepsilon}{C_\varepsilon}\right\|_{L_p(\tilde{\Omega})} \leqslant C_\varepsilon \left\|\frac{\nabla^r f_\varepsilon}{\tilde{g}_\varepsilon}\right\|_{L_p(\underline{\Omega}_\varepsilon)} \leqslant C_\varepsilon \left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde{g}}\right\|_{L_p(\tilde{\Omega})} \leqslant C_\varepsilon,$$

то существует гладкая функция $\tilde{f}_\varepsilon$, равная нулю на $\tilde{\Omega}\setminus\underline{\Omega}_{\varepsilon/2}$ такая, что

$$\left\|\nabla^r f_\varepsilon - \nabla^r \tilde{f}_\varepsilon\right\|_{L_p(\tilde{\Omega})} < \lambda c_\varepsilon,$$

откуда следует (2.181). Утверждение (#) доказано.

Докажем, что множество $\hat{W}^r_{p,\tilde{g}}(\tilde{\Omega})$ ограничено в пространстве $L_{q,\tilde{v}}(\tilde{\Omega})$ и множество $C^\infty(\tilde{\Omega}, \Gamma_0) \cap \hat{W}^r_{p,\tilde{g}}(\tilde{\Omega})$ плотно в $\hat{W}^r_{p,\tilde{g}}(\tilde{\Omega})$ относительно нормы пространства $L_{q,\tilde{v}}(\tilde{\Omega})$. В силу следствия 2.3.1, для любой функции $f \in C^\infty(\tilde{\Omega}, \Gamma_0)$ выполнено неравенство

(2.160) с $P_f=0$, $g:=\tilde g$, $v:=\tilde v$, $\Omega:=\check\Omega$, $\Omega':=\tilde\Omega$, и множество $\hat W^r_{p,\tilde g}(\tilde\Omega)\cap C^\infty(\tilde\Omega,\,\Gamma_0)$ ограничено в $L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)$. Пусть $f\in\hat W^r_{p,\tilde g}(\tilde\Omega)$, $f_j\in\hat W^r_{p,\tilde g}(\tilde\Omega)\cap C^\infty(\tilde\Omega,\,\Gamma_0)$, $j\in\mathbb N$, $\left\|\frac{\nabla^r f_j}{\tilde g}-\frac{\nabla^r f}{\tilde g}\right\|_{L_p(\tilde\Omega)}\underset{j\to\infty}{\to}0$. Тогда f_j сходится к f в пространстве обобщенных функций на $\tilde\Omega$ (в самом деле, для любого малого $\varepsilon>0$ выполнено $\|\nabla^r f_j-\nabla^r f\|_{L_p(\overline\Omega_\varepsilon)}\underset{j\to\infty}{\to}0$, поэтому по теореме вложения $\|f_j-f\|_{L_p(\overline\Omega_\varepsilon)}\underset{j\to\infty}{\to}0$). Последовательность $\{f_j\}_{j\in\mathbb N}$ фундаментальна в пространстве $L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)$ (в силу неравенства (2.160)), так что она сходится к некоторой функции $\tilde f$ по норме $L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)$. Значит, $f_j\underset{j\to\infty}{\to}\tilde f$ в пространстве обобщенных функций, $\tilde f=f$ и

$$\|f\|_{L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)}\leqslant\sup_{j\in\mathbb N}\|f_j\|_{L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)}\underset{q,p,r,d,L,L'}{\overset{(2.160)}{\lesssim}}\|\tilde g\tilde v\|_{L_\varkappa(\tilde\Omega)}.$$

Итак, для оценки колмогоровских поперечников и аппроксимативных чисел достаточно построить приближение для гладких функций. Пусть $S_{n,k}(f)$ — кусочно-полиномиальная функция, определенная в лемме 2.4.2, $k\in\mathbb Z_+$. При $p\geqslant q$ и ($p<q$, $\hat q\leqslant 2$) соотношение (2.180) следует из леммы 2.4.2 (в качестве приближающего подпространства при оценке колмогоровских и аппроксимативных чисел берется $\mathcal S_{r,\hat T_{n,0}}(\tilde\Omega)$, а при оценке гельфандовских чисел рассматривается подпространство функций f таких, что $S_{n,0}(f)=0$).

Пусть $1<p<q$, $2<\hat q<+\infty$. Тогда для любой функции $f\in\hat W^r_{p,\tilde g}(\tilde\Omega)$ выполнено

$$f=\sum_{k=1}^\infty(S_{n,k}(f)-S_{n,k-1}(f))+S_{n,0}(f),$$

где ряд суммируется в метрике $L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)$. Для каждого $k\in\mathbb Z_+$ существует разбиение $\hat T_{n,k}$ области $\tilde\Omega$ на подмножества $\hat\Omega^{n,k}_j$, $1\leqslant j\leqslant\tilde\nu_{n,k}\underset{r,d}{\lesssim}2^kn$ такое, что $S_{n,k}(f)|_{\hat\Omega^{n,k}_j}$ является полиномом степени не выше $r-1$. Кроме того, существует константа $M_*(r,\,d)$ такая, что множество $\hat\Omega^{n,k}_j$ перекрывается с не более, чем $M_*(r,\,d)$ множествами вида $\hat\Omega^{n,k+1}_i$ и $\hat\Omega^{n,k-1}_i$ (это следует из пункта 2 предложения 2.4.2 и из условия $s_*=s_*(r,\,d)$, см. лемму 2.4.1). Положим $T'_{n,k}=\{G^{n,k}_{i,j}:=\hat\Omega^{n,k}_j\cap\hat\Omega^{n,k-1}_i\}_{i,j}$, $k\in\mathbb N$. Тогда $\overline\nu_{n,k}:=\operatorname{card}T'_{n,k}\underset{r,d}{\lesssim}2^kn$ и

$$\|S_{n,k}(f)-S_{n,k-1}(f)\|_{L_{p,q,T'_{n,k},\tilde v}(\tilde\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant\|f-S_{n,k}(f)\|_{L_{p,q,T'_{n,k},\tilde v}(\tilde\Omega)}+\|f-S_{n,k-1}(f)\|_{L_{p,q,T'_{n,k},\tilde v}(\tilde\Omega)}=$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{\tilde\nu_{n,k}}\sum_{i:|G^{n,k}_{i,j}|>0}\|f-S_{n,k}(f)\|^p_{L_{q,\tilde v}(G^{n,k}_{i,j})}\right)^{1/p}+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{\tilde\nu_{n,k-1}}\sum_{j:|G^{n,k}_{i,j}|>0}\|f-S_{n,k-1}(f)\|^p_{L_{q,\tilde v}(G^{n,k}_{i,j})}\right)^{1/p}\underset{p,q,r,d}{\lesssim}$$
$$\lesssim\left(\sum_{j=1}^{\tilde\nu_{n,k}}\|f-S_{n,k}(f)\|^p_{L_{q,\tilde v}(\hat\Omega^{n,k}_j)}\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\tilde\nu_{n,k-1}}\|f-S_{n,k-1}(f)\|^p_{L_{q,\tilde v}(\hat\Omega^{n,k-1}_i)}\right)^{1/p}=$$
$$=\|f-S_{n,k}(f)\|_{L_{p,q,\hat T_{n,k},\tilde v}(\tilde\Omega)}+\|f-S_{n,k-1}(f)\|_{L_{p,q,\hat T_{n,k-1},\tilde v}(\tilde\Omega)}\underset{p,q,r,d,L,L'}{\overset{(2.179)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \|\tilde g\tilde v\|_{L_\varkappa(\tilde\Omega)}(2^kn)^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left\|\frac{\nabla^r f}{\tilde g}\right\|_{L_p(\tilde\Omega)} \leqslant \|\tilde g\tilde v\|_{L_\varkappa(\tilde\Omega)}(2^kn)^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

т.е.

$$\|S_{n,k}(f)-S_{n,k-1}(f)\|_{L_{p,q,T'_{n,k},\tilde v}(\tilde\Omega)} \underset{p,q,r,d,L,L'}{\lesssim} \|\tilde g\tilde v\|_{L_\varkappa(\tilde\Omega)}(2^kn)^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \quad (2.182)$$

Определим $\mathcal{S}_{r,T'_{n,k}}(\tilde\Omega)$ в соответствии с (1.102). Пусть

$$\hat\nu_{n,k} = (\dim \mathcal{S}_{r,T'_{n,k}}(\tilde\Omega),\, L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)).$$

По лемме 1.4.5, существует линейный изоморфизм $A^{n,k}:\mathcal{S}_{r,T'_{n,k}}(\tilde\Omega)\to\mathbb{R}^{\hat\nu_{n,k}}$ такой, что

$$\begin{gathered}\beta_{n,k} := \|(A^{n,k})^{-1}\|_{l_q^{\hat\nu_{n,k}}\to L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)} \underset{q,r,d}{\lesssim} 1,\\ \alpha_{n,k} := \|A^{n,k}\|_{L_{p,q,T'_{n,k},\tilde v}(\tilde\Omega)\cap\mathcal{S}_{r,T'_{n,k}}(\tilde\Omega)\to l_p^{\hat\nu_{n,k}}} \underset{p,r,d}{\lesssim} 1.\end{gathered} \quad (2.183)$$

Теперь оценим величины $\vartheta_n(\hat W^r_{p,\tilde g}(\tilde\Omega),\, L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega))$. Пусть $\{m(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathbb{Z}_+$ — некоторая финитная последовательность, Λ_k — экстремальное подпространство для $\vartheta_{m(k)}(B_p^{\hat\nu_{n,k}},\, l_q^{\hat\nu_{n,k}}) =: \gamma_{n,k}$, E_k — экстремальное отображение с образом в Λ_k (при оценке аппроксимативных и гельфандовских чисел это отображение линейно). Определим отображение

$$\tilde E: f\mapsto \sum_{k=1}^\infty (A^{n,k})^{-1}E_kA^{n,k}(S_{n,k}(f)-S_{n,k-1}(f))+S_{n,0}(f).$$

Достаточно подобрать последовательность $\{m(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ такую, что $N:=\sum\limits_k m(k)+\dim\mathcal{S}_{r,\hat T_{n,0}}(\tilde\Omega) \underset{p,q,r,d}{\lesssim} n$ и

$$\sup_{f\in\hat W^r_{p,\tilde g}(\tilde\Omega)}\|f-\tilde Ef\|_{L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)} \underset{p,q,r,d,L,L'}{\lesssim} \|\tilde g\tilde v\|_{L_\varkappa(\tilde\Omega)}n^{-\theta_{p,q,r,d}}.$$

В самом деле, так как последовательность $m(k)$ финитна, то сумма ряда конечная, а множество $\tilde E(L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega))$ содержится в подпространстве размерности не больше N. Заметим, что если E_k линейны, то $\tilde E$ тоже линейно и непрерывно в силу леммы 2.4.2. Это дает оценку для колмогоровских и аппроксимативных чисел. При оценке гельфандовских чисел рассматриваем подпространство функций $f\in\operatorname{span}\hat W^r_{p,\tilde g}(\tilde\Omega)$ таких, что $E_kA^{n,k}(S_{n,k}(f)-S_{n,k-1}(f))=0$, $k\in\mathbb{N}$, и $S_{n,0}(f)=0$. Для таких функций выполнено $\tilde Ef=0$.

Пусть I_k — тождественный оператор на $l_q^{\hat\nu_{n,k}}$. Если $f\in\hat W^r_{p,\tilde g}(\tilde\Omega)$, то

$$\|f-\tilde Ef\|_{L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)} \leqslant \sum_{k=1}^\infty \|(A^{n,k})^{-1}(I_k-E_k)A^{n,k}(S_{n,k}(f)-S_{n,k-1}(f))\|_{L_{q,\tilde v}(\tilde\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^\infty \beta_{n,k}\gamma_{n,k}\alpha_{n,k}\|S_{n,k}(f)-S_{n,k-1}(f)\|_{L_{p,q,T'_{n,k},\tilde v}(\tilde\Omega)} \overset{(2.183)}{\underset{q,p,r,d}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^\infty \gamma_{n,k}\|S_{n,k}(f)-S_{n,k-1}(f)\|_{L_{p,q,T'_{n,k},\tilde v}(\tilde\Omega)} \overset{(2.182)}{\underset{p,q,r,d,L,L'}{\lesssim}} \|\tilde g\tilde v\|_{L_\varkappa(\tilde\Omega)}\sum_{k=0}^\infty \gamma_{n,k}(2^kn)^{-\frac{r}{d}-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}.$$

Остается воспользоваться леммой 1.4.6.

Таким образом, доказаны оценки сверху. Оценки снизу доказываются так же, как в теореме 2. □

Снова в заключение отметим, что из (3) получаем оценки для линейных и гельфандовских поперечников.

Глава 3

Неравенства типа Харди на дереве при дополнительных условиях на веса

3.1 Дискретный аналог теоремы Эванса – Харриса – Пика

Пусть $(\mathcal{T}, \xi_*)$ — дерево, $\Delta : \mathbf{E}(\mathcal{T}) \to 2^{\mathbb{R}}$ — отображение, такое, что для любого $\lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{T})$ множество $\Delta(\lambda) = [a_\lambda, b_\lambda]$ является невырожденным отрезком (здесь a_λ, $b_\lambda \in \mathbb{R}$). Метрическим деревом назовем

$$\mathbb{T} = (\mathcal{T}, \Delta) = \{x = (t, \lambda) : t \in [a_\lambda, b_\lambda], \lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{T})\};$$

при этом, мы предполагаем, что если $\xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{T}}(\xi)$, $\xi'' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{T}}(\xi')$, $\lambda = (\xi, \xi')$, $\lambda' = (\xi', \xi'')$, то $(b_\lambda, \lambda) = (a_{\lambda'}, \lambda')$.

Скажем, что $\lambda < \lambda'$, если $\lambda = (\omega, \xi)$, $\lambda' = (\omega', \xi')$ и $\xi \leqslant \omega'$; $(t', \lambda') \leqslant (t'', \lambda'')$, если $\lambda' < \lambda''$ или $\lambda' = \lambda''$, $t' \leqslant t''$. Если $(t', \lambda') \leqslant (t'', \lambda'')$ и $(t', \lambda') \neq (t'', \lambda'')$, то обозначим $(t', \lambda') < (t'', \lambda'')$. Для $a, x \in \mathbb{T}$, $a \leqslant x$ положим $[a, x] = \{y \in \mathbb{T} : a \leqslant y \leqslant x\}$.

Расстояние $\rho_{\mathbb{T}}$ между точками $\mathbb{T} = (\mathcal{T}, \Delta)$ определяется следующим образом. Пусть $x \leqslant y$. Если $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — простой путь в дереве $\mathcal{T}$, $n \geqslant 2$, $\lambda_i = (\xi_{i-1}, \xi_i)$, $x = (t_1, \lambda_1)$, $y = (t_n, \lambda_n)$, то положим

$$\rho_{\mathbb{T}}(x, y) = |b_{\lambda_1} - t_1| + \sum_{i=2}^{n-1} |b_{\lambda_i} - a_{\lambda_i}| + |t_n - a_{\lambda_n}|; \tag{3.1}$$

если $x = (t', \lambda)$, $y = (t'', \lambda)$, то $\rho_{\mathbb{T}}(x, y) = |t' - t''|$. Пусть $x, y \in \mathbb{T}$ несравнимы. Тогда положим $z_{xy} = \max\{z \in \mathbb{T} : z \leqslant x, z \leqslant y\}$, $\rho_{\mathbb{T}}(x, y) = \rho_{\mathbb{T}}(x, z_{xy}) + \rho_{\mathbb{T}}(y, z_{xy})$. Заметим, что $\rho_{\mathbb{T}}$ является метрикой.

Пусть для каждого $\lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{T})$ задано подмножество $A_\lambda \subset \Delta(\lambda)$. Скажем, что множество $\mathbb{A} = \{(t, \lambda) : \lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{T}), t \in A_\lambda\}$ измеримо, если A_λ измеримо для каждого $\lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{T})$. Его мера Лебега определяется как

$$\operatorname{mes} \mathbb{A} = \sum_{\lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{T})} \operatorname{mes} A_\lambda.$$

Пусть $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$. Для $\lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{T})$ определим функцию $f_\lambda : A_\lambda \to \mathbb{R}$ равенством $f_\lambda(t) = f(t, \lambda)$. Скажем, что функция $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу, если f_λ

интегрируема по Лебегу для каждого $\lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{T})$ и $\sum\limits_{\lambda\in\mathbf{E}(\mathcal{T})} \int\limits_{A_\lambda} |f_\lambda(t)|\,dt < \infty$. В этом случае обозначаем

$$\int\limits_{\mathbb{A}} f(x)\,dx = \sum_{\lambda\in\mathbf{E}(\mathcal{T})} \int\limits_{A_\lambda} f_\lambda(t)\,dt.$$

Определение 3.1.1. Пусть $\mathbb{D} \subset \mathbb{T}$ — замкнутое связное множество с непустой внутренностью (относительно метрики $\rho_{\mathbb{T}}$). Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathbb{D}}$ максимальное поддерево в $\mathcal{T}$ такое, что для любого $\lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{T}_{\mathbb{D}})$ множество $\{t \in \Delta(\lambda) :\ (t,\,\lambda) \in \mathbb{D}\}$ является невырожденным отрезком в $\mathbb{R}$. Определим отображение $\Delta_{\mathbb{D}}(\lambda)$ следующим образом: $\Delta_{\mathbb{D}}(\lambda) = \{t \in \Delta(\lambda) :\ (t,\,\lambda) \in \mathbb{D}\}$, $\lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{T}_{\mathbb{D}})$. Тогда $(\mathcal{T}_{\mathbb{D}},\,\Delta_{\mathbb{D}})$ является метрическим деревом. Мы будем его отождествлять с множеством $\mathbb{D}$ и назовем его метрическим поддеревом в $\mathbb{T}$.

Пусть $\mathbb{D}$ — метрическое поддерево в $\mathbb{T}$. Скажем, что точка $x \in \mathbb{D}$ является максимальной (соответственно, минимальной), если $y \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{D}$ для любого $y > x$ (соответственно, для любого $y < x$). Обозначим через $\mathbb{D}_{\max}$ множество максимальных точек в $\mathbb{D}$.

Пусть $\mathbb{T} = (\mathcal{T},\,\Delta)$ — метрическое дерево, $x_0 \in \mathbb{T}$, $u,\,w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ — измеримые функции. Положим $\mathbb{T}_{x_0} = \{x \in \mathbb{T} :\ x \geqslant x_0\}$,

$$I_{u,w,x_0}f(x) = w(x) \int\limits_{[x_0,\,x]} u(t)f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{T}_{x_0}. \tag{3.2}$$

Предположим, что $\mathbf{V}(\mathcal{T})$ конечно.

Обозначим через $\mathcal{J}_{x_0} = \mathcal{J}_{x_0}(\mathbb{T})$ семейство метрических поддеревьев $\mathbb{D} \subset \mathbb{T}$ со следующими свойствами:

1. x_0 является минимальной точкой $\mathbb{D}$;
2. если $x \in \partial\mathbb{D}\backslash\{x_0\}$, то x является максимальной в $\mathbb{D}$.

Пример 6. *Пусть метрическое дерево $\mathbb{T} = (\mathcal{T},\,\Delta)$ имеет следующий вид. Вершина ξ_0 является корнем $\mathcal{T}$, $\mathbf{V}_1(\xi_0) = \{\xi_1\}$, $\mathbf{V}_1(\xi_1) = \{\xi_2,\,\xi_3\}$, $\lambda_1 = (\xi_0,\,\xi_1)$, $\lambda_2 = (\xi_1,\,\xi_2)$, $\lambda_3 = (\xi_1,\,\xi_3)$, $\Delta(\lambda_i) = [0,\,1]$, $i = 1,\,2,\,3$. Пусть $\mathbb{D} = \{(t,\,\lambda_i) :\ t \in [0,\,1],\, i = 1,\,2\}$, $x_0 = (0,\,\lambda_1)$. Тогда $\mathbb{D} \notin \mathcal{J}_{x_0}(\mathbb{T})$. В самом деле, $(1,\,\lambda_1) = (0,\,\lambda_2)$ является граничной точкой, но не является максимальной.*

Для поддерева $\mathbb{D} \subset \mathbb{T}$, мы обозначим $L_p^{\mathrm{discr}}(\mathbb{D})$ множество функций $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, являющихся константой на каждом ребре $\mathbb{D}$.

Пусть $\mathbb{D} \in \mathcal{J}_{x_0}(\mathbb{T})$, $\partial\mathbb{D}\backslash\{x_0\} \subset G \subset \mathbb{D}_{\max}$. Положим

$$\alpha_{\mathbb{D},G} = \inf\left\{ \|f\|_{L_p(\mathbb{D})} : f \in L_p(\mathbb{D}),\ \int\limits_{[x_0,\,t]} |f(x)|u(x)\,dx = 1 \quad \forall t \in G \right\}, \tag{3.3}$$

$$\alpha^{\mathrm{discr}}_{\mathbb{D},G} = \inf\left\{ \|f\|_{L_p(\mathbb{D})} : f \in L_p^{\mathrm{discr}}(\mathbb{D}),\ \int\limits_{[x_0,\,t]} |f(x)|u(x)\,dx = 1 \quad \forall t \in G \right\},$$

$$\alpha_{\mathbb{D}} = \alpha_{\mathbb{D},\partial\mathbb{D}\backslash\{x_0\}}, \quad \alpha^{\mathrm{discr}}_{\mathbb{D}} = \alpha^{\mathrm{discr}}_{\mathbb{D},\partial\mathbb{D}\backslash\{x_0\}}. \tag{3.4}$$

Замечание 3.1.1. Если функция u является константой на каждом ребре $\mathbb{D}$, то $\alpha_{\mathbb{D},G} = \alpha^{\mathrm{discr}}_{\mathbb{D},G}$.

Следующий результат доказан Эвансом, Харрисом и Пиком [98].

Теорема J. [98]. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Тогда оператор $I_{u,w,x_0} : L_p(\mathbb{T}_{x_0}) \to L_q(\mathbb{T}_{x_0})$ ограничен в том и только том случае, если*

$$C_{u,w} := \sup_{\mathbb{D}\in\mathcal{J}_{x_0}} \frac{\|w\|_{L_q(\mathbb{T}_{x_0}\setminus\mathbb{D})}}{\alpha_{\mathbb{D}}} < \infty. \tag{3.5}$$

Кроме того, $C_{u,w} \leqslant \|I_{u,w,x_0}\|_{L_p(\mathbb{T}_{x_0})\to L_q(\mathbb{T}_{x_0})} \leqslant 4C_{u,w}$.

Величина $\alpha_{\mathbb{D}}$ вычисляется рекурсивно. Следующий результат доказан в [98].

Теорема K. [98]. *Пусть $\mathbb{D} \in \mathcal{J}_{x_0}$, $\mathbb{D} = \cup_{j=0}^m \mathbb{D}_j$, $\mathbb{D}_0 = [x_0, y_0]$, $x_0 < y_0$, $\mathbb{D}_j \in \mathcal{J}_{y_0}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\mathbb{D}_i \cap \mathbb{D}_j = \{y_0\}$, $i \neq j$. Тогда*

$$\frac{1}{\alpha_{\mathbb{D}}} = \left\| \left(\alpha_{\mathbb{D}_0}^{-1},\, \|(\alpha_{\mathbb{D}_i})_{i=1}^m\|_{l_p^m}^{-1}\right)\right\|_{l^2_{p'}} = \left(\alpha_{\mathbb{D}_0}^{-p'} + \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{\mathbb{D}_i}^p\right)^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Докажем аналогичные результаты для операторов суммирования.

Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево с конечным множеством вершин. Получим двусторонние оценки для $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}$ при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

Определение 3.1.2. Пусть $\hat\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}_{\hat\xi}$ — поддерево и $\Gamma \subset \mathbf{V}(\mathcal{D})$. Скажем, что $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}^\circ_{\hat\xi}$, если выполнены следующие условия:

1. $\hat\xi$ является минимальной в $\mathcal{D}$,
2. если $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{D})$ не является максимальной в $\mathcal{D}$, то $\mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi) \subset \mathbf{V}(\mathcal{D})$,
3. $\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})\setminus\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{A}) \subset \Gamma \subset \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})$.

Если $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}^\circ_{\hat\xi}$ и $\Gamma \neq \varnothing$, то будем обозначать $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}'_{\hat\xi}$.

Для $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}^\circ_{\hat\xi}$ обозначим через $\mathcal{D}_\Gamma$ поддерево в $\mathcal{D}$ такое, что $\mathbf{V}(\mathcal{D}_\Gamma) = \mathbf{V}(\mathcal{D})\setminus\Gamma$, и положим

$$\beta_{\mathcal{D},\Gamma} = \inf\left\{\|\varphi\|_{l_p(\mathcal{A}_{\hat\xi})} : \sum_{\hat\xi\leqslant\xi'\leqslant\xi} |\varphi(\xi')|u(\xi') = 1, \ \ \forall \xi \in \Gamma\right\}. \tag{3.6}$$

Заметим, что

$$\mathbf{V}(\mathcal{A}_{\hat\xi}\setminus\mathcal{D}_\Gamma) = \cup_{\xi\in\Gamma}\mathbf{V}(\mathcal{A}_\xi). \tag{3.7}$$

Если $\Gamma = \varnothing$, то $\beta_{\mathcal{D},\Gamma} = 0$.

Лемма 3.1.1. *Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево с конечным множеством вершин, $\hat\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Тогда*

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\hat\xi},u,w} \underset{p,q}{\asymp} \sup_{(\mathcal{D},\,\Gamma)\in\mathcal{J}'_{\hat\xi}} \frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\hat\xi}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)}}{\beta_{\mathcal{D},\Gamma}}.$$

Доказательство. Добавим вершину ξ_* к множеству $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ и соединим ее ребром с ξ_0. Таким образом мы получаем дерево $(\mathcal{A}^\#, \xi_*)$. Определим отображение Δ равенством $\Delta(\lambda) = [0, 1]$, $\lambda \in \mathbf{E}(\mathcal{A}^\#)$, и положим $\mathbb{A} = (\mathcal{A}^\#, \Delta)$. Для каждого $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ обозначим через λ_ξ ребро в дереве $\mathcal{A}^\#$ с концом ξ (т.е. $\lambda_\xi = (\xi', \xi)$, $\xi' < \xi$). Для заданной функции $\psi : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ мы определяем функцию $\psi^\# : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ равенством $\psi^\#(t, \lambda_\xi) = \psi(\xi)$, $t \in [0, 1]$, $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$.

Пусть $x_0 = (0, \lambda_{\hat\xi}) \in \mathbb{A}$. В силу неравенства Гельдера и теоремы J,

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\hat\xi},u,w} \underset{p,q}{\asymp} \|I_{u^\#,w^\#,x_0}\|_{L_p(\mathbb{A}_{x_0}) \to L_q(\mathbb{A}_{x_0})} \overset{(3.5)}{\underset{p,q}{\asymp}} \sup_{\mathbb{D} \in \mathcal{J}_{x_0}} \frac{\|w^\#\|_{L_q(\mathbb{A}_{x_0}\setminus\mathbb{D})}}{\alpha_{\mathbb{D}}},$$

где $\alpha_{\mathbb{D}}$ определено формулами (3.3) и (3.4).

Пусть $\mathbb{D} \in \mathcal{J}_{x_0}$, $\mathbb{D} \neq \mathbb{A}_{x_0}$, $\mathcal{D}^\# = \mathcal{A}^\#_{\mathbb{D}}$ (см. определение 3.1.1), $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^\#)_{\hat\xi} \subset \mathcal{A}$,

$$\Gamma = \{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{D}) : \; \exists t \in (0, 1] : \; (t, \lambda_\xi) \in \partial\mathbb{D}\setminus\{x_0\}\}.$$

Тогда $\Gamma \neq \varnothing$. Докажем, что $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}'_{\hat\xi}$. Свойство 1 выполнено по построению. Проверим свойство 2. В самом деле, пусть $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{D})$. Предположим, что существуют вершины $\xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi)\setminus\mathbf{V}(\mathcal{D})$ и $\xi'' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi) \cap \mathbf{V}(\mathcal{D})$. Тогда $(0, (\xi, \xi')) = (0, (\xi, \xi''))$ является граничной точкой в $\mathbb{D}$ и не является максимальной. Остается доказать свойство 3. Если $\xi \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})\setminus\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{A})$, то $\{t \in [0, 1] : \; (t, \lambda_\xi) \in \mathbb{D}\} =: [a_{\lambda_\xi}, b_{\lambda_\xi}]$ является невырожденным отрезком и $(b_{\lambda_\xi}, \lambda_\xi) \in \partial\mathbb{D}\setminus\{x_0\}$. Значит, $\xi \in \Gamma$. Покажем, что $\Gamma \subset \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})$. В самом деле, пусть $\xi \in \Gamma$ и $\xi \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})$. По свойству 2, $\mathbf{V}_1^{\mathcal{D}}(\xi) \subset \mathbf{V}(\mathcal{D})$. Поэтому (t, λ_ξ) является внутренней точкой $\mathbb{D}$ для любого $t \in (0, 1]$.

Положим $\mathbb{D}^+ = (\mathcal{D}^\#, \Delta)$, $\mathbb{D}^- = ((\mathcal{D}^\#)_\Gamma, \Delta)$, $G = \mathbb{D}^+_{\max}\setminus\mathrm{int}\,\mathbb{D}$. Тогда $G = \{(1, \lambda_\xi) : \xi \in \Gamma\}$,

$$\|w^\#\|_{L_q(\mathbb{A}_{x_0}\setminus\mathbb{D})} \leqslant \|w^\#\|_{L_q(\mathbb{A}_{x_0}\setminus\mathbb{D}^-)} = \|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\hat\xi}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)}.$$

Далее, для любого $x \in \partial\mathbb{D}\setminus\{x_0\}$ существует $y \in G$ такое, что $y \geqslant x$. В силу замечания 3.1.1,

$$\alpha_{\mathbb{D}} \geqslant \alpha_{\mathbb{D}^+,G} = \alpha^{\mathrm{discr}}_{\mathbb{D}^+,G} = \beta_{\mathcal{D},\Gamma}.$$

Это дает требуемую оценку сверху для $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\hat\xi},u,w}$.

Теперь докажем оценку снизу. Пусть $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}'_{\hat\xi}$. Возьмем функцию $f \in l_p(\mathcal{A}_{\hat\xi})$ такую, что $\sum\limits_{\hat\xi \leqslant \xi' \leqslant \xi} |f(\xi')|u(\xi') = 1$ для любого $\xi \in \Gamma$, $\|f\|_{l_p(\mathcal{A}_{\hat\xi})} = \beta_{\mathcal{D},\Gamma}$, $\tilde f = \frac{f}{\beta_{\mathcal{D},\Gamma}}$. Тогда $\tilde f(\xi') = 0$ для любого $\xi' > \xi$, $\xi \in \Gamma$, $\|\tilde f\|_{l_p(\mathcal{A}_{\hat\xi})} = 1$,

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\hat\xi},u,w} \geqslant \left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}_{\hat\xi})} w^q(\xi) \left(\sum_{\hat\xi \leqslant \xi' \leqslant \xi} u(\xi')|\tilde f(\xi')|\right)^q\right)^{1/q} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{\xi \in \Gamma} \sum_{\tilde\xi \geqslant \xi} w^q(\tilde\xi) \left(\sum_{\hat\xi \leqslant \xi' \leqslant \xi} u(\xi')|\tilde f(\xi')|\right)^q\right)^{1/q} \overset{(3.7)}{=} \beta^{-1}_{\mathcal{D},\Gamma}\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\hat\xi}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)}.$$

Лемма доказана. □

Следующий результат является следствием теоремы K и замечания 3.1.1.

Предложение 3.1.1. *Пусть* $\xi_* \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$, $\mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi_*) = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$, $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}'_{\xi_*}$, $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{\xi_j}$, $\Gamma_j = \Gamma \cap \mathbf{V}(\mathcal{D}_j)$. *Тогда*

$$\beta^{-1}_{\mathcal{D},\Gamma} = \left\| \left(u(\xi_*), \; \left\|(\beta_{\mathcal{D}_j,\Gamma_j})_{j=1}^m\right\|^{-1}_{l_p^m}\right) \right\|_{l^2_{p'}} = \left(u^{p'}(\xi_*) + \left(\sum_{j=1}^m \beta^p_{\mathcal{D}_j,\Gamma_j}\right)^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (3.8)$$

3.2 Оценка нормы весового оператора суммирования на дереве: случай $p < q$

В этом параграфе мы доказываем теоремы 4, 5, 6 и 7. Сначала получим некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево с конечным множеством вершин, $u, w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$.

Для $\xi_* \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ и $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}'_{\xi_*}$ положим $B_{\mathcal{D},\Gamma} = \beta^{-1}_{\mathcal{D},\Gamma}$ (см. определение 3.1.2 и (3.6)).

Лемма 3.2.1. *Для любых $1 < p < q < \infty$ существует $\sigma = \sigma(p, q) \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$ со следующим свойством: если*

$$u(\xi)\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)} \leqslant 1, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}), \tag{3.9}$$

$$\frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi'})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}} \leqslant \sigma, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}), \quad \xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi), \tag{3.10}$$

то для любых $\xi_* \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ и $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}'_{\xi_*}$

$$B_{\mathcal{D},\Gamma}\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} \underset{p,q}{\lesssim} 1. \tag{3.11}$$

Доказательство. Для каждого $t \in [1, \infty]$ положим

$$f(t) := \frac{\int\limits_0^t \sigma^{s/3}\, ds}{\int\limits_0^1 \sigma^{s/3}\, ds}. \tag{3.12}$$

Пусть $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}'_{\xi_*}$. Предположим, что ξ_* не является минимальной в $\mathcal{A}$. Пусть $\hat{\xi}$ — вершина, предшествующая ξ_*. Тогда $\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} \overset{(3.10)}{=} \sigma^t\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\hat{\xi}})}$, $t \geqslant 1$. Мы докажем, что существует $c = c(p, q) \geqslant 1$ такое, что

$$B_{\mathcal{D},\Gamma}\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} \leqslant c f^{\frac{1}{p'}}(t). \tag{3.13}$$

Если вершина ξ_* минимальна, то мы докажем, что существует $c = c(p, q) \geqslant 1$ такое, что

$$B_{\mathcal{D},\Gamma}\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} \leqslant c f^{\frac{1}{p'}}(\infty). \tag{3.14}$$

Мы предполагаем, что σ достаточно мало (в качестве σ и c соответственно мы берем $\sigma_4(p, q)$ и $c_0(p, q)$, которые будут определены позже). Тогда из (3.13) и (3.14) следует (3.11).

Пусть $\nu_\mathcal{D} = \max\{j \in \mathbb{Z}_+ : \ \mathbf{V}_j^{\mathcal{D}}(\xi_*) \neq \varnothing\}$. Мы докажем (3.13) и (3.14) индукцией по $\nu_\mathcal{D}$.

Если $\nu_\mathcal{D} = 0$, то $\mathcal{D} = \{\xi_*\}$, $\Gamma = \{\xi_*\}$, $B_{\mathcal{D},\Gamma} = u(\xi_*)$, $\mathcal{D}_\Gamma = \varnothing$, $\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma = \mathcal{A}_{\xi_*}$. Поэтому (3.13) и (3.14) следуют из (3.9) и из неравенства $f(t) \geqslant 1$, $t \geqslant 1$.

Пусть утверждение доказано для любого $\mathcal{D}$ такого, что $\nu_\mathcal{D} \leqslant \nu$. Докажем его для $\nu_\mathcal{D} = \nu + 1$.

Пусть $\mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi_*) = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{\xi_i}$, $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{\xi_i}$, $\Gamma_i = \mathbf{V}(\mathcal{D}_i) \cap \Gamma$, $\mathcal{G}_i = \mathcal{A}_i\setminus(\mathcal{D}_i)_{\Gamma_i}$. Тогда $\nu_{\mathcal{D}_i} \leqslant \nu_\mathcal{D} - 1 = \nu$,

$$\mathbf{V}(\mathcal{A}_{\xi_*}) = \{\xi_*\} \cup \mathbf{V}(\mathcal{A}_1) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(\mathcal{A}_m), \quad \mathbf{V}(\mathcal{D}) = \{\xi_*\} \cup \mathbf{V}(\mathcal{D}_1) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(\mathcal{D}_m),$$

$$\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} \overset{(3.7)}{=} \left(\sum_{i=1}^m \|w\|^q_{l_q(\mathcal{G}_i)}\right)^{1/q}. \qquad (3.15)$$

Положим $\alpha_i = \frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{G}_i)}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*})}}$. Тогда

$$\alpha_i = \sigma^{t_i}, \quad t_i \in [1, \infty], \quad \beta_{\mathcal{D}_i,\Gamma_i} \geqslant c^{-1} f^{-\frac{1}{p'}}(t_i)\|w\|_{l_q(\mathcal{G}_i)}. \qquad (3.16)$$

В самом деле, первое соотношение следует из (3.10). Если $\Gamma_i \neq \varnothing$, то $(\mathcal{D}_i, \Gamma_i) \in \mathcal{J}'_{\xi_i}$, и второе соотношение выполнено по предположению индукции. Если $\Gamma_i = \varnothing$, то $\mathcal{D}_i = \mathcal{A}_i$ (см. определение 3.1.2, свойство 3), $(\mathcal{D}_i)_{\Gamma_i} = \mathcal{A}_i$ и $\|w\|_{l_q(\mathcal{G}_i)} = 0$.

В силу (3.8),

$$B^{p'}_{\mathcal{D},\Gamma}\|w\|^{p'}_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} = u^{p'}(\xi_*)\|w\|^{p'}_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} + \left(\sum_{i=1}^m \beta^p_{\mathcal{D}_i,\Gamma_i}\right)^{-\frac{p'}{p}} \|w\|^{p'}_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} \overset{(3.16)}{\leqslant}$$

$$\leqslant u^{p'}(\xi_*)\|w\|^{p'}_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} + c^{p'}\left(\sum_{i=1}^m \|w\|^p_{l_q(\mathcal{G}_i)} f^{-\frac{p}{p'}}(t_i)\right)^{-\frac{p'}{p}} \|w\|^{p'}_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} \overset{(3.15)}{=}$$

$$= u^{p'}(\xi_*)\|w\|^{p'}_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*})} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^m \|w\|^q_{l_q(\mathcal{G}_i)}\right)^{\frac{p'}{q}}}{\|w\|^{p'}_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*})}} +$$

$$+ c^{p'}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^m \|w\|^q_{l_q(\mathcal{G}_i)}}{\|w\|^q_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*})}}\right)^{\frac{p'}{q}} \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^m \|w\|^p_{l_q(\mathcal{G}_i)} f^{-\frac{p}{p'}}(t_i)}{\|w\|^p_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*})}}\right)^{-\frac{p'}{p}} \overset{(3.9)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^q\right)^{\frac{p'}{q}} + c^{p'}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^q\right)^{\frac{p'}{q}} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^p f^{-\frac{p}{p'}}(t_i)\right)^{-\frac{p'}{p}},$$

т.е.

$$B^{p'}_{\mathcal{D},\Gamma}\|w\|^{p'}_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} \leqslant \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^q\right)^{\frac{p'}{q}} + c^{p'}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^q\right)^{\frac{p'}{q}} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^p f^{-\frac{p}{p'}}(t_i)\right)^{-\frac{p'}{p}} =: S. \qquad (3.17)$$

Пусть $t_0 = \min_{1\leqslant i\leqslant m} t_i$, $I_1 = \{i \in \{1, \dots, m\} : \ t_i = t_0\}$, $I_2 = \{1, \dots, m\}\setminus I_1$. Так как

$$\int\limits_0^s \sigma^{t/3}\, dt = \frac{3}{|\log\sigma|}(1 - \sigma^{s/3}), \qquad (3.18)$$

то для любого $1 \leqslant i \leqslant m$

$$\frac{f(t_i)}{f(t_0)} = \frac{1 - \sigma^{t_i/3}}{1 - \sigma^{t_0/3}} \leqslant 1 + \frac{\sigma^{1/3}}{1 - \sigma^{1/3}} \leqslant 1 + 2\sigma^{1/3}$$

при $\sigma \leqslant \frac{1}{8}$. Значит, $\left(\frac{f(t_i)}{f(t_0)}\right)^{-\frac{p}{p'}} \geqslant (1 + 2\sigma^{1/3})^{-\frac{p}{p'}} \geqslant 1 - \frac{2p}{p'}\sigma^{1/3}$. Тем самым,

$$S \leqslant \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^q\right)^{\frac{p'}{q}} + c^{p'}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^q\right)^{\frac{p'}{q}} \left(\sum_{i\in I_1} \alpha_i^p + \sum_{i\in I_2} \alpha_i^p \left(1 - \frac{2p}{p'}\sigma^{\frac{1}{3}}\right)\right)^{-\frac{p'}{p}} f(t_0) =: \tilde{S}. \qquad (3.19)$$

Теперь оценим $\tilde{S}$ при малых σ. Так как $p<q$, то найдется $\varepsilon_0=\varepsilon_0(p,\,q)\in\left(0,\,\frac{1}{3}\right)$ такое, что для любого $\varepsilon\in[0,\,\varepsilon_0]$

$$(1-\varepsilon)^{\frac{p}{q}}+\frac{\varepsilon^{\frac{p}{q}}}{2}\geqslant 1. \tag{3.20}$$

Пусть $\sigma\leqslant\min\left\{\frac{1}{8},\,\left(\frac{p'}{4p}\right)^3\right\}=:\sigma_1$. Положим $\beta=\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Тогда

$$\beta^q=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^q=\sum_{i=1}^{m}\frac{\|w\|^q_{l_q(\mathcal{G}_i)}}{\|w\|^q_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*})}}\overset{(3.15)}{=}\frac{\|w\|^q_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)}}{\|w\|^q_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*})}}\leqslant 1. \tag{3.21}$$

Докажем, что

1. если существует $i_*\in\{1,\,\ldots,\,m\}$ такое, что $\alpha_{i_*}>\beta(1-\varepsilon_0)^{1/q}$, то найдется $\sigma_2=\sigma_2(p)\in(0,\,\sigma_1)$ такое, что (3.13) и (3.14) выполнены для любых $\sigma\in(0,\,\sigma_2]$ и $c\geqslant 2$;

2. если $\alpha_i\leqslant\beta(1-\varepsilon_0)^{1/q}$ для любого $i\in\{1,\,\ldots,\,m\}$, то существуют $\sigma_4=\sigma_4(p,\,q)\in(0,\,\sigma_2)$ и $c_0(p,\,q)\geqslant 2$ такие, что (3.13) и (3.14) выполнены для любых $\sigma\in(0,\,\sigma_4]$ и $c\geqslant c_0(p,\,q)$.

Таким образом, достаточно взять $\sigma(p,\,q)=\sigma_4(p,\,q)$ и $c(p,\,q)=c_0(p,\,q)$.

Сначала рассмотрим случай 1; то есть мы предполагаем, что существует $i_*\in\{1,\,\ldots,\,m\}$ такое, что $\alpha_{i_*}=\beta(1-\varepsilon)^{1/q}$, $\sum\limits_{i\neq i_*}\alpha_i^q=\beta^q\varepsilon$, $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0$. Напомним, что $0<\varepsilon_0<\frac{1}{3}$, $\alpha_i=\sigma^{t_i}$ и для $i\in I_1$, $j\in I_2$ выполнено неравенство $\alpha_i>\alpha_j$. Значит, $I_1=\{i_*\}$ и

$$\sum_{i\in I_1}\alpha_i^p+\sum_{i\in I_2}\alpha_i^p\left(1-\frac{2p}{p'}\sigma^{\frac{1}{3}}\right)=\alpha_{i_*}^p+\sum_{i\neq i_*}\alpha_i^p\left(1-\frac{2p}{p'}\sigma^{\frac{1}{3}}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\alpha_{i_*}^p+\left(\sum_{i\neq i_*}\alpha_i^q\right)^{\frac{p}{q}}\left(1-\frac{2p}{p'}\sigma^{\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=\beta^p(1-\varepsilon)^{\frac{p}{q}}+\beta^p\varepsilon^{\frac{p}{q}}\left(1-\frac{2p}{p'}\sigma^{\frac{1}{3}}\right)\geqslant\beta^p\left((1-\varepsilon)^{\frac{p}{q}}+\frac{\varepsilon^{\frac{p}{q}}}{2}\right)\overset{(3.20)}{\geqslant}\beta^p.$$

Таким образом,

$$\tilde{S}\leqslant\beta^{p'}+c^{p'}f(t_0). \tag{3.22}$$

Из (3.21) следует, что

$$\beta=\sigma^{t_*},\quad t_*\geqslant 0. \tag{3.23}$$

Докажем, что существует $\sigma_2=\sigma_2(p)\in(0,\,\sigma_1)$ такое, что для $0<\sigma\leqslant\sigma_2$, $c\geqslant 2$

$$\beta^{p'}+c^{p'}f(t_0)\leqslant c^{p'}f(t_*+1), \tag{3.24}$$

т.е.,

$$\sigma^{p't_*}\leqslant c^{p'}(f(t_*+1)-f(t_0)). \tag{3.25}$$

В самом деле, поскольку $I_1 = \{i_*\}$, $\sigma^{t_0} = \alpha_{i_*} = \beta(1-\varepsilon)^{\frac{1}{q}} = \sigma^{t_*}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{q}}$. Пусть $t_0 = t_* + \kappa$. Тогда $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{q}} = \sigma^{\kappa}$. Так как $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \geqslant \frac{2}{3}$, то $\kappa \leqslant \frac{1}{4}$ при малых σ. Значит, $t_0 \leqslant t_* + \frac{1}{4}$ и $t_* \geqslant t_0 - \frac{1}{4} \geqslant \frac{3}{4}$. Поэтому

$$f(t_*+1) - f(t_0) \geqslant f(t_*+1) - f\left(t_* + \frac{1}{4}\right) \overset{(3.12),(3.18)}{=} \frac{1-\sigma^{\frac{1}{4}}}{1-\sigma^{\frac{1}{3}}}\sigma^{\frac{t_*}{3}+\frac{1}{12}}.$$

Если σ достаточно мало, то $c^{p'}\frac{1-\sigma^{1/4}}{1-\sigma^{1/3}} \geqslant 1$. Таким образом, для того, чтобы доказать (3.25), достаточно проверить, что $p't_* \geqslant \frac{t_*}{3} + \frac{1}{12}$. Последнее неравенство следует из неравенств $t_* \geqslant \frac{3}{4}$ и $\frac{3}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.

Соотношение (3.24) доказано. Если вершина ξ_* минимальна, то из (3.17), (3.19), (3.22) и (3.24) следует, что $B_{\mathcal{D},\Gamma}^{p'}\|w\|^{p'}_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} \leqslant c^{p'}f(t_*+1) \leqslant c^{p'}f(\infty)$, откуда получаем (3.14). Пусть вершина ξ_* не минимальна. Обозначим через $\hat{\xi}$ вершину, предшествующую ξ_*. Тогда $\frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\hat{\xi}})}} \leqslant \sigma$ by (3.10). Поэтому

$$\frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\hat{\xi}})}} \overset{(3.15)}{=} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^m \|w\|^q_{l_q(\mathcal{G}_i)}\right)^{\frac{1}{q}}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*})}} \cdot \frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\hat{\xi}})}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \sigma \overset{(3.23)}{=} \sigma^{t_*+1},$$

т.е. $\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} = \|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\hat{\xi}})}\sigma^t$, $t \geqslant t_*+1$. Отсюда и из (3.17), (3.19), (3.22) и (3.24) следует, что $B_{\mathcal{D},\Gamma}^{p'}\|w\|^{p'}_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_*}\setminus\mathcal{D}_\Gamma)} \leqslant c^{p'}f(t_*+1) \leqslant c^{p'}f(t)$, откуда получаем (3.13).

Рассмотрим случай 2; т.е. мы теперь предполагаем, что неравенство $\alpha_i \leqslant \beta(1-\varepsilon_0)^{\frac{1}{q}}$ выполнено для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$. Покажем, что существует $a = a(p, q) < 1$ такое, что

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^p\right)^{-\frac{1}{p}} \leqslant a. \tag{3.26}$$

В самом деле, рассмотрим задачу

$$\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^p \to \min, \quad \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^q = \beta^q, \quad |\alpha_i|^q \leqslant \beta^q(1-\varepsilon_0), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

В силу компактности, существует точка минимума, которую обозначим через $(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_m)$. Если $|\hat{\alpha}_i|^q < \beta^q(1-\varepsilon_0)$ для любого $i = \{1, \ldots, m\}$, то, применяя принцип Лагранжа, получим, что $|\hat{\alpha}_i| = \beta k^{-\frac{1}{q}}$, $i \in I$, $\hat{\alpha}_i = 0$, $i \notin I$, где $I \subset \{1, \ldots, m\}$, $\operatorname{card} I = k$, $k \geqslant 2$. Тем самым,

$$\left(\sum_{i=1}^m |\hat{\alpha}_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^m |\hat{\alpha}_i|^p\right)^{-\frac{1}{p}} = k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leqslant 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Пусть $|\hat{\alpha}_{i_*}|^q = \beta^q(1-\varepsilon_0)$ для некоторого $i_* \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда

$$\sum_{i\ne i_*} |\hat{\alpha}_i|^p + |\hat{\alpha}_{i_*}|^p \geqslant \left(\sum_{i\ne i_*} |\hat{\alpha}_i|^q\right)^{\frac{p}{q}} + |\hat{\alpha}_{i_*}|^p = \beta^p\varepsilon_0^{\frac{p}{q}} + \beta^p(1-\varepsilon_0)^{\frac{p}{q}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^m |\hat{\alpha}_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^m |\hat{\alpha}_i|^p\right)^{-\frac{1}{p}} \leqslant \left(\varepsilon_0^{\frac{p}{q}} + (1-\varepsilon_0)^{\frac{p}{q}}\right)^{-\frac{1}{p}} \overset{(3.20)}{<} 1.$$

Неравенство (3.26) доказано. Существуют $\sigma_3 = \sigma_3(p, q) \in (0, \sigma_2)$ и $\tilde{a} = \tilde{a}(p, q) < 1$ такие, что для любого $\sigma \in (0, \sigma_3)$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^q\right)^{\frac{p'}{q}} \left(\sum_{i\in I_1} \alpha_i^p + \sum_{i\in I_2} \alpha_i^p \left(1 - \frac{2p}{p'}\sigma^{\frac{1}{3}}\right)\right)^{-\frac{p'}{p}} \leqslant \tilde{a}^{p'}.$$

Поэтому

$$\tilde{S} \leqslant \beta^{p'} + c^{p'}\tilde{a}^{p'} f(t_0) \overset{(3.18),(3.21)}{\leqslant} 1 + c^{p'}\tilde{a}^{p'}\frac{1}{1-\sigma^{\frac{1}{3}}}.$$

Далее, найдутся $\sigma_4 = \sigma_4(p, q) \in (0, \sigma_3)$ и $a_* = a_*(p, q) < 1$ такие, что при $\sigma \in (0, \sigma_4]$ выполнено неравенство $\tilde{a}^{p'}\frac{1}{1-\sigma^{\frac{1}{3}}} \leqslant a_*^{p'}$. Значит, существует $c_0(p, q) \geqslant 2$ такое, что $\tilde{S} \leqslant 1 + c^{p'}a_*^{p'} \leqslant c^{p'}$ при $c \geqslant c_0(p, q)$. В силу (3.17) и (3.19), мы получаем (3.13) и (3.14). $\square$

Следствие 3.2.1. *Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево с конечным множеством вершин, u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$. Предположим, что $1 < p < q < \infty$ и (3.10) выполнено с $\sigma = \sigma(p, q)$. Тогда*

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{p,q}{\lesssim} \sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A})} u(\xi)\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$ такие, что $\sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A})} u(\xi)\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)} = 1$. В этом случае утверждение следует из леммы 3.1.1 и леммы 3.2.1. $\square$

Замечание 3.2.1. Из доказательства леммы 3.2.1 следует, что $\sigma = \sigma(p, q)$ определяется системой неравенств (27), (28), (29), где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p, q) \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ таково, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнено (3.20).

Следующая лемма дает оценку снизу для нормы оператора.

Лемма 3.2.2. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\xi_* \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$. Тогда*

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\xi_*},u,w} \underset{p,q}{\gtrsim} \sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_{\xi_*})} \left(\sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi} u^{p'}(\xi')\right)^{\frac{1}{p'}} \|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}.$$

Доказательство. Можно считать, что $\mathcal{A}$ имеет конечное множество вершин. Пусть $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}_{\xi_*})$. Определим дерево $\mathcal{D}$ равенством $\mathbf{V}(\mathcal{D}) = (\mathbf{V}(\mathcal{A}_{\xi_*})\backslash\mathbf{V}(\mathcal{A}_\xi)) \cup \{\xi\}$ и положим $\Gamma = \{\xi\}$. Тогда $(\mathcal{D}, \Gamma) \in \mathcal{J}'_{\xi_*}$, $\mathbf{V}(\mathcal{D}_\Gamma) = \mathbf{V}(\mathcal{A}_{\xi_*})\backslash\mathbf{V}(\mathcal{A}_\xi)$, $\mathcal{A}_{\xi_*}\backslash\mathcal{D}_\Gamma = \mathcal{A}_\xi$. По лемме 3.1.1,

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\xi_*},u,w} \underset{p,q}{\gtrsim} \beta^{-1}_{\mathcal{D},\Gamma}\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}.$$

Имеем

$$\beta_{\mathcal{D},\Gamma} = \inf\left\{\|f\|_{l_p(\mathcal{D})} : \sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi} u(\xi')|f(\xi')| = 1\right\} =$$

$$= \inf\left\{\left(\sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi} |f(\xi')|^p\right)^{1/p} : \sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi} u(\xi')|f(\xi')| = 1\right\} = \left(\sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi} u^{p'}(\xi')\right)^{-1/p'}.$$

Лемма доказана. $\square$

Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево, u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to [0, \infty)$, $\xi_* \in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j_0}(\xi_0)$, $m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$, $J = \{j_k\}_{0\leqslant k<m+1}$, $j_k < j_{k+1}$, $0 \leqslant k < m$. Для $0 \leqslant k < m+1$ обозначим через $\mathcal{G}_k$ максимальный подграф в $\mathcal{A}$ на множестве вершин $\cup_{j_k\leqslant j<j_{k+1}} \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j-j_0}(\xi_*)$, а через

$\{\mathcal{A}_{k,i}\}_{i\in I_k}$ — множество его связных компонент. Пусть $\xi_{k,i}$ минимальная вершина в дереве $\mathcal{A}_{k,i}$. Определим дерево $\mathcal{A}_J$ равенством

$$\mathbf{V}(\mathcal{A}_J) = \{\xi_{k,i}\}_{0\leqslant k<m+1,\, i\in I_k}, \quad \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}_J}(\xi_{k,i}) = \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j_{k+1}-j_k}(\xi_{k,i}), \quad 0\leqslant k<m. \tag{3.27}$$

Для $0\leqslant k<m+1$, $i\in I_k$ положим

$$u_J(\xi_{k,i}) = \|u\|_{l_{p'}(\mathcal{A}_{k,i})}, \quad w_J(\xi_{k,i}) = \|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{k,i})}. \tag{3.28}$$

Лемма 3.2.3. *Выполнено неравенство* $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_{\xi_*},u,w} \leqslant \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_J,u_J,w_J}$.

Доказательство. Пусть $f : \mathbf{V}(\mathcal{A}_{\xi_*}) \to \mathbb{R}_+$, $\|f\|_{l_p(\mathcal{A}_{\xi_*})} = 1$. Положим $f_J(\xi_{k,i}) = \|f\|_{l_p(\mathcal{A}_{k,i})}$, $0\leqslant k<m+1$, $i\in I_k$. Тогда $\|f_J\|_{l_p(\mathcal{A}_J)} = 1$.

Пусть $\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_{k,i})$. Тогда для любого $0\leqslant l\leqslant k$ существует единственное $i_l\in I_l$ такое, что $\xi_{l,i_l}\leqslant\xi$. Имеем $\xi_{0,i_0}<\xi_{1,i_1}<\dots<\xi_{k,i_k}\leqslant\xi$ и $\xi_{l+1,i_{l+1}}\in\mathbf{V}_1^{\mathcal{A}_J}(\xi_{l,i_l})$, $0\leqslant l<k$. Отсюда и из неравенств Гельдера следует, что

$$\sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi} u(\xi')f(\xi') \leqslant \sum_{l=0}^k \sum_{\xi'\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_{l,i_l})} u(\xi')f(\xi') \overset{(3.28)}{\leqslant} \sum_{l=0}^k u_J(\xi_{l,i_l})f_J(\xi_{l,i_l}) =$$
$$= \sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_J),\, \zeta'\leqslant\xi_{k,i}} u_J(\zeta')f_J(\zeta').$$

Значит,

$$\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_{\xi_*})} w^q(\xi)\left(\sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi} u(\xi')f(\xi')\right)^q =$$
$$= \sum_{k=0}^m\sum_{i\in I_k}\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_{k,i})} w^q(\xi)\left(\sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi} u(\xi')f(\xi')\right)^q \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^m\sum_{i\in I_k}\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_{k,i})} w^q(\xi)\left(\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_J),\, \zeta'\leqslant\xi_{k,i}} u_J(\zeta')f_J(\zeta')\right)^q \overset{(3.28)}{=}$$
$$= \sum_{k=0}^m\sum_{i\in I_k} w_J^q(\xi_{k,i})\left(\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_J),\, \zeta'\leqslant\xi_{k,i}} u_J(\zeta')f_J(\zeta')\right)^q \overset{(3.27)}{=}$$
$$= \sum_{\zeta\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_J)} w_J^q(\zeta)\left(\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_J),\, \zeta'\leqslant\zeta} u_J(\zeta')f_J(\zeta')\right)^q \leqslant \left[\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_J,u_J,w_J}\right]^q.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 4. Напомним, что ξ_0 — минимальная вершина $\mathcal{A}$. Положим

$$\hat{\mathfrak{Z}} = (K,\, \lambda,\, l_0,\, p,\, q).$$

Пусть $\sigma=\sigma(p,\,q)\in(0,\,1/8)$ такое, как в лемме 3.2.1. Выберем $t_*=t_*(\hat{\mathfrak{Z}})\in\mathbb{N}$ так, чтобы $\lambda^{t_*}\leqslant\sigma$. Положим $l_*=l_0t_*$. Для $m\in\mathbb{N}$ определим функцию $u_m:\mathbf{V}(\mathcal{A})\to\mathbb{R}_+$ равенством

$$u_m(\xi) = \begin{cases} u(\xi), & \xi\in\mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0), \quad j\leqslant l_*m, \\ 0, & \xi\in\mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0), \quad j>l_*m. \end{cases}$$

Докажем, что

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u_m,w} \underset{\hat{\mathfrak{Z}}}{\lesssim} \sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A})} u(\xi)\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}. \tag{3.29}$$

Отсюда и из теоремы Б. Леви получим требуемую оценку.

Для $k\in\mathbb{Z}_+$ положим $j_k=l_*k$. Обозначим $J=\{j_k\}_{0\leqslant k\leqslant m}$. Определим дерево $\mathcal{A}_J$ формулой (3.27), а функции $(u_m)_J$, w_J — формулой (3.28). По лемме 3.2.3,

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u_m,w}\leqslant \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_J,(u_m)_J,w_J}. \tag{3.30}$$

Пусть $0\leqslant k\leqslant m-1$, $\xi_{k,i}\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_J)$, $\xi_{k+1,i'}\in\mathbf{V}_1^{\mathcal{A}_J}(\xi_{k,i})$. Тогда $\xi_{k+1,i'}\overset{(3.27)}{\in}\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{l_*}(\xi_{k,i})$. Пусть $\eta_j\in\mathbf{V}(\mathcal{A})$, $0\leqslant j\leqslant t_*$, $\eta_0=\xi_{k,i}$, $\eta_{t_*}=\xi_{k+1,i'}$, $\eta_j\in\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{l_0}(\eta_{j-1})$, $1\leqslant j\leqslant t_*$. Тогда

$$\frac{\|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi_{k+1,i'}})}}{\|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi_{k,i}})}}=\frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_{k+1,i'}})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_{k,i}})}}=\prod_{j=1}^{t_*}\frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\eta_j})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\eta_{j-1}})}}\overset{(19)}{\leqslant}\lambda^{t_*}\leqslant\sigma.$$

По следствию 3.2.1,

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_J,(u_m)_J,w_J}\underset{p,q}{\lesssim}\sup\nolimits_{\zeta\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_J)}(u_m)_J(\zeta)\|w\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_\zeta)}\overset{(3.27),(3.28)}{=}\\ =\sup\nolimits_{0\leqslant k\leqslant m,\, i\in I_k}\|u_m\|_{l_{p'}(\mathcal{A}_{k,i})}\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_{k,i}})}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Если $k<m$, то в силу (18) получаем $\operatorname{card}\mathbf{V}(\mathcal{A}_{k,i})\underset{\hat{\mathfrak{Z}}}{\lesssim}1$; отсюда и из первого соотношения (19) следует, что $\|u_m\|_{l_{p'}(\mathcal{A}_{k,i})}\underset{\hat{\mathfrak{Z}}}{\lesssim}u(\xi_{k,i})$. Если $k=m$, то $\|u_m\|_{l_{p'}(\mathcal{A}_{k,i})}=u(\xi_{k,i})$. В силу (3.30) и (3.31), получаем (3.29).

Оценка снизу следует из 3.2.2. □

Рассмотрим примеры 1 и 2.

Лемма 3.2.4. *Пусть* $\Lambda_*:(0,\infty)\to(0,\infty)$ — *абсолютно непрерывная функция такая, что*

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y\Lambda_*'(y)}{\Lambda_*(y)}=0. \tag{3.32}$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$

$$t^{-\varepsilon}\underset{\varepsilon,\Lambda_*}{\lesssim}\frac{\Lambda_*(ty)}{\Lambda_*(y)}\underset{\varepsilon,\Lambda_*}{\lesssim}t^{\varepsilon},\quad 1\leqslant y<\infty,\ \ 1\leqslant t<\infty. \tag{3.33}$$

Доказательство. Докажем оценку сверху (оценка снизу доказывается аналогично). Из (3.32) следует, что найдется такое y_ε, что функция $y^{-\varepsilon}\Lambda_*(y)$ убывает на $[y_\varepsilon,\infty)$. Значит, если $y\geqslant y_\varepsilon$, $t\geqslant 1$, то $\frac{\Lambda_*(ty)}{\Lambda_*(y)}=t^\varepsilon\frac{(ty)^{-\varepsilon}\Lambda_*(ty)}{y^{-\varepsilon}\Lambda_*(y)}\leqslant t^\varepsilon$.

Так как функция Λ_* непрерывна, то найдется такое $C_\varepsilon>0$, что $\frac{\Lambda_*(x)}{\Lambda_*(y)}\leqslant C_\varepsilon$ при $x,\,y\in[1,\,y_\varepsilon]$.

Остается рассмотреть случай $y\in[1,\,y_\varepsilon]$, $ty>y_\varepsilon$. Имеем

$$\frac{\Lambda_*(ty)}{\Lambda_*(y)}\leqslant C_\varepsilon\frac{\Lambda_*(ty)}{\Lambda_*(y_\varepsilon)}\leqslant C_\varepsilon\left(\frac{ty}{y_\varepsilon}\right)^\varepsilon\leqslant C_\varepsilon t^\varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5. Пусть $\xi\in\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j-j_0}(\xi_*)$. Тогда

$$\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}=\left(\sum_{j'\geqslant j}w^q_{j'}\operatorname{card}\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j'-j}(\xi)\right)^{\frac1q}\underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(20),(21)}{\asymp}}$$

$$\asymp \left(\sum_{j'\geqslant j} 2^{-\theta sj'}\Psi_w^q(2^{sj'})\cdot 2^{\theta s(j'-j)}\frac{\Lambda_*(2^{sj'})}{\Lambda_*(2^{sj})}\right)^{\frac{1}{q}} = 2^{-\frac{\theta sj}{q}}\left(\sum_{j'\geqslant j}\Psi_w^q(2^{sj'})\frac{\Lambda_*(2^{sj'})}{\Lambda_*(2^{sj})}\right)^{\frac{1}{q}},$$

т.е.

$$\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{-\frac{\theta sj}{q}}\left(\sum_{j'\geqslant j}\Psi_w^q(2^{sj'})\frac{\Lambda_*(2^{sj'})}{\Lambda_*(2^{sj})}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.34}$$

Для любого $l_0\in\mathbb{N}$

$$\sum_{j'\geqslant j+l_0}\frac{\Lambda_*(2^{sj'})}{\Lambda_*(2^{s(j+l_0)})}\Psi_w^q(2^{sj'}) \leqslant \frac{\Lambda_*(2^{sj})}{\Lambda_*(2^{s(j+l_0)})}\sum_{j'\geqslant j}\frac{\Lambda_*(2^{sj'})}{\Lambda_*(2^{sj})}\Psi_w^q(2^{sj'}).$$

Поэтому для любого $\xi\in\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j-j_0}(\xi_*)$, $\xi'\in\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{l_0}(\xi)$

$$\frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi'})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}} \overset{(3.34)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}} 2^{-\frac{\theta sl_0}{q}}\frac{\Lambda_*^{\frac{1}{q}}(2^{sj})}{\Lambda_*^{\frac{1}{q}}(2^{s(j+l_0)})} \overset{(3.33)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}} 2^{-\frac{\theta sl_0}{2q}}.$$

Значит, при достаточно большом $l_0=l_0(\mathfrak{Z})$ получаем $\frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi'})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}}\leqslant\frac{1}{2}$, $\xi'\in\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{l_0}(\xi)$. Первое соотношение в (19) и неравенство (18) следуют из (20), (21) и (3.33).

Для любого $\xi\in\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j-j_0}(\xi_*)$

$$\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}u(\xi) \overset{(21),(3.34)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}} 2^{-\frac{\theta sj}{q}}\left(\sum_{j'\geqslant j}\Psi_w^q(2^{sj'})\frac{\Lambda_*(2^{sj'})}{\Lambda_*(2^{sj})}\right)^{\frac{1}{q}}\cdot 2^{\frac{\theta sj}{q}}\Psi_u(2^{sj}) =$$

$$= \left(\sum_{j'\geqslant j}\Psi_w^q(2^{sj'})\frac{\Lambda_*(2^{sj'})}{\Lambda_*(2^{sj})}\right)^{\frac{1}{q}}\Psi_u(2^{sj}).$$

Остается взять супремум по $j\geqslant j_0$ и применить теорему 4. $\square$

Доказательство теоремы 6. Сначала докажем оценку сверху. Применим лемму 3.2.3. Пусть $j_k=2^{k_0+k}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $J=\{j_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$. Определим дерево $\mathcal{A}_J$ и веса w_J, u_J формулами (3.27), (3.28). Так как

$$\operatorname{card}\{\xi\in\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j-j_k}(\xi_{k,i})\} \overset{(23),(3.33)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}} 1, \quad j_k\leqslant j<j_{k+1},$$

то $\operatorname{card}\mathbf{V}(\mathcal{A}_{k,i}) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{k_0+k}$. Значит, в силу (24), (3.28) и (3.33),

$$(u_J)(\xi_{k,i})\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}2^{\left(-\alpha_u+\frac{1}{p'}\right)(k_0+k)}\rho_u(2^{k_0+k}), \quad (w_J)(\xi_{k,i})\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}2^{\left(-\alpha_w+\frac{1}{q}\right)(k_0+k)}\rho_w(2^{k_0+k}), \tag{3.35}$$

$$\operatorname{card}\mathbf{V}^{\mathcal{A}_J}_{k'-k}(\xi_{k,i}) = \operatorname{card}\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j_{k'}-j_k}(\xi_{k,i}) \overset{(23)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}} 2^{\gamma_*(k'-k)}\frac{\tau_*(2^{k_0+k'})}{\tau_*(2^{k_0+k})}, \quad k'\geqslant k.$$

В случае 1 теоремы 6 получаем

$$\|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi_{k,i}})} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{\left(-\alpha_w+\frac{1}{q}\right)(k_0+k)}\rho_w(2^{k_0+k}),$$

$$\begin{gathered}\sup_{k\in\mathbb{Z}_+,\,i\in I_k}u_J(\xi_{k,i})\|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi_{k,i}})} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} \sup_{k\in\mathbb{N},\,i\in I_k}u_J(\xi_{k,i})\|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi_{k,i}})} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} \\ \asymp \sup_{l\geqslant k_0}2^{\left(-\alpha+\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}\right)l}\rho(2^l) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} M_{j_0}.\end{gathered} \tag{3.36}$$

В случае 2 имеем

$$u_J(\xi_{k,i}) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{\frac{\gamma_*(k_0+k)}{q}} \rho_u(2^{k_0+k}), \quad w_J(\xi_{k,i}) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{-\frac{\gamma_*(k_0+k)}{q}} \rho_w(2^{k_0+k}).$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как в примере 1. В частности,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+,\, i\in I_k} u_J(\xi_{k,i}) \|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi_{k,i}})} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} \sup_{k\in\mathbb{N},\, i\in I_k} u_J(\xi_{k,i}) \|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi_{k,i}})} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} \tilde{M}_{k_0}. \qquad (3.37)$$

Для доказательства оценки снизу заметим, что

$$\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi_{k,i}})} = \|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi_{k,i}})}, \quad \left(\sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi_{k,i}} u^{p'}(\xi')\right)^{\frac{1}{p'}} \overset{(24),(3.35)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\gtrsim}} u_J(\xi_{k,i})$$

при $k \geqslant 1$ и применим лемму 3.2.2 с (3.36) и (3.37). $\square$

Доказательство теоремы 7. Сначала заметим, что

$$\sup_{k\geqslant 0} \left(\sum_{j_k\leqslant i\leqslant j_{k+1}-1} u_i^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=j_{k+1}-1}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_{k+1}-1)}\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{j\in\mathbb{Z}_+} \left(\sum_{0\leqslant i\leqslant j} u_i^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j)}\right)^{1/q}.$$

Докажем оценку сверху. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и положим

$$\tilde{u}(\xi) = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0), \quad 0 \leqslant j \leqslant j_m, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$J = \{j_k\}_{k=0}^m$. По теореме Б. Леви, достаточно доказать, что

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},\tilde{u},w} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \sup_{k\geqslant 0} \left(\sum_{j_k\leqslant i\leqslant j_{k+1}-1} u_i^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=j_{k+1}-1}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_{k+1}-1)}\right)^{1/q}. \qquad (3.38)$$

Определим дерево $(\mathcal{A}_J, \xi_0)$ и весовые функции $\tilde{u}_J$, w_J : $\mathbf{V}(\mathcal{A}_J) \to (0, \infty)$ соотношениями (3.27), (3.28). Тогда $\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{A}_J) = \mathbf{V}_m^{\mathcal{A}_J}(\xi_0)$. По лемме 3.2.3, $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},\tilde{u},w} \leqslant \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_J,\tilde{u}_J,w_J}$.

Докажем, что $\mathcal{A}_J$, $\tilde{u}_J$ и w_J удовлетворяют условиям следствия 3.2.1. В самом деле, пусть $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $\xi \in \mathbf{V}_k^{\mathcal{A}_J}(\xi_0)$, $\xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}_J}(\xi)$. Тогда $\xi \in \mathbf{V}_{j_k}^{\mathcal{A}}(\xi_0)$, $\xi' \in \mathbf{V}_{j_{k+1}}^{\mathcal{A}}(\xi_0)$,

$$\|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi'})} \overset{(26),(3.27),(3.28)}{=} \left(\sum_{i=j_{k+1}}^{\infty} w_i^q \cdot \operatorname{card} \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{i-j_{k+1}}(\xi')\right)^{1/q} \overset{(25)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \left(C_* \sum_{i=j_{k+1}}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_{k+1})}\right)^{1/q},$$

$$\|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi})} \overset{(26),(3.27),(3.28)}{=} \left(\sum_{i=j_k}^{\infty} w_i^q \cdot \operatorname{card} \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{i-j_k}(\xi)\right)^{1/q} \overset{(25)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \left(C_*^{-1} \sum_{i=j_k}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_k)}\right)^{1/q}.$$

Значит,
$$\frac{\|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi'})}}{\|w_J\|_{l_q((\mathcal{A}_J)_{\xi})}} \leqslant \left(\frac{C_* \sum\limits_{i=j_{k+1}}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_{k+1})}}{C_*^{-1} \sum\limits_{i=j_k}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_k)}}\right)^{\frac{1}{q}} \overset{(30)}{\leqslant} \sigma(p,\, q),$$
т.е. (3.10) выполнено для $\mathcal{A}_J$ и w_J.

По следствию 3.2.1 и замечанию 3.2.1, мы получаем
$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A}_J,\tilde{u}_J,w_J} \underset{p,q}{\lesssim} \sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A}_J)} \tilde{u}_J(\xi)\|w_J\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}.$$

Если $\xi \in \mathbf{V}_k^{\mathcal{A}_J}(\xi_0)$, то
$$\|w_J\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)} \overset{(25),(26)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}} \left(\sum_{i=j_k}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_k)}\right)^{1/q} \overset{(30)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}} \left(\sum_{i=j_{k+1}-1}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_{k+1}-1)}\right)^{1/q},$$
$$\tilde{u}_J(\xi) \overset{(26),(3.28)}{=} \left(\sum_{j_k\leqslant i\leqslant j_{k+1}-1} \tilde{u}_i^{p'} \cdot \operatorname{card} \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{i-j_k}(\xi)\right)^{1/p'} \overset{(25)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}}$$
$$\asymp \left(\sum_{j_k\leqslant i\leqslant j_{k+1}-1} \tilde{u}_i^{p'} \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j_k)}\right)^{1/p'} \overset{(31)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}} \left(\sum_{j_k\leqslant i\leqslant j_{k+1}-1} u_i^{p'}\right)^{1/p'},$$
откуда следует (3.38).

Докажем оценку снизу. По лемме 3.2.2,
$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{p,q}{\gtrsim} \sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A})} \left(\sum_{\xi_0\leqslant\xi'\leqslant\xi} u^{p'}(\xi')\right)^{\frac{1}{p'}} \|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)} \overset{(25),(26)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\gtrsim}}$$
$$\gtrsim \sup_{j\in\mathbb{Z}_+} \left(\sum_{0\leqslant i\leqslant j} u_i^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} w_i^q \cdot 2^{\psi(i)-\psi(j)}\right)^{1/q}.$$
Теорема доказана. □

3.3 Оценка нормы весового оператора суммирования на дереве: случай $p \geqslant q$

Пусть выполнены условия теоремы 8. Сначала докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Напомним обозначение (1.1). Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$, ..., $\mathcal{T}_k$ — деревья, не имеющие общих вершин, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, $\eta_j \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_j)$, $j = 1, \ldots, k$. Через
$$\mathbf{J}(\mathcal{T},\, \mathcal{T}_1,\, \ldots,\, \mathcal{T}_k; \xi_1,\, \eta_1,\, \ldots,\, \xi_k,\, \eta_k)$$
обозначим дерево, получающееся из $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$, ..., $\mathcal{T}_k$ соединением ξ_j и η_j ребром для каждого $j = 1, \ldots, k$.

Определение 3.3.1. Пусть $(\mathcal{D}, \xi_0)$ — дерево, $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{D})\backslash\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})$, $n \in \mathbb{N}$, $T = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — разбиение $\mathbf{V}_1^{\mathcal{D}}(\xi)$ на непустые подмножества, $A_j = \{\xi_{j,i}\}_{i=1}^{k_j}$. Для $1 \leqslant j \leqslant n$ определим деревья $(\tilde{\mathcal{D}}_j, \eta_j)$ формулой
$$\tilde{\mathcal{D}}_j := \mathbf{J}(\{\eta_j\},\, \mathcal{D}_{\xi_{j,1}},\, \ldots, \mathcal{D}_{\xi_{j,k_j}};\, \eta_j,\, \xi_{j,1},\, \ldots,\, \eta_j,\, \xi_{j,k_j}).$$
Определим граф $G_{\xi,T}(\mathcal{D})$ следующим образом.

1. Пусть $\xi = \xi_0$. Через $G_{\xi,T}(\mathcal{D})$ обозначим граф, являющийся дизъюнктным объединением деревьев $(\tilde{\mathcal{D}}_j, \eta_j)$.

2. Пусть $\xi > \xi_0$, η — вершина, предшествующая ξ. Положим
$$G_{\xi,T}(\mathcal{D}) = \mathbf{J}(\mathcal{D}\backslash\mathcal{D}_\xi, \tilde{\mathcal{D}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{D}}_n; \eta, \eta_1, \ldots, \eta, \eta_n)$$
и рассмотрим ξ_0 как корень дерева $G_{\xi,T}(\mathcal{D})$.

Заметим, что
$$\mathbf{V}(G_{\xi,T}(\mathcal{D})) = (\mathbf{V}(\mathcal{D})\backslash\mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi)) \cup \{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \cup \left(\cup_{j=1}^n \cup_{i=1}^{k_j} \mathbf{V}(\mathcal{D}_{\xi_{j,i}})\right).$$

Пример 7. *Пусть* $(\mathcal{D}, \xi_0)$ *определено следующим образом:* $\mathbf{V}_1^{\mathcal{D}}(\xi_0) = \{\xi_1, \xi_2\}$, $\mathbf{V}_1^{\mathcal{D}}(\xi_1) = \{\xi_3, \xi_4, \xi_5\}$, $\mathbf{V}_1^{\mathcal{D}}(\xi_2) = \{\xi_6, \xi_7\}$, $\mathbf{V}_1^{\mathcal{D}}(\xi_4) = \{\xi_8, \xi_9\}$. *Пусть* $\xi = \xi_1$, $T = \{A_1, A_2\}$, $A_1 = \{\xi_3, \xi_4\}$, $A_2 = \{\xi_5\}$. *Тогда* $G_{\xi,T}(\mathcal{D})$ *является деревом с корнем в вершине* ξ_0 *и с множеством вершин* $\{\xi_0, \eta_1, \eta_2, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_9\}$. *При этом,* $\mathbf{V}_1^{G_{\xi,T}(\mathcal{D})}(\xi_0) = \{\eta_1, \eta_2, \xi_2\}$, $\mathbf{V}_1^{G_{\xi,T}(\mathcal{D})}(\eta_1) = \{\xi_3, \xi_4\}$, $\mathbf{V}_1^{G_{\xi,T}(\mathcal{D})}(\eta_2) = \{\xi_5\}$, $\mathbf{V}_1^{G_{\xi,T}(\mathcal{D})}(\xi_2) = \{\xi_6, \xi_7\}$, $\mathbf{V}_1^{G_{\xi,T}(\mathcal{D})}(\xi_4) = \{\xi_8, \xi_9\}$.

Определение 3.3.2. Пусть $(\mathcal{D}, \xi_0)$, $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{D})$ и T такие, как в определении 3.3.1. Пусть $\overline{u}, \overline{w} : \mathbf{V}(\mathcal{D}) \to (0, \infty)$. Определим веса $\overline{u}_{\xi,T}$ и $\overline{w}_{\xi,T}$ на графе $G_{\xi,T}(\mathcal{D})$ следующим образом. Если $\zeta \in \mathbf{V}(\mathcal{D})\backslash\mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi)$ или $\zeta \in \cup_{j=1}^n \cup_{i=1}^{k_j} \mathbf{V}(\mathcal{D}_{\xi_{j,i}})$, то полагаем $\overline{u}_{\xi,T}(\zeta) = \overline{u}(\zeta)$, $\overline{w}_{\xi,T}(\zeta) = \overline{w}(\zeta)$; если $\zeta = \eta_j$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$, то положим
$$\overline{u}_{\xi,T}(\eta_j) = n^{\frac{1}{p}}\overline{u}(\xi), \quad \overline{w}_{\xi,T}(\eta_j) = n^{-\frac{1}{q}}\overline{w}(\xi). \tag{3.39}$$

Если каждый элемент T является одноточечным множеством, то обозначаем
$$G_{\xi,T}(\mathcal{D}) = G_\xi(\mathcal{D}), \quad \overline{u}_{\xi,T} = \overline{u}_\xi, \quad \overline{w}_{\xi,T} = \overline{w}_\xi. \tag{3.40}$$
Тогда для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$
$$\operatorname{card} \mathbf{V}_1^{G_\xi(\mathcal{D})}(\eta_j) = 1. \tag{3.41}$$

Лемма 3.3.1. *Для любого* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$
$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},\overline{u},\overline{w}} \leqslant \mathfrak{S}^{p,q}_{G_{\xi,T}(\mathcal{D}),\overline{u}_{\xi,T},\overline{w}_{\xi,T}}. \tag{3.42}$$

Доказательство теоремы 7. Пусть $f : \mathbf{V}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}_+$, $\|f\|_{l_p(\mathcal{D})} = 1$. Пусть $\operatorname{card} T = n$. Определим функцию $f_{\xi,T} : \mathbf{V}(G_{\xi,T}(\mathcal{D})) \to \mathbb{R}_+$ следующим образом: положим $f_{\xi,T}(\zeta) = f(\zeta)$, если $\zeta \in \mathbf{V}(\mathcal{D})\backslash\mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi)$ или $\zeta \in \cup_{j=1}^n \cup_{i=1}^{k_j} \mathbf{V}(\mathcal{D}_{\xi_{j,i}})$, и $f_{\xi,T}(\eta_j) = n^{-\frac{1}{p}}f(\xi)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда $\|f_{\xi,T}\|_{l_p(G_{\xi,T}(\mathcal{D}))} = \|f\|_{l_p(\mathcal{D})}$. Имеем
$$\sum_{\zeta\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} \overline{w}^q(\zeta)\left(\sum_{\zeta'\leqslant\zeta}\overline{u}(\zeta')f(\zeta')\right)^q = \sum_{\zeta\in\mathbf{V}(\mathcal{D})\backslash\mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi)} \overline{w}^q(\zeta)\left(\sum_{\zeta'\leqslant\zeta}\overline{u}(\zeta')f(\zeta')\right)^q +$$
$$+\overline{w}^q(\xi)\left(\sum_{\zeta'\leqslant\xi}\overline{u}(\zeta')f(\zeta')\right)^q + \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^{k_j}\sum_{\zeta\in\mathbf{V}(\mathcal{D}_{\xi_{j,i}})} \overline{w}^q(\zeta)\left(\sum_{\zeta'\leqslant\zeta}\overline{u}(\zeta')f(\zeta')\right)^q =: S.$$
Так как $\mathbf{V}(\mathcal{D})\backslash\mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi) \subset \mathbf{V}(G_{\xi,T}(\mathcal{D}))$, то по определению $\overline{u}_{\xi,T}$, $\overline{w}_{\xi,T}$ и $f_{\xi,T}$ получаем
$$\sum_{\zeta\in\mathbf{V}(\mathcal{D})\backslash\mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi)} \overline{w}^q(\zeta)\Big(\sum_{\zeta'\leqslant\zeta}\overline{u}(\zeta')f(\zeta')\Big)^q = \sum_{\zeta\in\mathbf{V}(\mathcal{D})\backslash\mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi)} \overline{w}^q_{\xi,T}(\zeta)\Big(\sum_{\zeta'\leqslant\zeta}\overline{u}_{\xi,T}(\zeta')f_{\xi,T}(\zeta')\Big)^q. \tag{3.43}$$

Пусть $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда

$$\overline{w}^q_{\xi,T}(\eta_j)\left(\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(G_{\xi,T}(\mathcal{D})),\,\zeta'\leqslant\eta_j}\overline{u}_{\xi,T}(\zeta')f_{\xi,T}(\zeta')\right)^q \overset{(3.39)}{=}$$

$$= n^{-1}\overline{w}^q(\xi)\left(\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(\mathcal{D}),\,\zeta'<\xi}\overline{u}(\zeta')f(\zeta')+n^{\frac{1}{p}}\overline{u}(\xi)\cdot n^{-\frac{1}{p}}f(\xi)\right)^q =$$

$$= n^{-1}\overline{w}^q(\xi)\left(\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(\mathcal{D}),\,\zeta'\leqslant\xi}\overline{u}(\zeta')f(\zeta')\right)^q.$$

Значит,

$$\begin{gathered}\overline{w}^q(\xi)\left(\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(\mathcal{D}),\,\zeta'\leqslant\xi}\overline{u}(\zeta')f(\zeta')\right)^q = \\ = \sum_{j=1}^n \overline{w}^q_{\xi,T}(\eta_j)\left(\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(G_{\xi,T}(\mathcal{D})),\,\zeta'\leqslant\eta_j}\overline{u}_{\xi,T}(\zeta')f_{\xi,T}(\zeta')\right)^q.\end{gathered}\tag{3.44}$$

Пусть $\zeta\in\mathbf{V}(\mathcal{D}_{\xi_{j,i}})$, $1\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant k_j$. Тогда

$$\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(G_{\xi,T}(\mathcal{D})),\,\zeta'\leqslant\zeta}\overline{u}_{\xi,T}(\zeta')f_{\xi,T}(\zeta') =$$

$$= \sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(G_{\xi,T}(\mathcal{D})),\,\zeta'\leqslant\zeta,\,\zeta'\neq\eta_j}\overline{u}_{\xi,T}(\zeta')f_{\xi,T}(\zeta')+\overline{u}_{\xi,T}(\eta_j)f_{\xi,T}(\eta_j) \overset{(3.39)}{=}$$

$$= \sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(\mathcal{D}),\,\zeta'\leqslant\zeta,\,\zeta'\neq\xi}\overline{u}(\zeta')f(\zeta')+n^{\frac{1}{p}}\overline{u}(\xi)\cdot n^{-\frac{1}{p}}f(\xi) = \sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(\mathcal{D}),\,\zeta'\leqslant\zeta}\overline{u}(\zeta')f(\zeta').$$

Поэтому

$$\overline{w}^q(\zeta)\Big(\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(\mathcal{D}),\,\zeta'\leqslant\zeta}\overline{u}(\zeta')f(\zeta')\Big)^q = \overline{w}^q_{\xi,T}(\zeta)\Big(\sum_{\zeta'\in\mathbf{V}(G_{\xi,T}(\mathcal{D})),\,\zeta'\leqslant\zeta}\overline{u}_{\xi,T}(\zeta')f_{\xi,T}(\zeta')\Big)^q. \tag{3.45}$$

Из (3.43), (3.44) и (3.45) следует, что

$$S = \sum_{\zeta\in\mathbf{V}(G_{\xi,T}(\mathcal{D}))}\overline{w}^q_{\xi,T}(\zeta)\Big(\sum_{\zeta'\leqslant\zeta}\overline{u}_{\xi,T}(\zeta')f_{\xi,T}(\zeta')\Big)^q \leqslant \Big(\mathfrak{S}^{p,q}_{G_{\xi,T}(\mathcal{D}),\overline{u}_{\xi,T},\overline{w}_{\xi,T}}\Big)^q.$$

Соотношение (3.42) доказано. □

Обозначим через $[\mathcal{A}]_{\leqslant n}$ поддерево в $(\mathcal{A},\,\xi_0)$ такое, что

$$\mathbf{V}([\mathcal{A}]_{\leqslant n}) = \cup_{j=0}^n \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0).$$

Доказательство теоремы 8. Так как $\overline{\mathfrak{S}}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}\leqslant\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}$ и $\overline{\mathfrak{S}}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}\underset{C_*,q}{\asymp}\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$, остается доказать, что $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}\underset{p,q,C_*}{\lesssim}\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$.

Достаточно рассмотреть случай $N<\infty$ и $p<\infty$ (случай $p=\infty$ тривиальный; если $N=\infty$, применяем теорему Б. Леви).

Для $0\leqslant j\leqslant N$ построим граф $\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}$ и функции $u^{(j)}$, $w^{(j)}:\mathbf{V}(\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}})\to(0,\,\infty)$ со следующими свойствами:

1. $\mathcal{G}_{N,\mathcal{A}}=\mathcal{A}$, $u^{(N)}=u$, $w^{(N)}=w$.

2. Если $1 \leqslant j \leqslant N-1$, то $\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}$ является деревом с минимальной вершиной ξ_0, таким, что

$$[\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}]_{\leqslant j-1} = [\mathcal{A}]_{\leqslant j-1}, \quad \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}) = \mathbf{V}_N^{\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}}(\xi_0); \tag{3.46}$$

$$\operatorname{card} \mathbf{V}_1^{\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}}(\xi) = \operatorname{card} \mathbf{V}_{N-j+1}^{\mathcal{A}}(\xi), \quad \text{если} \quad \xi \in \mathbf{V}_{j-1}^{\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}}(\xi_0); \tag{3.47}$$

$$\operatorname{card} \mathbf{V}_1^{\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}}(\xi) = 1, \quad \text{если} \quad \xi \in \mathbf{V}_i^{\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}}(\xi_0), \quad j \leqslant i \leqslant N-1. \tag{3.48}$$

Кроме того,

$$u^{(j)}(\xi) = u(\xi), \quad w^{(j)}(\xi) = w(\xi), \quad \xi \in \mathbf{V}([\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}]_{\leqslant j-1}); \tag{3.49}$$

$$\begin{gathered} u^{(j)}(\xi) \underset{C_*}{\asymp} u_i \cdot 2^{\frac{\psi(N)-\psi(i)}{p}}, \quad w^{(j)}(\xi) \underset{C_*,q}{\asymp} w_i \cdot 2^{-\frac{\psi(N)-\psi(i)}{q}}, \\ \xi \in \mathbf{V}_i^{\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}}(\xi_0), \quad j \leqslant i \leqslant N; \end{gathered} \tag{3.50}$$

если $C_* = 1$, то выполнены точные равенства в (3.50).

3. $\mathcal{G}_{0,\mathcal{A}}$ является дизъюнктным объединением путей $\zeta_{l,0} < \zeta_{l,1} < \dots < \zeta_{l,N}$, $1 \leqslant l \leqslant \operatorname{card} \mathbf{V}_N^{\mathcal{A}}(\xi_0)$. Кроме того,

$$u^{(0)}(\zeta_{l,i}) \underset{C_*}{\asymp} u_i \cdot 2^{\frac{\psi(N)-\psi(i)}{p}}, \quad w^{(0)}(\zeta_{l,i}) \underset{C_*,q}{\asymp} w_i \cdot 2^{-\frac{\psi(N)-\psi(i)}{q}}, \quad 0 \leqslant i \leqslant N. \tag{3.51}$$

Если $C_* = 1$, то выполнены точные равенства (3.51).

4. $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \leqslant \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}},u^{(j)},w^{(j)}}$, $0 \leqslant j \leqslant N$.

Графы $\mathcal{G}_{j,\mathcal{A}}$ и функции $u^{(j)}$, $w^{(j)}$ будут построены индукцией по j. Предположим, что для $0 \leqslant k \leqslant N-1$ построены деревья $\mathcal{G}_{k+1,\mathcal{A}}$ и функции $u^{(k+1)}$, $w^{(k+1)}$, при этом выполнены свойства 1, 2 и 4 с $j := k+1$. Обозначим $\mathbf{V}_k^{\mathcal{G}_{k+1,\mathcal{A}}}(\xi_0) = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$. Из (3.46) следует, что $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\} = \mathbf{V}_k^{\mathcal{A}}(\xi_0)$; кроме того, $u^{(k+1)}(\zeta_t) \overset{(3.49)}{=} u(\zeta_t)$, $w^{(k+1)}(\zeta_t) \overset{(3.49)}{=} w(\zeta_t)$, $1 \leqslant t \leqslant m$.

Положим

$$\mathcal{G}_{k,\mathcal{A}} = G_{\zeta_m}(\dots G_{\zeta_2}(G_{\zeta_1}(\mathcal{G}_{k+1,\mathcal{A}}))),$$

$$u^{(k)} = (((u^{(k+1)})_{\zeta_1})_{\zeta_2} \dots)_{\zeta_m}, \quad w^{(k)} = (((w^{(k+1)})_{\zeta_1})_{\zeta_2} \dots)_{\zeta_m}$$

(см. (3.40)). Из леммы 3.3.1 и предположения индукции получаем свойство 4. Условия (3.46), (3.47), (3.48) для $j := k > 0$ и первая часть свойства 3 выполнены по построению, в силу (3.41) и по предположению индукции.

Оценим значения $u^{(k)}(\eta)$ и $w^{(k)}(\eta)$, $\eta \in \mathbf{V}(\mathcal{G}_{k,\mathcal{A}})$. Пусть $\eta \in \mathbf{V}_k(\mathcal{G}_{k,\mathcal{A}})$. Тогда $\mathbf{V}_1^{\mathcal{G}_{k,\mathcal{A}}}(\eta) \overset{(3.48)}{=} \{\eta'\}$. Существуют $1 \leqslant t \leqslant m$ такие, что $\eta' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{G}_{k+1,\mathcal{A}}}(\zeta_t)$. Из определения $u^{(k)}$ и $w^{(k)}$ и из (3.49), примененного к $j := k+1$, получаем

$$\begin{gathered} u^{(k)}(\eta) \overset{(3.39),(3.47)}{=} u^{(k+1)}(\zeta_t) \left(\operatorname{card} \mathbf{V}_{N-k}^{\mathcal{A}}(\zeta_t)\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(25),(3.49)}{\underset{C_*}{\asymp}} \\ \asymp u(\zeta_t) 2^{\frac{\psi(N)-\psi(k)}{p}} \overset{(26)}{=} u_k \cdot 2^{\frac{\psi(N)-\psi(k)}{p}}, \\ w^{(k)}(\eta) \overset{(3.39),(3.47)}{=} w^{(k+1)}(\zeta_t) \left(\operatorname{card} \mathbf{V}_{N-k}^{\mathcal{A}}(\zeta_t)\right)^{-\frac{1}{q}} \overset{(25),(3.49)}{\underset{C_*,q}{\asymp}} \\ \asymp w(\zeta_t) 2^{-\frac{\psi(N)-\psi(k)}{q}} \overset{(26)}{=} w_k \cdot 2^{-\frac{\psi(N)-\psi(k)}{q}}. \end{gathered}$$

Если $C_* = 1$, то выполнены точные равенства.

Пусть $\eta \in \mathbf{V}(\mathcal{G}_{k,\mathcal{A}})\backslash \mathbf{V}_k(\mathcal{G}_{k,\mathcal{A}})$. Тогда $u^{(k)}(\eta) = u^{(k+1)}(\eta)$, $w^{(k)}(\eta) = w^{(k+1)}(\eta)$. Отсюда и из предположения индукции следуют соотношения (3.49) и (3.50) при $k > 0$ и (3.51) при $k = 0$.

Докажем (34).

По свойству 4, достаточно оценить $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{G}_{0,\mathcal{A}},u^{(0)},w^{(0)}}$. Положим

$$m_* = \operatorname{card} \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_N(\xi_0) \underset{C_*}{\overset{(25)}{\asymp}} 2^{\psi(N)} \tag{3.52}$$

(если $C_* = 1$, то выполнено точное равенство). В силу (3.51), $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{G}_{0,\mathcal{A}},u^{(0)},w^{(0)}} \underset{C_*,q}{\asymp} \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{G}_{0,\mathcal{A}},\tilde u,\tilde w}$, где

$$\begin{gathered} \tilde u(\zeta_{k,i}) = \tilde u_i := u_i \cdot 2^{\frac{\psi(N)-\psi(i)}{p}}, \\ \tilde w(\zeta_{k,i}) = \tilde w_i := w_i \cdot 2^{-\frac{\psi(N)-\psi(i)}{q}}, \ \ 1 \leqslant k \leqslant m_*, \ 0 \leqslant i \leqslant N. \end{gathered} \tag{3.53}$$

Пусть $f : \mathbf{V}(\mathcal{G}_{0,\mathcal{A}}) \to \mathbb{R}_+$, $\|f\|_{l_p(\mathcal{G}_{0,\mathcal{A}})} = 1$. Положим $\varphi(\zeta_{k,i}) = \varphi_{k,i} = f^p(\zeta_{k,i})$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m_*}\sum_{i=0}^{N} \varphi_{k,i} = 1, \tag{3.54}$$

$$\sum_{\xi\in \mathbf{V}(\mathcal{G}_{0,\mathcal{A}})} \tilde w^q(\xi) \left(\sum_{\xi'\leqslant \xi} \tilde u(\xi')f(\xi')\right)^q = \sum_{k=1}^{m_*}\sum_{j=0}^{N} \tilde w_j^q \left(\sum_{i=0}^{j} \tilde u_i \varphi_{k,i}^{1/p}\right)^q =: \mathcal{F}(\varphi).$$

Так как $p \geqslant q$, функция $t \mapsto t^{\frac{q}{p}}$ вогнута на $\mathbb{R}_+$. Отсюда и из обратного неравенства Минковского следует, что $\mathcal{F}(\varphi)$ вогнута на множестве неотрицательных функций φ.

Для $0 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant k \leqslant m_*$ положим $\tilde\varphi(\zeta_{k,i}) = \tilde\varphi_i = \frac{1}{m_*}\sum\limits_{l=1}^{m_*} \varphi_{l,i}$, $\tilde f_i = \tilde\varphi_i^{1/p} m_*^{1/p}$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{N} \tilde\varphi_i = \frac{1}{m_*}\sum_{k=1}^{m_*}\sum_{i=0}^{N}\varphi_{k,i} \overset{(3.54)}{=} \frac{1}{m_*}, \qquad \sum_{j=0}^{N} \tilde f_j^p = 1. \tag{3.55}$$

Пусть $\mathbb{S}_{m_*}$ — множество всех перестановок из m_* элементов, $\varphi_\pi(\zeta_{k,i}) = \varphi(\zeta_{\pi(k),i})$, $\pi \in \mathbb{S}_{m_*}$. Тогда $\tilde\varphi(\zeta_{k,i}) = \frac{1}{\operatorname{card}\mathbb{S}_{m_*}} \sum\limits_{\pi\in\mathbb{S}_{m_*}} \varphi_\pi(\zeta_{k,i})$ и $\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\varphi_\pi)$ для любого $\pi \in \mathbb{S}_{m_*}$. Так как функционал $\mathcal{F}$ вогнутый, выполнено неравенство $\mathcal{F}(\varphi) \leqslant \mathcal{F}(\tilde\varphi)$. Значит,

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{m_*}\sum_{j=0}^{N} \tilde w_j^q \left(\sum_{i=0}^{j} \tilde u_i \varphi_{k,i}^{1/p}\right)^q \leqslant \sum_{k=1}^{m_*}\sum_{j=0}^{N} \tilde w_j^q \left(\sum_{i=0}^{j} \tilde u_i \tilde\varphi_i^{1/p}\right)^q \overset{(3.53)}{=} \\ = m_* \sum_{j=0}^{N} w_j^q \cdot 2^{-\psi(N)+\psi(j)} \left(\sum_{i=0}^{j} u_i \cdot 2^{\frac{\psi(N)-\psi(i)}{p}} m_*^{-\frac{1}{p}} \tilde f_i\right)^q \underset{C_*,p,q}{\overset{(3.52)}{\asymp}} \\ \asymp \sum_{j=0}^{N} w_j^q \cdot 2^{\psi(j)} \left(\sum_{i=0}^{j} u_i \cdot 2^{-\frac{\psi(i)}{p}} \tilde f_i\right)^q \overset{(32),(33),(3.55)}{\leqslant} \left[\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat u,\hat w}\right]^q. \end{gathered}$$

Теорема доказана. □

Аналогичное утверждение можно получить для весового оператора интегрирования на метрическом дереве. Мы используем обозначения из §4.2. Пусть $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \Delta)$, где $(\mathcal{A}, \xi_0)$ удовлетворяет (25). Предположим, что $\Delta((\xi', \xi'')) = [a_j, b_j]$ для любого $\xi' \in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j-1}(\xi_0)$, $\xi'' \in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_1(\xi')$, $j \in \mathbb{N}$. Пусть x_0 — минимальная точка в $\mathbb{A}$. Рассмотрим весовые функции g, $v : \mathbb{A} \to (0, \infty)$ вида $g(x) = g_0(\rho_{\mathbb{A}}(x, x_0))$, $v(x) = v_0(\rho_{\mathbb{A}}(x, x_0))$ (см. (3.1)).

Положим $R = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} (b_j - a_j)$,

$$\hat{v}_0(t) = v_0(t)\cdot 2^{\frac{\psi(j)}{q}}, \quad \hat{g}_0(t) = g_0(t)\cdot 2^{-\frac{\psi(j)}{p}}, \quad t = \sum_{i=1}^{j-1}(b_i - a_i) + s, \quad s \in [a_j,\, b_j].$$

Пусть оператор $I_{g,v,x_0} : L_p(\mathbb{A}) \to L_q(\mathbb{A})$ определен формулой (3.2), $\hat{I}_{\hat{g}_0,\hat{v}_0} f(t) = \hat{v}_0(t) \int\limits_0^t \hat{g}_0(s) f(s)\, ds$, $0 \leqslant t < R$, $f \in L_p(0,\, R)$.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < q < \infty$, $p \geqslant q$. *Тогда* $\|I_{g,v,x_0}\|_{L_p(\mathbb{A})\to L_q(\mathbb{A})} \underset{p,q,C_*}{\asymp} \|\hat{I}_{\hat{g}_0,\hat{v}_0}\|_{L_p(0,\,R)\to L_q(0,\,R)}$. *Если* $C_* = 1$, *то выполнено точное равенство.*

Этот результат доказывается точно так же, как теорема 8. При $p = q = 2$ и $C_* = 1$ он был получен в [154].

Глава 4

Теоремы вложения весовых классов Соболева с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества

В этой главе доказаны теоремы 9, 10 и 11. Кроме того, здесь получены некоторые уточнения этих результатов: найдены оценки приближения функции из $W^r_{p,g}(\Omega)$ полиномом степени не выше $r-1$ на подобласти в Ω, порожденной некоторым поддеревом в дереве $\mathcal{T}$ (см. теорему 1.1.1). Эти результаты будут применяться в главе 5 при получении оценок поперечников.

Норма $|\cdot|$ на $\mathbb{R}^d$ здесь определяется как норма в l^d_∞, т.е. $|(x_1, \ldots, x_d)| = \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i|$.

Напомним, что $\mathfrak{Z} = (p, q, r, d, a, c_0)$, где a — параметр из условия Джона, c_0 — константа из (37).

4.1 Построение разбиения дерева

Напомним, что $\Theta(\Omega)$ — покрытие Уитни (см. теорему C). Пусть $\mathcal{T}$ и $F : \mathbf{V}(\mathcal{T}) \to \Theta(\Omega)$ — дерево и разбиение, построенные в соответствии с теоремой 1.1.1.

Для $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ обозначим $\Omega_\xi = \Omega_{\mathcal{T}_\xi,F}$; число $k_\xi \in \mathbb{N}$ выберем так, что

$$2^{-k_\xi} \leqslant \mathrm{dist}_{|\cdot|}(F(\xi), \Gamma) < 2^{-k_\xi+1}. \tag{4.1}$$

Для $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ определим m_ξ формулой (1.4). По теореме C,

$$2^{-m_\xi} \underset{d}{\asymp} \mathrm{dist}_{|\cdot|}(F(\xi), \partial\Omega) \leqslant \mathrm{dist}_{|\cdot|}(F(\xi), \Gamma) \asymp 2^{-k_\xi}, \tag{4.2}$$

поэтому существует $\vartheta(d) \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$k_\xi \leqslant m_\xi + \vartheta(d). \tag{4.3}$$

Пусть $z_\xi \in F(\xi)$ таково, что $\mathrm{dist}_{|\cdot|}(z_\xi, \Gamma) = \mathrm{dist}_{|\cdot|}(F(\xi), \Gamma)$, и пусть $\tilde{z}_\xi$ — центр куба $F(\xi)$. Из (1.2) следует, что вершины куба $F(\xi)$ принадлежат границе Ω_ξ. Значит, для любого $x \in \Omega_\xi$

$$|x - z_\xi| \leqslant \mathrm{diam}_{|\cdot|}\Omega_\xi \overset{(9)}{\underset{a,d}{\lesssim}} \mathrm{dist}_{|\cdot|}(\tilde{z}_\xi, \partial\Omega_\xi) \overset{(1.2)}{\underset{d}{\lesssim}} 2^{-m_\xi},$$

то есть найдется $c(a, d) > 0$ такое, что

$$|x - z_\xi| \leqslant c(a, d) \cdot 2^{-m_\xi}, \quad x \in \Omega_\xi. \tag{4.4}$$

Докажем, что для любого $x\in F(\xi)$ выполнено

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma) \underset{d}{\asymp} 2^{-k_\xi}. \tag{4.5}$$

В самом деле,

$$2^{-k_\xi} \overset{(4.1)}{\leqslant} \mathrm{dist}_{|\cdot|}(F(\xi),\,\Gamma) \leqslant \mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma) \leqslant \mathrm{dist}_{|\cdot|}(F(\xi),\,\Gamma) + |x-z_\xi| \overset{(4.1)}{\leqslant}$$
$$\leqslant 2^{-k_\xi+1} + 2^{-m_\xi} \underset{d}{\overset{(4.3)}{\lesssim}} 2^{-k_\xi}.$$

Положим

$$\hat{\mathbf{W}} = \{\xi\in \mathbf{V}(\mathcal{T}):\, m_\xi \leqslant k_\xi + 1 + \log_2 c(a,\,d)\}. \tag{4.6}$$

Из (4.3) следует, что для любого $\xi\in\hat{\mathbf{W}}$ выполнено

$$2^{-m_\xi} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-k_\xi}. \tag{4.7}$$

Пусть $\xi\notin \hat{\mathbf{W}}$. Покажем, что для любого $x\in\Omega_\xi$ выполнено

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma) \underset{a,d}{\asymp} 2^{-k_\xi}. \tag{4.8}$$

В самом деле,

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma) \leqslant \mathrm{dist}_{|\cdot|}(z_\xi,\,\Gamma) + |x-z_\xi| \underset{a,d}{\overset{(4.1),(4.4)}{\lesssim}} 2^{-k_\xi} + 2^{-m_\xi} \underset{d}{\overset{(4.3)}{\lesssim}} 2^{-k_\xi},$$

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma) \geqslant \mathrm{dist}_{|\cdot|}(z_\xi,\,\Gamma) - |x-z_\xi| \overset{(4.1),(4.4)}{\geqslant} 2^{-k_\xi} - c(a,\,d)\cdot 2^{-m_\xi} \overset{(4.6)}{\geqslant} 2^{-k_\xi-1}.$$

Обозначим

$$\hat{\mathbf{W}}_\nu = \{\xi\in\hat{\mathbf{W}}:\, k_\xi=\nu\},\quad \nu\in\mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Тогда из (4.4) и (4.7) следует, что для любого $\xi\in\hat{\mathbf{W}}_\nu$ и любого дерева $\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}_\xi$ с корнем ξ

$$\mathrm{diam}_{|\cdot|}\,\Omega_{\mathcal{T}',F} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\nu}. \tag{4.10}$$

Лемма 4.1.1. *Существует разбиение дерева $\mathcal{T}$ на поддеревья $\mathcal{T}_{k,i}$ с минимальными вершинами $\xi_{k,i}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $i\in I_k$, $I_k\neq\varnothing$, и числа $\nu_k\in\mathbb{N}$, для которых выполнены следующие свойства:*

1. *$\nu_0<\nu_1<\dots<\nu_k<\dots$;*
2. *$\xi_{k,i}\in\hat{\mathbf{W}}_{\nu_k}$;*
3. *для любого $x\in\Omega_{\mathcal{T}_{k,i},F}$ выполнено $\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma)\underset{a,d}{\asymp}2^{-\nu_k}$;*
4. *если $\xi_{k',i'}<\xi_{k,i}$, то $k'<k$.*

Доказательство. Пусть $\nu\in\mathbb{Z}_+$, $\hat{\xi}\in\hat{\mathbf{W}}_\nu$. Обозначим через $\mathfrak{T}(\hat{\xi})$ множество поддеревьев $\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}_{\hat{\xi}}$ с минимальной вершиной $\hat{\xi}$ таких, что

$$\mathbf{V}(\mathcal{T}')\bigcap\left(\bigcup_{l\geqslant\nu+1}\hat{\mathbf{W}}_l\right)=\varnothing$$

(это множество непусто, так как $\{\hat\xi\}\in \mathfrak{T}(\hat\xi)$). Через $\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\hat\xi})$ обозначим поддерево в $\mathcal{T}_{\hat\xi}$ такое, что $\mathbf{V}(\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\hat\xi}))=\cup_{S\in\mathfrak{T}(\xi)}\mathbf{V}(S)$. Тогда $\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\hat\xi})\in\mathfrak{T}(\hat\xi)$.

Докажем, что существует $\hat\nu=\hat\nu(a,\,d)\in\mathbb{N}$ такое, что для любого $x\in\Omega_{\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\hat\xi}),F}$ выполнено

$$2^{-\nu-\hat\nu}\leqslant \mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma)\leqslant 2^{-\nu+\hat\nu}. \tag{4.11}$$

В самом деле,

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma)\leqslant |x-z_{\hat\xi}|+\mathrm{dist}_{|\cdot|}(z_{\hat\xi},\,\Gamma)\overset{(4.1),(4.4),(4.9)}{\underset{a,d}{\lesssim}}2^{-m_{\hat\xi}}+2^{-\nu}\overset{(4.3)}{\underset{d}{\lesssim}}2^{-\nu}.$$

Докажем оценку снизу. Пусть $x\in F(\eta)$, $\eta\in\mathbf{V}(\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\hat\xi}))$. Положим

$$\hat\eta=\max\{\hat{\mathbf{W}}\cap[\hat\xi,\,\eta]\}.$$

Тогда $\hat\eta\in\hat{\mathbf{W}}_j$ для некоторого $j\in\mathbb{Z}_+$; так как $\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\hat\xi})\in\mathfrak{T}(\hat\xi)$, то $j\leqslant\nu$. Так как

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(F(\hat\eta),\,\Gamma)\overset{(4.1)}{\geqslant}2^{-k_{\hat\eta}}\overset{(4.9)}{=}2^{-j}\geqslant 2^{-\nu}, \tag{4.12}$$

то в случае $\eta=\hat\eta$ оценка доказана. Пусть $\eta>\hat\eta$, $\hat\zeta\in[\hat\eta,\,\eta]\cap\mathbf{V}_1(\hat\eta)$. Тогда $\hat\zeta\notin\hat{\mathbf{W}}$, $\dim(F(\hat\eta)\cap F(\hat\zeta))=d-1$ (см. определение 1.1.1 и теорему 1.1.1), и для любого $x\in F(\eta)$

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma)\overset{(4.8)}{\underset{a,d}{\asymp}}2^{-k_{\hat\zeta}}\overset{(4.3)}{\underset{d}{\gtrsim}}2^{-m_{\hat\zeta}}\overset{(1.13)}{\geqslant}2^{-m_{\hat\eta}-2}\overset{(4.7)}{\underset{a,d}{\asymp}}2^{-k_{\hat\eta}}\overset{(4.12)}{\geqslant}2^{-\nu}.$$

Обозначим через $\mathbf{U}_{\hat\xi}$ множество всех минимальных вершин в $\mathcal{T}_{\hat\xi}\backslash\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\hat\xi})$. Из определения $\mathfrak{T}(\hat\xi)$ и $\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\hat\xi})$ следует, что

$$\eta\in\cup_{s\geqslant\nu+1}\hat{\mathbf{W}}_s\quad\text{для любого } \eta\in\mathbf{U}_{\hat\xi}. \tag{4.13}$$

Обозначим через ξ_0 минимальную вершину дерева $\mathcal{T}$.

В качестве множества индексов I_k возьмем $\{1,\,\dots,\,i_0(k)\}$ для некоторого $i_0(k)\in\mathbb{N}$. Деревья $\{\mathcal{T}_{k,i}\}_{1\leqslant i\leqslant i_0(k)}$ и вершины $\xi_{k,i}$ строятся индукцией по $k\in\mathbb{Z}_+$ так, чтобы выполнялись утверждения 1–4 леммы, а также следующие свойства:

5. $\mathcal{T}_{k,i}=\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_{k,i}})$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $i=1,\,\dots,\,i_0(k)$.

6. Пусть $\hat{\mathcal{T}}_k$ — максимальный подграф в $\mathcal{T}$ на множестве вершин $\cup_{s=0}^k\cup_{i=1}^{i_0(s)}\mathbf{V}(\mathcal{T}_{s,i})$. Тогда $\hat{\mathcal{T}}_k$ является деревом с минимальной вершиной ξ_0.

7. Пусть $\mathbf{U}_k$ — множество минимальных вершин в $\mathcal{T}\backslash\hat{\mathcal{T}}_k$. Тогда $\mathbf{U}_k\subset\cup_{s\geqslant\nu_k+1}\hat{\mathbf{W}}_s$.

8. Пусть $k\geqslant 1$. Тогда $\nu_k=\min\{\nu:\mathbf{U}_{k-1}\cap\hat{\mathbf{W}}_\nu\neq\varnothing\}$, $\{\xi_{k,1},\,\dots,\,\xi_{k,i_0(k)}\}=\mathbf{U}_{k-1}\cap\hat{\mathbf{W}}_{\nu_k}$.

9. $\mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_k)\cap\hat{\mathbf{W}}\subset\cup_{s\leqslant\nu_k}\hat{\mathbf{W}}_s$.

Пусть $k=0$. Покажем, что $\xi_0\in\hat{\mathbf{W}}$. В самом деле, пусть $\xi_0\notin\hat{\mathbf{W}}$. Тогда, в силу (4.8), для любого $x\in\Omega_{\mathcal{T},F}$ выполнено $\mathrm{dist}\,(x,\,\Gamma)\underset{a,d}{\asymp}2^{-k_{\xi_0}}$. Тогда $\Gamma\cap\overline{\Omega}=\varnothing$ — противоречие. Положим $i_0(0)=1$, $\xi_{0,1}=\xi_0$, $\mathcal{T}_{0,1}=\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_0})$ и выберем ν_0 так, чтобы $\xi_0\in\hat{\mathbf{W}}_{\nu_0}$. Утверждения 1 и 4 леммы тривиальны, утверждение 2 следует из определения ν_0, утверждение 3 следует из (4.11). Свойства 5 и 6 выполнены по построению, свойство 8 с $k=0$ тривиально. Обозначим через $\mathbf{U}_0$ множество минимальных вершин в $\mathcal{T}\backslash\mathcal{T}_{0,1}$. Из (4.13) следует, что $\mathbf{U}_0\subset\cup_{s\geqslant\nu_0+1}\hat{\mathbf{W}}_s$, откуда следует свойство 7. Свойство 9 выполнено, так как

$$\mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_0)\cap\Bigl(\cup_{s\geqslant\nu_0+1}\hat{\mathbf{W}}_s\Bigr)=\mathbf{V}(\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_0}))\cap\Bigl(\cup_{s\geqslant\nu_0+1}\hat{\mathbf{W}}_s\Bigr)=\varnothing$$

по определению $\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_0})$.

Пусть деревья $\mathcal{T}_{k,i}$ ($1 \leqslant i \leqslant i_0(k)$) построены для $0 \leqslant k \leqslant l$, при этом выполнены утверждения 1–4 леммы и свойства 5–9. По свойству 7,

$$\mathbf{U}_l \subset \cup_{s \geqslant \nu_l+1} \hat{\mathbf{W}}_s. \tag{4.14}$$

С другой стороны, так как $\Gamma \subset \partial\Omega$, из утверждения 3 следует, что $\mathbf{U}_l \neq \varnothing$.

Построим деревья $\mathcal{T}_{l+1,i}$, $1 \leqslant i \leqslant i_0(l+1)$. Положим

$$\nu_{l+1} := \min\{\nu : \ \mathbf{U}_l \cap \hat{\mathbf{W}}_\nu \neq \varnothing\}, \quad \{\xi_{l+1,1}, \, \dots, \, \xi_{l+1, \, i_0(l+1)}\} := \mathbf{U}_l \cap \hat{\mathbf{W}}_{\nu_{l+1}} \neq \varnothing,$$

$\mathcal{T}_{l+1,i} = \mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}})$. Свойство 1 следует из (4.14) и предположения индукции. Свойства 5 и 8 (а значит, утверждение 2 леммы) выполнены по построению. Свойство 3 следует из (4.11). Докажем свойство 4. В самом деле, если $k' \leqslant l$ и $k \leqslant l$, то утверждение выполнено по предположению индукции. Для $k = l+1$, $k' \leqslant l$ утверждение тривиально. Пусть $k' = l+1$. Если $k = l+1$, то вершины $\xi_{l+1,i}$ и $\xi_{l+1,i'}$ несравнимы по определению множества $\mathbf{U}_l$. Если $k \leqslant l$, то $\xi_{k,i} \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_l)$. Так как $\xi_{l+1,i'} < \xi_{k,i}$, то $\xi_{l+1,i'} \in [\xi_0, \, \xi_{k,i}]$; так как $\hat{\mathcal{T}}_l$ является деревом и $\xi_0 \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_l)$, то $\xi_{l+1,i'} \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_l)$ — противоречие.

Проверим свойство 6. Пусть $1 \leqslant i \leqslant i_0(l+1)$, $\overline{\xi}_{l+1,i}$ — вершина, предшествующая $\xi_{l+1,i}$ в $\mathcal{T}$. Из определения $\mathbf{U}_l$ следует, что

$$\overline{\xi}_{l+1,i} \in \hat{\mathcal{T}}_l. \tag{4.15}$$

Имеем

$$\mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_{l+1}) = \cup_{k=0}^{l+1} \cup_{i=1}^{i_0(k)} \mathbf{V}(\mathcal{T}_{k,i}) = \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_l) \cup \left(\cup_{i=1}^{i_0(l+1)} \mathbf{V}(\mathcal{T}_{l+1,i})\right). \tag{4.16}$$

Так как $\mathcal{T}_{k,i}$ и $\hat{\mathcal{T}}_l$ являются деревьями и $\xi_{l+1,i}$ — минимальная вершина в $\mathcal{T}_{l+1,i}$, то из (4.15) следует, что $\hat{\mathcal{T}}_{l+1}$ также является деревом. В силу (4.16) и предположения индукции, ξ_0 — минимальная вершина $\hat{\mathcal{T}}_{l+1}$.

Проверим свойство 9. В силу свойств 5, 8 и определения $\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}})$, получаем

$$\mathbf{V}(\mathcal{T}_{l+1,i}) \cap \left(\cup_{s \geqslant \nu_{l+1}+1} \hat{\mathbf{W}}_s\right) = \mathbf{V}(\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}})) \cap \left(\cup_{s \geqslant \nu_{l+1}+1} \hat{\mathbf{W}}_s\right) = \varnothing.$$

Значит, $\mathbf{V}(\mathcal{T}_{l+1,i}) \cap \hat{\mathbf{W}} \subset \cup_{s \leqslant \nu_{l+1}} \hat{\mathbf{W}}_s$. По предположению индукции, $\mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_l) \cap \hat{\mathbf{W}} \subset \cup_{s \leqslant \nu_l} \hat{\mathbf{W}}_s$. Остается применить (4.16).

Проверим свойство 7. Пусть $\eta \in \mathbf{U}_{l+1}$. Докажем, что

$$\eta \in \cup_{k \geqslant \nu_{l+1}+1} \hat{\mathbf{W}}_k. \tag{4.17}$$

В самом деле, так как $\eta \in \mathbf{U}_{l+1}$, то $\eta \notin \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_l)$. Значит, существует вершина $\xi_\eta \in \mathbf{U}_l$ такая, что $\eta \in \mathcal{T}_{\xi_\eta}$.

Пусть $\xi_\eta \notin \hat{\mathbf{W}}_{\nu_{l+1}}$. Из определения ν_{l+1} следует, что $\xi_\eta \in \cup_{k \geqslant \nu_{l+1}+1} \hat{\mathbf{W}}_k$. Поэтому $\xi_\eta \notin \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_{l+1})$ по уже доказанному свойству 9. Таким образом, $\mathbf{V}(\mathcal{T}_{\xi_\eta}) \cap \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_{l+1}) = \varnothing$. Пусть $\eta > \xi_\eta$. Так как $\eta \in \mathbf{U}_{l+1}$, то вершина, предшествующая η, принадлежит $\mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_{l+1}) \cap \mathbf{V}(\mathcal{T}_{\xi_\eta}) = \varnothing$ — противоречие. Значит, $\eta = \xi_\eta$ и (4.17) доказано.

Пусть $\xi_\eta \in \hat{\mathbf{W}}_{\nu_{l+1}}$. Тогда $\xi_\eta = \xi_{l+1,i}$ для некоторого $i \in \overline{1, \, i_0(l+1)}$ в силу свойства 8. Докажем, что η — минимальная вершина в $\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}} \backslash \mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}})$. Тогда из (4.13) следует (4.17). По определению $\mathbf{U}_{l+1}$, η является минимальной вершиной в $\mathcal{T} \backslash \hat{\mathcal{T}}_{l+1}$. Так как $\eta \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}})$ и $\mathbf{V}(\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}})) = \mathbf{V}(\mathcal{T}_{l+1,i}) \subset \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_{l+1})$, то η является вершиной

$\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}}\backslash\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}})$. Докажем, что эта вершина минимальная. В самом деле, пусть η' — вершина, предшествующая η и

$$\eta' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}})\backslash\mathbf{V}(\mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}})). \tag{4.18}$$

Покажем, что $\eta' \notin \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_{l+1})$ (это противоречит с тем, что η является минимальной вершиной в $\mathcal{T}\backslash\hat{\mathcal{T}}_{l+1}$). В силу (4.18) и равенства $\mathcal{T}_{l+1,i} = \mathcal{S}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}})$, получаем $\eta' \notin \mathbf{V}(\mathcal{T}_{l+1,i})$. Так как для $i' \ne i$ вершины $\xi_{l+1,i}$ и $\xi_{l+1,i'}$ несравнимы, то деревья $\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}}$ и $\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i'}}$ не пересекаются. Значит, $\eta' \notin \mathbf{V}(\mathcal{T}_{l+1,i'})$. Наконец, так как $\xi_{l+1,i} = \xi_\eta \in \mathbf{U}_l$, то $\eta' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{\xi_{l+1,i}}) \subset \mathbf{V}(\mathcal{T})\backslash\mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_l)$. Остается применить (4.16).

Для завершения доказательства остается проверить, что $\mathcal{T} \subset \cup_{k\in\mathbb{Z}_+} \cup_{i=1}^{i_0(k)} \mathcal{T}_{k,i}$. В самом деле, пусть $\eta \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$, $\eta \notin \cup_{k\in\mathbb{Z}_+} \cup_{i=1}^{i_0(k)} \mathcal{T}_{k,i}$, и пусть

$$\max\left(\{\xi_{k,i} :\, k \in \mathbb{Z}_+,\, 1 \leqslant i \leqslant i_0(k)\} \cap [\xi_0,\, \eta]\right) = \xi_{k_*,i_*},$$

$$\tilde{\xi}_\eta = \min\left([\xi_{k_*,i_*},\, \eta]\backslash\mathbf{V}(\mathcal{T}_{k_*,i_*})\right). \tag{4.19}$$

Так как $\xi_{k_*,i_*} \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{k_*,i_*})$, то $\tilde{\xi}_\eta > \xi_{k_*,i_*}$. Если $\tilde{\xi}_\eta \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{k_1,i_1})$ для некоторых k_1, i_1, то $\tilde{\xi}_\eta$ является минимальной вершиной в $\mathcal{T}_{k_1,i_1}$, т.е. $\tilde{\xi}_\eta = \xi_{k_1,i_1}$. Это противоречит с определением ξ_{k_*,i_*}. Поэтому

$$\tilde{\xi}_\eta \notin \cup_{t\in\mathbb{Z}_+}\mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_t). \tag{4.20}$$

В частности, $\tilde{\xi}_\eta \notin \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_{k_*})$. Пусть $\overline{\xi}_\eta$ — вершина, предшествующая $\tilde{\xi}_\eta$. В силу (4.19),

$$\overline{\xi}_\eta \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{k_*,i_*}) \subset \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_{k_*}). \tag{4.21}$$

Значит, $\tilde{\xi}_\eta \in \mathbf{U}_{k_*}$. Из свойства 7 следует, что $\tilde{\xi}_\eta \in \hat{\mathbf{W}}_s$, $s \geqslant \nu_{k_*}+1$. Пусть t_* таково, что $\nu_{t_*} < s \leqslant \nu_{t_*+1}$. Из (4.20) следует, что $\tilde{\xi}_\eta \in \mathbf{V}(\mathcal{T})\backslash\mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_{t_*})$. Так как $t_* \geqslant k_*$, то из (4.21) следует, что $\overline{\xi}_\eta \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{T}}_{t_*})$. Следовательно, $\tilde{\xi}_\eta$ — минимальная вершина в $\mathcal{T}\backslash\hat{\mathcal{T}}_{t_*}$, т.е. $\tilde{\xi}_\eta \in \mathbf{U}_{t_*}$. В силу свойства 8, $s \geqslant \nu_{t_*+1}$. Значит, $s = \nu_{t_*+1}$ и $\tilde{\xi}_\eta = \xi_{t_*+1,i}$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant i_0(t_*+1)$ (снова в силу свойства 8). Это противоречит с определением ξ_{k_*,i_*}. □

Предложение 4.1.1. *Пусть $\xi_{k,i} < \xi_{k',i'}$, $\{\xi :\, \xi_{k,i} \leqslant \xi < \xi_{k',i'}\} \subset \mathbf{V}(\mathcal{T}_{k,i})$. Тогда $\nu_{k'} \leqslant \nu_k + \overline{s}$, где $\overline{s} = \overline{s}(a,\, d)$. При этом, можно считать, что $\overline{s} \geqslant 4$.*

Доказательство. Пусть $\xi \in [\xi_{k,i},\, \xi_{k',i'}]$ — вершина, предшествующая $\xi_{k',i'}$. Тогда $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T}_{k,i})$. В силу пункта 3 леммы 4.1.1, для любого $x \in F(\xi)$ выполнено $\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma) \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\nu_k}$, а для любого $x \in F(\xi_{k',i'})$ выполнено $\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma) \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\nu_{k'}}$. Так как отображение F согласовано со структурой дерева $\mathcal{T}$ (см. определение 1.1.1 и теорему 1.1.1), то $F(\xi)$ и $F(\xi_{k',i'})$ пересекаются по $d-1$-мерной грани. Значит, $2^{-\nu_k} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\nu_{k'}}$. Отсюда следует утверждение. □

Лемма 4.1.2. *Предположим, что выполнено (37). Пусть $\hat{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant \hat{\nu}$, $\hat{\xi} \in \hat{\mathbf{W}}_{\hat{\nu}}$. Обозначим*

$$\hat{\mathbf{W}}_\nu(\hat{\xi}) = \hat{\mathbf{W}}_\nu \cap \mathbf{V}(\mathcal{T}_{\hat{\xi}}). \tag{4.22}$$

Тогда

$$\mathrm{card}\, \hat{\mathbf{W}}_\nu(\hat{\xi}) \underset{a,d,c_0}{\lesssim} \frac{h(2^{-\hat{\nu}})}{h(2^{-\nu})}. \tag{4.23}$$

Если при этом $\hat\xi$ является корнем дерева $\mathcal{T}$, то найдется такое $\hat k = \hat k(a,\, d) \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{j=\nu}^{\nu+\hat k} \operatorname{card} \hat{\mathbf{W}}_j(\hat\xi) \underset{a,d,c_0}{\gtrsim} \frac{h(2^{-\hat\nu})}{h(2^{-\nu})}. \tag{4.24}$$

Доказательство. Всюду в доказательстве этой леммы будем считать, что куб — это произведение полуинтервалов вида $\prod_{j=1}^d [a_j,\, b_j)$. Тогда любые два неперекрывающиеся куба не пересекаются.

Если $\xi \in \hat{\mathbf{W}}_\nu$, то из (4.7) и (4.9) следует, что найдется такое $k_*(a,\, d)$, что $\nu - k_*(a,\, d) \leqslant m_\xi \leqslant \nu + k_*(a,\, d)$. Далее,

$$\operatorname{diam} \Omega_{\hat\xi} \overset{(4.4),(4.7)}{\underset{a,d}{\asymp}} 2^{-\hat\nu}. \tag{4.25}$$

Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $-k_*(a,\, d) \leqslant k \leqslant k_*(a,\, d)$. Обозначим $\hat{\mathbf{W}}_{\nu,k}(\hat\xi)$ множество элементов $\xi \in \hat{\mathbf{W}}_\nu(\hat\xi)$ таких, что $m_\xi = \nu + k$.

В силу (4.1) и (4.9),

$$\operatorname{dist}_{|\cdot|}(F(\xi),\, \Gamma) \leqslant 2^{-\nu+1}, \quad \xi \in \hat{\mathbf{W}}_\nu(\hat\xi),$$
$$\operatorname{dist}_{|\cdot|}(F(\hat\xi),\, \Gamma) \leqslant 2^{-\hat\nu+1}.$$

Отсюда и из (4.25) следует, что существуют куб Δ_0 и число $k_0 = k_0(a,\, d) \in \mathbb{Z}_+$ такие, что

$$F(\hat\xi) \in \Xi(\Delta_0), \quad \hat\nu - k_0(a,\, d) \leqslant \mathbf{m}(\Delta_0) \leqslant \hat\nu + k_0(a,\, d), \tag{4.26}$$

$$\Omega_{\hat\xi} \subset \Delta_0, \quad \exists \overline{x} \in \Gamma \cap \Delta_0 : \ \operatorname{dist}_{|\cdot|}(\overline{x},\, \partial\Delta_0) \underset{a,d}{\gtrsim} 2^{-\hat\nu}, \tag{4.27}$$

$$\forall \xi \in \hat{\mathbf{W}}_\nu(\hat\xi)\ \exists x \in \Gamma \cap \Delta_0 : \ \operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\, F(\xi)) \leqslant 2^{-\nu+1}. \tag{4.28}$$

Пусть $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant \hat\nu + k_*(a,\, d)$. Тогда, если $\Delta \in \Xi_j\left(\left[-\frac12,\, \frac12\right]^d\right)$, то либо $\Delta \subset \Delta_0$, либо Δ не перекрывается с Δ_0. Это следует из условий $F(\hat\xi) \in \Xi(\Delta_0)$ и $j \geqslant \hat\nu + k_*(a,\, d) \geqslant m_{\hat\xi}$. Обозначим через $\Delta_{0,j}$ куб, получающийся из Δ_0 гомотетией относительно его центра, со стороной длины $2^{-\mathbf{m}(\Delta_0)} + 2\cdot 2^{-j}$, и положим

$$\Theta_j(\Delta_0) = \left\{ \Delta \in \Xi_j\left(\left[-\frac12,\, \frac12\right]^d\right) :\ \Delta \subset \Delta_0,\ \Delta\cap\Gamma \ne \varnothing \right\},$$
$$\tilde\Theta_j(\Delta_0) = \left\{ \Delta \in \Xi_j\left(\left[-\frac12,\, \frac12\right]^d\right) :\ \Delta \subset \Delta_{0,j},\ \Delta\cap\Gamma \ne \varnothing \right\}.$$

Докажем, что

$$\operatorname{card} \Theta_j(\Delta_0) \underset{a,d,c_0}{\asymp} \frac{h(2^{-\hat\nu})}{h(2^{-j})}. \tag{4.29}$$

Пусть $\Delta \in \Theta_j(\Delta_0)$. Так как $\Delta\cap\Gamma \ne \varnothing$, то существует куб K_Δ с центром z_Δ такой, что

$$\Delta \in \Xi_1(K_\Delta), \quad \operatorname{dist}_{|\cdot|}(z_\Delta,\, \Gamma) \leqslant 2^{-\mathbf{m}(\Delta)-1}. \tag{4.30}$$

Тогда найдутся

$$\tilde z_\Delta \in \Gamma, \ \ t_\Delta \underset{d}{\gtrsim} 2^{-j}, \ \ \tilde t_\Delta \underset{d}{\lesssim} 2^{-j} \quad \text{такие, что} \quad B_{t_\Delta}(\tilde z_\Delta) \subset K_\Delta \subset B_{\tilde t_\Delta}(\tilde z_\Delta). \tag{4.31}$$

Пусть μ — мера из определения 5 (в частности, $\operatorname{supp}\mu \subset \Gamma$). Тогда из (35), (37) и (4.31) следует, что $\mu(K_\Delta) \underset{d,c_0}{\asymp} h(2^{-j})$. С другой стороны, в силу (37), второго утверждения в (4.26) и второго утверждения в (4.27),

$$h(2^{-\hat\nu}) \underset{a,d,c_0}{\asymp} \mu(\Delta_0) = \sum_{\Delta\in\Theta_j(\Delta_0)} \mu(\Delta),$$

$$h(2^{-\hat\nu}) \underset{a,d,c_0}{\asymp} \mu(\Delta_{0,j}) = \sum_{\Delta\in\tilde\Theta_j(\Delta_0)} \mu(\Delta).$$

Поэтому для доказательства (4.29) достаточно проверить, что $\sum\limits_{\Delta\in\Theta_j(\Delta_0)} \mu(\Delta) \leqslant \sum\limits_{\Delta\in\Theta_j(\Delta_0)} \mu(K_\Delta) \underset{d}{\lesssim} \sum\limits_{\Delta\in\tilde\Theta_j(\Delta_0)} \mu(\Delta)$. Первое неравенство следует из неотрицательности меры μ. Докажем второе неравенство. Так как $\Delta \in \Xi_1(K_\Delta)$, то $K_\Delta \subset \Delta_{0,j}$. Обозначим

$$\Theta_{j,\Delta} = \{\Delta' \in \tilde\Theta_j(\Delta_0) : \ \Delta' \subset K_\Delta\} \quad \text{для} \quad \Delta \in \Theta_j(\Delta_0),$$
$$\Theta'_{j,\Delta'} = \{\Delta \in \Theta_j(\Delta_0) : \ \Delta' \subset K_\Delta\} \quad \text{для} \quad \Delta' \in \tilde\Theta_j(\Delta_0).$$

Так как для любого $\Delta' \in \tilde\Theta_j(\Delta_0)$ выполнено $\operatorname{card}\Theta'_{j,\Delta'} \underset{d}{\lesssim} 1$, то

$$\sum_{\Delta\in\Theta_j(\Delta_0)} \mu(K_\Delta) = \sum_{\Delta\in\Theta_j(\Delta_0)} \sum_{\Delta'\in\Theta_{j,\Delta}} \mu(\Delta') \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\Delta'\in\tilde\Theta_j(\Delta_0)} \sum_{\Delta\in\Theta'_{j,\Delta'}} \mu(\Delta') \underset{d}{\lesssim} \sum_{\Delta'\in\tilde\Theta_j(\Delta_0)} \mu(\Delta').$$

Соотношение (4.29) доказано.

Докажем, что если $-k_*(a,\,d) \leqslant k \leqslant k_*(a,\,d)$, $\nu \geqslant \hat\nu + 2k_*(a,\,d)$, то

$$\operatorname{card}\hat{\mathbf{W}}_{\nu,k}(\hat\xi) \underset{a,d}{\lesssim} \operatorname{card}\Theta_{\nu+k}(\Delta_0) \tag{4.32}$$

(напомним, что $\Theta_j(\Delta_0)$ определялось для $j \geqslant \hat\nu + k_*(a,\,d)$).

Положим

$$A := \left\{\Delta' \in \Xi_{\nu+k}\left(\left[-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right]^d\right) : \ \exists\Delta \in \Theta_{\nu+k}(\Delta_0) : \ \operatorname{dist}_{|\cdot|}(\Delta',\,\Delta) \leqslant 2^{-\nu+1}\right\}.$$

Из (4.28) следует, что $\{F(\xi) \ : \ \xi \in \hat{\mathbf{W}}_{\nu,k}(\hat\xi)\} \subset A$ и $\operatorname{card}\hat{\mathbf{W}}_{\nu,k}(\hat\xi) \leqslant \operatorname{card} A \underset{a,d}{\lesssim} \operatorname{card}\Theta_{\nu+k}(\Delta_0)$.

Из (37), (4.29) и (4.32) следует (4.23) для $\nu \geqslant \hat\nu + 2k_*(a,\,d)$. Если $\nu < \hat\nu + 2k_*(a,\,d)$, то $2^{-\nu} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\hat\nu}$ (по условию леммы, $\nu \geqslant \hat\nu$); значит, $\frac{h(2^{-\hat\nu})}{h(2^{-\nu})} \overset{(37)}{\underset{a,d,c_0}{\asymp}} 1$. Это вместе с (4.7), (4.9), (4.26) и первым утверждением (4.27) дает (4.23).

Теперь докажем (4.24). Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant \hat\nu + k_*(a,\,d)$, $\Delta \in \Theta_l(\Delta_0)$ фиксированы, K_Δ и z_Δ — куб и его центр, определенные выше (см. (4.30)),

$$x_\Delta \in K_\Delta \cap \Gamma, \quad |x_\Delta - z_\Delta| \leqslant 2^{-\mathbf{m}(\Delta)-1}. \tag{4.33}$$

Так как $\Gamma \subset \partial\Omega$, то в силу теоремы C и биективности отображения F для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется вершина $\xi_\Delta = \xi_\Delta(m) \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ такая, что

$$\operatorname{dist}(x_\Delta,\, F(\xi_\Delta)) < 2^{-m}, \quad 2^{-m_{\xi_\Delta}} \underset{d}{\lesssim} 2^{-m}. \tag{4.34}$$

Если m достаточно велико, то из (4.33) и (4.34) следует, что $F(\xi_\Delta) \subset K_\Delta$. Обозначим $\eta_\Delta = \min\{\eta \in [\hat{\xi},\, \xi_\Delta] :\ F(\eta) \subset K_\Delta\}$. Докажем, что найдется такое $M = M(\Delta,\, a,\, d)$, что

$$2^{-m_{\eta_\Delta}} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-l} \quad \text{и} \quad \eta_\Delta \in \hat{\mathbf{W}} \quad \text{при} \quad m \geqslant M. \tag{4.35}$$

В самом деле, так как $\Delta \in \Theta_l(\Delta_0)$, то

$$2^{-\mathbf{m}(\Delta)} = 2^{-l}. \tag{4.36}$$

Из включения $F(\eta_\Delta) \subset K_\Delta$ и первого соотношения (4.30) следует, что $2^{-m_{\eta_\Delta}} \lesssim 2^{-\mathbf{m}(\Delta)}$. Проверим, что $2^{-m_{\eta_\Delta}} \underset{a,d}{\gtrsim} 2^{-\mathbf{m}(\Delta)}$. Рассмотрим два случая.

Пусть $\partial F(\eta_\Delta) \cap \partial K_\Delta = \varnothing$. Если $\eta_\Delta = \hat{\xi}$, то

$$2^{-m_{\eta_\Delta}} = 2^{-m_{\hat{\xi}}} \overset{(4.7)}{\underset{a,d}{\asymp}} 2^{-k_{\hat{\xi}}} \overset{(4.9)}{=} 2^{-\hat{\nu}} \geqslant 2^{-l} \overset{(4.36)}{=} 2^{-\mathbf{m}(\Delta)}$$

(здесь использовались условия $\hat{\xi} \in \hat{\mathbf{W}}_{\hat{\nu}}$ и $l \geqslant \hat{\nu} + k_*(a,\, d) \geqslant \hat{\nu}$). Пусть $\eta_\Delta \neq \hat{\xi}$, $\tilde{\eta}_\Delta$ — вершина, предшествующая η_Δ. Тогда $\dim(F(\eta_\Delta) \cap F(\tilde{\eta}_\Delta)) = d - 1$ (см. определение 1.1.1 и теорему 1.1.1). Из определения η_Δ следует, что либо $F(\tilde{\eta}_\Delta)$ не перекрывается с K_Δ, либо $F(\tilde{\eta}_\Delta)$ содержит хотя бы один из кубов, принадлежащих $\Xi_1(K_\Delta)$. Первый случай невозможен, так как $\partial F(\eta_\Delta) \cap \partial K_\Delta = \varnothing$. Во втором случае $\mathbf{m}(\Delta) \geqslant m_{\tilde{\eta}_\Delta} \geqslant m_{\eta_\Delta} - 2$ (см. теорему C).

Пусть теперь $\partial F(\eta_\Delta) \cap \partial K_\Delta \neq \varnothing$. Возьмем $\hat{x} \in \partial F(\eta_\Delta) \cap \partial K_\Delta$. Тогда $|\hat{x} - z_\Delta| \overset{(4.30)}{=} 2^{-\mathbf{m}(\Delta)}$. В силу (4.34), найдется точка $\hat{y} \in F(\xi_\Delta)$ такая, что $|x_\Delta - \hat{y}| \leqslant 2^{-m}$. Так как $F(\xi_\Delta) \subset \Omega_{\eta_\Delta}$, то

$$2^{-m_{\eta_\Delta}} \overset{(4.4)}{\underset{a,d}{\gtrsim}} \operatorname{diam}_{|\cdot|}\Omega_{\eta_\Delta} \geqslant |\hat{x} - \hat{y}| \geqslant$$
$$\geqslant |\hat{x} - z_\Delta| - |z_\Delta - x_\Delta| - |x_\Delta - \hat{y}| \overset{(4.33)}{\geqslant} 2^{-\mathbf{m}(\Delta)-1} - 2^{-m} \geqslant 2^{-\mathbf{m}(\Delta)-2}$$

при больших m.

Первое соотношение (4.35) доказано. Проверим второе соотношение. Пусть $\eta_\Delta \notin \hat{\mathbf{W}}$. Тогда, в силу (4.8), для любого $x \in \Omega_{\eta_\Delta}$ выполнено $\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma) \underset{a,d}{\asymp} 2^{-k_{\eta_\Delta}}$. Взяв $x \in F(\xi_\Delta) \subset \Omega_{\eta_\Delta}$, получаем

$$2^{-m_{\eta_\Delta}} \overset{(4.2)}{\underset{d}{\lesssim}} 2^{-k_{\eta_\Delta}} \underset{a,d}{\asymp} \operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma) \leqslant |x - x_\Delta| \overset{(4.34)}{\underset{d}{\lesssim}} 2^{-m}.$$

Из уже доказанного первого соотношения (4.35) следует, что $2^{-l} \underset{a,d}{\lesssim} 2^{-m}$, что невозможно при больших m.

Из (4.7), (4.9) и (4.35) следует, что $\eta_\Delta \in \hat{\mathbf{W}}_j$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}_+$ такого, что $2^{-j} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-l}$. Поэтому $l - l_* \leqslant j \leqslant l + l_*$ для некоторого $l_* = l_*(a,\, d) \in \mathbb{N}$; при этом можно считать, что $l_*(a,\, d) \geqslant k_*(a,\, d)$. Значит,

$$\operatorname{card}\{\eta_\Delta :\ \Delta \in \Theta_l(\Delta_0)\} \leqslant \sum_{j=l-l_*}^{l+l_*} \operatorname{card} \hat{\mathbf{W}}_j. \tag{4.37}$$

Положим $\hat{k} = 2l_*$. Возьмем $l = \nu + l_* \geqslant \hat{\nu} + k_*(a,\, d)$ и применим (4.37). Получаем

$$\operatorname{card}\{\eta_\Delta :\ \Delta \in \Theta_{\nu+l_*}(\Delta_0)\} \leqslant \sum_{j=\nu}^{\nu+\hat{k}} \operatorname{card} \hat{\mathbf{W}}_j.$$

Поэтому для доказательства (4.24) достаточно проверить соотношение

$$\operatorname{card}\Theta_l(\Delta_0) \underset{d}{\lesssim} \operatorname{card}\{\eta_\Delta :\ \Delta \in \Theta_l(\Delta_0)\} \tag{4.38}$$

и воспользоваться (4.29) и (37). Пусть $\Delta,\, \Delta' \in \Theta_l(\Delta_0)$, $\eta_\Delta = \eta_{\Delta'}$. Тогда $F(\eta_\Delta) \subset K_\Delta \cap K_{\Delta'}$, $2^{-l} \overset{(4.36)}{=} 2^{-\mathbf{m}(\Delta)} = 2^{-\mathbf{m}(\Delta')}$. В силу (4.30), $\Delta \in \Xi_1(K_\Delta)$ и $\Delta' \in \Xi_1(K_{\Delta'})$, поэтому $\operatorname{dist}_{|\cdot|}(\Delta,\, \Delta') \leqslant 2^{-l+2}$. Значит, $\operatorname{card}\{\Delta' :\ \Delta' \in \Theta_l(\Delta_0),\ \eta_{\Delta'} = \eta_\Delta\} \underset{d}{\lesssim} 1$, откуда следует (4.38). Лемма доказана. $\square$

Пусть $\{\mathcal{T}_{k,i}\}_{k\in\mathbb{Z}_+,\, i\in I_k}$ — разбиение дерева $\mathcal{T}$, построенное в лемме 4.1.1. Для $0 < t_0 < t_1 \leqslant \infty$ обозначим через $\mathcal{G}^{t_0,\,t_1}$ максимальный подграф в $\mathcal{T}$ на множестве вершин

$$\mathbf{V}(\mathcal{G}^{t_0,\,t_1}) := \bigcup_{t_0\leqslant\nu_k<t_1} \bigcup_{i\in I_k} \mathcal{T}_{k,i}.$$

Пусть $\overline{s}$ — из предложения 4.1.1, $j \in \mathbb{Z}_+$. Через $\{\mathcal{D}_{j,i}\}_{i\in\tilde{I}_j}$ обозначим множество связных компонент графа $\mathcal{G}^{1+\overline{s}j,\,1+\overline{s}(j+1)}$, а через $\hat{\xi}_{j,i}$ — минимальную вершину дерева $\mathcal{D}_{j,i}$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Определение 4.1.1. Пусть $\hat{\xi}_{j,i} < \hat{\xi}_{j',i'}$,

$$\{\xi :\ \hat{\xi}_{j,i} \leqslant \xi < \hat{\xi}_{j',i'}\} \subset \mathcal{D}_{j,i}.$$

Тогда скажем, что дерево $\mathcal{D}_{j',i'}$ следует за $\mathcal{D}_{j,i}$ или $\mathcal{D}_{j,i}$ предшествует $\mathcal{D}_{j',i'}$.

Сформулируем некоторые свойства разбиения $\{\mathcal{D}_{j,i}\}_{i\in\tilde{I}_j,\, j\in\mathbb{Z}_+}$.

1. $\hat{\xi}_{j,i} \in \hat{\mathbf{W}}_{\nu_k}$ для некоторого $\nu_k \in [1+\overline{s}j,\, 1+\overline{s}(j+1))$; в частности,

$$\operatorname{diam}\Omega_{\mathcal{D}_{j,i},F} \underset{a,d}{\overset{(4.10)}{\asymp}} 2^{-\overline{s}j}; \tag{4.39}$$

2. для любого $x \in \Omega_{\mathcal{D}_{j,i},F}$ выполнено

$$\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma) \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\overline{s}j} \tag{4.40}$$

(это следует из пункта 3 леммы 4.1.1);

3. если $\hat{\xi}_{j,i} < \hat{\xi}_{j',i'}$, то $j < j'$.

Докажем свойство 3. В самом деле, $\hat{\xi}_{j,i} = \xi_{k,t}$ и $\hat{\xi}_{j',i'} = \xi_{k',t'}$ для некоторых k, t, k', t'; в силу пунктов 4 и 1 леммы 4.1.1, $\nu_k < \nu_{k'}$, откуда следует, что $j \leqslant j'$. Пусть $j = j'$. Тогда найдется вершина $\hat{\xi}_{j'',i''} \leqslant \hat{\xi}_{j',i'}$ такая, что дерево $\mathcal{D}_{j'',i''}$ следует за $\mathcal{D}_{j,i}$. В силу уже доказанного, $j'' = j$. Но тогда максимальный подграф в $\mathcal{T}$ на множестве вершин $\mathbf{V}(\mathcal{D}_{j,i}) \cup \mathbf{V}(\mathcal{D}_{j'',i''})$ является связным и содержится в $\mathcal{G}^{1+\overline{s}j,\,1+\overline{s}(j+1)}$ — противоречие с определением $\mathcal{D}_{j,i}$.

Из (4.10) следует, что

$$\operatorname{diam}\Omega_{\mathcal{T}_{\hat{\xi}_{j,i}},F} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\overline{s}j}. \tag{4.41}$$

Замечание 4.1.1. Пусть дерево $\mathcal{D}_{j',i'}$ следует за $\mathcal{D}_{j,i}$. Тогда $j' = j+1$.

В самом деле, пусть $\xi_{t,s} \in \mathcal{D}_{j,i}$, $\{\xi : \xi_{t,s} \leqslant \xi < \hat{\xi}_{j',i'}\} \subset \mathbf{V}(\mathcal{T}_{t,s})$, $\hat{\xi}_{j',i'} = \xi_{t',s'}$. В силу предложения 4.1.1, $1 + \overline{s}j' \leqslant \nu_{t'} \leqslant \nu_t + \overline{s} < 1 + \overline{s}(j+1) + \overline{s}$. Значит, $\overline{s}(j'-j-1) < \overline{s}$. Так как $j' > j$, то последнее неравенство возможно только при $j' = j+1$.

Для $j \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \tilde{I}_j$ обозначим

$$\tilde{I}^l_{j,t} = \{i \in \tilde{I}_{j+l} : \hat{\xi}_{j+l,i} \geqslant \hat{\xi}_{j,t}\}. \tag{4.42}$$

Лемма 4.1.3. *Пусть выполнено (37) для некоторого $c_0 \geqslant c_* \geqslant 1$. Тогда*

$$\mathrm{card}\tilde{I}^l_{j,t} \underset{a,d,c_0}{\lesssim} \frac{h(2^{-\overline{s}j})}{h(2^{-\overline{s}(j+l)})}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $i \in \tilde{I}^l_{j,t}$. По свойству 1 деревьев $\mathcal{D}_{j,t}$ и $\mathcal{D}_{j+l,i}$,

$$\hat{\xi}_{j,t} \in \bigcup_{\nu'=1+\overline{s}j}^{\overline{s}(j+1)} \hat{\mathbf{W}}_{\nu'}, \quad \hat{\xi}_{j+l,i} \in \bigcup_{\nu=1+\overline{s}(j+l)}^{\overline{s}(j+l+1)} \hat{\mathbf{W}}_{\nu}(\hat{\xi}_{j,t})$$

(напомним, что $\hat{\mathbf{W}}_\nu(\hat{\xi}_{j,t}) \overset{(4.22)}{=} \hat{\mathbf{W}}_\nu \cap \mathbf{V}(\mathcal{T}_{\hat{\xi}_{j,t}})$). Поэтому из леммы 4.1.2 и (37) следует, что

$$\mathrm{card}\,\tilde{I}^l_{j,t} \leqslant \sum_{\nu=1+\overline{s}(j+l)}^{\overline{s}(j+l+1)} \mathrm{card}\,\hat{\mathbf{W}}_\nu(\hat{\xi}_{j,t}) \underset{a,d,c_0}{\lesssim} \frac{h(2^{-\overline{s}j})}{h(2^{-\overline{s}(j+l)})}.$$

Лемма доказана. □

4.2 Сведение задачи к дискретному неравенству типа Харди на дереве

Пусть $\{\mathcal{D}_{j,i}\}_{j\in\mathbb{Z}_+, i\in\tilde{I}_j}$ — разбиение дерева $\mathcal{T}$, определенное перед формулой (4.39). Через $j_{\min}$ обозначим минимальное $j \in \mathbb{Z}_+$, для которого $\tilde{I}_j \neq \varnothing$. Множество $\tilde{I}_{j_{\min}}$ одноточечно, поэтому можно считать, что $\tilde{I}_{j_{\min}} = \{1\}$. Для $j \geqslant j_{\min}$, $i \in \tilde{I}_j$, $l \in \mathbb{Z}_+$ множество $\tilde{I}^l_{j,i}$ зададим формулой (4.42).

Определение 4.2.1. Определим дерево $\mathcal{A}$ с множеством вершин $\{\eta_{j,i}\}_{j\geqslant j_{\min}, i\in\tilde{I}_j}$ и множеством ребер, заданных равенством

$$\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_1(\eta_{j,i}) = \{\eta_{j+1,s}\}_{s\in\tilde{I}^1_{j,i}}, \quad j \geqslant j_{\min}. \tag{4.43}$$

В частности, $\eta_{j_{\min},1}$ — минимальная вершина $\mathcal{A}$.

Предложение 4.2.1. *Выполнено равенство*

$$\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_l(\eta_{j,i}) = \{\eta_{j+l,t} : t \in \tilde{I}^l_{j,i}\}, \quad j,\ l \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.44}$$

В частности, $\eta_{j,i} \leqslant \eta_{j',i'}$ тогда и только тогда, когда $\hat{\xi}_{j,i} \leqslant \hat{\xi}_{j',i'}$.

Доказательство. Если $l = 0$ или $l = 1$, то это выполнено по построению дерева $\mathcal{A}$. Пусть (4.44) доказано для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Докажем утверждение для $l+1$. По предположению индукции,

$$\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{l+1}(\eta_{j,i}) = \bigcup_{\xi\in\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_l(\eta_{j,i})} \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_1(\xi) = \bigcup_{t\in\tilde{I}^l_{j,i}} \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_1(\eta_{j+l,t}) \overset{(4.43)}{=} \bigcup_{t\in\tilde{I}^l_{j,i}} \{\eta_{j+l+1,s} : s \in \tilde{I}^1_{j+l,t}\} \overset{(4.42)}{=}$$

$$= \bigcup_{t\in \tilde I^l_{j,i}} \{\eta_{j+l+1,s}:\ s\in \tilde I_{j+l+1},\ \hat\xi_{j+l+1,s}\geqslant \hat\xi_{j+l,t}\} =$$
$$= \{\eta_{j+l+1,s}:\ s\in \tilde I_{j+l+1},\ \exists t\in \tilde I^l_{j,i}:\ \hat\xi_{j+l+1,s}>\hat\xi_{j+l,t}\}.$$

Докажем, что

$$\{s\in \tilde I_{j+l+1}:\ \exists t\in \tilde I^l_{j,i}:\ \hat\xi_{j+l+1,s}>\hat\xi_{j+l,t}\} = \tilde I^{l+1}_{j,i}. \tag{4.45}$$

Отсюда будет следовать (4.44) для $l+1$.

Если $\hat\xi_{j+l+1,s}>\hat\xi_{j+l,t}$ для некоторого $t\in \tilde I^l_{j,i}$, то $\hat\xi_{j+l+1,s}>\hat\xi_{j,i}$, то есть $s\in \tilde I^{l+1}_{j,i}$. Обратно, пусть $s\in \tilde I^{l+1}_{j,i}$, $\mathcal{D}_{j',t}$ — дерево, предшествующее $\mathcal{D}_{j+l+1,s}$, $t\in \tilde I_{j'}$. В силу замечания 4.1.1, $j+l+1=j'+1$, т.е. $j'=j+l$. Значит, $\hat\xi_{j+l+1,s}>\hat\xi_{j+l,t}>\hat\xi_{j,i}$, $t\in \tilde I_{j+l}$, так что $t\in \tilde I^l_{j,i}$. Равенство (4.45) доказано. $\square$

В силу леммы 4.1.3 и предложения 4.2.1, для любых $j\geqslant j_0\geqslant j_{\min}$, и для любого $\xi\in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j_0}(\eta_{j_{\min},1})$ выполнено

$$\operatorname{card}\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j-j_0}(\xi) \underset{a,d,c_0}{\lesssim} \frac{h(2^{-\overline{s}j_0})}{h(2^{-\overline{s}j})}. \tag{4.46}$$

Пусть

$$u(\eta_{j,i}) = u_j = \varphi_g(2^{-\overline{s}j})\cdot 2^{-\left(r-\frac{d}{p}\right)\overline{s}j}, \quad w(\eta_{j,i}) = w_j = \varphi_v(2^{-\overline{s}j})\cdot 2^{-\frac{d\overline{s}j}{q}}, \tag{4.47}$$

$$\Omega[\eta_{j,i}] := \Omega_{j,i} := \Omega_{\mathcal{D}_{j,i},F}. \tag{4.48}$$

Далее, если $\mathcal{D}\subset\mathcal{A}$ — поддерево, то положим

$$\Omega[\mathcal{D}] = \cup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})}\Omega[\xi]. \tag{4.49}$$

Величина $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}$ определяется в соответствии с определением 4.

Теорема 4.2.1. *Пусть функции u, w определены формулой (4.47), $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}<\infty$. Тогда $W^r_{p,g}(\Omega)\subset L_{q,v}(\Omega)$ и для любой вершины $\xi_*\in\mathbf{V}(\mathcal{A})$ существует линейный непрерывный оператор $P: L_{q,v}(\Omega)\to\mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любого поддерева $\mathcal{D}\subset\mathcal{A}$ с минимальной вершиной ξ_* и для любой функции $f\in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено*

$$\|f-Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathcal{D}])} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w}\left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega[\mathcal{D}])}, \tag{4.50}$$

где $\mathfrak{Z}=(p,\,q,\,r,\,d,\,a,\,c_0)$.

Доказательство. Пусть $(\mathcal{A},\,\xi_0)$ — дерево, построенное выше. Если $j\geqslant j_{\min}$, $\xi=\eta_{j,i}\in\mathbf{V}(\mathcal{A})$, то положим

$$g_\xi = \varphi_g(2^{-\overline{s}j}), \ \ v_\xi = \varphi_v(2^{-\overline{s}j}). \tag{4.51}$$

В силу (36), (37), (4.39) и (4.40),

$$\operatorname{diam}\Omega[\xi] \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\overline{s}j}, \ \ g(x)\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} g_\xi,\ v(x)\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} v_\xi, \ \ x\in\Omega[\xi]. \tag{4.52}$$

Докажем, что $v\in L_q(\Omega)$. В самом деле, из (9), (4.51) и (4.52) следует, что для $j\geqslant j_{\min}$, $\xi\in\mathbf{V}^{\mathcal{A}}_j(\xi_0)$ выполнено $\|v\|_{L_q(\Omega[\xi])}\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} w(\xi)$, где функция w определена формулой (4.47). Так как $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}<\infty$, то $w\in l_q(\mathcal{A})$, а значит, $v\in L_q(\Omega)$.

Перейдем к доказательству включения $W^r_{p,g}(\Omega)\subset L_{q,v}(\Omega)$ и (4.50).

Шаг 1. Пусть $\xi_* = \eta_{j_0,i_0}$. Для краткости будем обозначать $\tilde\Omega = \Omega[\mathcal{D}]$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1.4.2, получаем, что достаточно доказать оценку

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega} v^q(x)\left(\int\limits_{G_x} g(y)\psi(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right)^q dx\right)^{1/q} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w}\|\psi\|_{L_p(\tilde\Omega)}; \tag{4.53}$$

здесь $G_x \subset \tilde\Omega$ таково, что

$$\{(x,\,y)\in\tilde\Omega\times\tilde\Omega:\ x\in\tilde\Omega,\, y\in G_x\}\quad \text{измеримо},$$

$$\text{если } x\in\Delta\subset\tilde\Omega,\ \ \Delta\in\Theta(\Omega),\ \text{то } G_x\subset\Omega_{\leqslant\Delta} \tag{4.54}$$

(см. обозначение (1.3)). Для построения линейного отображения P рассматривается ортогональный проектор из $L_2(B_{R_1/4}(x_*))$ на $\mathcal{P}_{r-1}(B_{R_1/4}(x_*))$, где R_1 — длина стороны куба $F(\hat\xi_{j_0,i_0})$), x_* — его центр. Так как $v\in L_q(\Omega)$, то из (4.52) следует, что $P: L_{q,v}(\Omega)\to L_{q,v}(\Omega)$ ограничен.

Шаг 2. Рассмотрим случай $r=d$. Тогда

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega} v^q(x)\left(\int\limits_{G_x} g(y)\psi(y)\,dy\right)^q dx\right)^{1/q} \overset{(4.54)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})}\int\limits_{\Omega[\xi]} v^q(x)\left(\sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi}\int\limits_{\Omega[\xi']} g(y)\psi(y)\,dy\right)^q dx\right)^{1/q} \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(4.52)}{\asymp}}$$

$$\asymp \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} v_\xi^q \int\limits_{\Omega[\xi]}\left(\sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi} g_{\xi'}\int\limits_{\Omega[\xi']}\psi(y)\,dy\right)^q dx\right)^{1/q} \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(4.47),(4.51),(4.52)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} w^q(\xi)\left(\sum_{\xi_*\leqslant\xi'\leqslant\xi} u(\xi')\|\psi\|_{L_p(\Omega[\xi'])}\right)^q\right)^{1/q} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}$$

$$\lesssim \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w}\left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})}\|\psi\|^p_{L_p(\Omega[\xi])}\right)^{1/p} = \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w}\|\psi\|_{L_p(\Omega[\mathcal{D}])}.$$

Шаг 3. Пусть $r\ne d$. Положим

$$G_x^1 = \{y\in G_x:\ |x-y|\geqslant 2\,\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma)\},$$
$$G_x^2 = \{y\in G_x:\ |x-y|< 2\,\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma)\}.$$

Тогда для доказательства (4.53) достаточно проверить неравенства

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega} v^q(x)\left(\int\limits_{G_x^1} g(y)\psi(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right)^q dx\right)^{1/q} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w}\|\psi\|_{L_p(\tilde\Omega)}, \tag{4.55}$$

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega} v^q(x)\left(\int\limits_{G_x^2} g(y)\psi(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right)^q dx\right)^{1/q} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w}\|\psi\|_{L_p(\tilde\Omega)}. \tag{4.56}$$

Докажем (4.55). Сначала проверим, что для $y \in G^1_x$ выполнено

$$|x-y| \underset{a,d}{\asymp} \mathrm{dist}_{|\cdot|}(y,\, \Gamma). \tag{4.57}$$

В самом деле,

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(y,\, \Gamma) \leqslant |x-y| + \mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma) \leqslant |x-y| + \frac{|x-y|}{2} = \frac{3|x-y|}{2}.$$

Докажем обратное неравенство. Пусть $y \in F(\omega)$, $\omega \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$. Из (4.54) следует, что $x \in \Omega_{\mathcal{T}_\omega,F}$. Из пункта 2 теоремы C следует, что $\mathrm{dist}_{|\cdot|}(y,\, \partial\Omega) \underset{d}{\asymp} 2^{-m_\omega}$. Значит,

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(y,\, \Gamma) \geqslant \mathrm{dist}_{|\cdot|}(y,\, \partial\Omega) \underset{d}{\asymp} 2^{-m_\omega} \overset{(4.4)}{\underset{a,d}{\gtrsim}} \mathrm{diam}\, \Omega_{\mathcal{T}_\omega,F} \geqslant |x-y|.$$

Тем самым, (4.57) доказано, и

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega} v^q(x) \left(\int\limits_{G^1_x} g(y)\psi(y)|x-y|^{r-d}\, dy\right)^q dx\right)^{1/q} \overset{(36)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \left(\int\limits_{\tilde\Omega} v^q(x) \left(\int\limits_{G^1_x} \tilde g(y)\psi(y)\, dy\right)^q dx\right)^{1/q},$$

где $\tilde g(y) = \varphi_{\tilde g}(\mathrm{dist}_{|\cdot|}(y,\, \Gamma))$, $\varphi_{\tilde g}(t) = \varphi_g(t)\cdot t^{r-d}$. Так как $\varphi_{\tilde g}(t)\cdot t^{d-\frac{d}{p}} = \varphi_g(t)\cdot t^{r-\frac{d}{p}}$, то остается применить оценку, полученную на предыдущем шаге.

Докажем (4.56). Если $y \in G^2_x$, то

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(y,\, \Gamma) \leqslant \mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma) + |x-y| \leqslant 3\, \mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma). \tag{4.58}$$

Пусть $x \in \Omega[\eta_{j,i}]$, $y \in \Omega[\eta_{j',i'}]$. Тогда $\hat\xi_{j',i'} \leqslant \hat\xi_{j,i}$ в силу (4.54). Из свойства 3 разбиения $\{\mathcal{D}_{j,i}\}_{j\in\mathbb{Z}_+, i\in\tilde I_j}$ (см. стр. 171) следует, что $j' \leqslant j$. В силу (4.40), $\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma) \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar sj}$, $\mathrm{dist}_{|\cdot|}(y,\, \Gamma) \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar sj'}$. Отсюда и из (4.58) следует, что найдется $j_* = j_*(a,\, d)$ такое, что $j - j_* \leqslant j' \leqslant j$.

В силу предложения 4.2.1, условие $\eta_{j',i'} \leqslant \eta_{j,i}$ эквивалентно условию $\hat\xi_{j',i'} \leqslant \hat\xi_{j,i}$.

Через $\mathcal{I}_{\eta_{j,i},j_*}$ обозначим максимальный подграф на множестве вершин

$$\mathbf{V}(\mathcal{I}_{\eta_{j,i},j_*}) = \bigcup_{j'\geqslant \max(j-j_*,\, j_0)} \bigcup_{\eta_{j',i'}\leqslant \eta_{j,i}} \mathbf{V}(\mathcal{D}_{j',i'})$$

(отметим, что в силу замечания 4.1.1, (4.42) и (4.43) он является деревом) и положим $\tilde\Omega[\eta_{j,i}] = \Omega_{\mathcal{I}_{\eta_{j,i},j_*},F}$. Тогда для $x \in \Omega[\eta_{j,i}]$ выполнено $G^2_x \subset \tilde\Omega[\eta_{j,i}]$. В силу (4.39), если $j \geqslant j' \geqslant j - j_*$ и $j' \geqslant j_0$, то $\mathrm{diam}\, \Omega_{\mathcal{D}_{j',i'},F} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar sj}$, поэтому

$$\mathrm{diam}\, \tilde\Omega[\eta_{j,i}] \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar sj}. \tag{4.59}$$

Кроме того, из (37), (4.51) и (4.52) следует, что

$$g(y) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} g_{\eta_{j,i}}, \quad y \in \tilde\Omega[\eta_{j,i}]. \tag{4.60}$$

Так как в силу (37) и (4.46) для любого $\eta_{j',i'} \in \mathbf{V}(\mathcal{D})$ выполнено

$$\mathrm{card}\, \{\eta_{j,i} \in \mathbf{V}(\mathcal{D}):\ j' \geqslant j - j_*,\ \eta_{j',i'} \leqslant \eta_{j,i}\} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 1,$$

то

$$\left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})}\|\psi\|^p_{L_p(\tilde\Omega[\xi])}\right)^{1/p} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \|\psi\|_{L_p(\tilde\Omega)}. \tag{4.61}$$

Имеем

$$\left(\int\limits_{\tilde\Omega} v^q(x)\left(\int\limits_{G^2_x} g(y)\psi(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right)^q dx\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})}\int\limits_{\Omega[\xi]} v^q(x)\left(\int\limits_{\tilde\Omega[\xi]} g(y)\psi(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right)^q dx\right)^{1/q} \overset{(4.52),(4.60)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}}$$

$$\asymp \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} g^q_\xi v^q_\xi \int\limits_{\Omega[\xi]}\left(\int\limits_{\tilde\Omega[\xi]} \psi(y)|x-y|^{r-d}\,dy\right)^q dx\right)^{1/q} =: S.$$

Пусть $\xi=\eta_{j,i}$. В силу (4.52) и (4.59), $\Omega[\xi]$ и $\tilde\Omega[\xi]$ содержатся в шаре радиуса

$$R_\xi \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\overline{s}j} \tag{4.62}$$

(при этом $\Omega[\xi]\subset\tilde\Omega[\xi]$). Применяя теорему E и неравенство Гельдера, получаем

$$S \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} g^q_\xi v^q_\xi R^{\delta q}_\xi \|\psi\|^q_{L_p(\tilde\Omega[\xi])}\right)^{1/q} =: S_1.$$

Оценим S_1. Так как для функций $\tilde f:\mathbf{V}(\mathcal{D})\to\mathbb{R}_+$ выполнено

$$\|S_{u,w,\mathcal{D}}\tilde f\|_{l_q(\mathcal{D})} \geqslant \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} w^q(\xi)u^q(\xi)\tilde f^q(\xi)\right)^{\frac1q}$$

(см. определение 4), то

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w} \geqslant \begin{cases} \sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} u(\xi)w(\xi), & \text{если} \quad p\leqslant q, \\ \left(\sum\limits_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} (u(\xi)w(\xi))^{\frac{pq}{p-q}}\right)^{\frac1q-\frac1p}, & \text{если} \quad p>q. \end{cases} \tag{4.63}$$

В самом деле, если $p\leqslant q$, то рассматриваем $\tilde f(\xi)=1$ при $\xi=\tilde\xi$, $\tilde f(\xi)=0$ при $\xi\ne\tilde\xi$, и затем берем супремум по $\tilde\xi$. При $p>q$ утверждение следует из того, что точная константа в неравенстве Гельдера равна 1.

Если $p\leqslant q$, то

$$S_1 \leqslant \sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} g_\xi v_\xi R^\delta_\xi \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})}\|\psi\|^p_{L_p(\tilde\Omega[\xi])}\right)^{\frac1p} \overset{(4.47),(4.51),(4.61),(4.62)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} u(\xi)w(\xi)\|\psi\|_{L_p(\tilde\Omega)} \overset{(4.63)}{\leqslant} \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w}\|\psi\|_{L_p(\tilde\Omega)}.$$

Если $p > q$, то в силу неравенства Гельдера

$$S_1 \leqslant \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} \left(g_\xi v_\xi R_\xi^\delta\right)^{\frac{pq}{p-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} \|\psi\|^p_{L_p(\tilde\Omega[\xi])}\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(4.47),(4.51),(4.61),(4.62)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \left(\sum_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} [u(\xi)w(\xi)]^{\frac{pq}{p-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|\psi\|_{L_p(\tilde\Omega)} \overset{(4.63)}{\leqslant} \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w}\|\psi\|_{L_p(\tilde\Omega)}.$$

Теорема доказана. □

4.3 Достаточные условия вложения весовых классов Соболева

В этом параграфе доказываются теоремы 9, 10 и 11. Для этого используются результаты главы 3 и теорема 4.2.1.

Дерево $(\mathcal{A}, \xi_0)$ задается в соответствии с определением 4.2.1. В случае $1 < p < q < \infty$ получаем следующий результат.

Теорема 4.3.1. *Пусть u, w определены формулой (4.47), $1 < p < q < \infty$. Предположим, что существуют $l_0 \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in (0, 1)$ такие, что*

$$\frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi'})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}} \leqslant \lambda, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}), \quad \xi' \in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{l_0}(\xi). \tag{4.64}$$

Пусть $\sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{A})} u(\xi)\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)} < \infty$. Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и для любой вершины $\xi_* \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ существует линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любого поддерева $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ с минимальной вершиной ξ_* и для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathcal{D}])} \underset{\mathfrak{Z},\lambda,l_0}{\lesssim} \sup_{\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})} u(\xi)\|w\|_{l_q(\mathcal{D}_\xi)} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega[\mathcal{D}])}.$$

Доказательство. В силу теоремы 4.2.1, достаточно проверить условия теоремы 4. Соотношение (18) и первое неравенство (19) следует из (4.46), (4.47) и (37). Второе соотношение (19) следует из (4.64). □

Докажем теоремы 9, 10 и 11. Для этого будем применять теоремы 4.2.1, 4, 7 и 8.

Для дерева $(\mathcal{D}, \xi_0)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $[\mathcal{D}]_{\leqslant n}$ поддерево в $\mathcal{D}$ такое, что

$$\mathbf{V}([\mathcal{D}]_{\leqslant n}) = \cup_{j=0}^n \mathbf{V}_j^{\mathcal{D}}(\xi_0);$$

кроме того, положим

$$\mathbf{V}_{\geqslant n}(\mathcal{D}) = \cup_{j\geqslant n}\mathbf{V}_j^{\mathcal{D}}(\xi_0).$$

Если граф $\mathcal{G}$ является дизъюнктным объединением деревьев $(\mathcal{D}_i, \xi_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то полагаем $\mathbf{V}_{\geqslant n}(\mathcal{G}) = \cup_{i=1}^m \mathbf{V}_{\geqslant n}(\mathcal{D}_i)$.

Пусть $\xi_* = \eta_{j_0,i_0} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant j_0$, $\mathcal{D} = [\mathcal{A}_{\xi_*}]_{\leqslant N-j_0}$. Получим оценку сверху для величины $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w}$. Отметим, что дерево $\mathcal{D}$ может не удовлетворять условию (25), которое использовалось в теоремах 8 и 7: из (4.46) следует только оценка сверху для количества вершин. Поэтому нам понадобятся дополнительные построения.

Пространством однородного типа называется множество X с квазиметрикой[1] ρ и неотрицательной борелевской мерой μ такой, что $\mu(B(x,\,2R)) \leqslant A_1\mu(B(x,\,R))$, где $B(x,\,R)$ — шар радиуса R с центром в точке x и A_1 не зависит от x, R. В частности, если функция $h \in \mathbb{H}$ удовлетворяет (37), то h-множество в $\mathbb{R}^d$ (с метрикой, индуцированной стандартной метрикой на $\mathbb{R}^d$, и мерой μ из определения 5) является пространством однородного типа.

В работе М. Криста [82] было построено разбиение пространства однородного типа на множества, являющиеся аналогами диадических кубов. Сформулируем частный случай его результата для h-множества $\Gamma \subset \left[-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right]^d$.

Теорема L. [82]. *Для любого $m \geqslant 4$ существует семейство открытых в Γ подмножеств $\{\Delta_{j,i}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\,i\in\hat{I}_j} \subset \Gamma$ со следующими свойствами:*

1. $\mu\left(\Gamma\backslash \cup_{i\in\hat{I}_j}\Delta_{j,i}\right) = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$;
2. *если $l \geqslant k$, то либо $\Delta_{l,i} \subset \Delta_{k,t}$, либо $\Delta_{l,i} \cap \Delta_{k,t} = \varnothing$;*
3. *для любого $(j,\,i)$ и $l < j$ существует единственное $t \in \hat{I}_l$ такое, что $\Delta_{l,t} \supset \Delta_{j,i}$;*
4. $\operatorname{diam}\Delta_{j,i} \leqslant 8\cdot 2^{-mj}$;
5. *каждое множество $\Delta_{j,i}$ содержит шар множества Γ радиуса $R_j = \frac{1}{16}\cdot 2^{-mj}$ (т.е. существует $z_{j,i} \in \Gamma$ такое, что $\{x \in \Gamma:\ |x - z_{j,i}| \leqslant R_j\} \subset \Delta_{j,i}$).*

При этом, можно считать, что $\hat{I}_0 = \{1\}$.

Замечание 4.3.1. Условие $m \geqslant 4$, а также константы 8 и $\frac{1}{16}$ в пунктах 4 и 5 получаются из оценок, возникающих при доказательстве теоремы в частном случае, когда квазиметрика является метрикой (см. стр. 608–609 работы [82]).

Замечание 4.3.2. Из (35) и утверждения 1 теоремы L следует, что $\cup_{i\in\hat{I}_j}\Delta_{j,i}$ всюду плотно в Γ.

Семейству множеств $\{\Delta_{j,i}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\,i\in\hat{I}_j}$ соответствует дерево $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}(m)$ с множеством вершин $\{\zeta_{j,i}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\,i\in\hat{I}_j}$ и такое, что $\zeta_{j',i'} \in \mathbf{V}_1^{\hat{\mathcal{A}}}(\zeta_{j,i})$ тогда и только тогда, когда $j' = j+1$ и $\Delta_{j',i'} \subset \Delta_{j,i}$.

Пусть $m = \overline{s}(a,\,d)$ (напомним, что $\overline{s} \geqslant 4$; см. предложение 4.1.1).

Предложение 4.3.1. *Выполнено соотношение*

$$c_0^{-9}\frac{h(2^{-\overline{s}j'})}{h(2^{-\overline{s}j''})} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{V}^{\hat{\mathcal{A}}}_{j''-j'}(\zeta) \leqslant c_0^{9}\frac{h(2^{-\overline{s}j'})}{h(2^{-\overline{s}j''})}, \quad j'' \geqslant j', \quad \zeta \in \mathbf{V}^{\hat{\mathcal{A}}}_{j'}(\zeta_{0,1}). \tag{4.65}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\zeta = \zeta_{j',i}$. Тогда

$$\operatorname{card}\mathbf{V}^{\hat{\mathcal{A}}}_{j''-j'}(\zeta) = \operatorname{card}\{t \in \hat{I}_{j''}:\ \Delta_{j'',t} \subset \Delta_{j',i}\}.$$

Из теоремы L (пункты 4, 5), (35) и (37) следует, что $c_0^{-5}h(2^{-\overline{s}j'}) \leqslant \mu(\Delta_{j',i}) \leqslant c_0^4 h(2^{-\overline{s}j'})$, $c_0^{-5}h(2^{-\overline{s}j''}) \leqslant \mu(\Delta_{j'',t}) \leqslant c_0^4 h(2^{-\overline{s}j''})$, а из пунктов 1, 2 теоремы L следует, что

$$\sum_{t:\,\Delta_{j'',t}\subset\Delta_{j',i}} \mu(\Delta_{j'',t}) = \mu(\Delta_{j',i}).$$

Отсюда получаем (4.65). $\square$

[1]Квазиметрика — это следующее обобщение метрики: вместо неравенства треугольника выполнено неравенство $\rho(x,\,z) \leqslant C\rho(x,\,y) + C\rho(y,\,z)$ с некоторой абсолютной константой $C \geqslant 1$.

Лемма 4.3.1. *Пусть* $\xi_* = \eta_{j_0,t_0} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$, $j_0 < N < \infty$, $\mathcal{D} = [\mathcal{A}_{\xi_*}]_{\leqslant N-j_0}$, u_*, w_* : $\mathbf{V}(\hat{\mathcal{A}}) \to (0, \infty)$, $u_*(\zeta_{j,i}) = u_j$, $w_*(\zeta_{j,i}) = w_j$, *где* u_j, w_j *определены формулой (4.47). Тогда существует* $i_0 \in \hat{I}_{j_0}$ *такое, что для дерева* $\mathcal{D}_* = \hat{\mathcal{A}}_{\zeta_{j_0,i_0}} \cap [\hat{\mathcal{A}}]_{\leqslant N}$ *выполнено* $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w} \underset{a,d,c_0,p,q}{\lesssim} \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D}_*,u_*,w_*}$.

Перед тем, как доказывать эту лемму, введем некоторые обозначения.

Для дерева $(\mathcal{D}, \xi_*)$, вершины $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{D})\backslash \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})$ и разбиения $T = \{A_j\}_{j=1}^n$ множества $\mathbf{V}_1^{\mathcal{D}}(\xi)$ на непустые подмножества определим граф $G_{\xi,T}(\mathcal{D})$ в соответствии с определением 3.3.1.

Замечание 4.3.3. Выполнены равенства $\mathbf{V}_{\max}(G_{\xi,T}(\mathcal{D})) = \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})$, $\mathbf{V}_1^{G_{\xi,T}(\mathcal{D})}(\eta_j) = A_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ (η_j — из определения 3.3.1).

Пусть $\overline{u}$, $\overline{w}$: $\mathbf{V}(\mathcal{D}) \to (0, \infty)$. Определим веса $\overline{u}_{\xi,T}$ и $\overline{w}_{\xi,T}$ на графе $G_{\xi,T}(\mathcal{D})$ в соответствии с определением 3.3.2.

Из определений 3.3.1, 3.3.2 и леммы 3.3.1 следует

Предложение 4.3.2. *Пусть* $(\mathcal{D}, \xi_*)$ — *дерево,* $\overline{u}, \overline{w} : \mathbf{V}(\mathcal{D}) \to (0, \infty)$. *Пусть* $j \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbf{V}_j^{\mathcal{D}}(\xi_*)\backslash \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D}) = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$, T_k — *разбиения множеств* $\mathbf{V}_1^{\mathcal{D}}(\xi_k)$, $\operatorname{card} T_k \leqslant C$, $1 \leqslant k \leqslant m$. *Положим*

$$\tilde{\mathcal{D}} = G_{\xi_m,T_m}(\ldots G_{\xi_2,T_2}(G_{\xi_1,T_1}(\mathcal{D}))),$$
$$\tilde{u} = (((\overline{u})_{\xi_1,T_1})_{\xi_2,T_2} \ldots)_{\xi_m,T_m}, \quad \tilde{w} = (((\overline{w})_{\xi_1,T_1})_{\xi_2,T_2} \ldots)_{\xi_m,T_m}.$$

Обозначим $\mathbf{W} = \mathbf{V}_j^{\tilde{\mathcal{D}}}(\xi_*)\backslash \mathbf{V}_{\max}(\tilde{\mathcal{D}})$, *если* $j \geqslant 1$, *и* $\mathbf{W} = \mathbf{V}_{\min}(\tilde{\mathcal{D}})$, *если* $j = 0$. *Тогда*

1. $\mathbf{V}_{\max}(\tilde{\mathcal{D}}) = \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})$, $\mathbf{V}(\tilde{\mathcal{D}})\backslash \mathbf{W} = \mathbf{V}(\mathcal{D})\backslash(\mathbf{V}_j^{\mathcal{D}}(\xi_*)\backslash \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D}))$;
2. $[\tilde{\mathcal{D}}]_{\leqslant j-1} = [\mathcal{D}]_{\leqslant j-1}$, $\mathbf{V}_{\geqslant j'}(\tilde{\mathcal{D}}) = \mathbf{V}_{\geqslant j'}(\mathcal{D})$, $j' \geqslant j+1$, *и для любого* $\xi \in \mathbf{V}([\mathcal{D}]_{\leqslant j-1})$ *выполнено* $\mathbf{V}_{\max}(\tilde{\mathcal{D}}) \cap \mathbf{V}(\tilde{\mathcal{D}}_\xi) = \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D}) \cap \mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi)$;
3. *для любой вершины* $\xi \in \mathbf{W}$ *найдется* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *такое, что* $\mathbf{V}_1^{\tilde{\mathcal{D}}}(\xi) \in T_k$;
4. *если* $\xi \in \mathbf{V}(\tilde{\mathcal{D}})\backslash \mathbf{W}$, *то* $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{D})$ *и* $\tilde{u}(\xi) = \overline{u}(\xi)$, $\tilde{w}(\xi) = \overline{w}(\xi)$; *если* $\xi \in \mathbf{W}$, *то* $\tilde{u}(\xi) \underset{C}{\asymp} \overline{u}(\xi)$, $\tilde{w}(\xi) \underset{C}{\asymp} \overline{w}(\xi)$;
5. $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},\overline{u},\overline{w}} \leqslant \mathfrak{S}^{p,q}_{\tilde{\mathcal{D}},\tilde{u},\tilde{w}}$.

Доказательство леммы 4.3.1. Положим $\Theta_j = \{\Delta_{j,t}\}_{t\in \hat{I}_j}$ (см. теорему L).

Шаг 1. Пусть ξ — максимальная вершина дерева $\mathcal{D}$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_{j-j_0}(\xi_*)$, $j_0+1 \leqslant j \leqslant N$. Из (4.40), (4.48) и замечания 4.3.2 следует, что существует множество $\Delta(\xi) \in \Theta_j$ такое, что

$$\operatorname{dist}(\Omega[\xi], \Delta(\xi)) \underset{a,d}{\lesssim} 2^{-\overline{s}j}. \tag{4.66}$$

Обозначим $\Phi(\xi) = \{\Delta(\xi)\}$.

Пусть теперь $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_{j-j_0}(\xi_*)$ не является максимальной. Положим

$$\Phi(\xi) = \{K \in \Theta_j :\ \exists \zeta \in \mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi) \cap \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D}),\ \Delta(\zeta) \subset K\}. \tag{4.67}$$

Пусть $K \in \Phi(\xi)$, вершина ζ — такая, как в (4.67). Тогда $\zeta \geqslant \xi$, так что $\zeta = \eta_{j',i'}$, $j' \geqslant j$, $i' \in \tilde{I}_{j'}$, и $\Omega[\zeta]{\subset}\Omega_{\mathcal{T}_{\hat{\xi}_{j,i}},F}$ в силу (4.42), (4.44) и (4.48). Из (4.39), (4.41) и (4.48) следует, что

$$\operatorname{diam}\Omega[\xi] \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\overline{s}j}, \quad \operatorname{diam}\Omega[\zeta] \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\overline{s}j'}, \quad \operatorname{dist}(\Omega[\zeta], \Omega[\xi]){\underset{a,d}{\lesssim}}2^{-\overline{s}j}. \tag{4.68}$$

Поэтому

$$\mathrm{dist}\,(K,\,\Omega[\xi]) \overset{(4.67)}{\leqslant} \mathrm{dist}\,(\Delta(\zeta),\,\Omega[\zeta]) + \mathrm{diam}\,\Omega[\zeta] + \mathrm{dist}\,(\Omega[\zeta],\,\Omega[\xi]) \underset{a,d,c_0}{\overset{(4.66),(4.68)}{\lesssim}} 2^{-\overline{s}j}. \tag{4.69}$$

В силу (4.67), (4.68) и (4.69) и пункта 4 теоремы L,

$$\mathrm{diam}\,\{x\in K:\; K\in\Phi(\xi)\} \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 2^{-\overline{s}j}.$$

С другой стороны, элементы Θ_j попарно не пересекаются и содержат шар в Γ радиуса $R_j \asymp 2^{-\overline{s}j}$ (см. пункты 2 и 5 теоремы L). Попарные расстояния между центрами этих шаров больше R_j, поэтому

$$\mathrm{card}\,\Phi(\xi) \underset{a,d,c_0}{\overset{(35),(37)}{\lesssim}} 1. \tag{4.70}$$

Шаг 2. Построим граф $\mathcal{G}_{j_0}$ и функции $u^{(j_0)}$, $w^{(j_0)}$: $\mathbf{V}(\mathcal{G}_{j_0}) \to (0,\,\infty)$ со следующими свойствами:

1. $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w} \leqslant \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{G}_{j_0},u^{(j_0)},w^{(j_0)}}$;
2. $\mathcal{G}_{j_0}$ является конечным объединением деревьев $(\tilde{\mathcal{D}}_l,\,\tilde{\xi}_l)$, $1\leqslant l\leqslant l_* \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1$, таких, что $\mathbf{V}^{\tilde{\mathcal{D}}_l}_k(\tilde{\xi}_l)=\varnothing$ при $k>N-j_0$;
3. если $\xi\in\mathbf{V}^{\tilde{\mathcal{D}}_l}_{j'-j_0}(\tilde{\xi}_l)$, $j_0\leqslant j'\leqslant N$, то $u^{(j_0)}(\xi) \underset{a,d,c_0}{\asymp} u_{j'}$, $w^{(j_0)}(\xi) \underset{a,d,c_0}{\asymp} w_{j'}$;
4. существует отображение $K_{j_0}:\mathbf{V}(\mathcal{G}_{j_0}) \to \cup_{j'=j_0}^{N}\Theta_{j'}$ со следующими свойствами:
   (a) если $\xi\in\mathbf{V}^{\tilde{\mathcal{D}}_l}_{j'-j_0}(\tilde{\xi}_l)$ для некоторого $l\in\{1,\,\dots,\,l_*\}$, $j_0\leqslant j'\leqslant N$, то $K_{j_0}(\xi)\in\Theta_{j'}$;
   (b) если $\xi<\xi'$, $\xi,\,\xi'\in\mathbf{V}(\mathcal{G}_{j_0})$, то $K_{j_0}(\xi)\supset K_{j_0}(\xi')$;
   (c) для любого $j_0\leqslant j'\leqslant N$, $1\leqslant l\leqslant l_*$, $Q\in\Theta_{j'}$ выполнено
   $$\mathrm{card}\,\{\xi\in\mathbf{V}^{\tilde{\mathcal{D}}_l}_{j'-j_0}(\tilde{\xi}_l):\; K_{j_0}(\xi)=Q\} \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1.$$

Этот граф будет получен на последнем шаге индукционного построения, которое описано ниже.

Шаг 3. Для $j_0\leqslant j\leqslant N$ определим граф $\mathcal{G}_j$ и функции $u^{(j)}$, $w^{(j)}:\mathbf{V}(\mathcal{G}_j)\to(0,\,\infty)$ со следующими свойствами:

1. $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w} \leqslant \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{G}_j,u^{(j)},w^{(j)}}$;
2. если $j\geqslant j_0+1$, то $\mathcal{G}_j$ является деревом с минимальной вершиной ξ_*, $\mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_k(\xi_*)=\varnothing$ при $k>N-j_0$, $[\mathcal{G}_j]_{\leqslant j-1-j_0}=[\mathcal{D}]_{\leqslant j-1-j_0}$, $u^{(j)}(\xi)=u(\xi)$, $w^{(j)}(\xi)=w(\xi)$ для $\xi\in\mathbf{V}([\mathcal{G}_j]_{\leqslant j-1-j_0})$;
3. если $j=j_0$, то $\mathcal{G}_{j_0}$ является конечным объединением деревьев $(\tilde{\mathcal{D}}_l,\,\tilde{\xi}_l)$, $1\leqslant l\leqslant l_* \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1$, таких, что $\mathbf{V}^{\tilde{\mathcal{D}}_l}_k(\tilde{\xi}_l)=\varnothing$ при $k>N-j_0$;

4. $\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j) = \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})$ и для любой вершины $\xi \in [\mathcal{G}_j]_{\leqslant j-1-j_0}$ выполнено $\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j)\cap \mathbf{V}((\mathcal{G}_j)_\xi) = \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D}) \cap \mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi)$;

5. $\mathbf{V}_{\geqslant j'-j_0}(\mathcal{G}_j) = \mathbf{V}_{\geqslant j'-j_0}(\mathcal{G}_{j'})$, $j' \geqslant j$;

6. если $\xi_{**} \in \mathbf{V}_{\min}(\mathcal{G}_j)$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_{j'-j_0}(\xi_{**})$, $j \leqslant j' \leqslant N$, то $u^{(j)}(\xi) \underset{a,d,c_0}{\asymp} u_{j'}$, $w^{(j)}(\xi) \underset{a,d,c_0}{\asymp} w_{j'}$;

7. существует отображение $K_j : \mathbf{V}_{\geqslant j-j_0}(\mathcal{G}_j) \to \cup_{j'=j}^N \Theta_{j'}$ со следующими свойствами:

   (a) $K_j|_{\mathbf{V}_{\geqslant j'-j_0}(\mathcal{G}_{j'})} = K_{j'}$, $j \leqslant j' \leqslant N$; если $\xi_{**} \in \mathbf{V}_{\min}(\mathcal{G}_j)$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_{j'-j_0}(\xi_{**})$, то $K_j(\xi) \in \Theta_{j'}$;

   (b) если $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j)$, то $K_j(\zeta) = \Delta(\zeta)$;

   (c) если $\xi < \xi'$, $\xi \in \mathbf{V}_{\geqslant j-j_0}(\mathcal{G}_j)$, то $K_j(\xi) \supset K_j(\xi')$;

   (d) если $j \geqslant j_0 + 1$, то для любого $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_{j-1-j_0}(\xi_*)\backslash \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j)$ существует разбиение T_ξ множества $\mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\xi)$ на непустые подмножества и биекция $b_\xi : \Phi(\xi) \to T_\xi$ такая, что
   $$b_\xi(\Delta) = \{\xi' \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\xi) : \ K_j(\xi') \subset \Delta\}; \tag{4.71}$$

   (e) если $\xi_{**} \in \mathbf{V}_{\min}(\mathcal{G}_j)$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_{j-j_0}(\xi_{**})$, то существует вершина $\xi' \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_{j-j_0}(\xi_*)$ такая, что $K_j(\xi) \in \Phi(\xi')$; при этом, если $\xi \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j)$, то $\xi' = \xi$, а если $\xi \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j)$, то $\xi' \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_{j+1})$ и $b_{\xi'}(K_j(\xi)) = \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\xi)$, где биекция $b_{\xi'}$ определена в соответствии с пунктом 7d для $j+1$;

   (f) для любых $\xi_{**} \in \mathbf{V}_{\min}(\mathcal{G}_j)$, $j' \geqslant j$, $Q \in \Theta_{j'}$ выполнено
   $$\operatorname{card}\{\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_{j'-j_0}(\xi_{**}) : \ K_j(\xi) = Q\} \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1.$$

   (Если $j = j_0$ и $\xi_{**} = \tilde{\xi}_l$, то $\mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_{j'-j_0}(\xi_{**}) := \mathbf{V}^{\tilde{\mathcal{D}}_l}_{j'-j_0}(\tilde{\xi}_l)$.)

Проведем индукцию по j.

База индукции. Положим $\mathcal{G}_N = \mathcal{D}$, $u^{(N)} = u$, $w^{(N)} = w$, $K_N(\xi) = \Delta(\xi)$, $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_{N-j_0}(\xi_*)$. Достаточно проверить свойства 7d и 7f.

Докажем 7d. Для $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_{N-1-j_0}(\xi_*)\backslash \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})$, $K \in \Phi(\xi)$ положим $b_\xi(K) = \{\zeta \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_1(\xi) : \ K \supset \Delta(\zeta)\}$. В силу (4.67), множество $b_\xi(K)$ непусто и для любого $\zeta \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_1(\xi)$ найдется множество $K \in \Phi(\xi)$ такое, что $\zeta \in b_\xi(K)$ (см. также пункт 3 теоремы L). Если K_1, $K_2 \in \Phi(\xi)$, $K_1 \neq K_2$, то $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ в силу пункта 2 теоремы L. Значит, $b_\xi(K_1) \cap b_\xi(K_2) = \varnothing$. Тем самым, $T_\xi := \{b_\xi(K) : \ K \in \Phi(\xi)\}$ является разбиением множества $\mathbf{V}^{\mathcal{D}}_1(\xi)$ и отображение b_ξ биективно.

Докажем 7f. Пусть $Q \in \Theta_N$. В силу пункта 4 теоремы L, $\operatorname{diam} Q \lesssim 2^{-\overline{s}N}$. С другой стороны, если $\zeta \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_{N-j_0}(\xi_*)$, то в силу (9), (4.39), (4.48) множество $\Omega[\zeta]$ содержит шар радиуса $\tilde{R} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\overline{s}N}$ и $\operatorname{diam}\Omega[\zeta] \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\overline{s}N}$. Отсюда и из (4.66) получаем утверждение (оценивается количество вершин $\zeta \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_{N-j_0}(\xi_*)$ таких, что $Q = \Delta(\zeta)$).

Индукционный переход. Пусть для $j_0 \leqslant j \leqslant N-1$ построены граф $\mathcal{G}_{j+1}$ и функции $u^{(j+1)}$, $w^{(j+1)} : \mathbf{V}(\mathcal{G}_{j+1}) \to (0, \infty)$ со свойствами 1–7. Определим граф $\mathcal{G}_j$.

Пусть $\mathbf{V}^{\mathcal{G}_{j+1}}_{j-j_0}(\xi_*)\backslash\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_{j+1}) = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$. Определим разбиения T_{ξ_k} множества $\mathbf{V}^{\mathcal{G}_{j+1}}_1(\xi_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и биекцию $b_{\xi_k} : \Phi(\xi_k) \to T_{\xi_k}$ в соответствии со свойством 7d дерева $\mathcal{G}_{j+1}$ и отображения K_{j+1}. Отметим, что

$$\operatorname{card} T_{\xi_k} = \operatorname{card} \Phi(\xi_k) \underset{a,d,c_0}{\overset{(4.70)}{\lesssim}} 1. \tag{4.72}$$

Положим

$$\mathcal{G}_j = G_{\xi_m,T_{\xi_m}}(\ldots G_{\xi_2,T_{\xi_2}}(G_{\xi_1,T_{\xi_1}}(\mathcal{G}_{j+1}))),$$
$$u^{(j)} = (((u^{(j+1)})_{\xi_1,T_{\xi_1}})_{\xi_2,T_{\xi_2}}\ldots)_{\xi_m,T_{\xi_m}}, \quad w^{(j)} = (((w^{(j+1)})_{\xi_1,T_{\xi_1}})_{\xi_2,T_{\xi_2}}\ldots)_{\xi_m,T_{\xi_m}}.$$

Из построения, (4.72), предположения индукции и предложения 4.3.2 получаем свойства 1–6.

Положим $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_{j-j_0}(\xi_*)$, если $j \geqslant j_0+1$, $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{V}_{\min}(\mathcal{G}_j)$, если $j = j_0$.

Определим отображение K_j. Положим $K_j|_{\mathbf{V}_{\geqslant j+1-j_0}(\mathcal{G}_j)} = K_{j+1}$. Пусть $\eta \in \tilde{\mathbf{W}}$. Если $\eta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j)$, то полагаем $K_j(\eta) = \Delta(\eta) \in \Phi(\eta)$. Пусть $\eta \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j)$. Тогда $\mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\eta) \in T_{\xi_k}$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, m\}$ (см. пункт 3 предложения 4.3.2). Полагаем

$$K_j(\eta) = b^{-1}_{\xi_k}(\mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\eta)) \in \Phi(\xi_k). \tag{4.73}$$

Из построения, предположения индукции, (4.67) и уже доказанных свойств 2 и 4 следуют свойства 7a, 7b, 7e.

Проверим свойство 7c. В силу предположения индукции, для этого достаточно рассмотреть $\xi \in \tilde{\mathbf{W}}$, $\xi' \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\xi)$. В силу пункта 3 предложения 4.3.2, $\mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\xi) \in T_{\xi_k}$ для некоторого $1 \leqslant k \leqslant m$, $b_{\xi_k}(K_j(\xi)) \overset{(4.73)}{=} \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\xi)$, т.е. $\xi' \in b_{\xi_k}(K_j(\xi))$. По уже доказанному свойству 7a и предположению индукции (см. свойство 7d с $j+1$ вместо j), $K_j(\xi') = K_{j+1}(\xi') \overset{(4.71)}{\subset} K_j(\xi)$.

Проверим свойство 7d (для $j \geqslant j_0+1$). Пусть $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_{j-1-j_0}(\xi_*)\backslash\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j) = \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_{j-1-j_0}(\xi_*)\backslash\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D})$ (в силу уже доказанных свойств 2 и 4 графа $\mathcal{G}_j$), $Q \in \Phi(\xi)$. Положим

$$b_\xi(Q) = \{\xi' \in [\xi, \zeta] \cap \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\xi) : \ \zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j), \ \zeta \geqslant \xi, \ \ K_j(\zeta) \subset Q\}. \tag{4.74}$$

Покажем, что множество $b_\xi(Q)$ непусто. В самом деле, по определению $\Phi(\xi)$, существует $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D}) \cap \mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi)$ такое, что $\Delta(\zeta) \subset Q$. Из свойства 4 графа $\mathcal{G}_j$ следует, что $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j) \cap \mathbf{V}((\mathcal{G}_j)_\xi)$. В силу свойства 7b, $\Delta(\zeta) = K_j(\zeta)$. Значит, $K_j(\zeta) \subset Q$.

По уже доказанному свойству 7c, для $Q \in \Phi(\xi)$, $\xi' \in b_\xi(Q)$ и ζ из (4.74) выполнено $K_j(\zeta) \subset K_j(\xi')$. Значит, в силу (4.74) и пунктов 2, 3 теоремы L,

$$K_j(\xi') \subset Q, \quad \xi' \in b_\xi(Q). \tag{4.75}$$

Докажем, что для различных $Q \in \Phi(\xi)$ множества $b_\xi(Q)$ не пересекаются и образуют разбиение множества $\mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\xi)$. Пусть $Q', Q'' \in \Phi(\xi)$, $Q' \neq Q''$. Если $\xi' \in b_\xi(Q') \cap b_\xi(Q'')$, то из (4.75) следует, что $K_j(\xi') \subset Q'$ и $K_j(\xi') \subset Q''$. Снова в силу пункта 2 теоремы L, $Q' \cap Q'' = \varnothing$ — противоречие. Остается проверить, что для любой вершины $\xi' \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_1(\xi)$ найдется множество $Q \in \Phi(\xi)$ такое, что $\xi' \in b_\xi(Q)$. В самом деле, пусть $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j)$, $\zeta \geqslant \xi'$. Тогда $\zeta \geqslant \xi$. В силу уже доказанных свойств 2 и 4, $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D}) \cap \mathbf{V}(\mathcal{D}_\xi)$. Напомним, что $\xi \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_{j-1-j_0}(\xi_*)$. Значит, $\xi' \in \mathbf{V}^{\mathcal{G}_j}_{j-j_0}(\xi_*)$. Так как $\zeta \geqslant \xi'$, то $\Delta(\zeta) \in \Theta_{j'}$, $j' \geqslant j$ (см. начало шага 1). Из пункта 3 теоремы L следует, что найдется множество $Q \in \Theta_{j-1}$ такое, что $Q \supset \Delta(\zeta)$. Тогда $Q \in \Phi(\xi)$ (см. (4.67)) и $\xi' \in b_\xi(Q)$ по определению (4.74) и свойству 7b.

Положим $T_\xi := b_\xi(\Phi(\xi))$. Тогда T_ξ — разбиение $\mathbf{V}_1^{\mathcal{G}_j}(\xi)$, $b_\xi : \Phi(\xi) \to T_\xi$ — биекция и для любого $Q \in \Phi(\xi)$ выполнено $b_\xi(Q) \subset \{\xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{G}_j}(\xi) :\ K_j(\xi') \subset Q\}$ в силу (4.75). Докажем обратное включение. Пусть $\xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{G}_j}(\xi)$, $Q \in \Phi(\xi)$, $K_j(\xi') \subset Q$. Тогда $\xi' \in b_\xi(\Delta)$ для некоторого $\Delta \in \Phi(\xi)$. Значит, $K_j(\xi') \overset{(4.75)}{\subset} \Delta$ и поэтому $\Delta = Q$ (см. пункт 2 теоремы L).

Докажем свойство 7f. В силу свойства 7a и предположения индукции, достаточно рассмотреть $j' = j$. Если $Q = K_j(\xi)$, то в силу свойства 7e существует $\eta = \eta(\xi) \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_{j-j_0}(\xi_*)$ такое, что $Q \in \Phi(\eta)$. При этом, если $\xi \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_j)$, то $\eta = \xi \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_{j+1})$, иначе $\eta \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_{j+1})$ и $b_\eta(K_j(\xi)) = \mathbf{V}_1^{\mathcal{G}_j}(\xi)$. Отметим, что различным вершинам ξ, таким, что $Q = K_j(\xi)$, соответствуют различные $\eta(\xi)$. В самом деле, достаточно рассмотреть случай $\eta \notin \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{G}_{j+1})$. Если $Q = K_j(\xi) = K_j(\tilde\xi)$ и $\eta(\xi) = \eta(\tilde\xi) = \eta$, то $\mathbf{V}_1^{\mathcal{G}_j}(\xi) = b_\eta(Q) = \mathbf{V}_1^{\mathcal{G}_j}(\tilde\xi)$ и $\xi = \tilde\xi$.

Значит, достаточно доказать, что

$$\mathrm{card}\,\{\eta \in \mathbf{V}^{\mathcal{D}}_{j-j_0}(\xi_*) :\ Q \in \Phi(\eta)\} \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1. \tag{4.76}$$

Если $Q \in \Phi(\eta)$, то в силу (4.67) существует $\zeta \in \mathbf{V}_{\max}(\mathcal{D}) \cap \mathbf{V}(\mathcal{D}_\eta)$ такое, что $\Delta(\zeta) \subset Q$. Поэтому

$$\mathrm{dist}\,(\Omega[\eta],\, Q) \leqslant \mathrm{dist}\,(\Omega[\eta],\, \Omega[\zeta]) + \mathrm{dist}\,(\Omega[\zeta],\, \Delta(\zeta)) + \mathrm{diam}\,\Omega[\zeta] \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 2^{-\bar{s}j} \tag{4.77}$$

в силу (4.39), (4.41), (4.48), (4.66). В силу (4.67), $Q \in \Theta_j$, так что $\mathrm{diam}\, Q \lesssim 2^{-\bar{s}j}$ (см. пункт 4 теоремы L). Далее, $\mathrm{diam}\,\Omega[\eta] \underset{a,d}{\overset{(4.39),(4.48)}{\asymp}} 2^{-\bar{s}j}$. Из (9) следует, что $\Omega[\eta]$ содержит шар радиуса $R(\eta) \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\bar{s}j}$. Это вместе с (35), (37) и (4.77) дает (4.76).

Шаг 4. В силу свойств 1 и 2 графа $\mathcal{G}_{j_0}$ (см. шаг 2),

$$\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w} \leqslant \mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{G}_{j_0},u^{(j_0)},w^{(j_0)}} \underset{a,d,c_0,p,q}{\lesssim} \max_{1\leqslant l\leqslant l_*} \mathfrak{S}^{p,q}_{\tilde{\mathcal{D}}_l,u^{(j_0)},w^{(j_0)}}. \tag{4.78}$$

Пусть максимум правой части достигается на номере l_0. Положим $(\tilde{\mathcal{D}},\, \tilde\xi_*) = (\tilde{\mathcal{D}}_{l_0},\, \tilde\xi_{l_0})$, $\tilde u(\xi) = u_j$, $\tilde w(\xi) = w_j$, $\xi \in \mathbf{V}^{\tilde{\mathcal{D}}}_{j-j_0}(\tilde\xi_*)$. В силу (4.78) и свойства 3 графа $\mathcal{G}_{j_0}$, $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{D},u,w} \underset{a,d,c_0,p,q}{\lesssim} \mathfrak{S}^{p,q}_{\tilde{\mathcal{D}},\tilde u,\tilde w}$.

Оценим сверху $\mathfrak{S}^{p,q}_{\tilde{\mathcal{D}},\tilde u,\tilde w}$. Рассмотрим максимальный подграф $\hat{\mathcal{D}}$ в $\hat{\mathcal{A}}$ на множестве вершин

$$\{\zeta_{j,i} :\ \exists \xi \in \mathbf{V}(\tilde{\mathcal{D}}), \quad K_{j_0}(\xi) = \Delta_{j,i}\}.$$

Тогда $\hat{\mathcal{D}}$ является деревом. В самом деле, $\mathrm{card}\,\{i :\ \zeta_{j_0,i} \in \hat{\mathcal{D}}\} = 1$. Далее, пусть $\zeta_{j,i} \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{D}})$. Тогда $j \geqslant j_0$, $K_{j_0}(\xi) = \Delta_{j,i}$ для некоторой вершины $\xi \in \mathbf{V}(\tilde{\mathcal{D}})$. Пусть $\zeta_{j',i'} \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{A}})$, $j' \geqslant j_0$, $\zeta_{j',i'} \leqslant \zeta_{j,i}$. Из определения $\hat{\mathcal{A}}$ следует, что $\Delta_{j',i'} \supset \Delta_{j,i}$. Рассмотрим вершину $\eta \in \mathbf{V}^{\tilde{\mathcal{D}}}_{j'-j_0}(\tilde\xi_*)$, $\eta \leqslant \xi$. В силу свойства 4b графа $\mathcal{G}_{j_0}$, $K_{j_0}(\eta) \supset K_{j_0}(\xi)$. Значит, в силу свойства 4a графа $\mathcal{G}_{j_0}$ и пункта 2 теоремы L, $K_{j_0}(\eta) = \Delta_{j',i'}$, так что $\zeta_{j',i'} \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{D}})$.

Обозначим через $\hat\xi_*$ минимальную вершину $\hat{\mathcal{D}}$. Тогда $\hat\xi_* = \zeta_{j_0,i_0}$ для некоторого i_0. Для $\zeta_{j,i} \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{D}})$ положим

$$V_{\zeta_{j,i}} = \{\xi \in \mathbf{V}(\tilde{\mathcal{D}}) :\ K_{j_0}(\xi) = \Delta_{j,i}\}.$$

По свойству 4a графа $\mathcal{G}_{j_0}$,

$$V_{\zeta_{j,i}} \subset \mathbf{V}^{\tilde{\mathcal{D}}}_{j-j_0}(\tilde\xi_*). \tag{4.79}$$

В силу свойства 4c, для любого $\zeta \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{D}})$

$$\operatorname{card} V_\zeta \underset{a,d,c_0}{\lesssim} 1. \tag{4.80}$$

Кроме того, если $\xi \in V_\zeta$, $\xi' \in V_{\zeta'}$, $\xi' \leqslant \xi$, то $\zeta' \leqslant \zeta$. В самом деле, если $\zeta = \zeta_{j,i}$, $\zeta' = \zeta_{j',i'}$, $K_{j_0}(\xi) = \Delta_{j,i}$, $K_{j_0}(\xi') = \Delta_{j',i'}$, $\xi \geqslant \xi'$, то в силу свойства 4b графа $\mathcal{G}_{j_0}$, $\Delta_{j,i} \subset \Delta_{j',i'}$. Из определения дерева $\hat{\mathcal{A}}$ следует, что $\zeta_{j,i} \geqslant \zeta_{j',i'}$.

Пусть $\|f\|_{l_p(\tilde{\mathcal{D}})} = 1$. Для $\zeta \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{D}})$ положим $\varphi(\zeta) = \left(\sum\limits_{\xi \in V_\zeta} |f(\xi)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Тогда $\|\varphi\|_{l_p(\hat{\mathcal{D}})} = 1$. Напомним, что функции u_*, w_* определены в формулировке леммы. Если $\xi \in V_\zeta$, $\xi' \in V_{\zeta'}$, $\xi' \leqslant \xi$, то $\tilde{u}(\xi')f(\xi') \leqslant u_*(\zeta')\varphi(\zeta')$ (по определению функций $\tilde{u}$ и u_* и (4.79)), так что $\sum\limits_{\xi' \leqslant \xi} \tilde{u}(\xi')f(\xi') \leqslant \sum\limits_{\zeta' \leqslant \zeta} u_*(\zeta')\varphi(\zeta')$. Отсюда и из определения функций $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, u_*, w_* и (4.79) получаем

$$\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\tilde{\mathcal{D}})} \tilde{w}^q(\xi) \left(\sum_{\xi' \leqslant \xi} \tilde{u}(\xi')f(\xi')\right)^q \overset{(4.80)}{\underset{a,d,c_0}{\lesssim}} \sum_{\zeta \in \mathbf{V}(\hat{\mathcal{D}})} w_*^q(\zeta) \left(\sum_{\zeta' \leqslant \zeta} u_*(\zeta')\varphi(\zeta')\right)^q \leqslant [\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{\mathcal{D}},u_*,w_*}]^q.$$

Остается воспользоваться тем, что $\hat{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}_* := \hat{\mathcal{A}}_{\zeta_{j_0,i_0}} \cap [\hat{\mathcal{A}}]_{\leqslant N}$. □

Из этой леммы, теорем 8, 4.2.1, теоремы B, предложения 4.3.1 и теоремы Б. Леви получаем следующий результат.

Теорема 4.3.2. *Пусть $p \geqslant q$, $\xi_* \in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j_0}(\xi_0)$, функции u, w на $\mathbf{V}(\mathcal{A})$ определены формулой (4.47). Положим $\hat{w}_j = w_j \cdot \left(\frac{h(2^{-\bar{s}j_0})}{h(2^{-\bar{s}j})}\right)^{\frac{1}{q}}$, $\hat{u}_j = u_j \cdot \left(\frac{h(2^{-\bar{s}j})}{h(2^{-\bar{s}j_0})}\right)^{\frac{1}{p}}$, $j_0 \leqslant j < \infty$. Пусть*

$$M_{\hat{u},\hat{w}}(j_0) := \sup_{j_0 \leqslant j < \infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \hat{w}_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j_0}^{j} \hat{u}_i^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad 1 < p = q < \infty, \tag{4.81}$$

$$M_{\hat{u},\hat{w}}(j_0) := \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \left(\left(\sum_{i=j}^{\infty} \hat{w}_i^q\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=j_0}^{j} \hat{u}_i^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{pq}{p-q}} \hat{w}_j^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < \infty, \quad q < p. \tag{4.82}$$

Тогда $W^r_{p,g}(\Omega[\mathcal{A}_{\xi_*}]) \subset L_{q,v}(\Omega[\mathcal{A}_{\xi_*}])$ и существует линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любого поддерева $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}_{\xi_*}$ с минимальной вершиной ξ_* и для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathcal{D}])} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} M_{\hat{u},\hat{w}}(j_0) \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega[\mathcal{D}])}.$$

Отсюда следует теорема 11.

При $1 < p < q < \infty$ аналогично с помощью теоремы 4 и предложения 4.3.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 4.3.1. *Пусть u, w определены формулой (4.47), $1 < p < q < \infty$. Предположим, что существуют $l_0 \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in (0, 1)$ такие, что*

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=j+l_0}^{\infty} \frac{h(2^{-\bar{s}(j+l_0)})}{h(2^{-\bar{s}i})} w_i^q\right)^{1/q}}{\left(\sum\limits_{i=j}^{\infty} \frac{h(2^{-\bar{s}j})}{h(2^{-\bar{s}i})} w_i^q\right)^{1/q}} \leqslant c_0^{-18/q}\lambda, \quad j \geqslant j_{\min}. \tag{4.83}$$

Пусть $\sup_{j\geqslant j_{\min}} u_j \left(\sum\limits_{i=j}^{\infty} \frac{h(2^{-\overline{s}j})}{h(2^{-\overline{s}i})} w_i^q\right)^{1/q} < \infty$. *Тогда* $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ *и для любого* $j_0 \geqslant j_{\min}$ *и любой вершины* $\xi_* \in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{j_0-j_{\min}}(\eta_{j_{\min},1})$ *существует линейный непрерывный оператор* $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ *такой, что для любого поддерева* $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ *с минимальной вершиной* ξ_* *и для любой функции* $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ *выполнено*

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathcal{D}])} \underset{\mathfrak{Z},\lambda,l_0}{\lesssim} \sup_{j\geqslant j_0} u_j \left(\sum_{i\geqslant j} \frac{h(2^{-\overline{s}j})}{h(2^{-\overline{s}i})} w_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega[\mathcal{D}])}.$$

Учитывая, что число $\overline{s}$ можно взять кратным 4, также получаем теорему 9.
Теорема 10 следует из теорем 4.2.1, 7 и предложения 4.3.1.

Глава 5

Поперечники функциональных классов на множестве с древоподобной структурой

В этой главе доказываются теоремы 12 и 13. Сначала будет доказан общий результат об оценке сверху поперечников функциональных классов на множестве с древоподобной структурой.

5.1 Общая теорема об оценке поперечников сверху

Пусть $(\Omega, \Sigma, \mathrm{mes})$ — пространство с мерой, $\hat{\Theta}$ — счетное разбиение Ω на измеримые подмножества, $\mathcal{A}$ — дерево (с корнем), такое что

$$\exists c_1 \geqslant 1: \quad \mathrm{card}\, \mathbf{V}_1(\xi) \leqslant c_1, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}), \tag{5.1}$$

$\hat{F}: \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \hat{\Theta}$ — биективное отображение.

Всюду мы рассматриваем не более чем счетные разбиения.

Пусть $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$ — произвольные числа. Предположим, что для любого измеримого подмножества $E \subset \Omega$ определены следующие пространства:

- пространство $X_p(E)$ с полунормой $\|\cdot\|_{X_p(E)}$,
- пространство $Y_q(E)$ с нормой $\|\cdot\|_{Y_q(E)}$,

удовлетворяющие следующим условиям:

1. $X_p(\Omega) \subset Y_q(\Omega)$;
2. $X_p(E) = \{f|_E : \; f \in X_p(\Omega)\}$, $Y_q(E) = \{f|_E : \; f \in Y_q(\Omega)\}$;
3. если $\mathrm{mes}\, E = 0$, то $\dim\, Y_q(E) = \dim\, X_p(E) = 0$;
4. если $E \subset \Omega$, $E_j \subset \Omega$ $(j \in \mathbb{N})$ — измеримые множества, $E = \sqcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$, то

$$\|f\|_{X_p(E)} = \left\| \left\{ \|f|_{E_j}\|_{X_p(E_j)} \right\}_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{l_p}, \quad f \in X_p(E), \tag{5.2}$$

$$\|f\|_{Y_q(E)} = \left\| \left\{ \|f|_{E_j}\|_{Y_q(E_j)} \right\}_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{l_q}, \quad f \in Y_q(E); \tag{5.3}$$

5. если $E \in \Sigma$, $f \in Y_q(\Omega)$, то $f \cdot \chi_E \in Y_q(\Omega)$.

Обозначим через $BX_p(\Omega)$ единичный шар пространства $X_p(\Omega)$.

Пусть $\mathcal{P}(\Omega) \subset X_p(\Omega)$ — подпространство конечной размерности r_0, при этом $\|f\|_{X_p(\Omega)} = 0$ для любой функции $f \in \mathcal{P}(\Omega)$. Для каждого измеримого подмножества $E \subset \Omega$ обозначим $\mathcal{P}(E) = \{P|_E : \ P \in \mathcal{P}(\Omega)\}$. Пусть $G \subset \Omega$ — измеримое подмножество, T — разбиение G (здесь и далее рассматриваются только не более чем счетные разбиения на измеримые подмножества). Положим

$$\mathcal{S}_T(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \ f|_E \in \mathcal{P}(E), \ f|_{\Omega \setminus G} = 0\}. \tag{5.4}$$

Если T конечно, то $\mathcal{S}_T(\Omega) \subset Y_q(\Omega)$ в силу условия 5.

Для каждого конечного разбиения $T = \{E_j\}_{j=1}^n$ множества E и для каждой функции $f \in Y_q(\Omega)$ положим

$$\|f\|_{p,q,T} = \left(\sum_{j=1}^n \|f|_{E_j}\|_{Y_q(E_j)}^{\sigma_{p,q}} \right)^{\frac{1}{\sigma_{p,q}}},$$

где $\sigma_{p,q} = \min\{p, \, q\}$. Обозначим через $Y_{p,q,T}(E)$ пространство $Y_q(E)$ с нормой $\|\cdot\|_{p,q,T}$. Отметим, что $\|\cdot\|_{Y_q(E)} \leqslant \|\cdot\|_{p,q,T}$.

Для каждого поддерева $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ положим $\Omega_{\mathcal{A}'} = \cup_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}')} \hat{F}(\xi)$.

Предположение 1. *Существует функция $w_* : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$ со следующим свойством: для любой вершины $\hat{\xi} \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ существует линейный непрерывный оператор $P_{\Omega_{\mathcal{A}_{\hat{\xi}}}} : Y_q(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)$ такой, что для любой функции $f \in X_p(\Omega)$ и любого поддерева $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ с минимальной вершиной $\hat{\xi}$*

$$\|f - P_{\Omega_{\mathcal{A}_{\hat{\xi}}}} f\|_{Y_q(\Omega_{\mathcal{A}'})} \leqslant w_*(\hat{\xi}) \|f\|_{X_p(\Omega_{\mathcal{A}'})}. \tag{5.5}$$

Предположение 2. *Существуют функция $\tilde{w}_* : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$ и числа $\delta_* > 0$, $c_2 \geqslant 1$ такие, что для любой вершины $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$ и для любых $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ существует разбиение $T_{m,n}(G)$ множества $G = \hat{F}(\xi)$ со следующими свойствами:*

1. $\operatorname{card} T_{m,n}(G) \leqslant c_2 \cdot 2^m n$.

2. *Для любого $E \in T_{m,n}(G)$ существует линейный непрерывный оператор $P_E : Y_q(\Omega) \to \mathcal{P}(E)$ такой, что для любой функции $f \in X_p(\Omega)$*

$$\|f - P_E f\|_{Y_q(E)} \leqslant (2^m n)^{-\delta_*} \tilde{w}_*(\xi) \|f\|_{X_p(E)}. \tag{5.6}$$

3. *Для любого $E \in T_{m,n}(G)$*

$$\operatorname{card} \{E' \in T_{m \pm 1,n}(G) : \operatorname{mes}(E \cap E') > 0\} \leqslant c_2. \tag{5.7}$$

Предположение 3. *Существуют $k_* \in \mathbb{N}$, $\lambda_* \geqslant 0$,*

$$\mu_* \geqslant \lambda_*, \tag{5.8}$$

$\gamma_* > 0$, абсолютно непрерывные функции $u_* : (0, \infty) \to (0, \infty)$ и $\psi_* : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $c_3 \geqslant 1$, $t_0 \in \mathbb{N}$, разбиение $\{\mathcal{A}_{t,i}\}_{t \geqslant t_0, \, i \in \hat{J}_t}$ дерева $\mathcal{A}$ такие, что $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{y u_*'(y)}{u_*(y)} = 0$, $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{y \psi_*'(y)}{\psi_*(y)} = 0$,

$$c_3^{-1} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}) \leqslant w_*(\xi) \leqslant c_3 \cdot 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}), \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}_{t,i}), \tag{5.9}$$

$$c_3^{-1}2^{-\mu_*k_*t}u_*(2^{k_*t}) \leqslant \tilde{w}_*(\xi) \leqslant c_3 \cdot 2^{-\mu_*k_*t}u_*(2^{k_*t}), \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}_{t,i}), \tag{5.10}$$

$$\nu_t := \sum_{i\in\hat{J}_t} \operatorname{card}\mathbf{V}(\mathcal{A}_{t,i}) \leqslant c_3 \cdot 2^{k_*\gamma_*t}\psi_*(2^{k_*t}) =: c_3\overline{\nu}_t, \quad t \geqslant t_0. \tag{5.11}$$

Кроме того, предположим, что выполнены следующие утверждения.

1. *Если $p > q$, то*
$$2^{-\lambda_*k_*t}(\operatorname{card}\hat{J}_t)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leqslant c_3 \cdot 2^{-\mu_*k_*t}\overline{\nu}_t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}. \tag{5.12}$$

2. *Пусть t, $t' \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*
$$2^{-\lambda_*k_*t'}u_*(2^{k_*t'}) \leqslant c_3 \cdot 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t}), \quad \text{если} \quad t' \geqslant t, \tag{5.13}$$

$$\begin{gathered} 2^{-\mu_*k_*t'}u_*(2^{k_*t'})\left(2^{k_*\gamma_*t'}\psi_*(2^{k_*t'})\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leqslant \\ \leqslant c_3 \cdot 2^{-\mu_*k_*t}u_*(2^{k_*t})\left(2^{k_*\gamma_*t}\psi_*(2^{k_*t})\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \quad \text{если} \quad t' \geqslant t, \quad p > q. \end{gathered} \tag{5.14}$$

3. *Если дерево $\mathcal{A}_{t',i'}$ следует за $\mathcal{A}_{t,i}$, то $t' = t+1$.*

Замечание 5.1.1. Если $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}_{t,i})$, $\xi' \in \mathbf{V}(\mathcal{A}_{t',i'})$, $\xi' > \xi$, то $t' > t$.

Введем следующие обозначения.

- $\hat{\xi}_{t,i}$ — минимальная вершина дерева $\mathcal{A}_{t,i}$.
- Γ_t — максимальный подграф в $\mathcal{A}$ на множестве вершин $\cup_{i\in\hat{J}_t}\mathbf{V}(\mathcal{A}_{t,i})$, $t \geqslant t_0$; для $1 \leqslant t < t_0$ положим $\Gamma_t = \varnothing$, $\hat{J}_t = \varnothing$.
- $G_t = \cup_{\xi\in\mathbf{V}(\Gamma_t)}\hat{F}(\xi) = \cup_{i\in\hat{J}_t}\Omega_{\mathcal{A}_{t,i}}$.
- $\tilde{\Gamma}_t$ — максимальный подграф на множестве вершин $\cup_{j\geqslant t}\mathbf{V}(\Gamma_j)$, $t \in \mathbb{N}$.
- $\{\tilde{\mathcal{A}}_{t,i}\}_{i\in\overline{J}_t}$ — множество связных компонент графа $\tilde{\Gamma}_t$.
- $\tilde{U}_{t,i} = \cup_{\xi\in\mathbf{V}(\tilde{\mathcal{A}}_{t,i})}\hat{F}(\xi)$.
- $\tilde{U}_t = \cup_{i\in\overline{J}_t}\tilde{U}_{t,i} = \cup_{\xi\in\mathbf{V}(\tilde{\Gamma}_t)}\hat{F}(\xi)$.

Покажем, что если $t \geqslant t_0$, то
$$\mathbf{V}_{\min}(\tilde{\Gamma}_t) = \mathbf{V}_{\min}(\Gamma_t) = \{\hat{\xi}_{t,i}\}_{i\in\hat{J}_t}. \tag{5.15}$$
В самом деле, пусть $t = t_0$, $i_0 \in \hat{J}_{t_0}$. Тогда $\hat{\xi}_{t_0,i_0}$ — минимальная вершина в дереве $\mathcal{A}$ (иначе существует дерево $\mathcal{A}_{t',i'}$, предшествующее $\mathcal{A}_{t_0,i_0}$; по предположению 3, $t' = t_0 - 1$ — противоречие). Таким образом, $\hat{J}_{t_0} = \{i_0\}$ и $\mathbf{V}_{\min}(\tilde{\Gamma}_{t_0}) = \mathbf{V}_{\min}(\mathcal{A}) = \{\hat{\xi}_{t_0,i_0}\} = \mathbf{V}_{\min}(\Gamma_{t_0})$.

Пусть $t > t_0$. Отметим, что $\mathbf{V}_{\min}(\Gamma_t) \subset \{\hat{\xi}_{t,i}\}_{i\in\hat{J}_t}$. Докажем, что $\mathbf{V}_{\min}(\tilde{\Gamma}_t) \subset \{\hat{\xi}_{t,i}\}_{i\in\hat{J}_t}$. Действительно, пусть $\xi \in \mathbf{V}_{\min}(\tilde{\Gamma}_t)$. Тогда $\xi = \hat{\xi}_{t',i'}$ для некоторых $t' \geqslant t$, $i' \in \hat{J}_{t'}$. Так как $t > t_0$, то $\hat{\xi}_{t',i'} > \hat{\xi}_{t_0,i_0}$. Пусть дерево $\mathcal{A}_{t'',i''}$ предшествует дереву $\mathcal{A}_{t',i'}$. Тогда $t'' < t$. В силу предположения 3, $t' = t'' + 1$. Значит, $t' < t+1$, т.е. $t' = t$. Покажем, что $\mathbf{V}_{\min}(\Gamma_t) \supset \{\hat{\xi}_{t,i}\}_{i\in\hat{J}_t}$ и $\mathbf{V}_{\min}(\tilde{\Gamma}_t) \supset \{\hat{\xi}_{t,i}\}_{i\in\hat{J}_t}$. В самом деле, так как $\hat{\xi}_{t,i}$ — минимальная вершина в $\mathcal{A}_{t,i}$, то $\hat{\xi}_{t,i} \in \mathbf{V}(\tilde{\Gamma}_t)$. Если $\xi < \hat{\xi}_{t,i}$, то $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}_{t',i'})$, $t' < t$ (см. замечание 5.1.1). Поэтому $\hat{\xi}_{t,i} \in \mathbf{V}_{\min}(\tilde{\Gamma}_t)$ и $\hat{\xi}_{t,i} \in \mathbf{V}_{\min}(\Gamma_t)$.

Таким образом, можно считать, что
$$\overline{J}_t = \hat{J}_t, \quad t \geqslant t_0. \tag{5.16}$$

Лемма 5.1.1. *Существует* $x_0 \in (0, \infty)$ *такое, что для любого* $x \geqslant x_0$ *уравнение* $y^{\gamma_*}\psi_*(y) = x$ *имеет единственное решение* $y(x)$. *Кроме того,* $y(x) = x^{\beta_*}\varphi_*(x)$, *где* $\beta_* = \frac{1}{\gamma_*}$ *и* φ_* *— абсолютно непрерывная функция, такая что* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\varphi_*'(x)}{\varphi_*(x)} = 0$.

Это лемма будет доказана позже.

Обозначим $\mathfrak{Z}_0 = (p,\, q,\, r_0,\, w_*,\, \tilde{w}_*,\, \delta_*,\, k_*,\, \lambda_*,\, \mu_*,\, \gamma_*,\, \psi_*,\, u_*,\, c_1,\, c_2,\, c_3)$.

Теорема 5.1.1. *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, *выполнены предположения 1, 2 и 3, при этом* $\delta_* > \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$. *Тогда существует* $n_0 = n_0(\mathfrak{Z}_0)$ *такое, что для любого* $n \geqslant n_0$ *выполнены следующие оценки.*

1. *Пусть* $\delta_* \neq \lambda_*\beta_*$ *в случае* $p \leqslant q$ *и* $\delta_* \neq \mu_*\beta_*$ *в случае* $p > q$.

   - *При* $p \leqslant q$ *положим*

$$\sigma_*(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \delta_* < \lambda_*\beta_*, \\ u_*(n^{\beta_*}\varphi_*(n))\varphi_*^{-\lambda_*}(n), & \text{если} \quad \delta_* > \lambda_*\beta_*. \end{cases}$$

   Тогда

$$\vartheta_n(BX_p(\Omega),\, Y_q(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} n^{-\min(\delta_*,\, \lambda_*\beta_*)}\sigma_*(n). \tag{5.17}$$

   - *При* $p > q$ *положим*

$$\sigma_*(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \delta_* < \mu_*\beta_*, \\ u_*(n^{\beta_*}\varphi_*(n))\varphi_*^{-\mu_*}(n), & \text{если} \quad \delta_* > \mu_*\beta_*. \end{cases}$$

   Тогда

$$\vartheta_n(BX_p(\Omega),\, Y_q(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} n^{-\min(\delta_*,\, \mu_*\beta_*)+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\sigma_*(n). \tag{5.18}$$

2. *Пусть* $p < q$, $\hat{q} > 2$. *Положим* $\theta_1 = \delta_* + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}},\, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}$, $\theta_2 = \frac{\delta_*\hat{q}}{2}$, $\theta_3 = \lambda_*\beta_* + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}},\, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}$, $\theta_4 = \frac{\lambda_*\beta_*\hat{q}}{2}$, $\sigma_1(n) = \sigma_2(n) \equiv 1$, $\sigma_3(n) = u_*(n^{\beta_*}\varphi_*(n))\varphi_*^{-\lambda_*}(n)$, $\sigma_4(n) = \sigma_3(n^{\frac{\hat{q}}{2}})$. *Предположим, что существует* $j_* \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$ *такое, что* $\theta_{j_*} < \min_{j\neq j_*}\theta_j$. *Тогда*

$$\vartheta_n(BX_p(\Omega),\, Y_q(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

Доказательство леммы 5.1.1. Так как $\gamma_* > 0$, то по лемме 3.2.4 получаем $y^{\gamma_*}\psi_*(y) \underset{y\to+\infty}{\to} +\infty$. Если $y > 0$ достаточно велико, то

$$(y^{\gamma_*}\psi_*(y))' = \gamma_* y^{\gamma_*-1}\psi_*(y) + y^{\gamma_*}\psi_*'(y) > 0.$$

Отсюда следует первая часть леммы 5.1.1.

Покажем, что функция $\varphi_*(x)$ абсолютно непрерывна при больших x. Для этого достаточно проверить, что функция $y(x)$ локально липшицева. Выберем $z_0 > 0$ так, что $\left|\frac{t\psi_*'(t)}{\psi_*(t)}\right| < \frac{\gamma_*}{2}$ для любого $t \geqslant z_0$. Для каждого $\overline{z} > z_0$ возьмем $\varepsilon_{\overline{z}} \in \left(0,\, \frac{\overline{z}-z_0}{2}\right)$ такое, что $\psi_*(z) \geqslant \frac{\psi_*(\overline{z})}{2} > 0$ для каждого $z \in [\overline{z} - \varepsilon_{\overline{z}},\, \overline{z} + \varepsilon_{\overline{z}}]$. Оценим снизу величину $(z+h)^{\gamma_*}\psi_*(z+h) - z^{\gamma_*}\psi_*(z)$ при $\overline{z} - \varepsilon_{\overline{z}} \leqslant z \leqslant z + h \leqslant \overline{z} + \varepsilon_{\overline{z}}$. Имеем

$$(z+h)^{\gamma_*}\psi_*(z+h) - z^{\gamma_*}\psi_*(z) = \int\limits_z^{z+h} (\gamma_* t^{\gamma_*-1}\psi_*(t) + t^{\gamma_*}\psi_*'(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{z}^{z+h} t^{\gamma_*-1}\psi_*(t)\left(\gamma_* + \frac{t\psi_*'(t)}{\psi_*(t)}\right) dt \geqslant \frac{\gamma_*}{2}\int\limits_{z}^{z+h} t^{\gamma_*-1}\psi_*(t)\,dt \underset{\gamma_*,\psi_*,\,\overline{z}}{\gtrsim} h.$$

Проверим, что $\frac{x\varphi_*'(x)}{\varphi_*(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Пусть $y = y(x)$. Из тождества $y^{\gamma_*}\psi_*(y) = x$ получаем

$$(\gamma_* y^{\gamma_*-1}\psi_*(y) + y^{\gamma_*}\psi_*'(y))y'(x) = 1.$$

Далее, $\varphi_*(x) = x^{-\beta_*}y(x)$, откуда следует, что

$$\varphi_*'(x) = -\beta_* x^{-\beta_*-1}y(x) + x^{-\beta_*}y'(x) = -\beta_*\frac{\varphi_*(x)}{x} + x^{-\beta_*}y'(x) =$$
$$= -\beta_*\frac{\varphi_*(x)}{x} + \frac{x^{-\beta_*}}{\gamma_* y^{\gamma_*-1}\psi_*(y) + y^{\gamma_*}\psi_*'(y)}.$$

Значит,

$$\frac{x\varphi_*'(x)}{\varphi_*(x)} = -\beta_* + \frac{x^{1-\beta_*}}{\varphi_*(x)(\gamma_* y^{\gamma_*-1}\psi_*(y) + y^{\gamma_*}\psi_*'(y))} =$$
$$= -\beta_* + \frac{x}{y(\gamma_* y^{\gamma_*-1}\psi_*(y) + y^{\gamma_*}\psi_*'(y))} = -\beta_* + \frac{y^{\gamma_*-1}\psi_*(y)}{\gamma_* y^{\gamma_*-1}\psi_*(y) + y^{\gamma_*}\psi_*'(y)} =$$
$$= -\frac{1}{\gamma_*} + \frac{1}{\gamma_* + \frac{y(x)\psi_*'(y(x))}{\psi_*(y(x))}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.1.2. *Пусть* $\gamma_* > 0$, $\psi_*(y) = |\log y|^{\alpha_*}\rho_*(|\log y|)$, *где* $\rho_* : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— абсолютно непрерывная функция такая, что* $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y\rho_*'(y)}{\rho_*(y)} = 0$. *Пусть функция* φ_* *такая, как в лемме 5.1.1. Тогда при достаточно больших* $x > 1$

$$\varphi_*(x) \underset{\gamma_*,\alpha_*,\rho_*}{\asymp} (\log x)^{-\frac{\alpha_*}{\gamma_*}}\left[\rho_*(\log x)\right]^{-\frac{1}{\gamma_*}}.$$

Доказательство. Положим $\hat{y}(x) = x^{\frac{1}{\gamma_*}}(\log x)^{-\frac{\alpha_*}{\gamma_*}}\rho_*^{-\frac{1}{\gamma_*}}(\log x)$. При достаточно больших $x > 1$ имеем $\log\hat{y}(x) \underset{\gamma_*,\alpha_*,\rho_*}{\asymp} \log x$. Значит,

$$(\hat{y}(x))^{\gamma_*}(\log\hat{y}(x))^{\alpha_*}\rho_*(\log\hat{y}(x)) \underset{\gamma_*,\alpha_*,\rho_*}{\asymp} x.$$

Применяя лемму 3.2.4, получаем при $c > 1$

$$(c\hat{y}(x))^{\gamma_*}\psi_*(c\hat{y}(x)) \underset{\gamma_*,\alpha_*,\rho_*}{\gtrsim} c^{\gamma_*/2}(\hat{y}(x))^{\gamma_*}\psi_*(\hat{y}(x)) \underset{\gamma_*,\alpha_*,\rho_*}{\asymp}$$
$$\asymp c^{\gamma_*/2}x, \quad \text{если } \hat{y}(x) > 1,$$
$$(c^{-1}\hat{y}(x))^{\gamma_*}\psi_*(c^{-1}\hat{y}(x)) \underset{\gamma_*,\alpha_*,\rho_*}{\lesssim} c^{-\gamma_*/2}(\hat{y}(x))^{\gamma_*}\psi_*(\hat{y}(x)) \underset{\gamma_*,\alpha_*,\rho_*}{\asymp}$$
$$\asymp c^{-\gamma_*/2}x, \quad \text{если } c^{-1}\hat{y}(x) > 1.$$

Следовательно, существует $c = c(\gamma_*,\alpha_*,\rho_*) > 1$ такое, что при достаточно больших $x > 1$

$$(c\hat{y}(x))^{\gamma_*}\psi_*(c\hat{y}(x)) > x, \quad (c^{-1}\hat{y}(x))^{\gamma_*}\psi_*(c^{-1}\hat{y}(x)) < x.$$

Таким образом, если $y^{\gamma_*}\psi_*(y) = x$, то в силу монотонности получаем $y \in [c^{-1}\hat{y}(x),\, c\hat{y}(x)]$. □

Лемма 5.1.3. *Пусть* T *— конечное разбиение множества* $G \subset \Omega$, $\nu = \dim\mathcal{S}_T(\Omega)$ *(см. (5.4)). Тогда существует линейный изоморфизм* $A : \mathcal{S}_T(\Omega) \to \mathbb{R}^\nu$ *такой, что* $\|A\|_{Y_{p,q,T}(G)\to l_p^\nu} \underset{p,\,r_0}{\lesssim} 1$, $\|A^{-1}\|_{l_q^\nu\to Y_q(G)} \underset{q,\,r_0}{\lesssim} 1$.

Эта лемма доказывается так же, как лемма 1.4.5.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$, $N_n \in \mathbb{N}$. Пусть $\varphi_1^n, \ldots, \varphi_m^n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — аффинные функции,

$$\varphi_s^n(\xi) = \alpha_s \xi + \beta_{s,n}, \;\; s = 1, \ldots, m, \;\; \varphi_{m+1}^n(\xi) = +\infty, \;\; \xi \in \mathbb{R}_+,$$
$$\varphi_1^n(\xi) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_m^n(\xi), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant N_n, \; n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty).$$

Обозначим

$$E_s^n = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_s^n(\xi) \leqslant \eta < \varphi_{s+1}^n(\xi), \; 0 \leqslant \xi \leqslant N_n\}, \;\; 1 \leqslant s \leqslant m,$$
$$E^n = \bigcup_{s=1}^m E_s^n = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1^n(\xi) \leqslant \eta < +\infty, \; 0 \leqslant \xi \leqslant N_n\}.$$

Пусть $\psi_n : E^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{\psi}_n : E^n \to \mathbb{R}$,

$$\psi_n(\xi, \eta) = \lambda_s \xi + \mu_s \eta + \nu_{s,n}, \;\; (\xi, \eta) \in E_s^n,$$
$$\tilde{\psi}_n(\xi, \eta) = \tilde{\lambda}_s \xi + \tilde{\mu}_s \eta + \tilde{\nu}_{s,n}, \;\; (\xi, \eta) \in E_s^n.$$

Кроме того, предположим, что функции ψ_n непрерывны.

Положим

$$\Lambda = \{(\alpha_s)_{1 \leqslant s \leqslant m}, \; (\lambda_s)_{1 \leqslant s \leqslant m}, \; (\mu_s)_{1 \leqslant s \leqslant m}\},$$

$\Psi = \{\psi_n, \; n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)\}$, $\tilde{\Psi} = \{\tilde{\psi}_n, \; n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)\}$,

$$V_n = \{(0, \varphi_s^n(0)), \; (N_n, \varphi_s^n(N_n)) : 1 \leqslant s \leqslant m\}.$$

Пусть $j_*^n = 0$ для любого $n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$ или $j_*^n = N_n$ для любого $n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$. Пусть $S = \{s_-, s_- + 1, \ldots, s_+ - 1, s_+\} \subset \{1, \ldots, m\}$ (это множество, вообще говоря, может быть пустым), $l_*^n \in \mathbb{R}$,

$$\{s \in \overline{1, m} : \varphi_s^n(j_*^n) = l_*^n\} = S, \tag{5.19}$$

$J = \{(j_*^n, l_*^n) : n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)\}$, $\varepsilon > 0$. Скажем, что $\tilde{\Psi} \in \mathcal{O}_{\varepsilon, J}(\Psi)$, если

$$|\lambda_s - \tilde{\lambda}_s| < \varepsilon, \;\; |\mu_s - \tilde{\mu}_s| < \varepsilon, \;\; 1 \leqslant s \leqslant m, \tag{5.20}$$

$$|\psi_n(j, l) - \tilde{\psi}_n(j, l)| < \varepsilon \log_2 n, \;\; 0 \leqslant j \leqslant N_n, \;\; \varphi_1^n(j) \leqslant l \leqslant \varphi_m^n(j), \tag{5.21}$$

$$\psi_n(j_*^n, l_*^n) = \tilde{\psi}_n(j_*^n, l_*^n) = \tilde{\psi}_n(j_*^n, l_*^n - 0) \text{ для любого } n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty). \tag{5.22}$$

Лемма 5.1.4. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$, $\gamma > 0$ фиксированы, $\mu_m < 0$,*

$$\psi_n(j_*^n, l_*^n) = 0, \;\; n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty), \tag{5.23}$$

$$N_n \leqslant c \log_2 n, \;\; -c \log_2 n \leqslant \varphi_1^n(\xi) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_m^n(\xi) \leqslant c \log_2 n, \;\; \xi \in [0, N_n], \tag{5.24}$$

$$\psi_n(j, l) \leqslant -\gamma \log_2 n, \;\; (j, l) \in V_n \backslash (j_*^n, l_*^n) \tag{5.25}$$

для любого $n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$. Пусть $\rho : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ — абсолютно непрерывная функция, такая, что $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y \rho'(y)}{\rho(y)} = 0$. Пусть также задана последовательность $\{\tilde{N}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}_+$.

Тогда существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Lambda, c, \gamma) > 0$ такое, что для любого $\tilde{\Psi} \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0, J}(\Psi)$ выполнена следующая оценка:

$$\sum_{(j,l) \in \mathbb{Z}^2 \cap E^n} 2^{\tilde{\psi}_n(j,l)} \rho(2^{j + \tilde{N}_n}) \overset{n}{\lesssim} \rho(2^{j_*^n + \tilde{N}_n}).$$

Доказательство. Из леммы 3.2.4 следует, что для любого $\sigma > 0$ существует $M(\sigma) > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, \dots, N_n$ выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\rho(2^{j+\tilde{N}_n})}{\rho(2^{\tilde{N}_n})} \leqslant M(\sigma)2^{\sigma j}, \quad \frac{\rho(2^{j+\tilde{N}_n})}{\rho(2^{N_n+\tilde{N}_n})} \leqslant M(\sigma)2^{\sigma(N_n-j)}. \tag{5.26}$$

Пусть $s_- - 1 \leqslant s \leqslant s_+$, $0 \leqslant j \leqslant N_n$, $\varphi^n_s(j) \leqslant l < \varphi^n_{s+1}(j)$. Обозначим

$$t(s) = \begin{cases} s, \text{ если } \tilde{\mu}_s \leqslant 0 \text{ и } s_- \leqslant s < s_+, \\ s+1, \text{ если } \tilde{\mu}_s > 0 \text{ и } s_- \leqslant s < s_+, \\ s_+, \text{ если } s = s_+, \\ s_-, \text{ если } s = s_- - 1, \end{cases}$$

$$A = \max\{|\alpha_s| : s_- \leqslant s \leqslant s_+\},$$

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{|\mu_m|}{2}, \frac{\gamma}{4(c+1)}, \frac{|\mu_{s_+}|}{2}, \frac{|\mu_{s_--1}|}{2}, \frac{|\lambda_s + \mu_s\alpha_{t(s)}|}{8(A+1)}, \ s_- - 1 \leqslant s \leqslant s_+\right\} \tag{5.27}$$

(если $S = \varnothing$, то величины $\frac{|\mu_{s_+}|}{2}$, $\frac{|\mu_{s_--1}|}{2}$ и $\frac{|\lambda_s+\mu_s\alpha_{t(s)}|}{8(A+1)}$ не учитываются).

Оценим сверху сумму

$$\Sigma^n_s = \sum_{(j,\,l)\in\mathbb{Z}^2\cap E^n_s} 2^{\tilde{\psi}_n(j,l)}\rho(2^{j+\tilde{N}_n}), \ \ 1 \leqslant s \leqslant m.$$

Пусть $S \neq \varnothing$. Так как выполнено (5.23) и функции ψ_n непрерывны, то

$$\psi_n(j,\, \varphi^n_{t(s)}(j)) = (\lambda_s + \mu_s\alpha_{t(s)})(j - j^n_*), \quad s \in S \cup (\{s_- - 1\} \cap \mathbb{N}).$$

Отсюда и из (5.25) следует, что

$$\lambda_s + \mu_s\alpha_{t(s)} < 0, \text{ если } j^n_* = 0, \quad \lambda_s + \mu_s\alpha_{t(s)} > 0, \text{ если } j^n_* = N_n. \tag{5.28}$$

Из (5.23), условия $\mu_m < 0$ и (5.25) следует, что $\mu_{s_--1} > 0$ (если $s_- \geqslant 2$), $\mu_{s_+} < 0$. Значит, $\varepsilon_0 > 0$.

Сначала рассмотрим случаи $s = s_+$ и $s = s_- - 1$. Для любого $(j,\, l) \in E^n_{s_+}$

$$\tilde{\psi}_n(j,\, l) = \tilde{\lambda}_{s_+}j + \tilde{\mu}_{s_+}l + \tilde{\nu}_{s_+,n} = \tilde{\lambda}_{s_+}j + \tilde{\mu}_{s_+}\varphi^n_{s_+}(j) + \tilde{\nu}_{s_+,n} + \tilde{\mu}_{s_+}(l - \varphi^n_{s_+}(j)) \overset{(5.20),(5.27)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \tilde{\lambda}_{s_+}j + \tilde{\mu}_{s_+}\varphi^n_{s_+}(j) + \tilde{\nu}_{s_+,n} + \mu_{s_+}(l - \varphi^n_{s_+}(j)) + \frac{|\mu_{s_+}|}{2}(l - \varphi^n_{s_+}(j)) =$$

$$= \tilde{\lambda}_{s_+}j + \tilde{\mu}_{s_+}\varphi^n_{s_+}(j) + \tilde{\nu}_{s_+,n} - \frac{|\mu_{s_+}|}{2}(l - \varphi^n_{s_+}(j)).$$

Значит,

$$\sum_{(j,\,l)\in\mathbb{Z}^2\cap E^n_{s_+}} 2^{\tilde{\psi}_n(j,l)}\rho(2^{j+\tilde{N}_n}) \underset{\mu_{s_+}}{\lesssim} \sum_{j=0}^{N_n} 2^{\tilde{\lambda}_{s_+}j+\tilde{\mu}_{s_+}\varphi^n_{s_+}(j)+\tilde{\nu}_{s_+,n}}\rho(2^{j+\tilde{N}_n}).$$

Аналогично получаем, что для $s_- \geqslant 2$

$$\sum_{(j,\,l)\in\mathbb{Z}^2\cap E^n_{s_--1}} 2^{\tilde{\psi}_n(j,l)}\rho(2^{j+\tilde{N}_n}) \underset{\mu_{s_--1}}{\lesssim} \sum_{j=0}^{N_n} 2^{\tilde{\lambda}_{s_--1}j+\tilde{\mu}_{s_--1}\varphi^n_{s_-}(j)+\tilde{\nu}_{s_--1,n}}\rho(2^{j+\tilde{N}_n}).$$

Так как функции $\tilde{\psi}_n|_{E^n_{s_+}}$, $\tilde{\psi}_n|_{E^n_{s_--1}}$ и $\varphi^n_{s_\pm}$ являются аффинными, то из условий леммы следует, что

$$\tilde{\lambda}_{s_+}j + \tilde{\mu}_{s_+}\varphi^n_{s_+}(j) + \tilde{\nu}_{s_+,n} = \tilde{\psi}_n(j,\, \varphi^n_{s_+}(j)) \overset{(5.19),(5.22)}{=}$$

$$= \tilde\psi_n(j,\, \varphi^n_{s_+}(j)) - \tilde\psi_n(j^n_*,\, \varphi^n_{s_+}(j^n_*)) + \psi_n(j^n_*,\, l^n_*) \overset{(5.23)}{=}$$
$$= \tilde\psi_n(j,\, \varphi^n_{s_+}(j)) - \tilde\psi_n(j^n_*,\, \varphi^n_{s_+}(j^n_*)) = (\tilde\lambda_{s_+} + \tilde\mu_{s_+}\alpha_{s_+})(j - j^n_*) \overset{(5.20)}{\leqslant}$$
$$\leqslant (\lambda_{s_+} + \mu_{s_+}\alpha_{s_+})(j - j^n_*) + \varepsilon_0(1+A)|j - j^n_*|,$$
$$\tilde\lambda_{s_- -1} j + \tilde\mu_{s_- -1}\varphi^n_{s_-}(j) + \tilde\nu_{s_- -1,n} = \tilde\psi_n(j,\, \varphi^n_{s_-}(j) - 0) \overset{(5.19),(5.22)}{=}$$
$$= \tilde\psi_n(j,\, \varphi^n_{s_-}(j) - 0) - \tilde\psi_n(j^n_*,\, \varphi^n_{s_-}(j^n_*) - 0) + \psi_n(j^n_*,\, l^n_*) \overset{(5.23)}{=}$$
$$= \tilde\psi_n(j,\, \varphi^n_{s_-}(j) - 0) - \tilde\psi_n(j^n_*,\, \varphi^n_{s_-}(j^n_*) - 0) = (\tilde\lambda_{s_- -1} + \tilde\mu_{s_- -1}\alpha_{s_-})(j - j^n_*) \overset{(5.20)}{\leqslant}$$
$$\leqslant (\lambda_{s_- -1} + \mu_{s_- -1}\alpha_{s_-})(j - j^n_*) + \varepsilon_0(1+A)|j - j^n_*|.$$

В силу (5.27) и (5.28),

$$2^{\tilde\lambda_{s_+} j + \tilde\mu_{s_+}\varphi^n_{s_+}(j) + \tilde\nu_{s_+,n}} \leqslant 2^{-\frac12|(\lambda_{s_+} + \mu_{s_+}\alpha_{s_+})(j - j^n_*)|}, \tag{5.29}$$

$$2^{\tilde\lambda_{s_- -1} j + \tilde\mu_{s_- -1}\varphi^n_{s_-}(j) + \tilde\nu_{s_- -1,n}} \leqslant 2^{-\frac12|(\lambda_{s_- -1} + \mu_{s_- -1}\alpha_{s_-})(j - j^n_*)|}. \tag{5.30}$$

Пусть $j^n_* = 0$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{N_n} 2^{\tilde\lambda_{s_+} j + \tilde\mu_{s_+}\varphi^n_{s_+}(j) + \tilde\nu_{s_+,n}} \rho(2^{j+\tilde N_n}) \overset{(5.26),(5.29)}{\leqslant}$$
$$\leqslant M(\varepsilon_0)\rho(2^{\tilde N_n}) \sum_{j=0}^{N_n} 2^{-\frac12|(\lambda_{s_+} + \mu_{s_+}\alpha_{s_+})j|} \cdot 2^{\varepsilon_0 j} \underset{\Lambda,c,\gamma}{\overset{(5.27)}{\lesssim}} \rho(2^{\tilde N_n}),$$
$$\sum_{j=0}^{N_n} 2^{\tilde\lambda_{s_- -1} j + \tilde\mu_{s_- -1}\varphi^n_{s_-}(j) + \tilde\nu_{s_- -1,n}} \rho(2^{j+\tilde N_n}) \overset{(5.26),(5.30)}{\leqslant}$$
$$\leqslant M(\varepsilon_0)\rho(2^{\tilde N_n}) \sum_{j=0}^{N_n} 2^{-\frac12|(\lambda_{s_- -1} + \mu_{s_- -1}\alpha_{s_-})j|} \cdot 2^{\varepsilon_0 j} \underset{\Lambda,c,\gamma}{\overset{(5.27)}{\lesssim}} \rho(2^{\tilde N_n}).$$

Если $j^n_* = N_n$, то

$$\sum_{j=0}^{N_n} 2^{\tilde\lambda_{s_+} j + \tilde\mu_{s_+}\varphi^n_{s_+}(j) + \tilde\nu_{s_+,n}} \rho(2^{j+\tilde N_n}) \overset{(5.26),(5.29)}{\leqslant}$$
$$\leqslant M(\varepsilon_0)\rho(2^{N_n+\tilde N_n}) \sum_{j=0}^{N_n} 2^{-\frac12|(\lambda_{s_+} + \mu_{s_+}\alpha_{s_+})(j-N_n)|} \cdot 2^{\varepsilon_0(N_n-j)} \underset{\Lambda,c,\gamma}{\overset{(5.27)}{\lesssim}} \rho(2^{N_n+\tilde N_n}),$$
$$\sum_{j=0}^{N_n} 2^{\tilde\lambda_{s_- -1} j + \tilde\mu_{s_- -1}\varphi^n_{s_-}(j) + \tilde\nu_{s_- -1,n}} \rho(2^{j+\tilde N_n}) \overset{(5.26),(5.30)}{\leqslant}$$
$$\leqslant M(\varepsilon_0)\rho(2^{N_n+\tilde N_n}) \sum_{j=0}^{N_n} 2^{-\frac12|(\lambda_{s_- -1} + \mu_{s_- -1}\alpha_{s_-})(j-N_n)|} \cdot 2^{\varepsilon_0(N_n-j)} \underset{\Lambda,c,\gamma}{\overset{(5.27)}{\lesssim}} \rho(2^{N_n+\tilde N_n}).$$

Пусть $s_- \leqslant s < s_+$. Так как $\varphi^n_{s+1}(j^n_*) \overset{(5.19)}{=} \varphi^n_s(j^n_*)$, то

$$\varphi^n_{s+1}(j) - \varphi^n_s(j) = \alpha_{s+1} j + \beta_{s+1,n} - \alpha_s j - \beta_{s,n} = (\alpha_{s+1} - \alpha_s)(j - j^n_*). \tag{5.31}$$

Из (5.19), (5.22) и (5.23) следует, что $\tilde\lambda_s j^n_* + \tilde\mu_s\varphi^n_{t(s)}(j^n_*) + \tilde\nu_{s,n} = \psi_n(j^n_*,\, l^n_*) = 0$. Поэтому

$$\tilde\lambda_s j + \tilde\mu_s\varphi^n_{t(s)}(j) + \tilde\nu_{s,n} = (\tilde\lambda_s + \tilde\mu_s\alpha_{t(s)})(j - j^n_*) \overset{(5.20)}{\leqslant}$$
$$\leqslant (\lambda_s + \mu_s\alpha_{t(s)})(j - j^n_*) + \varepsilon_0(1+A)|j - j^n_*|.$$

В силу (5.27) и (5.28),

$$2^{\tilde\lambda_s j + \tilde\mu_s\varphi^n_{t(s)}(j) + \tilde\nu_{s,n}}(|j - j^n_*| + 1) \underset{\Lambda}{\lesssim} 2^{-\frac{|(\lambda_s + \mu_s\alpha_{t(s)})(j - j^n_*)|}{2}}. \tag{5.32}$$

Отсюда и из неравенства

$$\sum_{\varphi_s^n(j)\leqslant l<\varphi_{s+1}^n(j)} 2^{\tilde\mu_s l} \leqslant 2^{\tilde\mu_s\varphi_{t(s)}^n(j)}(\varphi_{s+1}^n(j)-\varphi_s^n(j)+1)$$

следует, что

$$\sum_{(j,l)\in\mathbb{Z}^2\cap E_s^n} 2^{\tilde\psi_n(j,l)}\rho(2^{j+\tilde N_n}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{N_n} 2^{\tilde\lambda_s j+\tilde\mu_s\varphi_{t(s)}^n(j)+\tilde\nu_{s,n}}(\varphi_{s+1}^n(j)-\varphi_s^n(j)+1)\rho(2^{j+\tilde N_n}) \underset{\Lambda}{\overset{(5.31)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{N_n} 2^{\tilde\lambda_s j+\tilde\mu_s\varphi_{t(s)}^n(j)+\tilde\nu_{s,n}}(|j-j_*^n|+1)\rho(2^{j+\tilde N_n}) \underset{\Lambda}{\overset{(5.32)}{\lesssim}}$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{N_n} 2^{-\frac{|(\lambda_s+\mu_s\alpha_{t(s)})(j-j_*^n)|}{2}}\rho(2^{j+\tilde N_n}) \overset{(5.26)}{\leqslant}$$

$$\leqslant M(\varepsilon_0)\sum_{j=0}^{N_n} 2^{-\frac{|(\lambda_s+\mu_s\alpha_{t(s)})(j-j_*^n)|}{2}}2^{\varepsilon_0|j-j_*^n|}\rho(2^{j_*^n+\tilde N_n}) \underset{\Lambda,\gamma,c}{\overset{(5.27)}{\lesssim}} \rho(2^{j_*^n+\tilde N_n}).$$

Пусть $s\notin S$, $s\ne s_- -1$ и $s<m$. Из (5.24) следует, что

$$\operatorname{card}\mathbb{Z}^2\cap E_s^n \underset{c}{\lesssim} (\log_2 n)^2. \tag{5.33}$$

Пусть $(\hat j,\,\hat l)$ — точка максимума функции $\tilde\psi_n$ на множестве $\mathbb{Z}^2\cap E_s^n$. Тогда

$$\sum_{(j,l)\in\mathbb{Z}^2\cap E_s^n} 2^{\tilde\psi_n(j,l)}\rho(2^{j+\tilde N_n}) \underset{c}{\overset{(5.26),(5.33)}{\lesssim}} M(\varepsilon_0)2^{\varepsilon_0 N_n}(\log_2 n)^2\cdot 2^{\tilde\psi_n(\hat j,\hat l)}\rho(2^{\tilde N_n+j_*^n}). \tag{5.34}$$

Так как $\tilde\Psi\in\mathcal{O}_{\varepsilon_0,J}(\Psi)$, то

$$|\tilde\psi_n(\hat j,\,\hat l)-\psi_n(\hat j,\,\hat l)| \overset{(5.21)}{\leqslant} \varepsilon_0\log_2 n.$$

Так как $s\notin S$, $s\ne s_- -1$ и $s<m$, то

$$\{(0,\,\varphi_s^n(0)),\,(0,\,\varphi_{s+1}^n(0)),\,(N_n,\,\varphi_s^n(N_n)),\,(N_n,\,\varphi_{s+1}^n(N_n))\}\subset V_n\backslash(j_*^n,\,l_*^n).$$

Функция $\psi_n|_{E_s^n}$ является аффинной, поэтому

$$\sup_{(\xi,\,\eta)\in E_s^n}\psi_n(\xi,\,\eta)\leqslant \max\bigl\{\psi_n(0,\,\varphi_s^n(0)),\,\psi_n(0,\,\varphi_{s+1}^n(0)),$$

$$\psi_n(N_n,\,\varphi_s^n(N_n)),\,\psi_n(N_n,\,\varphi_{s+1}^n(N_n))\bigr\} \overset{(5.25)}{\leqslant} -\gamma\log_2 n.$$

Значит,

$$\Sigma_s^n \underset{c}{\overset{(5.24),(5.34)}{\lesssim}} M(\varepsilon_0)n^{c\varepsilon_0}(\log_2 n)^2 2^{-\gamma\log_2 n}2^{\varepsilon_0\log_2 n}\rho(2^{\tilde N_n+j_*^n}) \underset{c,\Lambda,\gamma}{\lesssim}$$

$$\lesssim n^{-\gamma+\varepsilon_0(c+1)}(\log_2 n)^2\rho(2^{\tilde N_n+j_*^n}) \underset{c,\Lambda,\gamma}{\overset{(5.27)}{\lesssim}} \rho(2^{\tilde N_n+j_*^n}).$$

Остается рассмотреть случай $s=m$, $s\notin S$. Так как $\mu_m<0$, то

$$\Sigma_m^n \underset{\Lambda}{\lesssim} \sum_{j=0}^{N_n} 2^{\tilde\psi_n(j,\varphi_m^n(j))}\rho(2^{j+\tilde N_n}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{N_n} 2^{\psi_n(j,\varphi_m^n(j))+|\tilde\psi_n(j,\varphi_m^n(j))-\psi_n(j,\varphi_m^n(j))|}\rho(2^{j+\tilde N_n}) \overset{(5.21),(5.24),(5.25),(5.26)}{\leqslant}$$

$$\leqslant M(\varepsilon_0)2^{\varepsilon_0 N_n}(c\log_2 n)2^{-\gamma\log_2 n+\varepsilon_0\log_2 n}\rho(2^{\tilde N_n+j_*^n}) \underset{\Lambda,c,\gamma}{\overset{(5.24)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim n^{-\gamma+\varepsilon_0(c+1)}(\log_2 n)\rho(2^{\tilde N_n+j_*^n}) \underset{c,\Lambda,\gamma}{\overset{(5.27)}{\lesssim}} \rho(2^{\tilde N_n+j_*^n}).$$

Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5.1.1. Определим $n_0 = n_0(\mathfrak{Z})$ так, чтобы выполнялось утверждение леммы 5.1.1 при $x \geqslant n_0$. Достаточно рассмотреть $n = 2^N$, $N \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$.

Шаг 1. Положим $t_*(n) = \min\{t \in \mathbb{N} : \overline{\nu}_t \geqslant n\}$. Тогда

$$\overline{\nu}_{t_*(n)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\asymp} n, \quad 2^{k_*t_*(n)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\asymp} n^{\beta_*}\varphi_*(n). \tag{5.35}$$

В самом деле, $\overline{\nu}_{t_*(n)} \geqslant n$ по определению. С другой стороны, для любого $t \in \mathbb{N}$ выполнено $\frac{\overline{\nu}_t}{\overline{\nu}_{t-1}} = 2^{k_*\gamma_*}\frac{\psi_*(2^{k_*t})}{\psi_*(2^{k_*(t-1)})} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 1$ в силу леммы 3.2.4. Так как $\overline{\nu}_{t_*(n)-1} < n$, отсюда следует, что $\overline{\nu}_{t_*(n)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} n$. Поэтому $2^{k_*t_*(n)} = (cn)^{\beta_*}\varphi_*(cn)$, $c \underset{\mathfrak{Z}_0}{\asymp} 1$. Снова применяя лемму 3.2.4, получаем второе соотношение в (5.35).

Пусть $t_0 \leqslant t \leqslant t_*(n)$. Построим разбиение $T^1_{m,n,t}$ множества G_t. Положим $\hat{t}(n) = 1$ или $\hat{t}(n) = t_*(n)$ для каждого $N \in \mathbb{N}$ и возьмем некоторое $\varepsilon > 0$ (выбор $\hat{t}(n)$ и ε будет сделан позже). Пусть

$$n_t := \left\lceil 2^{N-\gamma_*k_*t-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|}(\psi_*(2^{k_*t}))^{-1}\right\rceil \geqslant 2^{N-\gamma_*k_*t-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|}(\psi_*(2^{k_*t}))^{-1}, \tag{5.36}$$

$$m_t^* = \min\left\{m \in \mathbb{Z}_+ : 2^{N-\gamma_*k_*t-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|+m}(\psi_*(2^{k_*t}))^{-1} \geqslant 1\right\}. \tag{5.37}$$

Для $\xi \in \mathbf{V}(\Gamma_t)$, $m \geqslant m_t^*$ положим $T^1_{m,n,t}|_{\hat{F}(\xi)} = T_{m-m_t^*,n_t}(\hat{F}(\xi))$ (см. предположение 2). Если $m_t^* = 0$, то $n_t \asymp 2^{N-\gamma_*k_*t-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|}(\psi_*(2^{k_*t}))^{-1}$. Если $m_t^* > 0$, то

$$n_t = 1, \quad 2^{-m_t^*} \asymp 2^{N-\gamma_*k_*t-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|}(\psi_*(2^{k_*t}))^{-1}. \tag{5.38}$$

Значит,

$$2^{-m_t^*}n_t \asymp 2^{N-\gamma_*k_*t-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|}(\psi_*(2^{k_*t}))^{-1}. \tag{5.39}$$

В силу утверждения 1 предположения 2 и (5.11),

$$\begin{gathered}\operatorname{card} T^1_{m,n,t} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} \nu_t \cdot 2^{m-m_t^*}n_t \overset{(5.11),(5.39)}{\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}} \\ \lesssim 2^{\gamma_*k_*t}\psi_*(2^{k_*t})2^m \cdot 2^{N-\gamma_*k_*t-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|}(\psi_*(2^{k_*t}))^{-1} = 2^m n \cdot 2^{-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|}.\end{gathered} \tag{5.40}$$

Из утверждения 2 предположения 2, (5.10) и определения Γ_t следует, что для любого $E \in T^1_{m,n,t}$ существует линейный непрерывный оператор $P_E : Y_q(\Omega) \to \mathcal{P}(E)$ такой, что для любой функции $f \in X_p(\Omega)$

$$\|f - P_Ef\|_{Y_q(E)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 2^{-\mu_*k_*t}u_*(2^{k_*t})(2^{m-m_t^*}n_t)^{-\delta_*}\|f\|_{X_p(E)}. \tag{5.41}$$

Положим $P^1_{m,n,t}f|_E = P_Ef$, $E \in T^1_{m,n,t}$, $P^1_{m,n,t}f|_{\Omega\setminus G_t} = 0$. Тогда

$$P^1_{m,n,t} : Y_q(\Omega) \to S_{T^1_{m,n,t}}(\Omega) \tag{5.42}$$

является линейным непрерывным оператором и для любой функции $f \in X_p(\Omega)$

$$\|f - P^1_{m,n,t}f\|_{p,q,T^1_{m,n,t}} \overset{(5.41)}{\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}} 2^{-\mu_*k_*t}u_*(2^{k_*t})(2^{m-m_t^*}n_t)^{-\delta_*}\|f\|_{X_p(G_t)}, \quad \text{если } p \leqslant q. \tag{5.43}$$

В силу утверждения 3 предположения 2, для любого $E \in T^1_{m,n,t}$

$$\operatorname{card}\{E' \in T^1_{m\pm1,n,t} : \operatorname{mes}(E \cap E') > 0\} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 1. \tag{5.44}$$

Шаг 2. В силу предположения 1 и (5.9), для любых $t \geqslant t_0$, $i \in \overline{J}_t$ существует линейный непрерывный оператор $\tilde{P}_{t,i} : Y_q(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)$ такой, что для любой функции $f \in X_p(\Omega)$

$$\|f - \tilde{P}_{t,i} f\|_{Y_q(\tilde{U}_{t,i})} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}) \|f\|_{X_p(\tilde{U}_{t,i})}, \tag{5.45}$$

$$\|f - \tilde{P}_{t,i} f\|_{Y_q(\Omega_{\mathcal{A}_{t,i}})} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}) \|f\|_{X_p(\Omega_{\mathcal{A}_{t,i}})}. \tag{5.46}$$

Пусть $1 \leqslant t < t_0$. Тогда $\tilde{U}_{t,i} = \tilde{U}_{t_0,i_0}$. Положим $\tilde{P}_{t,i} = \tilde{P}_{t_0,i_0}$. В силу (5.13), получаем, что (5.45) также выполнено.

Шаг 3. Докажем оценки (5.17) и (5.18).

Положим $T_n^1|_{G_t} = T^1_{m_t^*,n,t}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_*(n)$, $T_n^1|_{\tilde{U}_{t_*(n)+1,i}} = \{\tilde{U}_{t_*(n)+1,i}\}$, $i \in \overline{J}_{t_*(n)+1}$, $P_n^1 f|_{G_t} = P^1_{m_t^*,n,t} f$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_*(n)$, $P_n^1 f|_{\tilde{U}_{t_*(n)+1,i}} = \tilde{P}_{t_*(n)+1,i}$, $i \in \overline{J}_{t_*(n)+1}$. Тогда $P_n^1 : Y_q(\Omega) \to \mathcal{S}_{T_n^1}(\Omega)$ является линейным непрерывным оператором. Если $t_*(n) < t_0$, то $T_n^1 = \{\Omega\}$; если $t_*(n) \geqslant t_0$, то $\overline{J}_{t_*(n)+1} \overset{(5.16)}{=} \hat{J}_{t_*(n)+1}$ и

$$\operatorname{card} T_n^1 = \sum_{t=t_0}^{t_*(n)} \operatorname{card} T^1_{m_t^*,n,t} + \operatorname{card} \hat{J}_{t_*(n)+1} \overset{(5.11),(5.38),(5.40)}{\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}} \sum_{t_0 \leqslant t \leqslant t_*(n),\, m_t^*=0} n \cdot 2^{-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|} +$$

$$+ \sum_{t_0 \leqslant t \leqslant t_*(n), m_t^*>0} \nu_t + \nu_{t_*(n)+1} \overset{(5.11)}{\underset{\varepsilon,\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}} n + \overline{\nu}_{t_*(n)+1} \overset{(5.11),(5.35)}{\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}} n$$

(здесь использовалась лемма 3.2.4). Пусть $p \leqslant q$. По условию теоремы, $\delta_* > 0$. Тогда для $f \in BX_p(\Omega)$, $t_*(n) \geqslant t_0$ получаем

$$\|f - P_n^1 f\|_{Y_q(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{t=t_0}^{t_*(n)} \sum_{E \in T^1_{m_t^*,n,t}} \|f - P_E f\|^p_{Y_q(E)} + \sum_{i \in \hat{J}_{t_*(n)+1}} \|f - \tilde{P}_{t_*(n)+1,i} f\|^p_{Y_q(\tilde{U}_{t_*(n)+1,i})} \right)^{1/p}$$

$$\overset{(5.8),(5.41),(5.45)}{\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}} \left(\sum_{t=t_0}^{t_*(n)} \sum_{E \in T^1_{m_t^*,n,t}} 2^{-\lambda_* k_* t p} u_*^p(2^{k_* t}) n_t^{-\delta_* p} \|f\|^p_{X_p(E)} \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\sum_{i \in \hat{J}_{t_*(n)+1}} 2^{-\lambda_* p k_* t_*(n)} u_*^p(2^{k_* t_*(n)}) \|f\|^p_{X_p(\tilde{U}_{t_*(n)+1,i})} \right)^{1/p} \overset{(5.35),(5.36)}{\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \left(\sum_{t=t_0}^{t_*(n)} \sum_{E \in T^1_{m_t^*,n,t}} 2^{-\lambda_* k_* t p} u_*^p(2^{k_* t}) \left(2^{N-\gamma_* k_* t - \varepsilon|t-\hat{t}(n)|} (\psi_*(2^{k_* t}))^{-1}\right)^{-\delta_* p} \|f\|^p_{X_p(E)} \right)^{1/p} +$$

$$+ n^{-\lambda_* \beta_*} u_*(n^{\beta_*} \varphi_*(n)) \varphi_*^{-\lambda_*}(n) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{t=1}^{t_*(n)} 2^{-\lambda_* k_* t p} u_*^p(2^{k_* t}) \left(2^{N-\gamma_* k_* t - \varepsilon|t-\hat{t}(n)|} (\psi_*(2^{k_* t}))^{-1}\right)^{-\delta_* p} \right)^{1/p} +$$

$$+ n^{-\lambda_* \beta_*} u_*(n^{\beta_*} \varphi_*(n)) \varphi_*^{-\lambda_*}(n).$$

Пусть $\varepsilon = \frac{|-\lambda_* + \delta_* \gamma_*|}{2\delta_*}$. Если $\delta_* < \beta_* \lambda_*$, то $-\lambda_* + \delta_* \gamma_* < 0$; в этом случае полагаем $\hat{t}(n) = 1$ и получаем оценку

$$\left(\sum_{t=1}^{t_*(n)} 2^{-\lambda_* k_* t p} u_*^p(2^{k_* t}) \left(2^{N-\gamma_* k_* t - \varepsilon|t-\hat{t}(n)|} (\psi_*(2^{k_* t}))^{-1}\right)^{-\delta_* p} \right)^{1/p} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} n^{-\delta_*}.$$

Если $\delta_* > \beta_*\lambda_*$, то берем $\hat{t}(n) = t_*(n)$ и получаем

$$\left(\sum_{t=1}^{t_*(n)} 2^{-\lambda_* k_* tp} u_*^p(2^{k_* t}) \left(2^{N-\gamma_* k_* t - \varepsilon|t-\hat{t}(n)|} (\psi_*(2^{k_* t}))^{-1}\right)^{-\delta_* p}\right)^{1/p} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.11),(5.35)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim 2^{-\lambda_* k_* t_*(n)} u_*(2^{k_* t_*(n)}) \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.35)}{\asymp}} n^{-\lambda_*\beta_*} u_*(n^{\beta_*}\varphi_*(n))\varphi_*^{-\lambda_*}(n).$$

Если $1 \leqslant t_*(n) < t_0$, то для $f \in BX_p(\Omega)$ получаем

$$\|f - P_n^1 f\|_{Y_q(\Omega)} = \|f - \tilde{P}_{t_0, i_0} f\|_{Y_q(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.45)}{\lesssim}} 2^{-\lambda_* k_* t_0} u_*(2^{k_* t_0}) \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.13)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim 2^{-\lambda_* k_* t_*(n)} u_*(2^{k_* t_*(n)}) \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.35)}{\asymp}} n^{-\lambda_*\beta_*} u_*(n^{\beta_*}\varphi_*(n))\varphi_*^{-\lambda_*}(n).$$

Пусть $p > q$. По условию теоремы, $\delta_* > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Значит,

$$n_t^{1-\delta_*\frac{pq}{p-q}} \overset{(5.36)}{\leqslant} \left(2^{N-\gamma_* k_* t - \varepsilon|t-\hat{t}(n)|} (\psi_*(2^{k_* t}))^{-1}\right)^{1-\delta_*\frac{pq}{p-q}}. \tag{5.47}$$

Применяя неравенство Гельдера, для $f \in BX_p(\Omega)$, $t_*(n) \geqslant t_0$ получаем

$$\|f - P_n^1 f\|_{Y_q(\Omega)} =$$

$$= \left(\sum_{t=t_0}^{t_*(n)} \sum_{E \in T^1_{m_t^*, n, t}} \|f - P_E f\|^q_{Y_q(E)} + \sum_{i \in \hat{J}_{t_*(n)+1}} \|f - \tilde{P}_{t_*(n)+1, i} f\|^q_{Y_q(\tilde{U}_{t_*(n)+1,i})}\right)^{1/q}$$

$$\underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.41),(5.45)}{\lesssim}} \left(\sum_{t=t_0}^{t_*(n)} \sum_{E \in T^1_{m_t^*, n, t}} 2^{-\mu_* k_* tq} u_*^q(2^{k_* t}) n_t^{-\delta_* q} \|f\|^q_{X_p(E)}\right)^{1/q} +$$

$$+ \left(\sum_{i \in \hat{J}_{t_*(n)+1}} 2^{-q\lambda_* k_* t_*(n)} u_*^q(2^{k_* t_*(n)}) \|f\|^q_{X_p(\tilde{U}_{t_*(n)+1,i})}\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{t=t_0}^{t_*(n)} \operatorname{card} T^1_{m_t^*, n, t} 2^{-\mu_* k_* t \frac{pq}{p-q}} u_*^{\frac{pq}{p-q}}(2^{k_* t}) n_t^{-\frac{\delta_* pq}{p-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\operatorname{card} \hat{J}_{t_*(n)+1} \cdot 2^{-\frac{pq}{p-q}\lambda_* k_* t_*(n)} u_*^{\frac{pq}{p-q}}(2^{k_* t_*(n)})\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.11),(5.40),(5.47)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \left(\sum_{t=t_0}^{t_*(n)} 2^{\gamma_* k_* t} \psi_*(2^{k_* t}) [2^{-\mu_* k_* t} u_*(2^{k_* t})]^{\frac{pq}{p-q}} \left[2^{N-\gamma_* k_* t - \varepsilon|t-\hat{t}(n)|} \psi_*^{-1}(2^{k_* t})\right]^{1-\frac{pq}{p-q}\delta_*}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} +$$

$$+ 2^{-\lambda_* k_* t_*(n)} u_*(2^{k_* t_*(n)}) (\operatorname{card} \hat{J}_{t_*(n)+1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.11),(5.12),(5.35)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \left(\sum_{t=1}^{t_*(n)} \psi_*^{\frac{pq}{p-q}\delta_*}(2^{k_* t}) \cdot 2^{-(\mu_* - \gamma_*\delta_*)k_* t \frac{pq}{p-q}} \left[2^{N-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|}\right]^{1-\frac{pq}{p-q}\delta_*} u_*^{\frac{pq}{p-q}}(2^{k_* t})\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} +$$

$$+ n^{-\mu_*\beta_* + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} u_*(n^{\beta_*}\varphi_*(n)) \varphi_*^{-\mu_*}(n).$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как в случае $p \leqslant q$.

Пусть $1 \leqslant t_*(n) < t_0$. Тогда

$$\|f - P_n^1 f\|_{Y_q(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 2^{-\lambda_* k_* t_0} u_*(2^{k_* t_0}) = 2^{-\lambda_* k_* t_0} u_*(2^{k_* t_0}) \left(\operatorname{card} \hat{J}_{t_0}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.11),(5.12)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim 2^{-\mu_* k_* t_0} u_*(2^{k_* t_0}) \left(2^{\gamma_* k_* t_0} \psi_*(2^{k_* t_0})\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.14)}{\lesssim}}$$
$$\lesssim 2^{-\mu_* k_* t_*(n)} u_*(2^{k_* t_*(n)}) \left(2^{\gamma_* k_* t_*(n)} \psi_*(2^{k_* t_*(n)})\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.35)}{\lesssim}}$$
$$\lesssim n^{-\mu_*\beta_*+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} u_*(n^{\beta_*}\varphi_*(n))\varphi_*^{-\mu_*}(n).$$

Шаг 4. Оценим поперечники ϑ_n при $p < q$, $\hat{q} > 2$. Обозначим

$$t_{**}(n) = \min\{t \in \mathbb{N} :\ \overline{\nu}_t \geqslant n^{\hat{q}/2}\}.$$

Тогда

$$\overline{\nu}_{t_{**}(n)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\asymp} n^{\hat{q}/2}, \quad 2^{k_* t_{**}(n)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\asymp} n^{\beta_*\hat{q}/2}\varphi_*(n^{\hat{q}/2}) \tag{5.48}$$

(это доказывается так же, как (5.35)). При достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеем $t_*(n) + 1 \leqslant t_{**}(n) - 1$. Если $t_*(n) + 1 > t_{**}(n) - 1$, то $n \underset{\mathfrak{Z}_0}{\asymp} n^{\hat{q}/2}$. В этом случае требуемая оценка получена на предыдущем шаге.

Пусть $t_*(n) + 1 \leqslant t_{**}(n) - 1$.

Шаг 4.1. Рассмотрим $t > t_*(n)$. Если $t \geqslant t_0$, то $\overline{J}_t = \hat{J}_t$ в силу (5.16). Пусть $\tilde{P}_{t,i}$ — оператор, определенный на шаге 2. Положим

$$Q_t f(x) = \tilde{P}_{t,i} f(x) \quad \text{при} \quad x \in \tilde{U}_{t,i}, \quad i \in \overline{J}_t, \quad Q_t f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega\backslash\tilde{U}_t. \tag{5.49}$$

Отметим, что если $t < t_0$, то $Q_t f = Q_{t+1} f$.

Покажем, что

$$\begin{gathered}(f - Q_{t_*(n)+1} f)\chi_{\tilde{U}_{t_*(n)+1}} = \sum_{j=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} (Q_{j+1} f - Q_j f)\chi_{\tilde{U}_{j+1}} + \\ + \sum_{j=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} (f - Q_j f)\chi_{G_j} + (f - Q_{t_{**}(n)} f)\chi_{\tilde{U}_{t_{**}(n)}}.\end{gathered} \tag{5.50}$$

В самом деле, пусть $x \in G_t$, $t_*(n) + 1 \leqslant t \leqslant t_{**}(n) - 1$. Тогда $t \geqslant t_0$ (иначе $G_t = \varnothing$). Имеем $\chi_{\tilde{U}_{t_*(n)+1}}(x) = 1$, $\chi_{\tilde{U}_{t_{**}(n)}}(x) = 0$, $\chi_{\tilde{U}_{j+1}}(x) = 1$ при $j \leqslant t - 1$, $\chi_{\tilde{U}_{j+1}}(x) = 0$ при $j \geqslant t$. Значит, левая часть (5.50) равна $f(x) - Q_{t_*(n)+1} f(x)$, а правая часть равна

$$\sum_{j=t_*(n)+1}^{t-1} (Q_{j+1} f(x) - Q_j f(x)) + f(x) - Q_t f(x) = f(x) - Q_{t_*(n)+1} f(x).$$

Пусть $x \in \tilde{U}_{t_{**}(n)}$. Тогда $\chi_{\tilde{U}_{t_*(n)+1}}(x) = 1$, $\chi_{\tilde{U}_{t_{**}(n)}}(x) = 1$, $\chi_{\tilde{U}_{j+1}}(x) = 1$, $t_*(n) + 1 \leqslant j \leqslant t_{**}(n) - 1$, $\chi_{G_t}(x) = 0$, $t_*(n) + 1 \leqslant t \leqslant t_{**}(n) - 1$. Значит, левая часть (5.50) равна $f(x) - Q_{t_*(n)+1} f(x)$, а правая часть равна

$$\sum_{j=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} (Q_{j+1} f(x) - Q_j f(x)) + (f(x) - Q_{t_{**}(n)} f(x)) = f(x) - Q_{t_*(n)+1} f(x).$$

Если $x \in \Omega\backslash\tilde{U}_{t_*(n)+1}$, то обе части (5.50) равны нулю.

Шаг 4.2. Положим

$$m_t = \lceil \log \nu_t \rceil, \tag{5.51}$$

$\nu_{t,i} = \operatorname{card} \mathbf{V}(\mathcal{A}_{t,i})$, $i \in \hat{J}_t$,

$$J_{m,t} = \left\{ i \in \hat{J}_t :\ \frac{\nu_{t,i}}{\nu_t} \cdot 2^m \geqslant 1 \right\}, \quad 0 \leqslant m \leqslant m_t,$$

$$\overline{m}(i) = \min\{m \in \overline{0,\, m_t} :\; i \in J_{m,t}\}, \quad i \in \hat{J}_t$$

(заметим, что $J_{m_t,t} = \hat{J}_t$). Тогда $\frac{\nu_{t,i}}{\nu_t} \cdot 2^{\overline{m}(i)} < 2$.

Определим функцию $\Phi_{t,i} : 2^{\mathbf{V}(\mathcal{A}_{t,i})} \to \mathbb{R}_+$ равенством $\Phi_{t,i}(\mathbf{W}) = \operatorname{card} \mathbf{W}$, $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}(\mathcal{A}_{t,i})$. В силу (5.1) и следствия 1.2.1, для любых $i \in \hat{J}_t$, $\overline{m}(i) \leqslant m \leqslant m_t$ существует разбиение $R^i_{m,t}$ дерева $\mathcal{A}_{t,i}$ на поддеревья со следующими свойствами:

1. $\operatorname{card} R^i_{m,t} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} \left\lceil \frac{\nu_{t,i}}{\nu_t} \cdot 2^m \right\rceil$;

2. для любого дерева $\mathcal{D} \in R^i_{m,t}$
$$\operatorname{card} \mathbf{V}(\mathcal{D}) \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} \nu_t \cdot 2^{-m}; \tag{5.52}$$

3. для любого дерева $\mathcal{D} \in R^i_{m,t}$
$$\operatorname{card}\{\mathcal{D}' \in R^i_{m\pm 1,t} : \mathbf{V}(\mathcal{D}) \cap \mathbf{V}(\mathcal{D}') \neq \varnothing\} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 1.$$

Кроме того, можно считать, что $\operatorname{card} R^i_{\overline{m}(i),t} = 1$.

Для $0 \leqslant m \leqslant m_t$ положим $G_{m,t} = \cup_{i\in J_{m,t}} \Omega_{\mathcal{A}_{t,i}}$,
$$T^2_{m,t} = \{\Omega_{\mathcal{D}} :\; \mathcal{D} \in R^i_{m,t},\, i \in J_{m,t}\}. \tag{5.53}$$

Тогда $T^2_{m,t}$ является разбиением $G_{m,t}$ и
$$\operatorname{card} T^2_{m,t} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} \frac{2^m \sum\limits_{i\in J_{m,t}} \nu_{t,i}}{\nu_t}; \quad \text{в частности,} \quad \operatorname{card} T^2_{m_t,t} \overset{(5.51)}{\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}} \nu_t. \tag{5.54}$$

В силу предположения 1 и (5.9), для любого $E \in T^2_{m,t}$ существует линейный непрерывный оператор $\overline{P}_E : Y_q(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)$ такой, что
$$\|f - Q_t f - \overline{P}_E f\|_{Y_q(E)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}) \|f\|_{X_p(E)}$$

для любой функции $f \in X_p(\Omega)$ (так как $Q_t f|_E \in \mathcal{P}(E)$, то $\|Q_t f\|_{X_p(E)} = 0$). Поскольку $\operatorname{card} R^i_{\overline{m}(i),t} = 1$, имеем $T^2_{\overline{m}(i),t}|_{\Omega_{\mathcal{A}_{t,i}}} = \{\Omega_{\mathcal{A}_{t,i}}\}$. Отсюда и из (5.46) и (5.49) следует, что можно взять $\overline{P}_{\Omega_{\mathcal{A}_{t,i}}} f = 0$. Значит, для любого $m \in \{0,\, \dots,\, m_t\}$ существует линейный непрерывный оператор
$$P^2_{m,t} : Y_q(\Omega) \to \mathcal{S}_{T^2_{m,t}}(\Omega) \tag{5.55}$$

такой, что
$$P^2_{\overline{m}(i),t} f|_{\Omega_{\mathcal{A}_{t,i}}} = 0, \quad i \in \hat{J}_t, \quad f \in X_p(\Omega), \tag{5.56}$$

$$\|f - Q_t f - P^2_{m,t} f\|_{p,q,T^2_{m,t}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}) \|f\|_{X_p(G_{m,t})}. \tag{5.57}$$

Наконец, для любого $E \in T^2_{m,t}$
$$\operatorname{card}\{E' \in T^2_{m\pm 1,t} :\; \operatorname{mes}(E \cap E') > 0\} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 1. \tag{5.58}$$

Если $x \in \Omega_{\mathcal{A}_{t,i}}$, то по определению $G_{m,t}$
$$\sum_{m=0}^{m_t-1} (P^2_{m+1,t} f(x) - P^2_{m,t} f(x)) \chi_{G_{m,t}}(x) = \sum_{m=\overline{m}(i)}^{m_t-1} (P^2_{m+1,t} f(x) - P^2_{m,t} f(x)) \overset{(5.56)}{=} P^2_{m_t,t} f(x).$$

Значит,

$$(f-Q_tf)\chi_{G_t}=\sum_{m=0}^{m_t-1}(P^2_{m+1,t}f-P^2_{m,t}f)\chi_{G_{m,t}}+(f-Q_tf-P^2_{m_t,t}f)\chi_{G_t}.$$

Отсюда и из (5.50) получаем

$$\begin{aligned}(f-Q_{t_*(n)+1}f)\chi_{\tilde U_{t_*(n)+1}}=\sum_{j=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}(Q_{j+1}f-Q_jf)\chi_{\tilde U_{j+1}}+\\+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=0}^{m_t-1}(P^2_{m+1,t}f-P^2_{m,t}f)\chi_{G_{m,t}}+\\+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}(f-Q_tf-P^2_{m_t,t}f)\chi_{G_t}+(f-Q_{t_{**}(n)}f)\chi_{\tilde U_{t_{**}(n)}}.\end{aligned}\tag{5.59}$$

Шаг 4.3. Построим разбиение $T^2_{m,t}$ множества G_t для $m>m_t$. Пусть $\mathcal{D}\in R^i_{m_t,t}$ для некоторого $i\in\hat J_t$. Из (5.51) и (5.52) следует, что

$$\operatorname{card}\mathbf{V}(\mathcal{D})\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}1.\tag{5.60}$$

Для каждого $\xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D})$ определим разбиение $T_{m,t,\xi}:=T_{m-m_t,1}(\hat F(\xi))$ и оператор P_E в соответствии с предположением 2. Напомним, что $J_{m_t,t}=\hat J_t$. Положим

$$\begin{aligned}T^2_{m,t}=\{E\in T_{m,t,\xi}:\ \xi\in\mathbf{V}(\mathcal{D}),\ \mathcal{D}\in R^i_{m_t,t},\ i\in\hat J_t\}=\\=\left\{E\in T_{m,t,\xi}:\ \xi\in\cup_{i\in\hat J_t}\mathbf{V}(\mathcal{A}_{t,i})\right\},\end{aligned}\tag{5.61}$$

$P^2_{m,t}f|_E=P_Ef-(Q_tf)|_E$, $E\in T^2_{m,t}$, $P^2_{m,t}f|_{\Omega\setminus G_t}=0$. Тогда

$$\cup_{E\in T^2_{m,t}}E=G_t,\quad P^2_{m,t}:Y_q(\Omega)\to\mathcal{S}_{T^2_{m,t}}(\Omega)\quad\text{линеен и непрерывен;}\tag{5.62}$$

в силу предположения 2 и (5.11),

$$\operatorname{card}T^2_{m,t}\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}\overline{\nu}_t\cdot 2^{m-m_t}.\tag{5.63}$$

Далее,

$$\|f-Q_tf-P^2_{m,t}f\|_{p,q,T^2_{m,t}}\overset{(5.6),(5.8),(5.10)}{\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}}2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{-\delta_*(m-m_t)}\|f\|_{X_p(G_t)},\tag{5.64}$$

и для любого $E\in T^2_{m,t}$

$$\operatorname{card}\{E'\in T^2_{m\pm1,t}:\ \operatorname{mes}(E\cap E')>0\}\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}1,\quad m\geqslant m_t\tag{5.65}$$

(для $m>m_t$ это следует из (5.7), а для $m=m_t$ — из предположения 2, (5.53), (5.58), (5.60) и (5.61)). Из (5.59) и (5.64) получаем

$$\begin{aligned}(f-Q_{t_*(n)+1}f)\chi_{\tilde U_{t_*(n)+1}}=\sum_{j=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}(Q_{j+1}f-Q_jf)\chi_{\tilde U_{j+1}}+\\+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=0}^{m_t-1}(P^2_{m+1,t}f-P^2_{m,t}f)\chi_{G_{m,t}}+\\+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=m_t}^{\infty}(P^2_{m+1,t}f-P^2_{m,t}f)+(f-Q_{t_{**}(n)}f)\chi_{\tilde U_{t_{**}(n)}}.\end{aligned}\tag{5.66}$$

Шаг 5. Получим оценки ϑ_n. Определим разбиение T_n равенствами $T_n|_{G_t} = T^1_{m^*_t,n,t}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_*(n)$, $T_n|_{\tilde U_{t_*(n)+1,i}} = \{\tilde U_{t_*(n)+1,i}\}$. Если $t_0 > t_*(n)$, то $T_n = \{\Omega\}$. Если $t_0 \leqslant t_*(n)$, то

$$\begin{gathered}\operatorname{card} T_n \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.11),(5.16),(5.35),(5.38),(5.40)}{\lesssim}} n + \sum_{t_0\leqslant t\leqslant t_*(n),\, m^*_t=0} n\cdot 2^{-\varepsilon|t-\hat t(n)|} + \\ + \sum_{t_0\leqslant t\leqslant t_*(n),\, m^*_t>0} \nu_t \underset{\varepsilon,\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.11),(5.35)}{\lesssim}} n.\end{gathered} \tag{5.67}$$

Положим $S_nf|_{G_t} = P^1_{m^*_t,n,t}f|_{G_t}$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_*(n)$, $S_nf|_{\tilde U_{t_*(n)+1}} = Q_{t_*(n)+1}f$. Отсюда и из (5.43), (5.66) следует, что

$$S_nf \in \mathcal{S}_{T_n}(\Omega), \tag{5.68}$$

$f\mapsto S_nf$ — линейный непрерывный оператор в $Y_q(\Omega)$ и

$$\begin{gathered} f - S_nf = \sum_{t=t_0}^{t_*(n)} \sum_{m\geqslant m^*_t} (P^1_{m+1,n,t}f - P^1_{m,n,t}f) + \\ + \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} (Q_{t+1}f - Q_tf)\chi_{\tilde U_{t+1}} + \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} \sum_{m=0}^{m_t-1} (P^2_{m+1,t}f - P^2_{m,t}f)\chi_{G_{m,t}} + \\ + \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} \sum_{m=m_t}^{\infty} (P^2_{m+1,t}f - P^2_{m,t}f) + (f - Q_{t_{**}(n)}f)\chi_{\tilde U_{t_{**}(n)}}. \end{gathered} \tag{5.69}$$

Обозначим через $\hat T^1_{m,n,t}$ разбиение G_t, состоящее из множеств $E'\cap E''$, $E'\in T^1_{m,n,t}$, $E''\in T^1_{m+1,n,t}$, $\operatorname{mes}(E'\cap E'')>0$, $t_0\leqslant t\leqslant t_*(n)$, $m\geqslant m^*_t$. Пусть $\hat T^2_{m,t}$ — разбиение $G_{m,t}$, состоящее из множеств $E'\cap E''$, $E'\in T^2_{m,t}$, $E''\in T^2_{m+1,t}$, $\operatorname{mes}(E'\cap E'')>0$, $t_*(n)+1\leqslant t\leqslant t_{**}(n)-1$, $m\geqslant 0$ ($G_{m,t}:=G_t$ при $m\geqslant m_t$; см. (5.62)). Пусть $\hat T^3_t = \{\tilde U_{t+1,i}\}_{i\in\overline J_{t+1}}$, $t_*(n)+1\leqslant t\leqslant t_{**}(n)-1$. Тогда

$$P^1_{m+1,n,t}f - P^1_{m,n,t}f \overset{(5.42)}{\in} \mathcal{S}_{\hat T^1_{m,n,t}}(\Omega), \quad (P^2_{m+1,t}f - P^2_{m,t}f)\chi_{G_{m,t}} \overset{(5.55),(5.62)}{\in} \mathcal{S}_{\hat T^2_{m,t}}(\Omega), \tag{5.70}$$

$$(Q_{t+1}f - Q_tf)\chi_{\tilde U_{t+1}} \overset{(5.49)}{\in} \mathcal{S}_{\hat T^3_t}(\Omega); \tag{5.71}$$

кроме того, для любой функции $f\in BX_p(\Omega)$

$$\|P^1_{m+1,n,t}f - P^1_{m,n,t}f\|_{p,q,\hat T^1_{m,n,t}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.8),(5.43),(5.44)}{\lesssim}} 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})(2^{m-m^*_t}n_t)^{-\delta_*}, \tag{5.72}$$

$$\|P^2_{m+1,t}f - P^2_{m,t}f\|_{p,q,\hat T^2_{m,t}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.57),(5.58),(5.64),(5.65)}{\lesssim}} 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t}), \quad m\leqslant m_t, \tag{5.73}$$

$$\|P^2_{m+1,t}f - P^2_{m,t}f\|_{p,q,\hat T^2_{m,t}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.64),(5.65)}{\lesssim}} 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{-\delta_*(m-m_t)}, \quad m>m_t, \tag{5.74}$$

$$\|Q_{t+1}f - Q_tf\|_{p,q,\hat T^3_t} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.45),(5.49)}{\lesssim}} 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t}), \tag{5.75}$$

$$\|f - Q_t f\|_{Y_q(\tilde{U}_t)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.45),(5.49)}{\lesssim}} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}), \tag{5.76}$$

и существует $C = C(\mathfrak{Z}_0) \geqslant 1$ такое, что

$$s^1_{m,n,t} := \dim \mathcal{S}_{\hat{T}^1_{m,n,t}}(\Omega) \overset{(5.40),(5.44)}{\leqslant} C \cdot 2^{m-\varepsilon|t-\hat{t}(n)|} n, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_*(n), \;\; m \geqslant m^*_t, \tag{5.77}$$

$$s^2_{m,t} := \dim \mathcal{S}_{\hat{T}^2_{m,t}}(\Omega) \overset{(5.54),(5.58),(5.65)}{\leqslant} C \cdot 2^m, \quad t_*(n)+1 \leqslant t \leqslant t_{**}(n)-1, \;\; m \leqslant m_t, \tag{5.78}$$

$$s^2_{m,t} := \dim \mathcal{S}_{\hat{T}^2_{m,t}}(\Omega) \overset{(5.63),(5.65)}{\leqslant} C \cdot 2^{m-m_t} \overline{\nu}_t, \quad t_*(n)+1 \leqslant t \leqslant t_{**}(n)-1, \;\; m > m_t, \tag{5.79}$$

$$s^3_t := \dim \mathcal{S}_{\hat{T}^3_t}(\Omega) \overset{(5.11),(5.16)}{\leqslant} C \cdot 2^{\gamma_* k_* t} \psi_*(2^{k_* t}), \quad t_*(n)+1 \leqslant t \leqslant t_{**}(n)-1. \tag{5.80}$$

По лемме 5.1.3, существуют линейные изоморфизмы $A^1_{m,n,t} : \mathcal{S}_{\hat{T}^1_{m,n,t}}(\Omega) \to \mathbb{R}^{s^1_{m,n,t}}$, $A^2_{m,t} : \mathcal{S}_{\hat{T}^2_{m,t}}(\Omega) \to \mathbb{R}^{s^2_{m,t}}$, $A^3_t : \mathcal{S}_{\hat{T}^3_t}(\Omega) \to \mathbb{R}^{s^3_t}$ такие, что

$$\|A^1_{m,n,t}\|_{Y_{p,q,\hat{T}^1_{m,n,t}}(G_t) \to l_p^{s^1_{m,n,t}}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 1, \quad \|(A^1_{m,n,t})^{-1}\|_{l_q^{s^1_{m,n,t}} \to Y_q(G_t)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 1, \tag{5.81}$$

$$\|A^2_{m,t}\|_{Y_{p,q,\hat{T}^2_{m,t}}(G_{m,t}) \to l_p^{s^2_{m,t}}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 1, \quad \|(A^2_{m,t})^{-1}\|_{l_q^{s^2_{m,t}} \to Y_q(G_{m,t})} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 1, \tag{5.82}$$

$$\|A^3_t\|_{Y_{p,q,\hat{T}^3_t}(\tilde{U}_{t+1}) \to l_p^{s^3_t}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 1, \quad \|(A^3_t)^{-1}\|_{l_q^{s^3_t} \to Y_q(\tilde{U}_{t+1})} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} 1. \tag{5.83}$$

Для $k^1_{m,n,t} \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $E^1_{m,n,t} : \mathbb{R}^{s^1_{m,n,t}} \to \mathbb{R}^{s^1_{m,n,t}}$ экстремальное отображение для $\gamma^1_{m,n,t} := \vartheta_{k^1_{m,n,t}}(B_p^{s^1_{m,n,t}}, \, l_q^{s^1_{m,n,t}})$ ($t_0 \leqslant t \leqslant t_*(n)$, $m \geqslant m^*_t$); для $k^2_{m,t} \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $E^2_{m,t} : \mathbb{R}^{s^2_{m,t}} \to \mathbb{R}^{s^2_{m,t}}$ экстремальное отображение для $\gamma^2_{m,t} := \vartheta_{k^2_{m,t}}(B_p^{s^2_{m,t}}, \, l_q^{s^2_{m,t}})$ ($t_*(n) < t < t_{**}(n)$, $m \in \mathbb{Z}_+$); для $k^3_t \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $E^3_t : \mathbb{R}^{s^3_t} \to \mathbb{R}^{s^3_t}$ экстремальное отображение для $\gamma^3_t := \vartheta_{k^3_t}(B_p^{s^3_t}, \, l_q^{s^3_t})$ ($t_*(n) < t < t_{**}(n)$). Предположим, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_*(n)} \sum_{m \geqslant m^*_t} k^1_{m,n,t} + \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} k^2_{m,t} + \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} k^3_t \leqslant C_1 n, \tag{5.84}$$

где $C_1 > 0$ не зависит от n.

Положим

$$P_* f = S_n f + \sum_{t=t_0}^{t_*(n)} \sum_{m \geqslant m^*_t} (A^1_{m,n,t})^{-1} E^1_{m,n,t} A^1_{m,n,t} (P^1_{m+1,n,t} f - P^1_{m,n,t} f) +$$

$$+ \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} (A^2_{m,t})^{-1} E^2_{m,t} A^2_{m,t} [(P^2_{m+1,t} f - P^2_{m,t} f) \chi_{G_{m,t}}] +$$

$$+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}(A_t^3)^{-1}E_t^3A_t^3[(Q_{t+1}f-Q_tf)\chi_{\tilde U_{t+1}}].$$

Образ отображения P_* содержится в подпространстве $Z\subset Y_q(\Omega)$ размерности $\overline{k}_n \underset{\mathfrak{Z}_0,\varepsilon,C_1}{\overset{(5.67),(5.68),(5.84)}{\lesssim}} n$. Заметим, что если отображения $E^1_{m,n,t}$, $E^2_{m,t}$ и E^3_t линейны, то P_* является линейным непрерывным оператором в $Y_q(\Omega)$.

Для оценки колмогоровских и линейных поперечников достаточно оценить сверху величину $\|f-P_*f\|_{Y_q(\Omega)}$ для $f\in BX_p(\Omega)$. Для оценки гельфандовских поперечников мы оцениваем сверху $\|f\|_{Y_q(\Omega)}$ для $f\in BX_p(\Omega)$ таких, что

$$S_nf=0,\quad E^1_{m,n,t}A^1_{m,n,t}(P^1_{m+1,n,t}f-P^1_{m,n,t}f)=0,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_*(n),\ m\geqslant m_t^*, \tag{5.85}$$

$$E^2_{m,t}A^2_{m,t}[(P^2_{m+1,t}f-P^2_{m,t}f)\chi_{G_{m,t}}]=0,\quad t_*(n)<t<t_{**}(n),\ m\in\mathbb{Z}_+, \tag{5.86}$$

$$E^3_tA^3_t[(Q_{t+1}f-Q_tf)\chi_{\tilde U_{t+1}}]=0,\quad t_*(n)<t<t_{**}(n), \tag{5.87}$$

и учитываем (5.67), (5.68) и (5.84) (в самом деле, подпространство функций, удовлетворяющих (5.85), (5.86) и (5.87), замкнуто в $Y_q(\Omega)$ и его коразмерность равна $C_2n \underset{\mathfrak{Z}_0,\varepsilon,C_1}{\lesssim} n$).

Положим

$$\tilde s^1_{m,n,t}=\lceil C\cdot 2^{m-\varepsilon|t-\hat t(n)|}n\rceil,\qquad t_0\leqslant t\leqslant t_*(n),\ \ m\geqslant m_t^*, \tag{5.88}$$

$$\tilde s^2_{m,t}=\lceil C\cdot 2^{m}\rceil,\qquad t_*(n)+1\leqslant t\leqslant t_{**}(n)-1,\ \ m\leqslant m_t, \tag{5.89}$$

$$\tilde s^2_{m,t}=\lceil C\cdot 2^{m-m_t}\overline{\nu}_t\rceil,\qquad t_*(n)+1\leqslant t\leqslant t_{**}(n)-1,\ \ m> m_t, \tag{5.90}$$

$$\tilde s^3_{t}=\lceil C\cdot 2^{\gamma_*k_*t}\psi_*(2^{k_*t})\rceil,\qquad t_*(n)+1\leqslant t\leqslant t_{**}(n)-1. \tag{5.91}$$

Пусть $\tilde\gamma^1_{m,n,t}:=\vartheta_{k^1_{m,n,t}}(B_p^{\tilde s^1_{m,n,t}},\,l_q^{\tilde s^1_{m,n,t}})$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_*(n),\ m\geqslant m_t^*)$, $\tilde\gamma^2_{m,t}:=\vartheta_{k^2_{m,t}}(B_p^{\tilde s^2_{m,t}},\,l_q^{\tilde s^2_{m,t}})$ $(t_*(n)<t<t_{**}(n),\ m\in\mathbb{Z}_+)$, $\tilde\gamma^3_t:=\vartheta_{k^3_t}(B_p^{\tilde s^3_t},\,l_q^{\tilde s^3_t})$ $(t_*(n)<t<t_{**}(n))$. Тогда

$$\gamma^1_{m,n,t}\overset{(5.77),(5.88)}{\leqslant}\tilde\gamma^1_{m,n,t},\quad t_0\leqslant t\leqslant t_*(n),\ \ m\geqslant m_t^*, \tag{5.92}$$

$$\gamma^2_{m,t}\overset{(5.78),(5.79),(5.89),(5.90)}{\leqslant}\tilde\gamma^2_{m,t},\quad t_*(n)<t<t_{**}(n),\quad m\in\mathbb{Z}_+, \tag{5.93}$$

$$\gamma^3_{t}\overset{(5.80),(5.91)}{\leqslant}\tilde\gamma^3_{t},\quad t_*(n)<t<t_{**}(n). \tag{5.94}$$

Пусть $f\in X_p(\Omega)$, $\|f\|_{X_p(\Omega)}\leqslant 1$. При оценке гельфандовских поперечников предполагаем, что выполнено (5.85), (5.86) и (5.87) (в частности, $P_*f=0$).

Из определения P_*f, (5.69), (5.72)–(5.76), (5.81)–(5.83), (5.92)–(5.94) следует, что

$$\|f-P_*f\|_{Y_q(\Omega)}\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}2^{-\lambda_*k_*t_{**}(n)}u_*(2^{k_*t_{**}(n)})+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_*(n)}\sum_{m\geqslant m_t^*}2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})(2^{m-m_t^*}n_t)^{-\delta_*}\tilde\gamma^1_{m,n,t}+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=0}^{m_t-1}2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})\tilde\gamma^2_{m,t}+$$

$$+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=m_t}^{\infty} 2^{-\lambda_* k_* t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{-\delta_*(m-m_t)}\tilde\gamma^2_{m,t}+$$

$$+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} 2^{-\lambda_* k_* t}u_*(2^{k_*t})\tilde\gamma^3_t \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.39),(5.48)}{\lesssim}} n^{-\frac{\lambda_*\beta_*\hat q}{2}}\varphi_*^{-\lambda_*}(n^{\frac{\hat q}{2}})u_*(n^{\beta_*\hat q/2}\varphi_*(n^{\hat q/2}))+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_*(n)}\sum_{m\geqslant m_t^*} 2^{-\lambda_* k_* t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{-m\delta_*}\cdot n^{-\delta_*}\cdot 2^{\gamma_*\delta_* k_* t+\varepsilon\delta_*|t-\hat t(n)|}\psi_*^{\delta_*}(2^{k_*t})\tilde\gamma^1_{m,n,t}+$$

$$+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=0}^{m_t-1} 2^{-\lambda_* k_* t}u_*(2^{k_*t})\tilde\gamma^2_{m,t}+$$

$$+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=m_t}^{\infty} 2^{-\lambda_* k_* t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{-\delta_*(m-m_t)}\tilde\gamma^2_{m,t}+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} 2^{-\lambda_* k_* t}u_*(2^{k_*t})\tilde\gamma^3_t.$$

Покажем, что существуют $k^1_{m,n,t}$ и $k^2_{m,t}$ такие, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_*(n)}\sum_{m\geqslant m_t^*} k^1_{m,n,t}+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=m_t}^{\infty} k^2_{m,t}\underset{\mathfrak{Z}_0,\varepsilon}{\lesssim} n,$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_*(n)}\sum_{m\geqslant m_t^*} 2^{-\lambda_* k_* t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{-m\delta_*}\cdot n^{-\delta_*}\cdot 2^{\gamma_*\delta_* k_* t+\varepsilon\delta_*|t-\hat t(n)|}\psi_*^{\delta_*}(2^{k_*t})\tilde\gamma^1_{m,n,t}+$$

$$+\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=m_t}^{\infty} 2^{-\lambda_* k_* t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{-\delta_*(m-m_t)}\tilde\gamma^2_{m,t}\underset{\mathfrak{Z}_0,\varepsilon}{\lesssim} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

Положим $\lambda_{pq}=\min\left\{\frac{\frac1p-\frac1q}{\frac12-\frac1{\hat q}},\,1\right\}$.

Определим $k^1_{m,n,t}$. Отметим, что $\lambda_*\ne\gamma_*\delta_*$ (иначе $\theta_1=\theta_3$, $\theta_2=\theta_4$, что противоречит условию теоремы). Положим $\hat t(n)=1$, если $\lambda_*>\gamma_*\delta_*$, и $\hat t(n)=t_*(n)$, если $\lambda_*<\gamma_*\delta_*$. Далее, пусть $m^1_{t,n}=\left(\frac{\hat q}{2}-1\right)N$, $\hat m_{t,n}=0$ в случае $\delta_*\geqslant\frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$, $\hat m_{t,n}=m^1_{t,n}$ в случае $\delta_*<\frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$. Положим

$$k^1_{m,n,t}=\begin{cases}\lceil n\cdot 2^{-\varepsilon(|t-\hat t(n)|+|m-\hat m_{t,n}|)-1}\rceil, & \text{если}\quad m\leqslant m^1_{t,n},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Тогда при малых $\varepsilon>0$ выполнено $\sum\limits_{t=t_0}^{t_*(n)}\sum\limits_{m\geqslant m_t^*} k^1_{m,n,t}\underset{\mathfrak{Z}_0,\varepsilon}{\lesssim} n$. Из (5.88) и теоремы H следует, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_*(n)}\sum_{m\geqslant m_t^*} 2^{-\lambda_* k_* t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{-m\delta_*}\cdot n^{-\delta_*}\cdot 2^{\gamma_*\delta_* k_* t+\varepsilon\delta_*|t-\hat t(n)|}\psi_*^{\delta_*}(2^{k_*t})\tilde\gamma^1_{m,n,t}\underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}$$

$$\lesssim\sum_{t=t_0}^{t_*(n)}\sum_{m\geqslant 0} 2^{-\lambda_* k_* t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{-m\delta_*}\cdot n^{-\delta_*}\cdot 2^{\gamma_*\delta_* k_* t+\varepsilon\delta_*|t-\hat t(n)|}\psi_*^{\delta_*}(2^{k_*t})\times$$

$$\times\left(n\cdot 2^{m-\varepsilon|t-\hat t(n)|}\right)^{\frac{\lambda_{pq}}{\hat q}}\left(n\cdot 2^{-\varepsilon(|t-\hat t(n)|+|m-\hat m_{t,n}|)}\right)^{-\frac{\lambda_{pq}}{2}}=:S_{(1)}.$$

Применяя лемму 5.1.4 и (5.35) и учитывая, что

$$\lambda_*\beta_*+\delta_*\left(\frac{\hat q}{2}-1\right)=\frac{2}{\hat q}\cdot\frac{\lambda_*\beta_*\hat q}{2}+\left(1-\frac{2}{\hat q}\right)\frac{\delta_*\hat q}{2}, \tag{5.95}$$

получаем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$S_{(1)} \underset{\mathfrak{Z}_0,\varepsilon}{\lesssim} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n).$$

Теперь определим $k^2_{m,t}$. Положим $m' = m - m_t$. Воспользуемся (5.90). Нам нужно получить оценку

$$\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} \sum_{m'=0}^{\infty} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}) \cdot 2^{-\delta_* m'} \vartheta_{k^2_{m,t}}(B_p^{\lceil C\cdot 2^{m'}\overline{\nu}_t\rceil}, l_q^{\lceil C\cdot 2^{m'}\overline{\nu}_t\rceil}) \underset{\mathfrak{Z}_0,\varepsilon}{\lesssim} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n) \qquad (5.96)$$

при подходящих $k^2_{m,t}$.

Положим $m^2_{t,n} = \gamma_* k_*(t_{**}(n) - t)$, $\tilde t(n) = t_*(n)$ в случае $\lambda_*\beta_* \geqslant \frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$, $\tilde t(n) = t_{**}(n)$ в случае $\lambda_*\beta_* < \frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$, $\tilde m_{t,n} = 0$ в случае $\delta_* \geqslant \frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$, $\tilde m_{t,n} = m^2_{t,n}$ в случае $\delta_* < \frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$,

$$k^2_{m,t} = \begin{cases} \lceil n\cdot 2^{-\varepsilon(|t-\tilde t(n)|+|m'-\tilde m_{t,n}|)-1}\rceil, & \text{если} \quad m' \leqslant m^2_{t,n}, \\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

В силу теоремы H и (5.11),

$$\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} \sum_{m'=0}^{\infty} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}) \cdot 2^{-\delta_* m'} \vartheta_{k^2_{m,t}}(B_p^{\lceil C\cdot 2^{m'}\overline{\nu}_t\rceil}, l_q^{\lceil C\cdot 2^{m'}\overline{\nu}_t\rceil}) \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}$$

$$\lesssim \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} \sum_{m'=0}^{\infty} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}) \cdot 2^{-\delta_* m'} \times$$

$$\times \left(2^{m'} \cdot 2^{k_*\gamma_* t}\psi_*(2^{k_* t})\right)^{\frac{\lambda_{pq}}{\hat q}} \left(n\cdot 2^{-\varepsilon(|t-\tilde t(n)|+|m'-\tilde m_{t,n}|)}\right)^{-\frac{\lambda_{pq}}{2}}.$$

Применяя лемму 5.1.4 и учитывая (5.35), (5.48) и (5.95), получаем (5.96) при малых $\varepsilon > 0$.

Остается построить последовательности $k^2_{m,t}$ ($t_*(n) < t < t_{**}(n)$, $m < m_t$) и k^3_t ($t_*(n) < t < t_{**}(n)$) такие, что

$$\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} \sum_{m=0}^{m_t-1} k^2_{m,t} \underset{\varepsilon}{\lesssim} n, \quad \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} k^3_t \underset{\varepsilon}{\lesssim} n, \qquad (5.97)$$

$$\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} \sum_{m=0}^{m_t-1} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}) \tilde\gamma^2_{m,t} \underset{\varepsilon,\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n), \qquad (5.98)$$

$$\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} 2^{-\lambda_* k_* t} u_*(2^{k_* t}) \tilde\gamma^3_t \underset{\varepsilon,\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} n^{-\theta_{j_*}}\sigma_{j_*}(n). \qquad (5.99)$$

Пусть $t^1_n = t_*(n)+1$ или $t^1_n = t_{**}(n) - 1$ (выбор будет сделан позже). Для $m \leqslant m_t$ положим

$$k^2_{m,t} = \begin{cases} \left\lceil n\cdot 2^{-\varepsilon|t-t^1_n|-\varepsilon(m_t-m)}\right\rceil, & \text{если} \quad \left\lceil n\cdot 2^{-\varepsilon|t-t^1_n|-\varepsilon(m_t-m)}\right\rceil \leqslant \frac12 \tilde s^2_{m,t}, \\ \tilde s^2_{m,t}, & \text{иначе,}\end{cases}$$

$$k^3_t = \begin{cases} \left\lceil n\cdot 2^{-\varepsilon|t-t^1_n|}\right\rceil, & \text{если} \quad \left\lceil n\cdot 2^{-\varepsilon|t-t^1_n|}\right\rceil \leqslant \frac12 \tilde s^3_t, \\ \tilde s^3_t, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнено $\left\lceil n\cdot 2^{-\varepsilon|t-t_n^1|-\varepsilon(m_t-m)}\right\rceil \asymp n\cdot 2^{-\varepsilon|t-t_n^1|-\varepsilon(m_t-m)}$, $\left\lceil n\cdot 2^{-\varepsilon|t-t_n^1|}\right\rceil \asymp n\cdot 2^{-\varepsilon|t-t_n^1|}$, откуда следует (5.97). Применим теорему H. Тогда для малых $\varepsilon > 0$

$$\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=0}^{m_t-1} 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})\tilde\gamma^2_{m,t} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.89)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1}\sum_{m=0}^{m_t-1} 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{\frac{\lambda_{pq}m}{\hat q}}\cdot n^{-\frac{\lambda_{pq}}{2}}\cdot 2^{\frac{\lambda_{pq}\varepsilon}{2}(|t-t_n^1|+m_t-m)} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim}$$

$$\lesssim \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})\cdot 2^{\frac{\lambda_{pq}m_t}{\hat q}}\cdot n^{-\frac{\lambda_{pq}}{2}}\cdot 2^{\frac{\lambda_{pq}\varepsilon}{2}|t-t_n^1|} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.11),(5.51)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})\cdot \left(2^{\gamma_*k_*t}\psi_*(2^{k_*t})\right)^{\frac{\lambda_{pq}}{\hat q}}\cdot n^{-\frac{\lambda_{pq}}{2}}\cdot 2^{\frac{\lambda_{pq}\varepsilon}{2}|t-t_n^1|} =: S,$$

$$\sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})\tilde\gamma^3_t \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.91)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \sum_{t=t_*(n)+1}^{t_{**}(n)-1} 2^{-\lambda_*k_*t}u_*(2^{k_*t})\cdot \left(2^{\gamma_*k_*t}\psi_*(2^{k_*t})\right)^{\frac{\lambda_{pq}}{\hat q}}\cdot n^{-\frac{\lambda_{pq}}{2}}\cdot 2^{\frac{\lambda_{pq}\varepsilon}{2}|t-t_n^1|} = S.$$

Положим $t_n^1 = t_*(n)+1$, если $\frac{\gamma_*\lambda_{pq}}{\hat q} - \lambda_* \leqslant 0$ (т.е. $\lambda_*\beta_* \geqslant \frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$), и $t_n^1 = t_{**}(n)-1$, если $\frac{\lambda_{pq}\gamma_*}{\hat q} - \lambda_* > 0$ (т.е. $\lambda_*\beta_* < \frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$). По лемме 3.2.4, если $\lambda_*\beta_* > \frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$S \underset{\mathfrak{Z}_0,\varepsilon}{\lesssim} 2^{-\lambda_*k_*t_*(n)}u_*(2^{k_*t_*(n)})\left(2^{\gamma_*k_*t_*(n)}\psi_*(2^{k_*t_*(n)})\right)^{\frac{\lambda_{pq}}{\hat q}}\cdot n^{-\frac{\lambda_{pq}}{2}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.11),(5.35)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim n^{-\lambda_*\beta_*-\min\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\,\frac{1}{2}-\frac{1}{\hat q}\right\}}\sigma_3(n);$$

если $\lambda_*\beta_* < \frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$, то при малых $\varepsilon > 0$

$$S \underset{\mathfrak{Z}_0,\varepsilon}{\lesssim} 2^{-\lambda_*k_*t_{**}(n)}u_*(2^{k_*t_{**}(n)})\left(2^{\gamma_*k_*t_{**}(n)}\psi_*(2^{k_*t_{**}(n)})\right)^{\frac{\lambda_{pq}}{\hat q}}\cdot n^{-\frac{\lambda_{pq}}{2}} \underset{\mathfrak{Z}_0}{\overset{(5.48)}{\lesssim}} n^{-\frac{\hat q\lambda_*\beta_*}{2}}\sigma_4(n).$$

Если $\lambda_*\beta_* = \frac{\lambda_{pq}}{\hat q}$, то $\theta_3 = \theta_4$, и по условию теоремы получаем $j_* \in \{1,\,2\}$. В силу (5.48) и леммы 3.2.4, существует $c = c(\mathfrak{Z}_0) > 0$ такое, что $t_{**}(n) \leqslant c(1+\log n)$. Поэтому существует $\tilde c = \tilde c(\mathfrak{Z}_0) > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$

$$S \underset{\varepsilon,\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} n^{-\lambda_*\beta_*+\frac{\lambda_{pq}}{\hat q}-\frac{\lambda_{pq}}{2}+\tilde c\varepsilon} = n^{-\theta_3+\tilde c\varepsilon}$$

(это следует из (5.48) и леммы 3.2.4). Если ε достаточно мало, то $S \underset{\mathfrak{Z}_0}{\lesssim} n^{-\theta_{j_*}}$. Соотношения (5.98) и (5.99) доказаны. □

5.2 Порядковые оценки поперечников весовых классов Соболева с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества

В этом параграфе мы докажем теоремы 12 и 13.

Обозначим через $\mathrm{mes}\, A$ меру Лебега множества $A \subset \mathbb{R}^d$.

Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, $\mathcal{T}$ и F — дерево и отображение, построенные в соответствии теоремой 1.1.1.

Отметим, что функции h, φ_g и φ_v, заданные формулами (40), (41), (42), (43), удовлетворяют (37).

Пусть $\{\mathcal{D}_{j,i}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, i\in\tilde{I}_j}$ — разбиение дерева $\mathcal{T}$, определенное перед формулой (4.39), $\mathcal{A}$ — дерево из определения 4.2.1, функции u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$ заданы формулой (4.47), область $\Omega[\xi]$ ($\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})$) определена формулой (4.48). Для поддерева $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ множество $\Omega[\mathcal{D}]$ определим формулой (4.49).

Из (4.44) и (4.46) следует, что

$$\mathbf{V}_l^{\mathcal{A}}(\eta_{j,i}) = \{\eta_{j+l,t} :\ t \in \tilde{I}_{j,i}^l\},\ \ \mathrm{card}\, \mathbf{V}_l^{\mathcal{A}}(\eta_{j,i}) \leqslant K_0 \frac{h(2^{-\bar{s}j})}{h(2^{-\bar{s}(j+l)})},\ \ j \geqslant j_{\min},\ l \in \mathbb{Z}_+, \quad (5.100)$$

где $K_0 = K_0(\mathfrak{Z})$. В частности, выполнено (5.1) с $c_1 = c_1(\mathfrak{Z})$ и

$$\mathrm{card}\, \tilde{I}_j \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \frac{2^{\bar{s}\theta j}}{\Lambda(2^{-\bar{s}j})}. \quad (5.101)$$

Пусть выполнены условия теоремы 12.

Из следствия 4.3.1 и теоремы 4.3.2 получаем следующее утверждение.[1]

Следствие 5.2.1. *Предположим, что выполнены условия (40)–(48). Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$. Кроме того, для любого $j_0 \geqslant j_{\min}$, $i_0 \in \tilde{I}_{j_0}$ существует линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ и любого поддерева $\mathcal{D} \subset \mathcal{T}_{\hat{\xi}_{j_0,i_0}}$ с минимальной вершиной $\hat{\xi}_{j_0,i_0}$ выполнено*

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega_{\mathcal{D},F})} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 2^{\bar{s}j_0(\beta-\delta)}\Psi(2^{-\bar{s}j_0}) \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega_{\mathcal{D},F})} \quad (5.102)$$

в случае (45), a), и

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega_{\mathcal{D},F})} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 2^{-\bar{s}\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+ j_0} j_0^{-\alpha+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}\rho(j_0) \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega_{\mathcal{D},F})} \quad (5.103)$$

в случае (45), b).

Замечание 5.2.1. Если вместо (45), a) выполнено $\beta_g + \beta_v > \delta - \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$, или если выполнено (45), б) и $\alpha < (1-\gamma)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$, то множество $W^r_{p,g}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)$ неограниченно в $L_{q,v}(\Omega)$.

В самом деле, пусть $\psi \in C_0^\infty([0,\,1]^d)$, $\psi \geqslant 0$, $\int\limits_{[0,\,1]^d} |\nabla^r \psi(x)|^p\, dx = 1$. Возьмем $\hat{k} = \hat{k}(a,\, d) \in \mathbb{N}$ из леммы 4.1.2. Пусть $\hat{\xi}$ — минимальная вершина дерева $\mathcal{T}$, $\hat{\xi} \in \hat{\mathbf{W}}_{\hat{\nu}}$. Тогда для $\nu \geqslant \hat{\nu}$ выполнено

$$\sum_{l=\nu}^{\nu+\hat{k}} \mathrm{card}\, \hat{\mathbf{W}}_l \overset{(4.24)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\gtrsim}} \frac{h(2^{-\hat{\nu}})}{h(2^{-\nu})} \underset{\mathfrak{Z},\hat{\nu}}{\gtrsim} \frac{2^{\nu\theta}}{\Lambda(2^{-\nu})}. \quad (5.104)$$

[1]Можно также применить теорему 4.2.1 и получить элементарную оценку нормы оператора суммирования на дереве с помощью неравенства Гельдера; см. [189].

Положим
$$\{\Delta_{j,\nu}\}_{j\in J_\nu} = \{\Delta_j\}_{j\in J_\nu} = \left\{F(\xi):\ \xi\in \cup_{l=\nu}^{\nu+\hat{k}}\hat{\mathbf{W}}_l\right\}.$$
Тогда $\Delta_{j,\nu} = z_{j,\nu}+t_{j,\nu}[0,\,1]^d = z_j+t_j[0,\,1]^d$, $t_{j,\nu} \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(4.7),(4.9)}{\asymp}} 2^{-\nu}$. Кроме того, из (42) и (4.5) следует, что
$$g(x) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{\nu\beta_g}\Psi_g(2^{-\nu}), \quad v(x) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{\nu\beta_v}\Psi_v(2^{-\nu}), \quad x\in\Delta_j, \quad j\in J_\nu. \tag{5.105}$$

Пусть $p\leqslant q$. Выберем $j\in J_\nu$ и положим $\psi_\nu(x) = c_\nu\psi\left(\frac{x-z_j}{t_j}\right)$, где $c_\nu>0$ таково, что $\left\|\frac{\nabla^r\psi_\nu}{g}\right\|_{L_p(\Omega)} = 1$. Тогда $c_\nu \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(5.105)}{\asymp}} 2^{\nu\beta_g}\Psi_g(2^{-\nu})2^{\nu\left(\frac{d}{p}-r\right)}$. Значит,
$$\|\psi_\nu\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z},\psi}{\overset{(5.105)}{\asymp}} c_\nu\cdot 2^{\nu\beta_v}\Psi_v(2^{-\nu})\cdot 2^{-\frac{\nu d}{q}} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{\nu(\beta-\delta)}\Psi(2^{-\nu}).$$
Если $\beta-\delta>0$, то $\|\psi_\nu\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\nu\to\infty}{\to} \infty$, а если $\beta=\delta$ и $\alpha<0$, то $\|\psi_\nu\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z},\psi}{\asymp} \nu^{-\alpha}\rho(\nu) \underset{\nu\to\infty}{\to} \infty$ (см. лемму 3.2.4 и замечание 2).

Пусть теперь $p>q$. Сначала рассмотрим случай $\beta>\delta-\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$. Положим $\psi_\nu(x) = c_\nu\sum\limits_{j\in J_\nu}\psi\left(\frac{x-z_j}{t_j}\right)$, где $c_\nu>0$ таково, что $\left\|\frac{\nabla^r\psi_\nu}{g}\right\|_{L_p(\Omega)} = 1$. Тогда $c_\nu \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(5.105)}{\asymp}} 2^{\nu\beta_g}\Psi_g(2^{-\nu})2^{\nu\left(\frac{d}{p}-r\right)}\cdot(\mathrm{card}\,J_\nu)^{-\frac{1}{p}}$,
$$\|\psi_\nu\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z},\psi}{\overset{(5.105)}{\asymp}} c_\nu\cdot 2^{\nu\beta_v}\Psi_v(2^{-\nu})\cdot 2^{-\frac{\nu d}{q}}(\mathrm{card}\,J_\nu)^{\frac{1}{q}} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{\nu(\beta-\delta)}\Psi(2^{-\nu})(\mathrm{card}\,J_\nu)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(5.104)}{\gtrsim}}$$
$$\gtrsim 2^{\nu\left(\beta-\delta+\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right)}\Psi(2^{-\nu})\left(\Lambda(2^{-\nu})\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$
Значит, $\|\psi_\nu\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\nu\to\infty}{\to} \infty$ (см. лемму 3.2.4 и замечание 2).

Пусть $\beta=\delta-\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$, $\alpha<(1-\gamma)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$. Для $s\in\mathbb{N}$ обозначим
$$\mathcal{N}_s = \{s+l(\hat{k}+1):\ \ l\in\mathbb{Z}_+,\ \ l(\hat{k}+1)\leqslant s\}.$$
Тогда $\mathrm{card}\,\mathcal{N}_s \underset{a,d}{\asymp} s$ и $\{\Delta_{j,\nu}\}_{j\in J_\nu,\,\nu\in\mathcal{N}_s}$ — попарно не перекрывающиеся кубы. Положим $f_s(x) = \sum\limits_{\nu\in\mathcal{N}_s}\sum\limits_{j\in J_\nu} c_{\nu,j}\psi\left(\frac{x-z_{j,\nu}}{t_{j,\nu}}\right)$, где $c_{\nu,j}>0$ выбирается так, что
$$\left\|\frac{\nabla^r f_s}{g}\right\|_{L_p(\Delta_{j,\nu})} = (\mathrm{card}\,J_\nu)^{-\frac{1}{p}}(\mathrm{card}\,\mathcal{N}_s)^{-\frac{1}{p}}, \quad j\in J_\nu, \quad \nu\in\mathcal{N}_s.$$
Тогда $\left\|\frac{\nabla^r f_s}{g}\right\|_{L_p(\Omega)} = 1$ и
$$c_{\nu,j} \underset{\mathfrak{Z},\psi}{\overset{(5.105)}{\asymp}} 2^{\nu\beta_g}\Psi_g(2^{-\nu})\cdot 2^{\nu\left(\frac{d}{p}-r\right)}(\mathrm{card}\,J_\nu)^{-\frac{1}{p}}s^{-\frac{1}{p}}. \tag{5.106}$$
Применяя лемму 3.2.4 и замечание 2, получаем
$$\|f_s\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z},\psi}{\overset{(5.105)}{\asymp}} \left(\sum_{\nu\in\mathcal{N}_s}\sum_{j\in J_\nu} 2^{\nu\beta_v q}\Psi_v^q(2^{-\nu})c_{\nu,j}^q\cdot 2^{-\nu d}\right)^{\frac{1}{q}} \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(46),(5.104),(5.106)}{\gtrsim}}$$
$$\asymp \left(\sum_{\nu\in\mathcal{N}_s} 2^{\nu\beta q}\Psi^q(2^{-\nu})\cdot 2^{-\nu\delta q}\cdot 2^{\nu\theta\left(1-\frac{q}{p}\right)}\nu^{-\gamma\left(1-\frac{q}{p}\right)}[\tau(\nu)]^{-1+\frac{q}{p}}s^{-\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(46)}{\asymp}}$$
$$\asymp s^{-\alpha}\rho(s)\cdot s^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)(1-\gamma)}[\tau(s)]^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} \underset{s\to\infty}{\to} \infty.$$

Доказательство теоремы 12. *Оценка сверху.* Применим теорему 5.1.1. В качестве $X_p(\Omega)$ возьмем линейную оболочку $W^r_{p,g}(\Omega)$, в качестве $Y_q(\Omega)$ возьмем пространство $L_{q,v}(\Omega)$, а в качестве $\mathcal{P}(\Omega)$ — пространство полиномов $\mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$.

Из следствия 5.2.1 следует предположение 1 с

$$w_*(\eta_{j,i}) = C(\mathfrak{Z}) \cdot 2^{\overline{s}j(\beta-\delta)}\Psi(2^{-\overline{s}j}) \tag{5.107}$$

в случае (45), a) и с

$$w_*(\eta_{j,i}) = C(\mathfrak{Z}) \cdot 2^{-\overline{s}\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+ j} j^{-\alpha+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+}\rho(j) \tag{5.108}$$

в случае (45), b).

В силу (42), (43), леммы 3.2.4 и (4.40),

$$g(x) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{\overline{s}\beta_g j}\Psi_g(2^{-\overline{s}j}), \quad v(x) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 2^{\overline{s}\beta_v j}\Psi_v(2^{-\overline{s}j}), \quad x \in \Omega_{j,i}. \tag{5.109}$$

Из (9), (4.39) и условия $\Omega_{j,i} \in \mathbf{FC}(b_*)$ (см. теорему 1.1.1) получаем

$$\operatorname{mes}\Omega_{j,i} \underset{a,d}{\asymp} 2^{-\overline{s}dj}. \tag{5.110}$$

Из замечания 1.4.2, (5.109) и (5.110) следует предположение 2 с $\delta_* = \frac{\delta}{d}$ и $\tilde{w}_*(\eta_{j,i}) = w_*(\eta_{j,i})$ в случае (45), a) и

$$\tilde{w}_*(\eta_{j,i}) = C(\mathfrak{Z}) \cdot 2^{-\overline{s}\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+ j} j^{-\alpha}\rho(j) \tag{5.111}$$

в случае (45), b).[2] Здесь $c_2 = c_2(\mathfrak{Z})$.

Покажем, что выполнено предположение 3. Тогда применим теорему 5.1.1 и получим оценки сверху для поперечников.

Случай 1. Пусть $\theta > 0$ и выполнено условие (45), a). Положим $k_* = \overline{s}$, $\mathcal{A}_{t,i} = \{\eta_{t,i}\}$. В силу (5.107), выполнено (5.9) и (5.10) с $\lambda_* = \mu_* = \delta - \beta$, $u_*(y) = \Psi(y^{-1})$. Соотношение (5.11) выполнено с $\gamma_* = \theta$, $\psi_*(y) = \psi_\Lambda(y) = \frac{1}{\Lambda\left(\frac{1}{y}\right)}$ (см. (5.101)). Значит, $\beta_* = \frac{1}{\theta}$. Функция $\varphi_* = \varphi_{\theta,\psi_\Lambda}$ определена в соответствии с леммой 5.1.1 (см. обозначение на стр. 23). Наконец, выполнены соотношения (5.12), (5.13) и (5.14), где $c_3 = c_3(\mathfrak{Z})$. Отсюда следуют требуемые оценки.

Случай 2. Пусть $\theta > 0$ и выполнено условие (45), b). Положим $k_* = \overline{s}$, $\mathcal{A}_{t,i} = \{\eta_{t,i}\}$. Из (46) и (5.101) следует, что $\gamma_* = \theta$,

$$\psi_*(t) = \frac{1}{\Lambda\left(\frac{1}{t}\right)} = |\log t|^{-\gamma}\tau^{-1}(|\log t|).$$

Тогда $\beta_* = \frac{1}{\theta}$. По лемме 5.1.2, существует $t_*(\mathfrak{Z}) > 1$ такое, что

$$\varphi_*(t) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} (\log t)^{\frac{\gamma}{\theta}}\tau^{\frac{1}{\theta}}(\log t), \quad t \geqslant t_*(\mathfrak{Z}). \tag{5.112}$$

Пусть $p > q$. Из (5.108) следует, что $\lambda_* = \mu_* = \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$, $\lambda_*\beta_* = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} < \frac{\delta}{d}$ и можно взять $u_*(t) = (\log t)^{-\alpha+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\rho(\log t)$. Значит,

$$u_*(n^{\beta_*}\varphi_*(n)) \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} u_*(n) = (\log n)^{-\alpha+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\rho(\log n),$$

$$\varphi_*^{-\mu_*}(n) \overset{(5.112)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}} (\log n)^{-\gamma\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\tau^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}(\log n).$$

[2] В случае $\theta > 0$ достаточно будет взять $\tilde{w}_* = w_*$.

Наконец, выполнены соотношения (5.12), (5.13) и (5.14) (см. (48)). Следовательно, в силу утверждения 1 теоремы 5.1.1,

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(5.18)}{\lesssim}} \sigma_*(n) = u_*(n^{\beta_*}\varphi_*(n))\varphi_*^{-\mu_*}(n).$$

Отсюда следует требуемая оценка.

Пусть $p \leqslant q$. Тогда $\lambda_* = \mu_* = 0$, $u_*(t) = (\log t)^{-\alpha}\rho(\log t)$; в частности, выполнено (5.13). Применим утверждение 1 теоремы 5.1.1. Так как $\lambda_*\beta_* = 0 < \frac{\delta}{d}$, то

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(5.17)}{\lesssim}} u_*(n^{\beta_*}\varphi_*(n))\varphi_*^{-\lambda_*}(n) \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} (\log n)^{-\alpha}\rho(\log n).$$

Случай 3. Пусть $\theta = 0$ и выполнено условие (45), b). Тогда

$$\operatorname{card}\tilde I_j \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(46),(5.101)}{\lesssim}} (\overline{s}j)^{-\gamma}\tau^{-1}(\overline{s}j). \tag{5.113}$$

Положим $k_* = 1$ и определим Γ_t равенством

$$\mathbf{V}(\Gamma_t) = \{\eta_{j,i} :\ j \geqslant j_{\min},\ \ 2^t \leqslant j < 2^{t+1},\ i \in \tilde I_j\}.$$

Тогда $\nu_t \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(5.113)}{\lesssim}} 2^{(1-\gamma)t}\tau^{-1}(2^t) =: \overline{\nu}_t$. Значит, выполнено (5.11) с $\gamma_* = 1-\gamma$, $\psi_*(x) = \tau^{-1}(x)$; следовательно, $\beta_* = \frac{1}{1-\gamma}$. Далее, $\lambda_* = \alpha - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+$, $u_*(x) = \rho(x)$ в силу (5.108) и условия $\theta = 0$. Утверждение 3 предположения 3 следует из (5.100).

Пусть $p > q$. Из (5.111) следует, что выполнено (5.10) с $\mu_* = \alpha$. Из определения $\tilde I_j$, $\hat J_t$ и Γ_t получаем, что $\hat J_t = \tilde I_{2^t}$ для $2^t \geqslant j_{\min}$. В силу (5.113), $\operatorname{card}\hat J_t \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 2^{-\gamma t}\tau^{-1}(2^t)$. Если $2^t < j_{\min} < 2^{t+1}$, то $\operatorname{card}\hat J_t = 1$. Значит, выполнено (5.12). Кроме того, выполнены соотношения (5.13) и (5.14) (см. (48)).

Пусть $p \leqslant q$. Тогда $\lambda_* = \mu_* = \alpha$, $\lambda_*\beta_* = \frac{\alpha}{1-\gamma}$ и выполнено (5.13).

Остается применить теорему 5.1.1.

Случай 4. Пусть $\theta = 0$ и выполнено условие (45), a). Мы проводим такие же рассуждения, как в случае 1. При этом в качестве γ_* можно взять достаточно малое положительное число такое, что $\frac{\delta-\beta}{\gamma_*} > \frac{\delta}{d}$.

Оценка снизу. Напомним, что $R = \operatorname{diam}\Omega$ (см. стр. 23). Пусть ξ_* — минимальная вершина $\mathcal{T}$, и пусть l_* — длина стороны куба $F(\xi_*)$. В силу (4.8) и условия $\Gamma \subset \partial\Omega$, $\xi_* \in \hat{\mathbf{W}}$. Поэтому из формул (4.4), (4.5) и (4.7) следует, что $l_* \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} 1$ и для любого $x \in F(\xi_*)$ выполнены порядковые равенства $g(x) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} 1$ и $v(x) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} 1$. Значит,

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} \vartheta_n(W^r_p([0,\,1]^d),\, L_q([0,\,1]^d)). \tag{5.114}$$

Применим теорему A (см. также замечание 4) и получим требуемую оценку в случае 4.

В случаях 1, 2, 3 применим конструкцию, приведенную при доказательстве замечания 5.2.1. Положим $k_{**} = \hat k + 1$, $\tilde\Delta_{j,t} = \Delta_{j,k_{**}t}$, где $t \geqslant t_0$ для некоторого $t_0 = t_0(\mathfrak{Z}_*)$, $j \in J_{k_{**}t}$. Тогда кубы $\tilde\Delta_{j,t}$ попарно не перекрываются при различных $(t,\, j)$ и $k_{**} \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} 1$. Выберем $\tilde J_t \subset J_{k_{**}t}$ так, чтобы

$$\operatorname{card}\tilde J_t \underset{\mathfrak{Z}}{\overset{(5.104)}{\asymp}} \frac{2^{k_{**}t\theta}}{\Lambda(2^{-k_{**}t})}. \tag{5.115}$$

Пусть $\tilde\psi_{j,t}\in W^r_{p,g}(\Omega)$ $(j\in\tilde J_t)$, $\left\|\frac{\nabla^r\tilde\psi_{j,t}}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}=1$,

$$\|\tilde\psi_{j,t}\|_{L_{q,v}(\Omega)}\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}2^{k_{**}t(\beta-\delta)}\Psi(2^{-k_{**}t}) \tag{5.116}$$

и $\operatorname{supp}\tilde\psi_{j,t}\subset\tilde\Delta_{j,t}$ (такие функции были построены при доказательстве замечания 5.2.1).

Рассмотрим случаи 1 и 2. Для заданного $\nu\in\mathbb{N}$ положим

$$t_*=t_*(\nu)=\lfloor k_{**}^{-1}\log(\nu^{1/\theta}\varphi_{\theta,\psi_\Lambda}(\nu))\rfloor. \tag{5.117}$$

Из леммы 3.2.4 следует, что $\operatorname{card}\tilde J_{t_*}\overset{(5.115)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}}(\nu^{1/\theta}\varphi_{\theta,\psi_\Lambda}(\nu))^\theta\psi_\Lambda(\nu^{1/\theta}\varphi_{\theta,\psi_\Lambda}(\nu))=\nu$. Выберем $\nu=\nu(n)$ так, чтобы

$$2n\leqslant\operatorname{card}\tilde J_{t_*}\underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}n. \tag{5.118}$$

Тогда $\nu\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}n$. Из леммы 1.5.1 следует, что

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\,L_{q,v}(\Omega))\overset{(5.116)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\gtrsim}}(n^{1/\theta}\varphi_{\theta,\psi_\Lambda}(n))^{\beta-\delta}\Psi(n^{-\frac{1}{\theta}}\varphi^{-1}_{\theta,\psi_\Lambda}(n))\cdot\vartheta_n(B_p^{2n},\,l_q^{2n}). \tag{5.119}$$

При $p<q$, $\hat q>2$ также возьмем $t_{**}=[k_{**}^{-1}\log(\nu^{\frac{\hat q}{2\theta}}\varphi_{\theta,\psi_\Lambda}(\nu^{\hat q/2}))]$. Тогда $\operatorname{card}\tilde J_{t_{**}}\overset{(5.115)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}}\nu^{\hat q/2}$. Выберем $\nu=\nu(n)$ так, чтобы

$$2n^{\hat q/2}\leqslant\operatorname{card}\tilde J_{t_{**}}\underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}n^{\hat q/2}.$$

Применим лемму 1.5.1 вместе с теоремой H и получим

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\,L_{q,v}(\Omega))\overset{(5.116)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\gtrsim}}(n^{\hat q/2\theta}\varphi_{\theta,\psi_\Lambda}(n^{\hat q/2}))^{\beta-\delta}\Psi(n^{-\frac{\hat q}{2\theta}}\varphi^{-1}_{\theta,\psi_\Lambda}(n^{\hat q/2})). \tag{5.120}$$

Рассмотрим случай 1. Из (5.114), (5.119), (5.120), (1.132) и теорем A, H получаем требуемые оценки.

Рассмотрим случай 2. Пусть $p\leqslant q$. Если $p=q$ или $p<q$, $\hat q\leqslant 2$, то $\vartheta_n(B_p^{2n},\,l_q^{2n})\underset{p,q}{\asymp}1$. Так как $\beta=\delta$, то

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\,L_{q,v}(\Omega))\overset{(46),(5.119)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\gtrsim}}$$
$$\gtrsim\log^{-\alpha}(n^{1/\theta}\varphi_{\theta,\psi_\Lambda}(n))\rho(\log[n^{1/\theta}\varphi_{\theta,\psi_\Lambda}(n)])\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}(\log n)^{-\alpha}\rho(\log n)$$

(см. лемму 3.2.4). Если $p<q$ и $\hat q>2$, то

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\,L_{q,v}(\Omega))\overset{(46),(5.120)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\gtrsim}}$$
$$\gtrsim\log^{-\alpha}(n^{\frac{\hat q}{2\theta}}\varphi_{\theta,\psi_\Lambda}(n^{\hat q/2}))\rho(\log[n^{\frac{\hat q}{2\theta}}\varphi_{\theta,\psi_\Lambda}(n^{\hat q/2})])\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}(\log n)^{-\alpha}\rho(\log n).$$

Пусть $p>q$. Возьмем t_* так, чтобы выполнялось (5.117) и (5.118). Тогда, по лемме 3.2.4, $t_*\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}\log n$. Так как $\operatorname{card}\tilde J_{t_*}>n$, то из леммы 1.5.1 следует, что

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\,L_{q,v}(\Omega))\overset{(1.148),(5.116)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\gtrsim}}\left(\sum_{t=t_*+1}^{2t_*}\sum_{j\in\tilde J_t}\left(2^{k_{**}t(\beta-\delta)}\Psi(2^{-k_{**}t})\right)^{\frac{pq}{p-q}}\right)^{\frac1q-\frac1p}\overset{(5.115)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\gtrsim}}$$

$$\gtrsim \left(\sum_{t=t_*+1}^{2t_*} \left(2^{k_{**}t(\beta-\delta)} \Psi(2^{-k_{**}t}) 2^{k_{**}t\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \Lambda^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(2^{k_{**}t}) \right)^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \overset{(46)}{\underset{з}{\asymp}}$$

$$\asymp \left(\sum_{t=t_*+1}^{2t_*} \left(t^{-\alpha} \rho(t) t^{\gamma\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(t) \right)^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \underset{з}{\asymp}$$

$$\asymp t_*^{(1-\gamma)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\alpha} \rho(t_*) \tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(t_*) \underset{з}{\asymp} (\log n)^{(1-\gamma)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\alpha} \rho(\log n) \tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(\log n).$$

Рассмотрим случай 3. Так как $\theta = 0$, то

$$\|\psi_{m,j}\|_{L_{q,v}(\Omega)} \overset{(46),(5.116)}{\underset{з}{\asymp}} m^{-\alpha}\rho(m).$$

Для $2^t \leqslant m \leqslant 2^{t+1}$ получаем

$$\|\psi_{m,j}\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{з}{\asymp} 2^{-t\alpha}\rho(2^t), \tag{5.121}$$

$$\operatorname{card} \tilde{J}_m \overset{(46),(5.115)}{\underset{з}{\asymp}} m^{-\gamma}\tau^{-1}(m) \underset{з}{\asymp} 2^{-\gamma t}(\tau(2^t))^{-1}, \tag{5.122}$$

$$\sum_{m=2^t}^{2^{t+1}} \operatorname{card} \tilde{J}_m \underset{з}{\asymp} 2^{(1-\gamma)t}(\tau(2^t))^{-1}. \tag{5.123}$$

Пусть $p \leqslant q$. Для $\nu \in \mathbb{N}$ положим

$$t_* = \left[\log \left(\nu^{\frac{1}{1-\gamma}} \varphi_{1-\gamma,\tau^{-1}}(\nu) \right) \right]. \tag{5.124}$$

Тогда

$$2^{(1-\gamma)t_*}(\tau(2^{t_*}))^{-1} \underset{з}{\asymp} \nu. \tag{5.125}$$

Выберем $\nu = \nu(n)$ так, чтобы выполнялось

$$2n \leqslant \sum_{m=2^{t_*}}^{2^{t_*+1}} \operatorname{card} \tilde{J}_m \underset{з}{\lesssim} n, \quad \sum_{m=2^{t_*-1}}^{2^{t_*}} \operatorname{card} \tilde{J}_m > n \tag{5.126}$$

(тогда $\nu \overset{(5.123),(5.125)}{\underset{з}{\asymp}} n$). Применим лемму 1.5.1. В силу (5.121) и (5.124), получаем

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{з}{\gtrsim} n^{-\frac{\alpha}{1-\gamma}} \varphi^{-\alpha}_{1-\gamma,\tau^{-1}}(n) \rho\left(n^{\frac{1}{1-\gamma}} \varphi_{1-\gamma,\tau^{-1}}(n) \right) \vartheta_n(B_p^{2n},\, l_q^{2n}). \tag{5.127}$$

При $p < q$, $\hat{q} > 2$ также рассмотрим $t_{**} = \left[\log \left(\nu^{\frac{\hat{q}}{2(1-\gamma)}} \varphi_{1-\gamma,\tau^{-1}}(\nu^{\frac{\hat{q}}{2}}) \right) \right]$. Тогда

$$2^{(1-\gamma)t_{**}}(\tau(2^{t_{**}}))^{-1} \underset{з}{\asymp} \nu^{\frac{\hat{q}}{2}}.$$

Выберем $\nu = \nu(n)$ так, чтобы

$$2n^{\frac{\hat{q}}{2}} \leqslant \sum_{m=2^{t_{**}}}^{2^{t_{**}+1}} \operatorname{card} \tilde{J}_m \underset{з}{\lesssim} n^{\frac{\hat{q}}{2}}.$$

Тогда $\nu \overset{(5.123)}{\underset{з}{\asymp}} n$. По лемме 1.5.1, теореме H и (5.121),

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{з}{\gtrsim} n^{-\frac{\hat{q}\alpha}{2(1-\gamma)}} \varphi^{-\alpha}_{1-\gamma,\tau^{-1}}(n^{\frac{\hat{q}}{2}}) \rho\left(n^{\frac{\hat{q}}{2(1-\gamma)}} \varphi_{1-\gamma,\tau^{-1}}(n^{\frac{\hat{q}}{2}}) \right).$$

Это вместе с (5.114), теоремой A и (5.127) дает требуемую оценку.

Пусть $p > q$. Возьмем t_* так, чтобы выполнялись соотношения (5.124) и (5.126). Тогда $\nu \underset{\mathfrak{Z}}{\asymp} n$. Применяя (1.148) и учитывая второе неравенство в (5.126), получаем

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \overset{(5.121)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\gtrsim}} \left(\sum_{m=2^{t_*}+1}^{2^{t_*+1}} \sum_{j\in \tilde J_m} \left(2^{-t_*\alpha}\rho(2^{t_*})\right)^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac1q-\frac1p} \overset{(5.122)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}}$$
$$\asymp 2^{-t_*\alpha}\rho(2^{t_*})\left(2^{(1-\gamma)t_*}\tau^{-1}(2^{t_*})\right)^{\frac1q-\frac1p} \overset{(5.124),(5.125)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}}$$
$$\asymp n^{-\frac{\alpha}{1-\gamma}+\frac1q-\frac1p}\rho(n^{\frac{1}{1-\gamma}}\varphi_{1-\gamma,\tau^{-1}}(n))\varphi^{-\alpha}_{1-\gamma,\tau^{-1}}(n).$$

Теорема доказана. □

Замечание 5.2.2. Если вместо (45), a) выполнено $\beta_g+\beta_v > \delta-\theta\left(\frac1q-\frac1p\right)_+$, или если выполнено (45), b) и $\alpha < (1-\gamma)\left(\frac1q-\frac1p\right)_+$, то из полученных оценок снизу также следует, что $\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) = \infty$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство теоремы 13.

Оценка сверху. Из (61), (63) и (4.47) следует, что

$$u(\eta_{j,i}) = u_j = 2^{\overline{s}j\left(\beta_g-r+\frac dp\right)}(\overline{s}j)^{-\alpha_g}\rho_g(\overline{s}j), \quad w(\eta_{j,i}) = w_j = 2^{-\frac{\theta\overline{s}j}{q}}(\overline{s}j)^{-\alpha_v}\rho_v(\overline{s}j). \tag{5.128}$$

Из следствия 4.3.1 получаем

Следствие 5.2.2. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ и выполнены условия (47), (61), (62), (63). Кроме того, пусть*

$$\textit{либо}\quad \beta-\delta < 0, \qquad \textit{либо}\quad \beta-\delta = 0, \quad \alpha > \frac1q. \tag{5.129}$$

Тогда $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и для любых $k \geqslant j_{\min}$, $\xi_* \in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{k-j_{\min}}(\eta_{j_{\min},1})$ существует линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любого поддерева $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ с минимальной вершиной ξ_* и для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ выполнено

$$\|f-Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathcal{D}])} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 2^{-(\delta-\beta)\overline{s}k}(\overline{s}k)^{-\alpha+\frac1q}\rho(\overline{s}k)\left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega[\mathcal{D}])}.$$

Доказательство. Из (62) и (5.128) следует, что

$$\begin{gathered}\sum_{i=j}^{\infty}\frac{h(2^{-\overline{s}j})}{h(2^{-\overline{s}i})}w_i^q = \sum_{i=j}^{\infty}2^{-\theta\overline{s}i}(\overline{s}i)^{-\alpha_v q}\rho_v^q(\overline{s}i)\cdot\frac{2^{\theta\overline{s}i}(\overline{s}j)^{\gamma}\tau(\overline{s}j)}{2^{\theta\overline{s}j}(\overline{s}i)^{\gamma}\tau(\overline{s}i)} \overset{(61),(3.33)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}} \\ \asymp 2^{-\theta\overline{s}j}[\overline{s}j]^{-\alpha_v q+1}\rho_v^q(\overline{s}j).\end{gathered} \tag{5.130}$$

Отсюда и из леммы 3.2.4 следует (4.83). Далее,

$$\sup_{j\geqslant k} u_j\left(\sum_{i\geqslant j}\frac{h(2^{-\overline{s}j})}{h(2^{-\overline{s}i})}w_i^q\right)^{\frac1q} \overset{(61),(5.128),(5.129),(5.130)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\asymp}} 2^{-(\delta-\beta)\overline{s}k}(\overline{s}k)^{-\alpha+\frac1q}\rho(\overline{s}k).$$

Остается применить следствие 4.3.1. □

Теперь рассмотрим случай $p \geqslant q$. Применим теорему 4.3.2. Имеем при $j \geqslant k$

$$\begin{gathered}\hat u_j \overset{(62),(5.128)}{=} 2^{\overline{s}j\left(\beta_g-r+\frac dp\right)}(\overline{s}j)^{-\alpha_g}\rho_g(\overline{s}j)\cdot 2^{-\frac{\theta\overline{s}(j-k)}{p}}\frac{j^{\frac{\gamma}{p}}\tau^{\frac1p}(\overline{s}j)}{k^{\frac{\gamma}{p}}\tau^{\frac1p}(\overline{s}k)}, \\ \hat w_j \overset{(62),(5.128)}{=} 2^{-\frac{\theta\overline{s}k}{q}}(\overline{s}j)^{-\alpha_v}\rho_v(\overline{s}j)\cdot\frac{k^{\frac{\gamma}{q}}\tau^{\frac1q}(\overline{s}k)}{j^{\frac{\gamma}{q}}\tau^{\frac1q}(\overline{s}j)}.\end{gathered} \tag{5.131}$$

Следствие 5.2.3. *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $p \geqslant q$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ *и выполнены условия (47), (61), (62), (63). Также предположим, что либо* $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) < 0$, *либо* $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) = 0$ *и* $\alpha - 1 - (1-\gamma)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) > 0$. *Тогда* $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ *и для любых* $k \geqslant j_{\min}$, $\xi_* \in \mathbf{V}^{\mathcal{A}}_{k-j_{\min}}(\eta_{j_{\min},1})$ *существует линейный непрерывный оператор* $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ *такой, что для любого поддерева* $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ *с минимальной вершиной* ξ_* *и для любой функции* $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$ *выполнено*

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathcal{D}])} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 2^{-(\delta-\beta)\overline{s}k}(\overline{s}k)^{-\alpha+\frac{1}{q}}\rho(\overline{s}k)\left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega[\mathcal{D}])}$$

в случае $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) < 0$ *и*

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega[\mathcal{D}])} \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 2^{-\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\overline{s}k}(\overline{s}k)^{-\alpha+1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\rho(\overline{s}k)\left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega[\mathcal{D}])}$$

в случае $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) = 0$.

Доказательство. Пусть $p = q$. Подставив (5.131) в (4.81) и учитывая, что $\alpha_v > \frac{1-\gamma}{q}$ и $\beta_g - r + \frac{d}{p} - \frac{\theta}{p} \overset{(61)}{=} \beta - \delta$, получим

$$M_{\hat{u},\hat{w}}(k) \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}$$

$$\sup_{l \geqslant k}(\overline{s}l)^{-\alpha_v+\frac{1-\gamma}{q}}\rho_v(\overline{s}l)\tau^{-\frac{1}{q}}(\overline{s}l)\left(\sum_{j=k}^{l} 2^{p'(\beta-\delta)\overline{s}j}(\overline{s}j)^{p'\left(-\alpha_g+\frac{\gamma}{p}\right)}\rho_g^{p'}(\overline{s}j)\tau^{\frac{p'}{p}}(\overline{s}j)\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Если $\beta - \delta < 0$, то в силу леммы 3.2.4

$$M_{\hat{u},\hat{w}}(k) \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 2^{(\beta-\delta)\overline{s}k}(\overline{s}k)^{-\alpha+\frac{1}{q}}\rho(\overline{s}k). \tag{5.132}$$

Пусть $\beta - \delta = 0$. Можно считать, что $-\alpha_g + \frac{\gamma}{p} + \frac{1}{p'} > 0$ (общий случай сводится к этому домножением последовательности $\hat{u}_j$ на $\frac{j^c}{k^c}$ с подходящим $c > 0$). Тогда

$$M_{\hat{u},\hat{w}}(k) \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} (\overline{s}k)^{-\alpha+1}\rho(\overline{s}k). \tag{5.133}$$

Пусть $p > q$. Подставив (5.131) в (4.82) и учитывая, что $\alpha_v > \frac{1-\gamma}{q}$ и $\beta_g - r + \frac{d}{p} - \frac{\theta}{p} = \beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ в силу (61), получим

$$M_{\hat{u},\hat{w}}(k) \overset{(61)}{\underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim}} 2^{-\theta\overline{s}k\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}(\overline{s}k)^{\gamma\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\tau^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}(\overline{s}k)\times$$

$$\times\left(\sum_{j=k}^{\infty}(\overline{s}j)^{\frac{pq}{p-q}\left(-\alpha_v-\frac{\gamma}{q}+\frac{1}{p}\right)}\rho_v^{\frac{pq}{p-q}}(\overline{s}j)\tau^{-\frac{p}{p-q}}(\overline{s}j)\sigma(j)^{\frac{pq}{p-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},$$

где

$$\sigma(j) = \left(\sum_{i=k}^{j} 2^{\overline{s}i\left(\beta-\delta+\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right)p'}(\overline{s}i)^{p'\left(-\alpha_g+\frac{\gamma}{p}\right)}\rho_g^{p'}(\overline{s}i)\tau^{\frac{p'}{p}}(\overline{s}i)\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Если $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) < 0$, то

$$\sigma(j) \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 2^{\overline{s}k\left(\beta-\delta+\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right)}(\overline{s}k)^{\left(-\alpha_g+\frac{\gamma}{p}\right)}\rho_g(\overline{s}k)\tau^{\frac{1}{p}}(\overline{s}k),$$

и в силу второго соотношения (61)

$$M_{\hat{u},\hat{w}}(k) \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 2^{(\beta-\delta)\overline{s}k}(\overline{s}k)^{-\alpha+\frac{1}{q}}\rho(\overline{s}k). \tag{5.134}$$

Если $\beta-\delta+\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)=0$ и $\alpha>1+(1-\gamma)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$, то снова можно считать, что $-\alpha_g+\frac{\gamma}{p}+\frac{1}{p'}>0$. Тогда

$$M_{\hat{u},\hat{w}}(k) \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} 2^{-\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\overline{s}k}(\overline{s}k)^{-\alpha+1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\rho(\overline{s}k). \tag{5.135}$$

Утверждение доказано. □

Применяя следствия 5.2.2, 5.2.3, лемму 5.1.2 и повторяя рассуждения при доказательстве теоремы 12, получаем оценку сверху поперечников.

Оценка снизу. Если $\frac{\delta-\beta}{\theta}>\frac{\delta}{d}$, то в силу теоремы A (см. также замечание 4) и уже доказанной оценки сверху выполнено

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}}{\lesssim} \vartheta_n(W^r_p([0,\,1]^d),\, L_q([0,\,1]^d)).$$

С другой стороны, найдется куб $\Delta\subset\Omega$ со стороной длины $l(\Delta)\underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp}1$ такой, что $g(x)\underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp}1$, $v(x)\underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp}1$ для любого $x\in\Delta$ (см. рассуждения перед формулой (5.114)). Поэтому $\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} \vartheta_n(W^r_p([0,\,1]^d),\, L_q([0,\,1]^d))$. Тем самым, при $\frac{\delta-\beta}{\theta}>\frac{\delta}{d}$ порядковые оценки поперечников получены.

Рассмотрим случай $\frac{\delta-\beta}{\theta}\leqslant\frac{\delta}{d}$. Для того, чтобы получить оценки поперечников снизу, проводим такие же рассуждения, как при доказательстве оценки снизу в теореме 12, используя лемму 5.1.2. Достаточно проверить следующие утверждения.

Предложение 5.2.1. *Пусть $\frac{\delta-\beta}{\theta}\leqslant\frac{\delta}{d}$, при этом выполнено одно из следующих условий: 1) $\beta-\delta+\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+<0$ или 2) $\beta=\delta$, $p<q$. Тогда найдутся $t_0=t_0(\mathfrak{Z}_*)\in\mathbb{N}$ и $\hat{k}=\hat{k}(\mathfrak{Z}_*)\in\mathbb{N}$ такие, что для любых $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant t_0$ существуют функции $\psi_{j,t}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ с попарно неперекрывающимися носителями, $1\leqslant j\leqslant j_t$, такие, что*

$$j_t \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{\theta\hat{k}t}(\hat{k}t)^{-\gamma}\tau^{-1}(\hat{k}t), \tag{5.136}$$

$$\left\|\frac{\nabla^r\psi_{j,t}}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}=1, \quad \|\psi_{j,t}\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{(\beta-\delta)\hat{k}t}(\hat{k}t)^{-\alpha+\frac{1}{q}}\rho(\hat{k}t). \tag{5.137}$$

Предложение 5.2.2. *Пусть $\beta-\delta+\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)=0$, $p\geqslant q$. Тогда найдутся $t_0=t_0(\mathfrak{Z}_*)\in\mathbb{N}$ и $\hat{k}=\hat{k}(\mathfrak{Z}_*)\in\mathbb{N}$ такие, что для любых $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant t_0$ существуют функции $\psi_{j,t}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ с попарно неперекрывающимися носителями, $1\leqslant j\leqslant j_t$, такие, что*

$$j_t \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{\theta\hat{k}t}(\hat{k}t)^{-\gamma}\tau^{-1}(\hat{k}t), \tag{5.138}$$

$$\left\|\frac{\nabla^r\psi_{j,t}}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}=1, \quad \|\psi_{j,t}\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{-\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\hat{k}t}(\hat{k}t)^{-\alpha+\frac{1}{q}+1-\frac{1}{p}}\rho(\hat{k}t). \tag{5.139}$$

Перед тем, как доказывать эти утверждения, сделаем дополнительные построения. Сначала сформулируем теорему Витали о покрытии [143, стр. 408]).

Теорема M. [143]. *Обозначим через $B(x,\, t)$ шар с центром в точке x радиуса t относительно некоторой нормы на $\mathbb{R}^d$ (открытый или замкнутый). Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — конечное объединение шаров $B(x_i,\, r_i)$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Тогда существует подмножество $\mathcal{I} \subset \{1,\, \dots,\, l\}$ такое, что шары $\{B(x_i,\, r_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ попарно не пересекаются и $E \subset \cup_{i\in\mathcal{I}} B(x_i,\, 3r_i)$.*

Каждому кубу $\Delta \in \Xi\left(\left[-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right]^d\right)$, пересекающемуся с множеством Γ, сопоставим кубы Q_Δ, $\tilde{Q}_\Delta$, $\hat{Q}_\Delta$ и точки x_Δ, $\hat{x}_\Delta$ следующим образом.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\Delta \in \Xi_m\left(\left[-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right]^d\right)$, $\Delta \cap \Gamma \neq \varnothing$. Выберем $x_\Delta \in \Delta \cap \Gamma$ и куб Q_Δ такой, что $\Delta \in \Xi_1(Q_\Delta)$,

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x_\Delta,\, \partial Q_\Delta) \geqslant 2^{-m-1}. \tag{5.140}$$

Через $\hat{x}_\Delta$ обозначим центр Q_Δ. Тогда

$$Q_\Delta = \hat{x}_\Delta + 2^{-m+1} \cdot \left[-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right]^d. \tag{5.141}$$

Положим

$$\tilde{Q}_\Delta = \hat{x}_\Delta + 3 \cdot 2^{-m} \cdot \left[-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right]^d, \quad \hat{Q}_\Delta = \hat{x}_\Delta + 2^{-m+2} \cdot \left[-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right]^d. \tag{5.142}$$

Напомним, что норма $|\cdot|$ определяется равенством $|(x_1,\, \dots,\, x_d)| = \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i|$.

Пусть $\hat{k} \in \mathbb{N}$ (его выберем позже). Для $l \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\hat{E}_l(\Delta) = \{x \in \hat{Q}_\Delta :\ \mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma) \leqslant 2^{-m-\hat{k}l+2}\}, \quad E_l(\Delta) = \hat{E}_l(\Delta) \cap Q_\Delta \cap \Omega. \tag{5.143}$$

Отметим, что

$$\hat{Q}_\Delta = \hat{E}_0(\Delta). \tag{5.144}$$

Лемма 5.2.1. *Выполнена оценка*

$$\mathrm{mes}\, \hat{E}_l(\Delta) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim} 2^{-md-(d-\theta)\hat{k}l} \frac{m^\gamma \tau(m)}{(m+\hat{k}l)^\gamma \tau(m+\hat{k}l)}. \tag{5.145}$$

Кроме того, существует $m_0 = m_0(\mathfrak{Z}_*)$ такое, что при $m \geqslant m_0$

$$\mathrm{mes}\, E_l(\Delta) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{-md-(d-\theta)\hat{k}l} \frac{m^\gamma \tau(m)}{(m+\hat{k}l)^\gamma \tau(m+\hat{k}l)}. \tag{5.146}$$

Доказательство. Докажем (5.145). Рассмотрим покрытие множества $\hat{E}_l(\Delta)$ кубами $x + K$, $x \in \Gamma \cap \hat{Q}_\Delta$, $K = \left(-2^{-m-\hat{k}l+3},\, 2^{-m-\hat{k}l+3}\right)$. Выберем из него конечное подпокрытие и, применив теорему M (для шаров относительно нормы $|\cdot|$), получим семейство попарно не пересекающихся множеств $\{x_i + K\}_{i=1}^N$ таких, что $\{x_i + 3K\}_{i=1}^N$ образует покрытие $\hat{E}_l(\Delta)$. Так как $\cup_{i=1}^N (x_i + K)$ содержится в евклидовом шаре B радиуса $\tilde{R} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} 2^{-m}$, то

$$\sum_{i=1}^N \mu(x_i + K) \leqslant \mu(B) \overset{(35),(37)}{\underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim}} h(2^{-m});$$

так как $x_i \in \Gamma$, то $\mu(x_i+K) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(35),(37)}{\asymp}} h(2^{-m-\hat{k}l})$, так что $N \underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim} \frac{h(2^{-m})}{h(2^{-m-\hat{k}l})}$. Наконец,

$$\operatorname{mes}\hat{E}_l(\Delta) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \operatorname{mes}(x_i+3K) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim} 2^{-(m+\hat{k}l)d}\frac{h(2^{-m})}{h(2^{-m-\hat{k}l})}.$$

Остается воспользоваться (62).

Теперь докажем (5.146). Обозначим через Q^*_Δ гомотетию куба Q_Δ относительно его центра с коэффициентом $1-2^{-\hat{k}l-3}$. Положим

$$\{\Delta_i\}_{i=1}^L = \big\{\Delta' \in \Xi_{m+\hat{k}l+3}\big([-1/2,\,1/2]^d\big):\ \Delta' \subset Q^*_\Delta,\ \Delta'\cap\Gamma \neq \varnothing\big\}.$$

Так же, как формула (4.29), доказывается, что $L \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} \frac{h(2^{-m})}{h(2^{-m-\hat{k}l})}$. Так как $\Delta_i\cap\Gamma\neq\varnothing$, то из определения Δ_i и Q^*_Δ следует, что $\cup_{i=1}^L Q_{\Delta_i} \subset \hat{E}_l(\Delta)\cap Q_\Delta$. Наконец, для любого $j\in\{1,\,\dots,\,L\}$ выполнено

$$\operatorname{card}\{i\in\overline{1,\,L}:\ \operatorname{mes}(Q_{\Delta_i}\cap Q_{\Delta_j})>0\} \underset{d}{\lesssim} 1.$$

Поэтому достаточно показать, что $\operatorname{mes}(Q_{\Delta_i}\cap\Omega) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} 2^{-(m+\hat{k}l)d}$.

Пусть $x\in Q_{\Delta_i}\cap\Omega$, $|x-x_{\Delta_i}|\leqslant 2^{-m-\hat{k}l-5}$. Эта точка существует, так как $x_{\Delta_i}\in\Gamma\subset\partial\Omega$ и выполнено (5.140) с $m+\hat{k}l+3$ вместо m; кроме того, $\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\,\partial Q_{\Delta_i}) \underset{d}{\gtrsim} 2^{-m-\hat{k}l}$. Пусть x_* и $\gamma_x(\cdot):[0,\,T(x)]\to\Omega$ — точка и кривая из определения 1. В силу (9), найдется такое $m_0=m_0(\mathfrak{Z}_*)$, что при $m\geqslant m_0$ выполнено $x_*\notin Q_{\Delta_i}$. Возьмем точку $\gamma_x(t_*)\in\partial Q_{\Delta_i}$. Тогда $t_* \underset{d}{\gtrsim} 2^{-m-\hat{k}l}$. В силу определения 1, шар $B_{at_*}(\gamma_x(t_*))$ содержится в Ω. Остается заметить, что $\operatorname{mes}\big(B_{at_*}(\gamma_x(t_*))\cap Q_{\Delta_i}\big) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{-(m+\hat{k}l)d}$. $\square$

Замечание 5.2.3. Из (5.145) следует, что $\operatorname{mes}(\hat{Q}_\Delta\cap\Gamma)=0$.

Пусть далее $m\geqslant m_0(\mathfrak{Z}_*)$.

Выберем $\hat{k}=\hat{k}(\mathfrak{Z}_*)$ так, чтобы для любого $l\in\mathbb{Z}_+$, $m\geqslant m_0(\mathfrak{Z}_*)$ выполнялось соотношение

$$\operatorname{mes}\Big(E_l(\Delta)\backslash\hat{E}_{l+1}(\Delta)\Big) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} 2^{-md-(d-\theta)\hat{k}l}\frac{m^\gamma\tau(m)}{(m+\hat{k}l)^\gamma\tau(m+\hat{k}l)} \tag{5.147}$$

(это возможно в силу (3.33), (5.145) и (5.146)).

Пусть $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}\psi\subset\left[-\frac12,\,\frac12\right]^d$, $\psi|_{\left[-\frac38,\,\frac38\right]^d}=1$, $\psi(x)\in[0,\,1]$ для любого $x\in\mathbb{R}^d$. Положим

$$\psi_\Delta(x)=\psi(2^{m-2}(x-\hat{x}_\Delta)). \tag{5.148}$$

Тогда

$$\operatorname{supp}\psi_\Delta\subset\hat{Q}_\Delta,\quad \psi_\Delta|_{\tilde{Q}_\Delta}=1, \tag{5.149}$$

$$\begin{gathered}\left|\frac{\nabla^r\psi_\Delta(x)}{g(x)}\right| \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(36),(63),(5.143)}{\lesssim}} 2^{-\beta_g(m+\hat{k}l)}(m+\hat{k}l)^{\alpha_g}\rho_g^{-1}(m+\hat{k}l)\cdot 2^{rm},\\ x\in\hat{E}_l(\Delta)\backslash\hat{E}_{l+1}(\Delta).\end{gathered} \tag{5.150}$$

Положим $c_\Delta=\left\|\frac{\nabla^r\psi_\Delta}{g}\right\|^{-1}_{L_p(\hat{Q}_\Delta)}>0$.

Лемма 5.2.2. *Выполнены оценки*

$$c_\Delta \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{\left(\beta_g - r + \frac{d}{p}\right)m} m^{-\alpha_g}\rho_g(m), \quad c_\Delta\|\psi_\Delta\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{(\beta-\delta)m} m^{-\alpha+\frac{1}{q}}\rho(m). \tag{5.151}$$

Доказательство. Оценим сверху величину $\left\|\frac{\nabla^r\psi_\Delta}{g}\right\|_{L_p(\hat{Q}_\Delta)}$. Сначала отметим, что из условий $\frac{\delta-\beta}{\theta} \leqslant \frac{\delta}{d}$, $\theta < d$ и $\beta_v \overset{(61)}{=} \frac{d-\theta}{q}$ следует, что

$$\beta_g + \frac{d-\theta}{p} > 0. \tag{5.152}$$

Поэтому в силу замечания 5.2.3

$$\left\|\frac{\nabla^r\psi_\Delta}{g}\right\|^p_{L_p(\hat{Q}_\Delta)} \overset{(5.144)}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}_+}\left\|\frac{\nabla^r\psi_\Delta}{g}\right\|^p_{L_p(\hat{E}_l(\Delta)\setminus\hat{E}_{l+1}(\Delta))} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(5.145),(5.150)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim \sum_{l\in\mathbb{Z}_+} 2^{-p\beta_g(m+\hat{k}l)}(m+\hat{k}l)^{p\alpha_g}\rho_g^{-p}(m+\hat{k}l)\cdot 2^{prm}\cdot 2^{-dm-(d-\theta)\hat{k}l}\frac{m^\gamma\tau(m)}{(m+\hat{k}l)^\gamma\tau(m+\hat{k}l)} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(5.152)}{\asymp}}$$

$$\asymp 2^{p\left(-\beta_g+r-\frac{d}{p}\right)m} m^{p\alpha_g}\rho_g^{-p}(m).$$

Отсюда следует первое неравенство в (5.151). Докажем второе неравенство. Учитывая, что $\psi_\Delta|_{Q_\Delta} \overset{(5.149)}{=} 1$ и $\beta_v = \frac{d-\theta}{q}$, получаем

$$\|\psi_\Delta\|^q_{L_{q,v}(\Omega)} \geqslant \sum_{l\in\mathbb{Z}_+}\|v\psi_\Delta\|^q_{L_q(E_l(\Delta)\setminus\hat{E}_{l+1}(\Delta))} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(36),(63),(5.143),(5.147)}{\gtrsim}}$$

$$\gtrsim \sum_{l\in\mathbb{Z}_+} 2^{\beta_v q(m+\hat{k}l)}(m+\hat{k}l)^{-\alpha_v q}\rho_v^q(m+\hat{k}l)\cdot 2^{-md-(d-\theta)\hat{k}l}\frac{m^\gamma\tau(m)}{(m+\hat{k}l)^\gamma\tau(m+\hat{k}l)} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(61)}{\gtrsim}}$$

$$\gtrsim 2^{(\beta_v q-d)m} m^{-q\alpha_v+1}\rho_v^q(m).$$

Остается применить первое неравенство в (5.151). $\square$

Доказательство предложения 5.2.1. Пусть

$$\{\Delta_\nu\}_{\nu\in\mathcal{N}} = \left\{\Delta \in \Xi_{\hat{k}t}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d\right) :\ \Delta\cap\Gamma \neq \varnothing\right\}. \tag{5.153}$$

Тогда $\{\hat{Q}_{\Delta_\nu}\}_{\nu\in\mathcal{N}}$ является покрытием Γ. Обозначим через $Q^*_{\Delta_\nu}$ гомотетическое растяжение $\hat{Q}_{\Delta_\nu}$ относительно центра с коэффициентом 3. Применяя теорему M, получаем, что существует подмножество $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ такое, что $\{\hat{Q}_{\Delta_\nu}\}_{\nu\in\mathcal{N}'}$ попарно не перекрываются и $\{Q^*_{\Delta_\nu}\}_{\nu\in\mathcal{N}'}$ образует покрытие Γ. Покажем, что

$$\operatorname{card}\mathcal{N}' \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{\theta\hat{k}t}(\hat{k}t)^{-\gamma}\tau^{-1}(\hat{k}t). \tag{5.154}$$

В самом деле,

$$\operatorname{card}\mathcal{N}'\cdot 2^{-\theta\hat{k}t}(\hat{k}t)^\gamma\tau(\hat{k}t) \overset{(62)}{=} \operatorname{card}\mathcal{N}'\cdot h(2^{-\hat{k}t}) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(35),(37)}{\asymp}} \sum_{\nu\in\mathcal{N}'}\mu(Q^*_{\Delta_\nu}) \geqslant \mu(\Gamma) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} 1.$$

В качестве искомого множества функций с неперекрывающимися носителями возьмем $\{c_{\Delta_\nu}\psi_{\Delta_\nu}\}_{\nu\in\mathcal{N}'}$. Остается применить лемму 5.2.2 с $m = \hat{k}t$ и (5.154). $\square$

Теперь перейдем к доказательству предложения 5.2.2. Так как $\beta-\delta+\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)=0$ и $\beta_v=\frac{d-\theta}{q}$, то

$$\beta_g=r-\frac{d}{p}+\frac{\theta}{p}. \tag{5.155}$$

Пусть $t\in\mathbb{N}$ достаточно велико, $\Delta\in\Xi_{\hat{k}t}\left([-1/2,\,1/2]^d\right)$, $\Delta\cap\Gamma\neq\varnothing$. Для $s\in\mathbb{Z}_+$ обозначим

$$\{\Delta_{s,i}\}_{i\in J_s}=\bigl\{\Delta'\in\Xi_{\hat{k}(t+s)}\bigl([-1/2,\,1/2]^d\bigr):\ \Delta'\subset\hat{Q}_\Delta,\ \ \Delta'\cap\Gamma\neq\varnothing\bigr\}. \tag{5.156}$$

Положим

$$f_\Delta(x)=\sum_{s=0}^{t}\sum_{i\in J_s}\psi_{\Delta_{s,i}}(x),$$

где функции $\psi_{\Delta_{s,i}}$ определены формулой, аналогичной (5.148).

Найдутся $t_0=t_0(\mathfrak{Z}_*)$ и куб $\Delta_0\in\Xi_{\hat{k}(t-t_0)}\left([-1/2,\,1/2]^d\right)$ такие, что $\Delta\subset\Delta_0$, $\Gamma\cap\Delta_0\neq\varnothing$ и $\operatorname{supp}f_\Delta\subset\hat{Q}_{\Delta_0}$.

Пусть $l\in\mathbb{Z}_+$, $x\in\hat{E}_l(\Delta_0)\backslash\hat{E}_{l+1}(\Delta_0)$ (см. (5.143) с $m=\hat{k}(t-t_0)$). Тогда $\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\,\Gamma)\underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp}2^{-\hat{k}(t+l)}$. Оценим сверху $\left|\frac{\nabla^r f_\Delta(x)}{g(x)}\right|$. Если $x\in\operatorname{supp}\psi_{\Delta_{s,i}}$ для некоторого $i\in J_s$, то

$$\left|\frac{\nabla^r\psi_{\Delta_{s,i}}(x)}{g(x)}\right|\overset{(36),(63),(5.143),(5.156)}{\underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim}}2^{-\beta_g\hat{k}(t+l)}(\hat{k}(t+l))^{\alpha_g}\rho_g^{-1}(\hat{k}(t+l))\cdot2^{r\hat{k}(t+s)}.$$

Кроме того, в силу (5.156) выполнено $s\leqslant l+s_0$, где $s_0=s_0(\mathfrak{Z}_*)$. Так как $\operatorname{supp}\psi_{\Delta_{s,i}}\overset{(5.149)}{\subset}\hat{Q}_{\Delta_{s,i}}$, то из определения $\hat{Q}_{\Delta_{s,i}}$ следует, что для любого $x\in\hat{Q}_{\Delta_0}$ выполнено $\operatorname{card}\{i\in J_s:\ x\in\operatorname{supp}\psi_{\Delta_{s,i}}\}\underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim}1$. Значит, при $l\leqslant t-s_0$

$$\left|\frac{\nabla^r f_\Delta(x)}{g(x)}\right|\underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim}\sum_{s=0}^{l+s_0}2^{-\beta_g\hat{k}(t+l)}(\hat{k}(t+l))^{\alpha_g}\rho_g^{-1}(\hat{k}(t+l))\cdot2^{r\hat{k}(t+s)}\overset{(3.33)}{\underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim}}$$
$$\lesssim 2^{(r-\beta_g)\hat{k}(t+l)}(\hat{k}t)^{\alpha_g}\rho_g^{-1}(\hat{k}t),$$

а при $l>t-s_0$

$$\left|\frac{\nabla^r f_\Delta(x)}{g(x)}\right|\underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim}\sum_{s=0}^{t}2^{-\beta_g\hat{k}(t+l)}(\hat{k}(t+l))^{\alpha_g}\rho_g^{-1}(\hat{k}(t+l))\cdot2^{r\hat{k}(t+s)}\overset{(3.33)}{\underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim}}$$
$$\lesssim 2^{-\beta_g\hat{k}(t+l)}(\hat{k}(t+l))^{\alpha_g}\rho_g^{-1}(\hat{k}(t+l))\cdot2^{2r\hat{k}t}.$$

Отсюда получаем, что

$$\left\|\frac{\nabla^r f_\Delta}{g}\right\|^p_{L_p(\Omega)}\overset{(5.144)}{=}\sum_{l=0}^{\infty}\left\|\frac{\nabla^r f_\Delta}{g}\right\|^p_{L_p(\hat{E}_l(\Delta_0)\backslash\hat{E}_{l+1}(\Delta_0))}\overset{(5.145)}{\underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim}}$$
$$\lesssim\sum_{l=0}^{t-s_0}2^{p(r-\beta_g)\hat{k}(t+l)}(\hat{k}t)^{p\alpha_g}\rho_g^{-p}(\hat{k}t)\times$$
$$\times2^{-\hat{k}td-(d-\theta)\hat{k}l}\frac{(\hat{k}t)^\gamma\tau(\hat{k}t)}{(\hat{k}(t+l))^\gamma\tau(\hat{k}(t+l))}+$$
$$+\sum_{l=t-s_0+1}^{\infty}2^{-p\beta_g\hat{k}(t+l)}(\hat{k}(t+l))^{p\alpha_g}\rho_g^{-p}(\hat{k}(t+l))\cdot2^{2r\hat{k}tp}\times$$

$$\times 2^{-\hat{k}td-(d-\theta)\hat{k}l}\frac{(\hat{k}t)^{\gamma}\tau(\hat{k}t)}{(\hat{k}(t+l))^{\gamma}\tau(\hat{k}(t+l))} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(5.155)}{\lesssim}}$$
$$\lesssim 2^{-\hat{k}t\theta}(\hat{k}t)^{\alpha_g p+1}\rho_g^{-p}(\hat{k}t).$$

Итак,

$$\left\|\frac{\nabla^r f_\Delta}{g}\right\|_{L_p(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\lesssim} 2^{-\frac{\hat{k}t\theta}{p}}(\hat{k}t)^{\alpha_g+\frac{1}{p}}\rho_g^{-1}(\hat{k}t). \tag{5.157}$$

Теперь оценим снизу $\|f_\Delta\|_{L_{q,v}(\Omega)}$. Пусть $x \in E_l(\Delta)\backslash\hat{E}_{l+1}(\Delta)$. Тогда $\mathrm{dist}_{|\cdot|}(x,\Gamma) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(5.143)}{\asymp}} 2^{-\hat{k}(t+l)}$ и существует такое $l_0 = l_0(\mathfrak{Z}_*)$, что при $0 \leqslant s \leqslant l - l_0$ найдется $i_s \in J_s$ такое, что $x \in \tilde{Q}_{\Delta_{s,i_s}}$. (В самом деле, так как $x \in Q_\Delta$ в силу (5.143), то существует точка $y \in \Gamma \cap \hat{Q}_\Delta$ такая, что $|x-y| \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} 2^{-\hat{k}(t+l)}$. Выберем куб Δ_{s,i_s}, содержащий точку y. По определению куба $Q_{\Delta_{s,i_s}}$, $\hat{x}_{\Delta_{s,i_s}} \in \Delta_{s,i_s}$, так что $|y-\hat{x}_{\Delta_{s,i_s}}| \overset{(5.156)}{\leqslant} 2^{-\hat{k}(t+s)}$. Значит, $|x-\hat{x}_{\Delta_{s,i_s}}| \leqslant |x-y| + |y-\hat{x}_{\Delta_{s,i_s}}| \leqslant c(\mathfrak{Z}_*)2^{-\hat{k}(t+l)} + 2^{-\hat{k}(t+s)}$ для некоторого $c(\mathfrak{Z}_*) > 0$. Остается воспользоваться (5.142), (5.156) и неравенством $s \leqslant l - l_0$.) Поэтому при $\frac{t}{2} \leqslant l \leqslant t$ выполнено $|f_\Delta(x)| \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(5.149)}{\gtrsim}} t$. Значит,

$$\|f_\Delta\|^q_{L_{q,v}(\Omega)} \geqslant \sum_{t/2\leqslant l\leqslant t}\|f_\Delta\|^q_{L_{q,v}(E_l(\Delta)\backslash\hat{E}_{l+1}(\Delta))} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(36),(63),(5.143),(5.147)}{\gtrsim}}$$

$$\gtrsim \sum_{t/2\leqslant l\leqslant t} t^q\cdot 2^{\beta_v q\hat{k}(t+l)}(\hat{k}(t+l))^{-\alpha_v q}\rho_v^q(\hat{k}(t+l))\cdot 2^{-\hat{k}td-(d-\theta)\hat{k}l}\frac{(\hat{k}t)^{\gamma}\tau(\hat{k}t)}{(\hat{k}(t+l))^{\gamma}\tau(\hat{k}(t+l))} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\overset{(61)}{\gtrsim}}$$
$$\gtrsim 2^{-\theta\hat{k}t}(\hat{k}t)^{-\alpha_v q+q+1}\rho_v^q(\hat{k}t),$$

т.е.

$$\|f_\Delta\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{-\frac{\theta\hat{k}t}{q}}(\hat{k}t)^{-\alpha_v+1+\frac{1}{q}}\rho_v(\hat{k}t). \tag{5.158}$$

Доказательство предложения 5.2.2. Пусть множество кубов $\{\Delta_\nu\}_{\nu\in\mathcal{N}}$ определено формулой (5.153), $F_{\Delta_\nu} = c_{\Delta_\nu}f_{\Delta_\nu}$, где c_{Δ_ν} выбирается так, что $\left\|\frac{\nabla^r F_{\Delta_\nu}}{g}\right\|_{L_p(\Omega)} = 1$. Из (5.157) и (5.158) следует, что

$$\|F_{\Delta_\nu}\|_{L_{q,v}(\Omega)} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\gtrsim} 2^{-\theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\hat{k}t}(\hat{k}t)^{-\alpha+\frac{1}{q}+1-\frac{1}{p}}\rho(\hat{k}t).$$

Далее, $\mathrm{supp}\,F_{\Delta_\nu} = \mathrm{supp}\,f_{\Delta_\nu} \subset \hat{Q}_{(\Delta_\nu)_0}$ и $\mathrm{diam}\,\hat{Q}_{(\Delta_\nu)_0} \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} 2^{-\hat{k}t}$. Применим теорему M к покрытию $\{\hat{Q}_{(\Delta_\nu)_0}\}_{\nu\in\mathcal{N}}$ множества Γ и затем проводим рассуждения так же, как в доказательстве предложения 5.2.1. $\square$

Это завершает доказательство теоремы 13.

Замечание 5.2.4. Пусть $\beta_v = \frac{d-\theta}{q}$, $\beta - \delta + \theta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+ = 0$. Кроме того, пусть $\alpha < \frac{1}{q}$ в случае $1 < p < q < \infty$ и $\alpha < 1 + (1-\gamma)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ в случае $p \geqslant q$. Тогда также выполнены предложения 5.2.1 и 5.2.2, откуда следует, что $\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) = \infty$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Глава 6

Оценки поперечников весовых классов Бесова с весами, имеющими особенность в точке

В этой главе мы докажем теорему 14.

6.1 Оценки колмогоровских поперечников конечномерных шаров в смешанной норме

Пусть m, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p$, $q < \infty$. Через $l^{m,k}_{p,q}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^{mk}$ с нормой

$$\|(x_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant k}\|_{l^{m,k}_{p,q}} = \left(\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m}|x_{ij}|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q},$$

а через $B^{m,k}_{p,q}$ — единичный шар в этом пространстве. Сопряженное пространство к $l^{m,k}_{p,q}$ совпадает с $l^{m,k}_{p',q'}$.

Нам понадобится следующая лемма (см. [20]).

Лемма 6.1.1. *Пусть $X_0 \subset X_\theta \subset X_1$ — N-мерные нормированные пространства и $0 < \theta < 1$. Пусть для каждого $x^* \in X_1^*$ выполнено следующее неравенство:*

$$\|x^*\|_{X_\theta^*} \leqslant \|x^*\|^{1-\theta}_{X_0^*}\|x^*\|^{\theta}_{X_1^*}.$$

Тогда для любого $n \in \{0, \dots, N\}$

$$d_n(B_{X_\theta}, X_1) \leqslant (d_n(B_{X_0}, X_1))^{1-\theta}. \tag{6.1}$$

Предложение 6.1.1. *Пусть $1 < p$, $q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда существует $c_1(p, q) > 0$ такое, что для любого $x = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ выполнено следующее неравенство:*

$$\left(\sum_{i=1}^{r}|1-x_i|^p\right)^{q/p} \geqslant \frac{r^{q/p}}{2} + c_1(p, q)\left(\sum_{i=1}^{r}|x_i|^p\right)^{q/p} - qr^{\frac{q}{p}-1}\sum_{i=1}^{r}x_i. \tag{6.2}$$

При этом, можно считать, что $c_1(p, q)$ непрерывно зависит от (p, q).

Доказательство. Заметим, что левая часть (6.2) выпукла по x. Поэтому

$$\left(\sum_{i=1}^{r}|1-x_i|^p\right)^{q/p} \geqslant r^{q/p} - qr^{\frac{q}{p}-1}\sum_{i=1}^{r}x_i.$$

Если $\sum\limits_{i=1}^{r}|x_i|^p \leqslant t\cdot r$, то существует $c_2(p,\,q,\,t)>0$ (непрерывно зависящее от p, q, t) такое, что

$$r^{q/p} - qr^{\frac{q}{p}-1}\sum_{i=1}^{r}x_i \geqslant \frac{1}{2}r^{q/p} - qr^{\frac{q}{p}-1}\sum_{i=1}^{r}x_i + c_2(p,\,q,\,t)\left(\sum_{i=1}^{r}|x_i|^p\right)^{q/p}.$$

Покажем, что существует $t_0(p,\,q)>0$ (непрерывно зависящее от p, q) такое, что если $\sum\limits_{i=1}^{r}|x_i|^p \geqslant t_0(p,\,q)r$, то выполнено следующее неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{r}|1-x_i|^p\right)^{q/p} \geqslant r^{q/p} - qr^{\frac{q}{p}-1}\sum_{i=1}^{r}x_i + 2^{-q}\left(\sum_{i=1}^{r}|x_i|^p\right)^{q/p}.$$

В самом деле, из неравенства $(a+b)^q \leqslant 2^{q-1}(a^q+b^q)$ и неравенства Минковского получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{r}|1-x_i|^p\right)^{q/p} \geqslant 2^{1-q}\left(\sum_{i=1}^{r}|x_i|^p\right)^{q/p} - r^{q/p}.$$

Покажем, что при достаточно больших $t_0(p,\,q)$ правая часть оценивается снизу величиной

$$2^{-q}\left(\sum_{i=1}^{r}|x_i|^p\right)^{q/p} + r^{q/p} - qr^{\frac{q}{p}-1}\sum_{i=1}^{r}x_i,$$

то есть

$$2r^{q/p} - qr^{\frac{q}{p}-1}\sum_{i=1}^{r}x_i \leqslant 2^{-q}\left(\sum_{i=1}^{r}|x_i|^p\right)^{q/p}.$$

В самом деле, существует $t \geqslant t_0(p,\,q)$ такое, что $\sum\limits_{i=1}^{r}|x_i|^p = t\cdot r$. В силу неравенства Гельдера, при достаточно больших $t_0(p,\,q)$

$$2r^{q/p} - qr^{\frac{q}{p}-1}\sum_{i=1}^{r}x_i \leqslant 2r^{q/p} + qr^{\frac{q}{p}-1}r^{1-\frac{1}{p}}t^{1/p}r^{1/p} =$$
$$= r^{q/p}(2+qt^{1/p}) \leqslant 2^{-q}t^{q/p}r^{q/p}.$$

При этом, $t_0(p,\,q)$ можно выбрать непрерывно зависящим от p, q. □

Лемма 6.1.2. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $(a_j)_{j=1}^n \subset \mathbb{R}_+$, $(b_j)_{j=1}^n \subset \mathbb{R}_+$, $\mathbf{v}=(v_1,\,v_2)\in[2,\,+\infty)^2$, $v_1\leqslant v_2$. Определим $\lambda(\mathbf{v})$ формулой, аналогичной (73). Пусть $0<\lambda\leqslant\lambda(\mathbf{v})$. Тогда*

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^{v_1'\lambda}b_j^{v_1'(1-\lambda)}\right)^{1/v_1'} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)^{\lambda/2}\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^{v_2'}\right)^{(1-\lambda)/v_2'}. \qquad (6.3)$$

Доказательство. Пусть $s=\lambda/2$, $t=(1-\lambda)/v_2'$, $y_j=a_j^{\frac{2s}{s+t}}$, $z_j=b_j^{\frac{v_2't}{s+t}}$. Тогда (6.3) эквивалентно следующему неравенству:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^{v_1'(s+t)}z_j^{v_1'(s+t)}\right)^{\frac{1}{v_1'(s+t)}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}y_j^{\frac{s+t}{s}}\right)^{\frac{s}{s+t}}\left(\sum_{j=1}^{n}z_j^{\frac{s+t}{t}}\right)^{\frac{t}{s+t}}.$$

В силу неравенства Гельдера, правая часть оценивается снизу величиной $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j z_j$. Поэтому достаточно показать, что $v_1'(s+t) \geqslant 1$ и воспользоваться (1.84). В самом деле,

$$v_1' \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{v_2'} \right) \geqslant 1$$

эквивалентно неравенству $\lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{v_2} \right) \leqslant \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}$, которое следует из условий $v_2 \geqslant v_1 \geqslant 2$ и $\lambda \leqslant \lambda(\mathbf{v})$. $\square$

Теорема 6.1.1. *Пусть $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < \infty$, $1 \leqslant q_1 \leqslant q_2 < \infty$, $p_2 \geqslant 2$, $q_2 \geqslant 2$. Тогда существует $a = a(p_2, q_2) > 0$ такое, что для любых $m, k, n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $n \leqslant amk$, выполнена следующая оценка:*

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1}, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_1,p_2,q_1,q_2}{\asymp} \Phi_0 = \Phi_0(m, k, n, p_1, p_2, q_1, q_2),$$

где

$$\Phi_0 = \min\left\{1, n^{-1/2} m^{1/p_2} k^{1/q_2}\right\}, \text{ если } p_1 \leqslant 2,\ q_1 \leqslant 2,$$

$$\Phi_0 = \min\left\{1, (n^{-1/2} m^{1/p_2} k^{1/q_2})^{\lambda(\mathbf{p})}, m^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}} \left(n^{-1/2} m^{1/2} k^{1/q_2}\right)^{\lambda(\mathbf{q})}\right\}$$

если $\lambda(\mathbf{p}) \leqslant \lambda(\mathbf{q})$ и $\lambda(\mathbf{p}) < 1$,

$$\Phi_0 = \min\left\{1, (n^{-1/2} m^{1/p_2} k^{1/q_2})^{\lambda(\mathbf{q})}, k^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}} \left(n^{-1/2} m^{1/p_2} k^{1/2}\right)^{\lambda(\mathbf{p})}\right\}$$

если $\lambda(\mathbf{p}) \geqslant \lambda(\mathbf{q})$ и $\lambda(\mathbf{q}) < 1$.

Для удобства рассмотрим специальные случаи, для которых формула для Φ_0 может быть упрощена. Если $n \leqslant m^{2/p_2} k^{2/q_2}$, то $\Phi_0 = 1$; если $\lambda(\mathbf{p}) \leqslant \lambda(\mathbf{q})$, $p_1 > 2$ и $m^{2/p_2} k^{2/q_2} \leqslant n \leqslant mk^{2/q_2}$, то $\Phi_0 = (n^{-1/2} m^{1/p_2} k^{1/q_2})^{\lambda(\mathbf{p})}$; если $\lambda(\mathbf{p}) \leqslant \lambda(\mathbf{q})$, $p_1 > 2$ и $mk^{2/q_2} \leqslant n \leqslant mk$, то $\Phi_0 = m^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}} \left(n^{-1/2} m^{1/2} k^{1/q_2}\right)^{\lambda(\mathbf{q})}$; если $\lambda(\mathbf{p}) \geqslant \lambda(\mathbf{q})$, $q_1 > 2$ и $m^{2/p_2} k^{2/q_2} \leqslant n \leqslant km^{2/p_2}$, то $\Phi_0 = (n^{-1/2} m^{1/p_2} k^{1/q_2})^{\lambda(\mathbf{q})}$; если $\lambda(\mathbf{p}) \geqslant \lambda(\mathbf{q})$, $q_1 > 2$ и $km^{2/p_2} \leqslant n \leqslant mk$, то $\Phi_0 = k^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}} \left(n^{-1/2} m^{1/p_2} k^{1/2}\right)^{\lambda(\mathbf{p})}$.

Доказательство. *Оценка сверху.* Так как $p_1 \leqslant p_2$, $q_1 \leqslant q_2$, то

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1}, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \leqslant 1. \tag{6.4}$$

Докажем остальные неравенства в оценке сверху.

Заметим, что

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1}, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \leqslant d_n(B^{m,k}_{\max(p_1,2),\max(q_1,2)}, l^{m,k}_{p_2,q_2}).$$

Поэтому можно считать, что $p_1 \geqslant 2$, $q_1 \geqslant 2$ и $\lambda(\mathbf{p}) = \frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2}}$, $\lambda(\mathbf{q}) = \frac{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2}}$.

Сначала рассмотрим случай $p_1 = q_1 = 2$. Пусть $s = \max\{p_2, q_2\}$. По теореме H,

$$d_n(B^{mk}_2, l^{mk}_s) \underset{s}{\lesssim} n^{-1/2} (mk)^{1/s}.$$

Отсюда и из неравенства

$$\|x\|_{l^{m,k}_{p_2,q_2}} \leqslant m^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{s}} k^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{s}} \|x\|_{l^{mk}_s},$$

следует, что

$$d_n(B^{m,k}_{2,2}, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_2,q_2}{\lesssim} n^{-1/2} m^{1/p_2} k^{1/q_2}. \tag{6.5}$$

В силу (74), если $\min(\lambda(\mathbf{p}),\,\lambda(\mathbf{q}))=1$, то $p_1=2$, $q_1=2$ и утверждение следует из (6.4) и (6.5).

Рассмотрим случай $\min(\lambda(\mathbf{p}),\,\lambda(\mathbf{q}))<1$. Сначала докажем неравенства

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\,l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_1,q_1,p_2,q_2}{\lesssim} \left(n^{-1/2}m^{1/p_2}k^{1/q_2}\right)^{\lambda(\mathbf{p})},\ \ \lambda(\mathbf{p})\leqslant\lambda(\mathbf{q}),\ \ \lambda(\mathbf{p})<1, \tag{6.6}$$

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\,l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_1,q_1,p_2,q_2}{\lesssim} \left(n^{-1/2}m^{1/p_2}k^{1/q_2}\right)^{\lambda(\mathbf{q})},\ \ \lambda(\mathbf{p})\geqslant\lambda(\mathbf{q}),\ \ \lambda(\mathbf{q})<1. \tag{6.7}$$

Пусть $\lambda(\mathbf{p})\leqslant\lambda(\mathbf{q})$, $\lambda(\mathbf{p})<1$. Применим лемму 6.1.1 для $\theta=1-\lambda(\mathbf{p})$, $X_0=l^{m,k}_{2,2}$, $X_1=l^{m,k}_{p_2,q_2}$, $X_\theta=l^{m,k}_{p_1,q_1}$. Если

$$\|x\|_{l^{m,k}_{p_1',q_1'}}\leqslant\|x\|^{\lambda(\mathbf{p})}_{l^{m,k}_{2,2}}\|x\|^{1-\lambda(\mathbf{p})}_{l^{m,k}_{p_2',q_2'}}, \tag{6.8}$$

то (6.6) следует из (6.1) и (6.5).

Докажем (6.8). Применяя лемму 6.1.2 к $n:=m$, $v_1:=p_1$, $v_2:=p_2$, $\lambda:=\lambda(\mathbf{p})$, $a_i:=b_i:=x_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant m$, получаем

$$\begin{gathered}\left(\sum_{j=1}^k\left(\sum_{i=1}^m|x_{ij}|^{p_1'}\right)^{q_1'/p_1'}\right)^{1/q_1'}\leqslant\\ \leqslant\left(\sum_{j=1}^k\left(\sum_{i=1}^m|x_{ij}|^2\right)^{q_1'\lambda(\mathbf{p})/2}\left(\sum_{i=1}^m|x_{ij}|^{p_2'}\right)^{q_1'(1-\lambda(\mathbf{p}))/p_2'}\right)^{1/q_1'}.\end{gathered} \tag{6.9}$$

Теперь положим

$$a_j:=\left(\sum_{i=1}^m|x_{ij}|^2\right)^{1/2},\ \ b_j:=\left(\sum_{i=1}^m|x_{ij}|^{p_2'}\right)^{1/p_2'},\ \ 1\leqslant j\leqslant k. \tag{6.10}$$

Применяя лемму 6.1.2 с $n:=k$, $v_1:=q_1$, $v_2:=q_2$, $\lambda:=\lambda(\mathbf{p})$, мы получаем

$$\left(\sum_{j=1}^k a_j^{q_1'\lambda(\mathbf{p})}b_j^{q_1'(1-\lambda(\mathbf{p}))}\right)^{1/q_1'}\leqslant\left(\sum_{j=1}^k a_j^2\right)^{\lambda(\mathbf{p})/2}\left(\sum_{j=1}^k b_j^{q_2'}\right)^{(1-\lambda(\mathbf{p}))/q_2'}.$$

Это вместе с (6.9) дает (6.8).

Докажем (6.7). По лемме 6.1.1, достаточно проверить неравенство

$$\|x\|_{l^{m,k}_{p_1',q_1'}}\leqslant\|x\|^{\lambda(\mathbf{q})}_{l^{m,k}_{2,2}}\|x\|^{1-\lambda(\mathbf{q})}_{l^{m,k}_{p_2',q_2'}}. \tag{6.11}$$

Применяя лемму 6.1.2 с $n:=m$, $v_1:=p_1$, $v_2:=p_2$, $\lambda:=\lambda(\mathbf{q})$, $a_i:=b_i:=x_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant m$, получаем, что

$$\begin{gathered}\left(\sum_{j=1}^k\left(\sum_{i=1}^m|x_{ij}|^{p_1'}\right)^{q_1'/p_1'}\right)^{1/q_1'}\leqslant\\ \leqslant\left(\sum_{j=1}^k\left(\sum_{i=1}^m|x_{ij}|^2\right)^{q_1'\lambda(\mathbf{q})/2}\left(\sum_{i=1}^m|x_{ij}|^{p_2'}\right)^{q_1'(1-\lambda(\mathbf{q}))/p_2'}\right)^{1/q_1'}.\end{gathered} \tag{6.12}$$

Теперь определяем $(a_j)_{j=1}^k$, $(b_j)_{j=1}^k$ формулой (6.10). Применяя лемму 6.1.2 с $n:=k$, $v_1:=q_1$, $v_2:=q_2$, $\lambda:=\lambda(\mathbf{q})$, получаем

$$\left(\sum_{j=1}^k a_j^{q_1'\lambda(\mathbf{q})}b_j^{q_1'(1-\lambda(\mathbf{q}))}\right)^{1/q_1'}\leqslant\left(\sum_{j=1}^k a_j^2\right)^{\lambda(\mathbf{q})/2}\left(\sum_{j=1}^k b_j^{q_2'}\right)^{(1-\lambda(\mathbf{q}))/q_2'}.$$

Отсюда и из (6.10), (6.12) следует (6.11).

Докажем неравенства

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_1,q_1,p_2,q_2}{\lesssim} n^{-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}} k^{\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}} m^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}}, \;\; \lambda(\mathbf{p}) \leqslant \lambda(\mathbf{q}), \;\; p_1 > 2,$$

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_1,q_1,p_2,q_2}{\lesssim} n^{-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}} m^{\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}} k^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}}, \;\; \lambda(\mathbf{p}) \geqslant \lambda(\mathbf{q}), \;\; q_1 > 2. \tag{6.13}$$

Пусть $\lambda(\mathbf{p}) \leqslant \lambda(\mathbf{q})$. Выберем $\sigma \in [2,\, p_2]$ так, что

$$\frac{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{p_2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}} = \lambda(\mathbf{q}).$$

Так как $p_1 > 2$, то $\sigma \leqslant p_1$ и

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \leqslant m^{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{p_1}} d_n(B^{m,k}_{\sigma,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_1,q_1,p_2,q_2}{\overset{(6.5),(6.7)}{\lesssim}}$$

$$\lesssim m^{\frac{1}{p_2}+\lambda(\mathbf{q})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\right)-\frac{1}{p_1}} \left(n^{-1/2} m^{1/p_2} k^{1/q_2}\right)^{\lambda(\mathbf{q})} = n^{-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}} k^{\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}} m^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}}.$$

Доказательство (6.13) аналогичное.

Оценка снизу. Используем рассуждения из работы Глускина [20]. Пусть $r \in \{1,\, \dots,\, m\}$, $l \in \{1,\, \dots,\, k\}$. Обозначим через S_m, S_k группы перестановок из m и k элементов соответственно,

$$E_m = \{(\xi_1,\, \dots,\, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : \xi_i = \pm 1,\; 1 \leqslant i \leqslant m\},$$
$$E_k = \{(\xi_1,\, \dots,\, \xi_k) \in \mathbb{R}^k : \xi_i = \pm 1,\; 1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

Через G обозначим множество

$$\{(\sigma_1,\, \sigma_2,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_2) : \sigma_1 \in S_m,\, \sigma_2 \in S_k,\, \varepsilon_1 \in E_m,\, \varepsilon_2 \in E_k\}.$$

Для $x = (x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant k}$, $\gamma = (\sigma_1,\, \sigma_2,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_2) \in G$, $\varepsilon_1 = (\varepsilon_{1,1},\, \dots,\, \varepsilon_{1,m})$, $\varepsilon_2 = (\varepsilon_{2,1},\, \dots,\, \varepsilon_{2,k})$ положим $\gamma(x) = (\varepsilon_{1,i}\varepsilon_{2,j} x_{\sigma_1(i),\sigma_2(j)})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant k}$.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant k$,

$$e^{m,k,r,l}_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant r \text{ и } 1 \leqslant j \leqslant l, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим $e = (e^{m,k,r,l}_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant k}$,

$$V^{m,k}_{r,l} = \operatorname{conv}\{\gamma(e) : \gamma \in G\}.$$

Покажем, что существуют $a = a(p_2,\, q_2) > 0$ и $b = b(p_2,\, q_2) > 0$ такие, что для $n \leqslant a m^{2/p_2} k^{2/q_2} r^{1-2/p_2} l^{1-2/q_2}$ выполнено неравенство

$$d_n(V^{m,k}_{r,l},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \geqslant b r^{1/p_2} l^{1/q_2}. \tag{6.14}$$

При этом, можно считать, что $a(p_2,\, q_2)$ убывает по p_2 и q_2 и что $b(p_2,\, q_2)$ непрерывно зависит от p_2, q_2.

Пусть $Y \subset l^{m,k}_{p_2,q_2}$ — подпространство размерности не выше n. Для каждого $\gamma \in G$ обозначим через $y^\gamma = (y^\gamma_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant k}$ ближайшую к $\gamma(e)$ точку из Y. Докажем оценку снизу для $\max_{\gamma\in G} \|\gamma(e) - y^\gamma\|_{l^{m,k}_{p_2,q_2}}$.

Проверим, что существует $\tilde{c}_1(p_2,\, q_2) > 0$ (непрерывно зависящее от p_2 и q_2) такое, что

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m}|\gamma(e)_{i,j}-y^\gamma_{i,j}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2} \geqslant \frac{lr^{q_2/p_2}}{4}+ \\ +\tilde{c}_1(p_2,\, q_2)\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m}|y^\gamma_{i,j}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2} - \tfrac{q_2}{2}r^{\frac{q_2}{p_2}-1}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\gamma(e)_{i,j}y^\gamma_{i,j}.\end{gathered} \tag{6.15}$$

В самом деле, пусть

$$J_1^\gamma = \{j\in\overline{1,\, k} : \forall i\in\overline{1,\, m}\quad \gamma(e)_{i,j}=0\}, \quad J_2^\gamma=\{1,\, \dots,\, k\}\backslash J_1^\gamma;$$

для $j\in J_2^\gamma$ положим

$$I_1^\gamma=\{i\in\overline{1,\, m} : \gamma(e)_{i,j}=0\}, \quad I_2^\gamma=\{1,\, \dots,\, m\}\backslash I_1^\gamma.$$

Из предложения 6.1.1, равенства $\operatorname{card} I_2^\gamma = r$ и неравенства

$$(\xi+\eta)^\theta \geqslant \frac{\xi^\theta+\eta^\theta}{2}, \;\; \xi,\, \eta\in\mathbb{R}_+, \;\; \theta>0, \tag{6.16}$$

следует, что

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m}|\gamma(e)_{i,j}-y^\gamma_{i,j}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2} = \sum_{j\in J_1^\gamma}\left(\sum_{i=1}^{m}|y^\gamma_{i,j}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2}+ \\ +\sum_{j\in J_2^\gamma}\left(\sum_{i\in I_1^\gamma}|y^\gamma_{i,j}|^{p_2}+\sum_{i\in I_2^\gamma}|1-\gamma(e)_{i,j}y^\gamma_{i,j}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2} \overset{(6.2),(6.16)}{\geqslant} \\ \geqslant \sum_{j\in J_1^\gamma}\left(\sum_{i=1}^{m}|y^\gamma_{i,j}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2} + \frac{1}{2}\sum_{j\in J_2^\gamma}\left(\sum_{i\in I_1^\gamma}|y^\gamma_{i,j}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2} + \frac{1}{4}\sum_{j\in J_2^\gamma} r^{q_2/p_2}+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{j\in J_2^\gamma}c_1(p_2,\, q_2)\left(\sum_{i\in I_2^\gamma}|y^\gamma_{i,j}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2} - \frac{q_2}{2}r^{\frac{q_2}{p_2}-1}\sum_{j\in J_2^\gamma}\sum_{i\in I_2^\gamma}\gamma(e)_{i,j}y^\gamma_{i,j}.\end{gathered}$$

Остается применить равенство $\operatorname{card} J_2^\gamma = l$.

Усредняя обе части неравенства (6.15) по $\gamma\in G$, получаем

$$\begin{gathered}\max_{\gamma\in G}\|\gamma(e)-y^\gamma\|^{q_2}_{l^{m,k}_{p_2,q_2}} \geqslant |G|^{-1}\sum_{\gamma\in G}\|\gamma(e)-y^\gamma\|^{q_2}_{l^{m,k}_{p_2,q_2}} \geqslant \tfrac{lr^{q_2/p_2}}{4}+ \\ +\tilde{c}_1(p_2,\, q_2)|G|^{-1}\sum_{\gamma\in G}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m}|y^\gamma_{i,j}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2} - \tfrac{q_2}{2}|G|^{-1}r^{\frac{q_2}{p_2}-1}\sum_{\gamma\in G}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\gamma(e)_{i,j}y^\gamma_{i,j}.\end{gathered} \tag{6.17}$$

Оценим сверху модуль последнего слагаемого. Рассмотрим пространство $l_2(G) = \{\varphi : G\to\mathbb{R}\}$ со скалярным произведением

$$\langle\varphi,\, \psi\rangle = |G|^{-1}\sum_{\gamma\in G}\varphi(\gamma)\psi(\gamma).$$

Для $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant k$, $\gamma\in G$ обозначим $\varphi_{ij}(\gamma)=\gamma(e)_{i,j}$, $z_{ij}(\gamma)=y^\gamma_{i,j}$, $L=\operatorname{span}\{z_{ij}\}_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant k}\subset l_2(G)$. Тогда $\dim L\leqslant n$. В самом деле, рассмотрим матрицу $(z_s(\gamma))_{s\in S,\, \gamma\in G}$, где $S=\{s=(i,j) : 1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant k\}$. Так как $y^\gamma\in Y$, $\dim Y\leqslant n$, то ранг этой матрицы не превосходит n; значит, $\dim L\leqslant n$. Пусть P —

ортогональный проектор на L. Тогда его норма Гильберта – Шмидта не превосходит $n^{1/2}$.

Докажем, что векторы φ_{ij} образуют ортогональную систему и $\|\varphi_{ij}\|^2_{l_2(G)} = \frac{rl}{mk}$. В самом деле, пусть $(i,\, j) \neq (i',\, j')$. Проверим, что $\sum\limits_{\gamma\in G} \varphi_{ij}(\gamma)\varphi_{i'j'}(\gamma) = 0$. Пусть $i \neq i'$ (случай $j \neq j'$ рассматривается аналогично). Пусть $\gamma = (\sigma_1,\, \sigma_2,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_2)$ и $\varepsilon_{1,i'} = 1$. Имеем $\varphi_{ij}(\gamma)\varphi_{i'j'}(\gamma) = \varepsilon_{1,i}\varepsilon_{2,j}\varepsilon_{1,i'}\varepsilon_{2,j'} e^{m,k,r,l}_{\sigma_1(i),\sigma_2(j)} e^{m,k,r,l}_{\sigma_1(i'),\sigma_2(j')}$. Положим $\tilde\gamma = (\sigma_1,\, \sigma_2,\, \tilde\varepsilon_1,\, \varepsilon_2)$, где $\tilde\varepsilon_{1,s} = \varepsilon_{1,s}$ при $s \neq i'$, $\tilde\varepsilon_{1,i'} = -1$. Так как $i \neq i'$, то $\tilde\varepsilon_{1,i}\tilde\varepsilon_{1,i'} = -\varepsilon_{1,i}\varepsilon_{1,i'}$. Отсюда следует, что система (φ_{ij}) ортогональна. Покажем, что $|G|^{-1} \sum\limits_{\gamma\in G} \varphi^2_{ij}(\gamma) = \frac{rl}{mk}$. Действительно, $|G| = 2^m \cdot 2^k m!k!$,

$$\begin{gathered}\operatorname{card}\{\gamma \in G : |\varphi_{ij}(\gamma)| = 1\} = \\ = 2^m \cdot 2^k \operatorname{card}\{\sigma_1 \in S_m :\, \sigma_1(i) \leqslant r\} \cdot \operatorname{card}\{\sigma_2 \in S_k :\, \sigma_2(j) \leqslant l\} = \\ = 2^m \cdot 2^k r(m-1)!l(k-1)!.\end{gathered}$$

Имеем

$$\begin{gathered}\left| |G|^{-1} \sum_{\gamma\in G} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m y^\gamma_{i,j}\gamma(e)_{i,j} \right| = \left| \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \langle \varphi_{ij},\, z_{ij}\rangle \right| = \\ = \left| \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \langle P\varphi_{ij},\, z_{ij}\rangle \right| \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \|P\varphi_{ij}\|^2_{l_2(G)} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \|z_{ij}\|^2_{l_2(G)} \right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant n^{1/2} \left(\frac{rl}{mk}\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \|z_{ij}\|^2_{l_2(G)} \right)^{1/2} = \\ = n^{1/2} \left(\frac{rl}{mk}\right)^{1/2} \left(|G|^{-1} \sum_{\gamma\in G} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m |y^\gamma_{i,j}|^2 \right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant (nrl)^{1/2} m^{-1/p_2} k^{-1/q_2} \left(|G|^{-1} \sum_{\gamma\in G} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m |y^\gamma_{i,j}|^{p_2} \right)^{q_2/p_2} \right)^{1/q_2} =: M.\end{gathered}$$

Пусть $n = \tilde a m^{2/p_2} k^{2/q_2} r^{1-2/p_2} l^{1-2/q_2}$. Применяя неравенство $\xi\eta \leqslant |\xi|^{q_2'} + |\eta|^{q_2}$ для $\xi = r^{\frac{q_2-1}{p_2}} l^{\frac{q_2-1}{q_2}}$ и

$$\eta = \left(|G|^{-1} \sum_{\gamma\in G} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m |y^\gamma_{i,j}|^{p_2} \right)^{q_2/p_2} \right)^{1/q_2},$$

получаем, что

$$\begin{gathered}M = \tilde a^{\frac12} r^{1-\frac{1}{p_2}} l^{1-\frac{1}{q_2}} \left(|G|^{-1} \sum_{\gamma\in G} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m |y^\gamma_{i,j}|^{p_2} \right)^{q_2/p_2} \right)^{1/q_2} \leqslant \\ \leqslant \tilde a^{\frac12} r^{1-\frac{q_2}{p_2}} \left(r^{\frac{q_2}{p_2}} l + |G|^{-1} \sum_{\gamma\in G} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m |y^\gamma_{i,j}|^{p_2} \right)^{q_2/p_2} \right).\end{gathered}$$

Из этой оценки и (6.17) следует, что

$$\max_{\gamma\in G} \|\gamma(e) - y^\gamma\|^{q_2}_{l^{m,k}_{p_2,q_2}} \geqslant \frac{lr^{\frac{q_2}{p_2}}}{4} + \tilde c_1(p_2,\, q_2)|G|^{-1} \sum_{\gamma\in G} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m |y^\gamma_{i,j}|^{p_2} \right)^{q_2/p_2} -$$

$$-\frac{q_2}{2}\tilde{a}^{\frac{1}{2}}\left(r^{\frac{q_2}{p_2}}l+|G|^{-1}\sum_{\gamma\in G}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m}|y_{i,j}^{\gamma}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2}\right).$$

Взяв достаточно малое $\tilde{a}$, получаем (6.14). При этом, можно считать, что $\tilde{a}$ непрерывно зависит от p_2, q_2. Остается положить $a(p_2,\, q_2)=\min_{2\leqslant p\leqslant p_2,\, 2\leqslant q\leqslant q_2}\tilde{a}(p,\, q)$.

Оценим колмогоровские поперечники шаров $B^{m,k}_{p_1,q_1}$.

Так как $B^{m,k}_{p_1,q_1}\supset r^{-1/p_1}l^{-1/q_1}V^{m,k}_{r,l}$, то

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_2,q_2}{\gtrsim} r^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}l^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}} \tag{6.18}$$

для $n\leqslant am^{2/p_2}k^{2/q_2}r^{1-2/p_2}l^{1-2/q_2}$, $a=a(p_2,\, q_2)$.

1. $n\leqslant am^{2/p_2}k^{2/q_2}$. Взяв $r=l=1$, получаем

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_2,q_2}{\gtrsim} 1.$$

2. $am^{2/p_2}k^{2/q_2}\leqslant n\leqslant amk$. Сначала выберем $\tilde{p}\in[2,\, p_2]$ и $\tilde{q}\in[2,\, q_2]$ так, что $n=a(p_2,\, q_2)m^{2/\tilde{p}}k^{2/\tilde{q}}\leqslant a(\tilde{p},\, \tilde{q})m^{2/\tilde{p}}k^{2/\tilde{q}}$. Тогда

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2})\geqslant d_n(V^{m,k}_{1,1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2})\geqslant$$
$$\geqslant m^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{\tilde{p}}}k^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{\tilde{q}}}d_n(V^{m,k}_{1,1},\, l^{m,k}_{\tilde{p},\tilde{q}}) \underset{p_2,q_2}{\gtrsim} n^{-1/2}m^{1/p_2}k^{1/q_2}$$

(в последнем неравенстве мы использовали, что $\tilde{p}\in[2,\, p_2]$, $\tilde{q}\in[2,\, q_2]$ и $b(\tilde{p},\, \tilde{q})$ непрерывна).

Эту оценку можно улучшить для $\lambda(\mathbf{p})<1$ или $\lambda(\mathbf{q})<1$. Рассмотрим следующие случаи.

(a) $n\leqslant akm^{2/p_2}$, $q_1>2$. Пусть $r=1$,

$$l=\left\lceil\left(a^{-1}nm^{-2/p_2}k^{-2/q_2}\right)^{\frac{1}{1-2/q_2}}\right\rceil.$$

Тогда $1\leqslant\left(a^{-1}nm^{-2/p_2}k^{-2/q_2}\right)^{\frac{1}{1-2/q_2}}\leqslant k$, $1\leqslant l\leqslant k$, и

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \overset{(6.18)}{\underset{p_2,q_2}{\gtrsim}} \left(n^{-1/2}m^{1/p_2}k^{1/q_2}\right)^{\lambda(\mathbf{q})}. \tag{6.19}$$

(b) $n\leqslant amk^{2/q_2}$, $p_1>2$. Пусть $l=1$,

$$r=\left\lceil\left(a^{-1}nm^{-2/p_2}k^{-2/q_2}\right)^{\frac{1}{1-2/p_2}}\right\rceil.$$

Тогда $1\leqslant\left(a^{-1}nm^{-2/p_2}k^{-2/q_2}\right)^{\frac{1}{1-2/p_2}}\leqslant m$, $1\leqslant r\leqslant m$, и

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \overset{(6.18)}{\underset{p_2,q_2}{\gtrsim}} \left(n^{-1/2}m^{1/p_2}k^{1/q_2}\right)^{\lambda(\mathbf{p})}. \tag{6.20}$$

(c) $amk\geqslant n>akm^{2/p_2}$. Пусть $p_1>2$. Возьмем $l=k$,

$$r=\left\lceil\left(a^{-1}nk^{-1}m^{-2/p_2}\right)^{\frac{1}{1-2/p_2}}\right\rceil.$$

Тогда $1 \leqslant \left(a^{-1}nk^{-1}m^{-2/p_2}\right)^{\frac{1}{1-2/p_2}} \leqslant m$, $1 \leqslant r \leqslant m$, поэтому

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_2,q_2}{\overset{(6.18)}{\gtrsim}} k^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}} \left(n^{-1/2}k^{1/2}m^{1/p_2}\right)^{\lambda(\mathbf{p})}.$$

Пусть $p_1 \leqslant 2$ и $q_1 > 2$. Выберем $\tilde{p} \in [2,\, p_2]$ так, что $n = a(p_2,\, q_2)km^{\frac{2}{\tilde{p}}} \leqslant a(\tilde{p},\, q_2)km^{\frac{2}{\tilde{p}}}$. Тогда

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \geqslant m^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{\tilde{p}}} d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{\tilde{p},q_2}) \underset{p_2,q_2}{\overset{(6.19)}{\gtrsim}}$$
$$\gtrsim m^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{\tilde{p}}} \left(n^{-1/2}m^{1/\tilde{p}}k^{1/q_2}\right)^{\lambda(\mathbf{q})} \underset{p_2,q_2}{\gtrsim}$$
$$\gtrsim m^{\frac{1}{p_2}} \left(n^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\right)^{\lambda(\mathbf{q})-1} n^{-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}} k^{\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}} = n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{p_2}} k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}}.$$

(d) $amk \geqslant n > amk^{2/q_2}$. Пусть $q_1 > 2$. Возьмем $r = m$,

$$l = \left\lceil \left(a^{-1}nm^{-1}k^{-2/q_2}\right)^{\frac{1}{1-2/q_2}} \right\rceil.$$

Тогда $1 \leqslant \left(a^{-1}nm^{-1}k^{-2/q_2}\right)^{\frac{1}{1-2/q_2}} \leqslant k$, $1 \leqslant l \leqslant k$, так что

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_2,q_2}{\overset{(6.18)}{\gtrsim}} m^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}} \left(n^{-1/2}m^{1/2}k^{1/q_2}\right)^{\lambda(\mathbf{q})}.$$

Пусть $q_1 \leqslant 2$ и $p_1 > 2$. Выберем $\tilde{q} \in [2,\, q_2]$ такое, что $n = a(p_2,\, q_2)mk^{\frac{2}{\tilde{q}}} \leqslant a(p_2,\, \tilde{q})mk^{\frac{2}{\tilde{q}}}$. Тогда

$$d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \geqslant k^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{\tilde{q}}} d_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,\tilde{q}}) \underset{p_2,q_2}{\overset{(6.20)}{\gtrsim}}$$
$$\gtrsim k^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{\tilde{q}}} \left(n^{-1/2}m^{1/p_2}k^{1/\tilde{q}}\right)^{\lambda(\mathbf{p})} \underset{p_2,q_2}{\gtrsim}$$
$$\gtrsim k^{\frac{1}{q_2}} \left(n^{\frac{1}{2}}m^{-\frac{1}{2}}\right)^{\lambda(\mathbf{p})-1} n^{-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}} m^{\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}} = n^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{q_2}} m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}.$$

Теорема доказана. □

6.2 Оценки линейных поперечников конечномерных шаров в смешанной норме

В этом параграфе получены верхние оценки линейных поперечников $\lambda_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\, l^{m,k}_{p_2,q_2})$. Для доказательства мы обобщаем рассуждения из работы Глускина [21]. Приведем некоторые обозначения и вспомогательные утверждения из этой статьи.

Пусть $\nu \in \mathbb{N}$, $r > 2$, $\lambda \geqslant 1$, $\mu_r(\lambda) = \left[\lambda^{\frac{1}{1/2-1/r}}\right]$. Для каждого вектора $x = (x_1,\, \dots,\, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ положим $\operatorname{supp} x = \{j \in \overline{1,\, \nu} :\, x_j \neq 0\}$, через $(x_1^*,\, \dots,\, x_\nu^*)$ обозначим невозрастающую перестановку $|x_j|$, $1 \leqslant j \leqslant \nu$. Из построения в §4 и доказательства леммы 4 в работе [21] получаем следующие утверждения.

Лемма 6.2.1. *Существуют множество $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{r,\lambda,\nu} \subset B_2^\nu$ и число $c(r) > 0$ такие, что $\mathcal{E} = -\mathcal{E}$ и*

1. *для любого $y \in \mathcal{E}$ выполнено $|\operatorname{supp} y| \leqslant [\lambda^2\nu^{2/r}] + 1$;*

2. $\operatorname{card}\mathcal{E} \leqslant \frac{1}{2}\exp\left(c(r)\lambda^2\nu^{2/r}\right)$;

3. *для любого* $x \in \mathbb{R}^\nu$ *существует вектор* $y \in \mathcal{E}$ *такой, что*

$$\sup_{\mu_r(\lambda)<j\leqslant\nu} \lambda j^{1/r} x_j^* \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i.$$

Лемма 6.2.2. *Существуют множество* $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_{r,\lambda,\nu} \subset B_2^\nu$ *и число* $c(r) > 0$ *такие, что* $\mathcal{E}' = -\mathcal{E}'$ *и*

1. *для любого* $y \in \mathcal{E}'$ *выполнено* $|\operatorname{supp} y| \leqslant \mu_r(\lambda)$;

2. $\operatorname{card}\mathcal{E}' \leqslant \frac{1}{2}\exp\left(c(r)\lambda^2\nu^{2/r}\right)$;

3. *для любого* $x \in \mathbb{R}^\nu$ *существует вектор* $y \in \mathcal{E}'$ *такой, что*

$$\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant\mu_r(\lambda)} |x_j^*|^2\right)^{1/2} \leqslant 2\sum_{j=1}^{\nu} x_j y_j.$$

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{F}_0(N)$ семейство выпуклых центрально-симметричных многогранников, содержащихся в B_2^ν и имеющих не более $2N$ вершин. Скажем, что выпуклое центрально-симметричное тело принадлежит $\mathcal{F}(N)$, если существует множество $K \in \mathcal{F}_0(N)$ такое, что $V \subset K$. Пусть W — ограниченное замкнутое выпуклое центрально-симметричное тело. Обозначим через $\mathbb{R}^\nu_W$ линейное пространство $\mathbb{R}^\nu$ с нормой $\|\cdot\|_W$ такой, что $W = \{x \in \mathbb{R}^\nu : \|x\|_W \leqslant 1\}$. Через $(\mathbb{R}^\nu_W)^*$ обозначим сопряженное пространство. Следующая лемма доказана в [21].

Лемма 6.2.3. *Существует абсолютная константа* $c_0 > 0$ *такая, что для любых* $\theta > 0$, $N \in \mathbb{N}$ *таких, что* $N < \frac{1}{16}\exp\left(\frac{\theta^2\nu}{4}\right)$, *для любых множеств* V, $W \in \mathcal{F}(N)$ *и для любого* $n \in \{0, \dots, \nu\}$

$$\lambda_n(V, (\mathbb{R}^\nu_W)^*) \leqslant c_0\left(\theta\sqrt{\frac{\nu-n}{n}} + \theta^2\frac{\nu}{n}\right).$$

Следующее соотношение двойственности для линейных поперечников доказано в [26]. Пусть B, $C \subset \mathbb{R}^\nu$ — выпуклые центрально-симметричные замкнутые ограниченные тела. Обозначим через B°, C° соответственно их поляры. Тогда

$$\lambda_n(B, \mathbb{R}^\nu_C) = \lambda_n(C^\circ, \mathbb{R}^\nu_{B^\circ}). \tag{6.21}$$

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 6.2.1. *Пусть* m, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p_1 \leqslant 2 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant 2 \leqslant q_2 < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\lambda_n(B^{m,k}_{p_1,q_1}, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_1,p_2,q_1,q_2}{\lesssim} \min\left\{n^{-\frac{1}{2}} m^{\max\left\{\frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1'}\right\}} k^{\max\left\{\frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_1'}\right\}}, 1\right\}.$$

Пусть a *определено в теореме 6.1.1,* $n \leqslant amk$. *Если* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geqslant 1$ *и* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geqslant 1$, *то*

$$\lambda_n(B^{m,k}_{p_1,q_1}, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_1,p_2,q_1,q_2}{\gtrsim} n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{p_2}} k^{\frac{1}{q_2}}; \tag{6.22}$$

если $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leqslant 1$ *и* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \leqslant 1$, *то*

$$\lambda_n(B^{m,k}_{p_1,q_1}, l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_1,p_2,q_1,q_2}{\gtrsim} n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{p_1'}} k^{\frac{1}{q_1'}}. \tag{6.23}$$

Доказательство. Оценка (6.22) следует из теоремы 6.1.1 и неравенства $\lambda_n(M,\,X)\geqslant d_n(M,\,X)$. Соотношение (6.23) следует из (6.22) и (6.21).

Так как $p_1\leqslant p_2$ и $q_1\leqslant q_2$, то $\lambda_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\,l^{m,k}_{p_2,q_2})\leqslant 1$. Докажем, что

$$\lambda_n(B^{m,k}_{p_1,q_1},\,l^{m,k}_{p_2,q_2}) \underset{p_1,p_2,q_1,q_2}{\lesssim} n^{-\frac{1}{2}} m^{\max\left\{\frac{1}{p_2},\,\frac{1}{p_1'}\right\}} k^{\max\left\{\frac{1}{q_2},\,\frac{1}{q_1'}\right\}}. \tag{6.24}$$

Пусть $2\leqslant p<\infty$, $2\leqslant q<\infty$ и $n^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{p}}k^{\frac{1}{q}}<1$. Докажем, следующую оценку:

$$\lambda_n(B^{m,k}_{p',q'},\,l^{m,k}_{p,q}) \underset{p,q}{\lesssim} n^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{p}}k^{\frac{1}{q}} \tag{6.25}$$

(тогда (6.24) легко следует из (6.25)). Для этого мы найдем константы $c_1(p,\,q)>0$ и $c_2(p,\,q)>0$ такие, что

$$c_1(p,\,q)B^{m,k}_{p',q'}\in\mathcal{F}(N), \tag{6.26}$$

где $N<\frac{1}{16}\exp\left(c_2(p,\,q)m^{\frac{2}{p}}k^{\frac{2}{q}}\right)$, и применим лемму 6.2.3 с

$$\theta = 2\sqrt{c_2(p,\,q)}m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$$

и $V=W=c_1(p,\,q)B^{m,k}_{p',q'}$. Тогда $\theta^2\frac{mk}{n}=4c_2(p,\,q)m^{\frac{2}{p}}k^{\frac{2}{q}}n^{-1}\underset{p,q}{\lesssim}1$ и

$$\lambda_n(B^{m,k}_{p',q'},\,l^{m,k}_{p,q}) \underset{p,q}{\lesssim} \theta\sqrt{\frac{mk}{n}}+\theta^2\frac{mk}{n} \underset{p,q}{\lesssim} n^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{p}}k^{\frac{1}{q}}.$$

Докажем (6.26). Для каждого $x=(x_1,\,\ldots,\,x_m)\in\mathbb{R}^m$ и $1\leqslant l\leqslant k$ обозначим $I_l(x)=(x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\,1\leqslant j\leqslant k}$, где $x_{i,j}=0$, если $j\neq l$, $x_{i,l}=x_i$, $1\leqslant i\leqslant m$. Пусть $\mathcal{E}''=\mathcal{E}\cup\mathcal{E}'$,

$$\mathcal{E}_1=\left\{\sum_{j\in\operatorname{supp}y}y_jI_j(x_j),\ y=(y_1,\,\ldots,\,y_k)\in\mathcal{E}'_{2q,k^{\frac{1}{2q}},k},\ \ x_j\in\mathcal{E}''_{2p,m^{\frac{1}{2p}},m},\ j\in\operatorname{supp}y\right\},$$

$$\mathcal{E}_2=\left\{\sum_{j\in\operatorname{supp}y}y_jI_j(x_j),\ y=(y_1,\,\ldots,\,y_k)\in\mathcal{E}_{2q,k^{\frac{1}{2q}},k},\ \ x_j\in\mathcal{E}''_{2p,m^{\frac{1}{2p}},m},\ j\in\operatorname{supp}y\right\},$$

$K = \operatorname{conv}(\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2)$. Тогда K является выпуклым центрально-симметричным многогранником. Из лемм 6.2.1 и 6.2.2 следует, что

$$\begin{gathered}\operatorname{card}\mathcal{E}_1\leqslant\exp\left(c(2q)k^{2/q}\right)\left(\exp\left(c(2p)m^{2/p}\right)\right)^{\mu_{2q}\left(k^{1/2q}\right)}=\\ =\exp\left(c(2q)k^{2/q}+c(2p)m^{2/p}\mu_{2q}(k^{1/2q})\right),\\ \operatorname{card}\mathcal{E}_2\leqslant\exp\left(c(2q)k^{2/q}\right)\left(\exp\left(c(2p)m^{2/p}\right)\right)^{[k^{2/q}]+1}=\\ =\exp\left(c(2q)k^{2/q}+c(2p)m^{2/p}(1+[k^{2/q}])\right);\end{gathered}$$

так как $\mu_{2q}(k^{1/2q})\leqslant k^{\frac{1}{q-1}}\leqslant k^{2/q}$ (последнее неравенство следует из соотношения $q\geqslant 2$), то существует константа $c_3(p,\,q)$ такая, что

$$\max\left\{\operatorname{card}\mathcal{E}_1,\,\operatorname{card}\mathcal{E}_2\right\}\leqslant\exp\left(c_3(p,\,q)m^{2/p}k^{2/q}\right).$$

Поэтому существует $c_2(p,\,q)>0$ такое, что $K\in\mathcal{F}_0(N)$, где

$$N<\frac{1}{16}\exp\left(c_2(p,\,q)m^{\frac{2}{p}}k^{\frac{2}{q}}\right).$$

Покажем, что существует $c_1(p,\,q)>0$ такое, что $c_1(p,\,q)B^{m,k}_{p',q'}\subset K$. Достаточно проверить неравенство

$$\max\{\langle x,\,y\rangle:\;y\in B^{m,k}_{p',q'}\}\underset{p,q}{\lesssim}\max\{\langle x,\,y\rangle:\;y\in K\},\quad x\in\mathbb{R}^{mk},$$

то есть

$$\|x\|_{l^{m,k}_{p,q}}\underset{p,q}{\lesssim}\max\{\langle x,\,y\rangle:\;y\in K\}. \tag{6.27}$$

Пусть $x=(x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\,1\leqslant j\leqslant k}\in\mathbb{R}^{mk}$. Положим $a_j=\left(\sum\limits_{i=1}^m|x_{i,j}|^p\right)^{1/p}$; через $(x^*_{1,j},\,\ldots,\,x^*_{m,j})$ обозначим невозрастающую перестановку $|x_{i,j}|$, $1\leqslant i\leqslant m$, а через $(a^*_1,\,\ldots,\,a^*_k)$ — невозрастающую перестановку $|a_j|$, $1\leqslant j\leqslant k$.

Докажем, что

$$\|x\|_{l^{m,k}_{p,q}}\underset{q}{\lesssim}\left(\sum_{j\leqslant\mu_{2q}(k^{1/2q})}|a^*_j|^2\right)^{1/2}+\max_{j>\mu_{2q}(k^{1/2q})}k^{1/2q}j^{1/2q}a^*_j. \tag{6.28}$$

В самом деле, существует абсолютная константа $c_4>0$ такая, что

$$\sum_{\mu_{2q}(k^{1/2q})<j\leqslant k}k^{-\frac12}j^{-\frac12}\leqslant c_4.$$

Значит,

$$\begin{gathered}\|x\|_{l^{m,k}_{p,q}}=\left(\sum_{j=1}^k|a^*_j|^q\right)^{1/q}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\mu_{2q}(k^{1/2q})}|a^*_j|^2\right)^{1/2}+\\+\left(\sum_{j=\mu_{2q}(k^{1/2q})+1}^k\left(k^{1/2q}j^{1/2q}a^*_j\right)^q k^{-\frac12}j^{-\frac12}\right)^{1/q}\underset{q}{\lesssim}\\\lesssim\left(\sum_{j=1}^{\mu_{2q}(k^{1/2q})}|a^*_j|^2\right)^{1/2}+\max_{j>\mu_{2q}(k^{1/2q})}k^{1/2q}j^{1/2q}a^*_j.\end{gathered}$$

В силу лемм 6.2.1 и 6.2.2, существуют $y^{(1)}=(y^{(1)}_j)_{1\leqslant j\leqslant k}\in\mathcal{E}'_{2q,k^{1/2q},k}$ и $y^{(2)}=(y^{(2)}_j)_{1\leqslant j\leqslant k}\in\mathcal{E}_{2q,k^{1/2q},k}$ такие, что

$$\left(\sum_{j=1}^{\mu_{2q}(k^{1/2q})}|a^*_j|^2\right)^{1/2}\leqslant 2\sum_{j=1}^k y^{(1)}_j a_j=2\sum_{j=1}^k y^{(1)}_j\left(\sum_{i=1}^m|x^*_{i,j}|^p\right)^{1/p}, \tag{6.29}$$

$$\max_{j>\mu_{2q}(k^{1/2q})}k^{1/2q}j^{1/2q}a^*_j\leqslant\sum_{j=1}^k y^{(2)}_j a_j=\sum_{j=1}^k y^{(2)}_j\left(\sum_{i=1}^m|x^*_{i,j}|^p\right)^{1/p}. \tag{6.30}$$

Так же, как (6.28), доказывается, что для любого $j=1,\,\ldots,\,k$

$$\left(\sum_{i=1}^m|x^*_{i,j}|^p\right)^{1/p}\underset{p}{\lesssim}\left(\sum_{i=1}^{\mu_{2p}(m^{1/2p})}|x^*_{i,j}|^2\right)^{1/2}+\max_{i>\mu_{2p}(m^{1/2p})}m^{1/2p}i^{1/2p}|x^*_{i,j}|.$$

Поэтому существуют $z_j^{(1)} = (z_{i,j}^{(1)})_{1\leqslant i\leqslant m} \in \mathcal{E}'_{2p,m^{1/2p},m}$ и $z_j^{(2)} = (z_{i,j}^{(2)})_{1\leqslant i\leqslant m} \in \mathcal{E}_{2p,m^{1/2p},m}$ такие, что

$$\left(\sum_{i=1}^{\mu_{2p}(m^{1/2p})} |x^*_{i,j}|^2\right)^{1/2} \leqslant 2\sum_{i=1}^m z_{i,j}^{(1)} x_{i,j}, \tag{6.31}$$

$$\max_{i>\mu_{2p}(m^{1/2p})} m^{1/2p} i^{1/2p} |x^*_{i,j}| \leqslant \sum_{i=1}^m z_{i,j}^{(2)} x_{i,j}. \tag{6.32}$$

Применяя (6.28), (6.29), (6.30), (6.31), (6.32) и неравенство $|\xi_1| + |\xi_2| \leqslant 2\max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$, получаем, что для любого x существуют $s \in \{1, 2\}$ и $t_j \in \{1, 2\}$ такие, что

$$\|x\|_{l^{m,k}_{p,q}} \underset{p,q}{\lesssim} \sum_{j=1}^k y_j^{(s)} \sum_{i=1}^m (I_j(z_j^{(t_j)}))_{i,j} x_{i,j} = \langle b, x\rangle,$$

где $b \in \mathcal{E}_s$. Это завершает доказательство (6.27). $\square$

6.3 Оценки поперечников весовых классов Бесова

Сначала отметим, что $w_1, w_2 \in \mathcal{A}_\infty$. В самом деле, существуют $\underline{c} > 0$, $\overline{c} > 0$ такие, что для любого $0 < r \leqslant t \leqslant 2r$ выполнено $\underline{c} \leqslant \frac{w_i(r)}{w_i(t)} \leqslant \overline{c}$, $i = 1, 2$. Поэтому достаточно рассмотреть шары B с центром в нуле. Если $0 < r < \frac12$ — радиус шара B, то

$$\begin{gathered}\int\limits_B w_1(x)\,dx = \int\limits_B |x|^{p_1\beta_g} |\log_2|x||^{p_1\alpha_g} \rho_g^{-p_1}(|\log_2|x||)\,dx \overset{r}{\asymp} \\ \asymp r^{\beta_g p_1+d} |\log_2 r|^{\alpha_g p_1} \rho_g(|\log_2 r|)^{-p_1}\end{gathered} \tag{6.33}$$

(в последнем неравенстве использовалась лемма 3.2.4),

$$\begin{gathered}\int\limits_B w_2(x)\,dx = \int\limits_B |x|^{-p_2\beta_v} |\log_2|x||^{-p_2\alpha_v} \rho_v^{p_2}(|\log_2|x||)\,dx \overset{r}{\asymp} \\ \asymp r^{-\beta_v p_2+d} |\log_2 r|^{-\alpha_v p_2} \rho_v(|\log_2 r|)^{p_2},\end{gathered} \tag{6.34}$$

и для достаточно больших $\theta > 1$ мы получаем

$$\int\limits_B w_1^{-\theta'/\theta}(x)\,dx \overset{r}{\lesssim} r^{-\frac{\beta_g p_1\theta'}{\theta}+d} |\log_2 r|^{-\frac{\alpha_g p_1\theta'}{\theta}} \rho_g(|\log_2 r|)^{\frac{p_1\theta'}{\theta}},$$

$$\int\limits_B w_2^{-\theta'/\theta}(x)\,dx \overset{r}{\lesssim} r^{\frac{\beta_v p_2\theta'}{\theta}+d} |\log_2 r|^{\frac{\alpha_v p_2\theta'}{\theta}} \rho_v(|\log_2 r|)^{-\frac{p_2\theta'}{\theta}}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w_i(x)\,dx\right)^{1/\theta} \left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w_i^{-\theta'/\theta}(x)\,dx\right)^{1/\theta'} \overset{r}{\lesssim} 1.$$

Аналогичные оценки получаются при $r \geqslant \frac12$. Значит, $w_i \in \mathcal{A}_\theta$, $i = 1, 2$.

В работе Хароске и Скрыпчака [111] доказано, что пространство $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d, w)$ изоморфно некоторому пространству последовательностей. Дадим точную формулировку их результата.

Пусть $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$. Обозначим через $Q_{\nu,\mathbf{m}}$ куб в $\mathbb{R}^d$ со сторонами, параллельными осям координат, с центром в $2^{-\nu}\mathbf{m}$ и со стороной длины $2^{-\nu}$,

$$\chi^{(p)}_{\nu,\mathbf{m}}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{\nu d}{p}}, & x \in Q_{\nu,\mathbf{m}}, \\ 0, & x \notin Q_{\nu,\mathbf{m}}. \end{cases}$$

Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$, $w \in \mathcal{A}_\infty$, $\lambda_{\nu,\mathbf{m}} \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$. Обозначим

$$w(Q_{\nu,\,\mathbf{m}}) = \int\limits_{Q_{\nu,\mathbf{m}}} w(x)\,dx,$$

$$\|(\lambda_{\nu,\mathbf{m}})_{\nu\in\mathbb{Z}_+,\,\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}\|_{b^\sigma_{p,q}(w)} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu\sigma q}\left\|\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}\lambda_{\nu,\mathbf{m}}\chi^{(p)}_{\nu,\mathbf{m}}\right\|^q_{L_p(w)}\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu q\left(\sigma+\frac{d}{p}\right)}\left(\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}|\lambda_{\nu,\,\mathbf{m}}|^p w(Q_{\nu,\,\mathbf{m}})\right)^{q/p}\right)^{1/q},$$

$$b^\sigma_{p,q}(w) = \left\{(\lambda_{\nu,\mathbf{m}})_{\nu\in\mathbb{Z}_+,\,\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d} : \lambda_{\nu,\mathbf{m}} \in \mathbb{C},\ \|(\lambda_{\nu,\mathbf{m}})_{\nu\in\mathbb{Z}_+,\,\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}\|_{b^\sigma_{p,q}(w)} < \infty\right\}.$$

Пространство $b^\sigma_{p,q}(w)$ является квазибанаховым (и банаховым, если $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$).

Пусть p_i, $q_i > 0$, s_i, $\sigma_i \in \mathbb{R}$, $w_i \in \mathcal{A}_\infty$, $i = 1, 2$, $B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \subset B^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)$, $b^{\sigma_1}_{p_1,q_1}(w_1) \subset b^{\sigma_2}_{p_2,\,q_2}(w_2)$. Обозначим через $\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,\,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)$ и $\mathrm{id} : b^{\sigma_1}_{p_1,q_1}(w_1) \to b^{\sigma_2}_{p_2,\,q_2}(w_2)$ операторы естественного вложения.

Положим $\sigma(s, p) = s + \frac{d}{2} - \frac{d}{p}$.

Теорема N. [111]. *Для любой весовой функции $w \in \mathcal{A}_\infty$ и любых $s \in \mathbb{R}$, p, $q \in (0, +\infty)$ существует изоморфизм $T_{s,p,q,w} : B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d, w) \to b^{\sigma(s,p)}_{p,q}(w)$. Кроме того, для любых w_1, $w_2 \in \mathcal{A}_\infty$, $s_i \in \mathbb{R}$, p_i, $q_i \in (0, +\infty)$, $i = 1, 2$, таких что оператор $\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)$ или $\mathrm{id} : b^{\sigma(s_1,p_1)}_{p_1,q_1}(w_1) \to b^{\sigma(s_2,p_2)}_{p_2,q_2}(w_2)$ непрерывен, диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) & \xrightarrow{T_{s_1,p_1,q_1,w_1}} & b^{\sigma(s_1,p_1)}_{p_1,q_1}(w_1) \\
{\scriptstyle \mathrm{Id}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow \\
B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2) & \xrightarrow{T_{s_2,p_2,q_2,w_2}} & b^{\sigma(s_2,p_2)}_{p_2,q_2}(w_2)
\end{array}$$

является коммутативной.

Также в работе [111] получен критерий непрерывного и компактного вложения весовых пространств Бесова. Мы будем использовать этот результат в следующей форме. Для $\lambda = (\lambda_{\nu,\mathbf{m}})_{\nu\in\mathbb{Z}_+,\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}$ обозначим

$$(S\lambda)_{\nu,\mathbf{m}} = \tilde\lambda_{\nu,\mathbf{m}} = (w_2(Q_{\nu,\mathbf{m}}))^{1/p_2} 2^{\nu\left(\sigma(s_2,p_2)+\frac{d}{p_2}\right)}\lambda_{\nu,\,\mathbf{m}}.$$

Пусть X_1, $\tilde X_1$ и X_2 — пространства последовательностей $\tilde\lambda = (\tilde\lambda_{\nu,\mathbf{m}})_{\nu\in\mathbb{Z}_+,\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}$ с

$$\|\tilde\lambda\|_{X_1} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu q_1(s_1-s_2)}\left(\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d} w_1(Q_{\nu,\mathbf{m}})w_2(Q_{\nu,\mathbf{m}})^{-p_1/p_2}|\tilde\lambda_{\nu,\mathbf{m}}|^{p_1}\right)^{q_1/p_1}\right)^{1/q_1}, \tag{6.35}$$

$$\|\tilde\lambda\|_{\tilde X_1} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}|\tilde\lambda_{\nu,\mathbf{m}}|^{p_1}\right)^{q_1/p_1}\right)^{1/q_1}, \tag{6.36}$$

$$\|\tilde\lambda\|_{X_2} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}|\tilde\lambda_{\nu,\mathbf{m}}|^{p_2}\right)^{q_2/p_2}\right)^{1/q_2}, \tag{6.37}$$

соответственно. Определим операторы $\tilde{T}_i : B^{s_i}_{p_i,q_i}(\mathbb{R}^d, w_i) \to X_i$ по формуле $\tilde{T}_i = S \cdot T_{s_i,p_i,q_i,w_i}$, $i = 1, 2$. Тогда $\tilde{T}_i$ являются изоморфизмами и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) & \xrightarrow{\tilde{T}_1} & X_1 \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\Big\downarrow \\ B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2) & \xrightarrow{\tilde{T}_2} & X_2 \end{array} \tag{6.38}$$

коммутативна.

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$. Для $\lambda = (\lambda_{\nu,\mathbf{m}})_{\nu\in\mathbb{Z}_+,\,\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}$ обозначим

$$(P_{\mathcal{N}}\lambda)_{\nu,\mathbf{m}} = \begin{cases} \lambda_{\nu,\mathbf{m}}, & \text{если } (\nu, \mathbf{m}) \in \mathcal{N}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{6.39}$$

Положим

$$\mathcal{M}_\nu = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d : (\nu, \mathbf{m}) \in \mathcal{N}\}.$$

Если $\mathcal{N} \ne \varnothing$, $p_1 \leqslant p_2$ и $q_1 \leqslant q_2$, то $\|P_{\mathcal{N}}\|_{\tilde{X}_1\to X_2} = 1$. Кроме того,

$$\|P_{\mathcal{N}}\|_{X_1\to\tilde{X}_1} = \sup_{\nu\in\mathbb{Z}_+,\,\mathbf{m}\in\mathcal{M}_\nu} 2^{-\nu(s_1-s_2)}(w_1(Q_{\nu,\mathbf{m}}))^{-1/p_1}(w_2(Q_{\nu,\mathbf{m}}))^{1/p_2}, \tag{6.40}$$

$$\|P_{\mathcal{N}}\|_{\tilde{X}_1\to X_1} = \sup_{\nu\in\mathbb{Z}_+,\,\mathbf{m}\in\mathcal{M}_\nu} 2^{\nu(s_1-s_2)}(w_1(Q_{\nu,\mathbf{m}}))^{1/p_1}(w_2(Q_{\nu,\mathbf{m}}))^{-1/p_2} \tag{6.41}$$

(это следует из результатов работы [138] или может быть доказано непосредственно).

Замечание. Если $p_1 > p_2$ или $q_1 > q_2$, то значение $\|P_{\mathcal{N}}\|_{X_1\to X_2}$ вычислено в [138].

Из (1.144) и (1.145) следует, что если $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N} \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$, то

$$d_n(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2) \geqslant d_n(P_{\mathcal{N}'} : X_1 \to P_{\mathcal{N}'}X_2), \tag{6.42}$$

$$a_n(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2) \geqslant a_n(P_{\mathcal{N}'} : X_1 \to P_{\mathcal{N}'}X_2). \tag{6.43}$$

Определим пространства X_1, $\tilde{X}_1$, X_2 проекторы $P_{\mathcal{N}}$ формулами (6.35), (6.36), (6.37) и (6.39) соответственно. Всюду далее для $j \in \mathbb{Z}_+$ обозначаем $\vartheta_{j,0} = d_j$ (колмогоровский поперечник), $\vartheta_{j,1} = a_j$ (аппроксимативные числа).

Предложение 6.3.1. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $n_k \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{N}_k \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $n = \sum\limits_{k=1}^m n_k$, $\mathcal{N} \subset \cup_{k=1}^m \mathcal{N}_k$. *Тогда для* $s \in \{0, 1\}$ *выполнено*

$$\vartheta_{n,s}(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2) \leqslant \sum_{k=1}^m \vartheta_{n_k,s}(P_{\mathcal{N}_k} : X_1 \to X_2).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}_1' = \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}$, $\mathcal{N}_k' = \left(\mathcal{N}_k \setminus \cup_{i=1}^{k-1} \mathcal{N}_i\right) \cap \mathcal{N}$. Тогда для любого $k = 1, \dots, m$

$$\vartheta_{n_k,s}(P_{\mathcal{N}_k'} : X_1 \to X_2) \overset{(6.42),(6.43)}{\leqslant} \vartheta_{n_k,s}(P_{\mathcal{N}_k} : X_1 \to X_2).$$

Значит, утверждение следует из неравенств $d_{n'+n''}(M' + M'', X_2) \leqslant d_{n'}(M', X_2) + d_{n''}(M'', X_2)$, $a_{n'+n''}(T' + T'' : X_1 \to X_2) \leqslant a_{n'}(T' : X_1 \to X_2) + a_{n''}(T'' : X_1 \to X_2)$, включения $P_{\mathcal{N}}(B_{X_1}) \subset \sum_{k=1}^m P_{\mathcal{N}_k'}(B_{X_1})$ и равенства $P_{\mathcal{N}} = \sum\limits_{k=1}^m P_{\mathcal{N}_k'}$. $\square$

Пусть E — конечное множество, $F : E \to \mathbb{R}$. Обозначим

$$\mathrm{Argmax}\,\{F(x) : x \in E\} = \left\{ y \in E : F(y) = \max_{x \in E} F(x) \right\}. \qquad (6.44)$$

Доказательство теоремы 14. Без ограничения общности можно считать, что $|(x_1, \ldots, x_d)| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|$.

В силу (6.38),

$$d_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)) \overset{n}{\asymp} d_n(\mathrm{id} : X_1 \to X_2),$$

$$a_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)) \overset{n}{\asymp} a_n(\mathrm{id} : X_1 \to X_2).$$

Если $d_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то оператор Id компактен и поэтому в силу (3) получаем

$$a_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)) = \lambda_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)).$$

Положим

$$\mathcal{N} = \left\{ (\nu, \mathbf{m}) : 2^{-\nu}\mathbf{m} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d \right\}, \;\; \mathcal{N}^* = \left\{ (\nu, \mathbf{m}) : 2^{-\nu}\mathbf{m} \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d \right\}.$$

Следующая оценка доказана в [111] (см. лемму 4.2):

$$a_n(P_{\mathcal{N}^*} : X_1 \to X_2) \overset{n}{\lesssim}$$

$$\lesssim \begin{cases} n^{-\frac{\delta}{d}}, & \text{если} \quad \min\{p_2, p_1'\} \leqslant 2, \min\{q_2, q_1'\} \leqslant 2, \\ n^{-\min\{\tilde\theta_1, \tilde\theta_2\}}, & \text{если} \quad \min\{p_2, p_1'\} > 2, \min\{q_2, q_1'\} > 2, \; \tilde\theta_1 \ne \tilde\theta_2, \\ n^{-\min\{\tilde\theta_3, \tilde\theta_4\}}, & \text{если} \quad \min\{p_2, p_1'\} > 2, \min\{q_2, q_1'\} > 2, \; \tilde\theta_1 = \tilde\theta_2 \end{cases}$$

(в последнем случае была доказана оценка $a_n \overset{n}{\lesssim} n^{-\tilde\theta_1}(\log n)^\sigma$ для некоторого $\sigma > 0$, и по условию теоремы $n^{-\tilde\theta_1}(\log n)^\sigma \overset{n}{\lesssim} n^{-\min\{\tilde\theta_3, \tilde\theta_4\}}$). Аналогично доказывается, что

$$d_n(P_{\mathcal{N}^*} : X_1 \to X_2) \overset{n}{\lesssim}$$

$$\lesssim \begin{cases} n^{-\frac{\delta}{d}}, & \text{если} \quad p_2 \leqslant 2, \, q_2 \leqslant 2, \\ n^{-\min\{\theta_1, \theta_2\}}, & \text{если} \quad p_2 > 2, \; q_2 > 2, \; \theta_1 \ne \theta_2, \\ n^{-\min\{\theta_3, \theta_4\}}, & \text{если} \quad p_2 > 2, \; q_2 > 2, \; \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

(все рассуждения такие же, а вместо аппроксимативных чисел берутся колмогоровские поперечники; см. также [163]). Поэтому достаточно получить оценку $d_n(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2)$ и $a_n(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2)$.

Оценим по порядку величины $2^{-\nu(s_1-s_2)} w_1(Q_{\nu,\mathbf{m}})^{-1/p_1} w_2(Q_{\nu,\mathbf{m}})^{1/p_2}$ для $(\nu, \mathbf{m}) \in \mathcal{N}$. Если $\mathbf{m} \ne 0$ и $x \in Q_{\nu,\mathbf{m}}$, то

$$w_1(x) \overset{x,\nu,\mathbf{m}}{\asymp} 2^{-\nu\beta_g p_1} |\mathbf{m}|^{\beta_g p_1} \left(\log_2 \frac{2^\nu}{|\mathbf{m}|} \right)^{p_1\alpha_g} \rho_g^{-p_1} \left(\log_2 \frac{2^\nu}{|\mathbf{m}|} \right),$$

$$w_2(x) \overset{x,\nu,\mathbf{m}}{\asymp} 2^{\nu\beta_v p_2} |\mathbf{m}|^{-\beta_v p_2} \left(\log_2 \frac{2^\nu}{|\mathbf{m}|} \right)^{-p_2\alpha_v} \rho_v^{p_2} \left(\log_2 \frac{2^\nu}{|\mathbf{m}|} \right).$$

Значит,

$$2^{-\nu(s_1-s_2)} w_1(Q_{\nu,\mathbf{m}})^{-1/p_1} w_2(Q_{\nu,\mathbf{m}})^{1/p_2} \overset{\nu,\mathbf{m}}{\asymp} \asymp |\mathbf{m}|^{-\delta} \left(\log_2 \tfrac{2^\nu}{|\mathbf{m}|} \right)^{-\alpha} \rho \left(\log_2 \tfrac{2^\nu}{|\mathbf{m}|} \right). \qquad (6.45)$$

Если $\mathbf{m} = 0$, то в силу (6.33) и (6.34) выполнены следующие равенства:

$$w_1(Q_{\nu,0}) = \int\limits_{Q_{\nu,0}} x^{\beta_g p_1} |\log_2 |x||^{p_1\alpha_g} \rho_g^{-p_1}(|\log_2 |x||)\, dx \overset{\nu}{\asymp}$$
$$\asymp r^{\beta_g p_1 + d} |\log_2 r|^{p_1\alpha_g} \rho_g^{-p_1}(|\log_2 r|)\big|_{r=2^{-\nu}},$$
$$w_2(Q_{\nu,0}) = \int\limits_{Q_{\nu,0}} x^{-\beta_v p_2} |\log_2 |x||^{-p_2\alpha_v} \rho_v^{p_2}(|\log_2 |x||)\, dx \overset{\nu}{\asymp}$$
$$\asymp r^{-\beta_v p_2 + d} |\log_2 r|^{-p_2\alpha_v} \rho_v^{p_2}(|\log_2 r|)\big|_{r=2^{-\nu}}.$$

Поэтому

$$2^{-\nu(s_1-s_2)} w_1(Q_{\nu,\mathbf{m}})^{-1/p_1} w_2(Q_{\nu,\mathbf{m}})^{1/p_2} \overset{\nu}{\lesssim} \nu^{-\alpha}\rho(\nu). \tag{6.46}$$

Доказательство оценки сверху. Пусть $\varepsilon > 0$ (оно будет выбрано позже).

Отметим, что достаточно рассмотреть $n = 2^{Nd}$, где $N \in \mathbb{Z}_+$. Построим покрытие множества $\mathcal{N}$ для каждого n.

Шаг 1. Определим покрытие множества $\{(\nu, \mathbf{m}) \in \mathcal{N} : \mathbf{m} \neq 0\}$.

Пусть $0 \leqslant j \leqslant Nd$,

$$c_N(j) = \varepsilon j \text{ или } c_N(j) = \varepsilon(Nd - j) \tag{6.47}$$

(выбор будет сделан позже). Для $2^j \leqslant t < 2^{j+1}$, $l \in \mathbb{Z}$ мы полагаем

$$\nu_t(l) = N + t + l - \left[\frac{j}{d}\right] - [c_N(j)],$$
$$\mathcal{M}^1_{\nu_t(l)} = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d : 2^{-\nu_t(l)}\mathbf{m} \in [-2^{-t}, 2^{-t}]^d \backslash [-2^{-t-1}, 2^{-t-1}]^d\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{N}^1_{j,l} = \{(\nu_t(l), \mathbf{m}) : 2^j \leqslant t < 2^{j+1},\ \mathbf{m} \in \mathcal{M}^1_{\nu_t(l)},\ \nu_t(l) \geqslant 0\}.$$

Заметим, что если $\mathbf{m} \in \mathcal{M}^1_{\nu_t(l)}$, то

$$|\mathbf{m}| \underset{d}{\asymp} 2^{-t} \cdot 2^{\nu_t(l)} = 2^{N+l-\left[\frac{j}{d}\right]-[c_N(j)]}, \tag{6.48}$$

а если $N + l - \left[\frac{j}{d}\right] - [c_N(j)] \geqslant 0$ (т.е. $\mathcal{M}^1_{\nu_t(l)} \neq \varnothing$), то

$$\begin{aligned} \operatorname{card} \mathcal{M}^1_{\nu_t(l)} = \left(2^{N+l-\left[\frac{j}{d}\right]-[c_N(j)]+1} + 1\right)^d - \left(2 \cdot \left[2^{N+l-\left[\frac{j}{d}\right]-[c_N(j)]-1}\right] + 1\right)^d \underset{d}{\asymp} \\ \asymp 2^{Nd+ld-j-[c_N(j)]d}. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{Nd} \sum_{l<0} \operatorname{rk} P_{\mathcal{N}^1_{j,l}} = \sum_{j=0}^{Nd} \sum_{l<0} \sum_{2^j \leqslant t < 2^{j+1}, \nu_t(l) \geqslant 0} \operatorname{card} \mathcal{M}^1_{\nu_t(l)} \overset{(6.49)}{\underset{d}{\lesssim}} \\ \lesssim \sum_{j=0}^{Nd} \sum_{l<0} 2^j \cdot 2^{Nd+ld-j-[c_N(j)]d} \underset{d}{\asymp} n \sum_{j=0}^{Nd} 2^{-[c_N(j)]d} \overset{(6.47)}{\underset{\varepsilon,\, d}{\asymp}} n. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Пусть $j, l \in \mathbb{Z}_+$. Для $2^{j+Nd} \leqslant t < 2^{j+1+Nd}$ положим $\tilde{\nu}_t(l) = t + l$,

$$\mathcal{M}^2_{\tilde{\nu}_t(l)} = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d : 2^{-\tilde{\nu}_t(l)}\mathbf{m} \in [-2^{-t}, 2^{-t}]^d \backslash [-2^{-t-1}, 2^{-t-1}]^d\},$$
$$\mathcal{N}^2_{j,l} = \{(\tilde{\nu}_t(l), \mathbf{m}) : 2^{j+Nd} \leqslant t < 2^{j+1+Nd},\ \mathbf{m} \in \mathcal{M}^2_{\tilde{\nu}_t(l)}\}.$$

Если $\mathbf{m} \in \mathcal{M}^2_{\tilde{\nu}_t(l)}$, то

$$|\mathbf{m}| \underset{d}{\asymp} 2^{-t} \cdot 2^{\tilde{\nu}_t(l)} = 2^l, \tag{6.51}$$

$$\operatorname{card} \mathcal{M}_{\tilde{\nu}_t(l)} = \left(2 \cdot 2^l + 1\right)^d - \left(2 \cdot [2^{l-1}] + 1\right)^d \underset{d}{\asymp} 2^{ld}. \tag{6.52}$$

Обозначим

$$j_0(N) = Nd \cdot \max\left\{\frac{q_2}{2} - 1,\, 0\right\}, \quad j_1(N) = Nd \cdot \max\left\{\frac{\min\{q_2,\, q_1'\}}{2} - 1,\, 0\right\}.$$

Для $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \{0,\, 1\}$ положим

$$\mathcal{M}^{3,s}_\nu = \left\{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\} : 2^{-\nu}\mathbf{m} \in \left[-2^{-2^{[j_s(N)]+Nd}},\, 2^{-2^{[j_s(N)]+Nd}}\right]^d\right\},$$

$$\mathcal{N}^{3,s} = \{(\nu,\, \mathbf{m}) :\; \mathbf{m} \in \mathcal{M}^{3,s}_\nu\}.$$

Покажем, что для $s \in \{0,\, 1\}$

$$\left(\cup_{0 \leqslant j \leqslant Nd,\, l \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}^1_{j,l}\right) \cup \left(\cup_{0 \leqslant j \leqslant j_s(N),\, l \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{N}^2_{j,l}\right) \cup \mathcal{N}^{3,s} \supset \{(\nu,\, \mathbf{m}) \in \mathcal{N} : \mathbf{m} \neq 0\}.$$

В самом деле, если $2^{-\nu}\mathbf{m} \in \left[-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right]^d \backslash \left[-2^{-2^{Nd}-1},\, 2^{-2^{Nd}-1}\right]^d$, то существуют $0 \leqslant j \leqslant Nd$, $2^j \leqslant t \leqslant 2^{j+1} - 1$ и $l \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$2^{-\nu}\mathbf{m} \in [-2^{-t},\, 2^{-t}]^d \backslash [-2^{-t-1},\, 2^{-t-1}]^d$$

и $\nu = N + t + l - \left[\frac{j}{d}\right] - [c_N(j)]$. Значит, $(\nu,\, \mathbf{m}) \in \mathcal{N}^1_{j,l}$.

Если $2^{-\nu}\mathbf{m} \in \left[-2^{-2^{Nd}-1},\, 2^{-2^{Nd}-1}\right]^d \backslash \left[-2^{-2^{Nd+[j_s(N)]}},\, 2^{-2^{Nd+[j_s(N)]}}\right]^d$, то существуют $0 \leqslant j \leqslant j_s(N)$, $2^{Nd+j} \leqslant t \leqslant 2^{Nd+j+1} - 1$ такие, что $2^{-\nu}\mathbf{m} \in [-2^{-t},\, 2^{-t}]^d \backslash [-2^{-t-1},\, 2^{-t-1}]^d$. Здесь $\nu \geqslant t$, т.е. $\nu = t + l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}_+$. Значит, $(\nu,\, \mathbf{m}) \in \mathcal{N}^2_{j,l}$.

Наконец, если $2^{-\nu}\mathbf{m} \in \left[-2^{-2^{[j_s(N)]+Nd}},\, 2^{-2^{[j_s(N)]+Nd}}\right]^d$, то $(\nu,\, \mathbf{m}) \in \mathcal{N}^{3,s}$.

Шаг 2. Построим покрытие $\{(\nu,\, 0) : \nu \in \mathbb{Z}_+\}$. Пусть

$$\mathcal{N}^4 = \{(0,\, 0),\, \ldots,\, (2^{Nd} - 1,\, 0)\},$$

$$\mathcal{N}^5_j = \{(2^{j+Nd},\, 0),\, (2^{j+Nd} + 1,\, 0),\, \ldots, (2^{j+1+Nd} - 1,\, 0)\},\; j \in \mathbb{Z}_+,$$

$\mathcal{N}^{6,s} = \{(2^{Nd+[j_s(N)]} + t,\, 0),\; t \in \mathbb{Z}_+\}$, $s \in \{0,\, 1\}$.

Тогда

$$\mathcal{N}^4 \cup \left(\cup_{j=0}^{[j_s(N)]-1} \mathcal{N}^5_j\right) \cup \mathcal{N}^{6,s} \supset \{(\nu,\, 0) : \nu \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Шаг 3. Пусть $\mu^1_{j,l}$, $\mu^2_{j,l}$, $\mu^5_j \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \{0,\, 1\}$,

$$L_j = \left\{l \in \mathbb{Z}_+ :\; N + l - \left[\frac{j}{d}\right] - [c_N(j)] \geqslant 0\right\},$$

$$n_s := \sum_{j=0}^{Nd} \sum_{l \in L_j} \mu^1_{j,l} + \sum_{j=0}^{Nd} \sum_{l \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}_+,\, \mathcal{N}^1_{j,l} \neq \varnothing} \dim\left(P_{\mathcal{N}^1_{j,l}} X_1\right) +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant j \leqslant j_s(N)} \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \mu^2_{j,l} + \dim(P_{\mathcal{N}^4} X_1) + \sum_{0 \leqslant j \leqslant j_s(N)} \mu^5_j < \infty,$$

$\vartheta_{\mu,0} = d_\mu$, $\vartheta_{\mu,1} = a_\mu$ (если вложение компактно, то $\vartheta_{\mu,1} = \lambda_\mu$ в силу (3)), $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда, в силу предложения 6.3.1,

$$\vartheta_{n_s,s}(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2) \leqslant \sum_{j=0}^{Nd} \sum_{l \in L_j} \vartheta_{\mu^1_{j,l},s}(P_{\mathcal{N}^1_{j,l}} : X_1 \to X_2) +$$

$$+\sum_{0\leqslant j\leqslant j_s(N)}\sum_{l\in\mathbb{Z}_+}\vartheta_{\mu^2_{j,l},s}(P_{\mathcal{N}^2_{j,l}}:X_1\to X_2)+\vartheta_{0,s}(P_{\mathcal{N}^{3,s}}:X_1\to X_2)+$$
$$+\sum_{0\leqslant j\leqslant j_s(N)}\vartheta_{\mu^5_j,s}(P_{\mathcal{N}^5_j}:X_1\to X_2)+\vartheta_{0,s}(P_{\mathcal{N}^{6,s}}:X_1\to X_2).$$

Из (6.35), (6.36), (6.37), (6.40), (6.45), (6.48), (6.49) и теорем 6.1.1 и 6.2.1 получаем

$$\vartheta_{\mu^1_{j,l},s}(P_{\mathcal{N}^1_{j,l}}:X_1\to X_2)\overset{n,j,l}{\lesssim}\left(2^{N+l-\left[\frac{j}{d}\right]-[c_N(j)]}\right)^{-\delta}2^{-\alpha j}\rho\left(2^j\right)\vartheta_{\mu^1_{j,l},s}(B^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_1,q_1},\ l^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_2,q_2}),$$

где

$$m^1_{j,l}=2^{Nd+ld-j-[c_N(j)]d},\ \ k^1_{j,l}=2^j. \tag{6.53}$$

Аналогично из (6.35), (6.36), (6.37), (6.40), (6.45), (6.51), (6.52) и теорем 6.1.1 и 6.2.1 получаем

$$\vartheta_{\mu^2_{j,l},s}(P_{\mathcal{N}^2_{j,l}}:X_1\to X_2)\overset{n,j,l}{\lesssim}2^{-\delta l}\left(2^{j+Nd}\right)^{-\alpha}\rho\left(2^{j+Nd}\right)\vartheta_{\mu^2_{j,l},s}(B^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}_{p_1,q_1},\ l^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}_{p_2,q_2}),$$

$$m^2_{j,l}=2^{ld},\ \ k^2_{j,l}=2^{j+Nd}. \tag{6.54}$$

Положим $r_0=\max\left(\frac{q_2}{2},\,1\right)$, $r_1=\max\left(\frac{\min(q_2,\,q_1')}{2},\,1\right)$. В силу (6.35), (6.36), (6.37), (6.40), (6.45), леммы 3.2.4 и неравенств $|\mathbf{m}|\geqslant 1$, $\log_2\frac{2^\nu}{|\mathbf{m}|}\geqslant 2^{[j_s(N)]+Nd}$, $(\nu,\,\mathbf{m})\in\mathcal{N}^{3,s}$ получаем

$$\vartheta_{0,s}(P_{\mathcal{N}^{3,s}}:X_1\to X_2)\overset{n}{\lesssim}(2^{j_s(N)+Nd})^{-\alpha}\rho(2^{j_s(N)+Nd})\overset{n}{\asymp}n^{-\alpha r_s}\rho\left(n^{r_s}\right).$$

Далее, из (6.35), (6.36), (6.37), (6.40), (6.46) следует

$$\vartheta_{0,s}(P_{\mathcal{N}^{6,s}}:X_1\to X_2)\overset{n}{\lesssim}\sup_{t\in\mathbb{Z}_+}(2^{j_s(N)+Nd}+t)^{-\alpha}\rho(2^{j_s(N)+Nd}+t)\overset{n}{\asymp}$$
$$\asymp(2^{j_s(N)+Nd})^{-\alpha}\rho(2^{j_s(N)+Nd})\overset{n}{\asymp}n^{-\alpha r_s}\rho\left(n^{r_s}\right),$$
$$\vartheta_{\mu^5_j,s}(P_{\mathcal{N}^5_j}:X_1\to X_2)\overset{j,n}{\lesssim}(2^{j+Nd})^{-\alpha}\rho(2^{j+Nd})\vartheta_{\mu^5_j,s}(B^{k^5_j}_{q_1},\,l^{k^5_j}_{q_2}),$$

где

$$k^5_j=2^{j+Nd}. \tag{6.55}$$

Таким образом,

$$\vartheta_{n_s,s}(P_{\mathcal{N}}:X_1\to X_2)\overset{n}{\lesssim}$$
$$\lesssim\sum_{j=0}^{Nd}\sum_{l\in L_j}n^{-\frac{\delta}{d}}2^{-l\delta}2^{j(-\alpha+\frac{\delta}{d})}\rho\left(2^j\right)2^{c_N(j)\delta}\vartheta_{\mu^1_{j,l},s}(B^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_1,q_1},\ l^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_2,q_2})+$$
$$+\sum_{0\leqslant j\leqslant j_s(N)}\sum_{l\in\mathbb{Z}_+}n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}\rho\left(2^jn\right)\vartheta_{\mu^2_{j,l},s}(B^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}_{p_1,q_1},\ l^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}_{p_2,q_2})+$$
$$+n^{-\alpha r_s}\rho\left(n^{r_s}\right)+\sum_{0\leqslant j\leqslant j_s(N)}n^{-\alpha}2^{-j\alpha}\rho(2^jn)\vartheta_{\mu^5_j,s}(B^{k^5_j}_{q_1},\,l^{k^5_j}_{q_2})=:\Sigma_s.$$

Шаг 4. Пусть $p_2\leqslant 2$ и $q_2\leqslant 2$. Возьмем $\mu^1_{j,l}=0$, $\mu^2_{j,l}=0$, $\mu^5_j=0$, $c_N(j)=\varepsilon|j-j^n_*|$, где $j^n_*=0$, если $\alpha>\frac{\delta}{d}$, и $j^n_*=Nd$, если $\alpha<\frac{\delta}{d}$. Тогда

$$\max(\Sigma_0,\,\Sigma_1)\overset{n}{\lesssim}\sum_{j=0}^{Nd}\sum_{l\geqslant 0}n^{-\frac{\delta}{d}}2^{-l\delta}2^{j\left(-\alpha+\frac{\delta}{d}\right)}\rho\left(2^j\right)2^{\varepsilon\delta|j-j^n_*|}+$$
$$+\sum_{l\in\mathbb{Z}_+}n^{-\alpha}2^{-l\delta}\rho\left(n\right)+n^{-\alpha}\rho(n).$$

Так как $\alpha \ne \frac{\delta}{d}$, то $\max(\Sigma_0,\, \Sigma_1) \overset{n}{\lesssim} \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}},\, n^{-\alpha}\rho(n)\right\}$ для достаточно малых ε.

Аналогично можно доказать, что если $p_1 \geqslant 2$ и $q_1 \geqslant 2$, ε достаточно мало, $\mu^1_{j,l}$, $\mu^2_{j,l}$, μ^5_j и $c_N(j)$ определены выше, то $\Sigma_1 \overset{n}{\lesssim} \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}},\, n^{-\alpha}\rho(n)\right\}$.

Шаг 5. Оценим Σ_0 для $p_2 \geqslant 2$, $q_2 \geqslant 2$ и при условиях части 1 теоремы. Для $i = 1,\, 2$ положим

$$\mu^i_{j,l} = \begin{cases} n \cdot 2^{-[\sigma^i_n(j)]-[\tau^i_n(l,\,j)]}, \text{ если } l \leqslant \bar{l}_i(j), \\ 0, \text{ если } l > \bar{l}_i(j), \end{cases}$$

где

$$\bar{l}_1(j) = N\left(\frac{p_2}{2} - 1\right) + \frac{j}{d}\left(1 - \frac{p_2}{q_2}\right), \quad \bar{l}_2(j) = Np_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2}\right) - \frac{p_2 j}{q_2 d},$$
$$\sigma^i_n(j) = \varepsilon|j - j^{n,i}_*|, \quad \tau^i_n(l,\, j) = \varepsilon|l - \hat{l}^{n,i}(j)|,$$
$$\hat{l}^{n,i}(j) = \begin{cases} 0, \text{ если } l^{n,i}_* = 0, \\ \tilde{l}_i(j), \text{ если } l^{n,i}_* = \tilde{l}_i(j^{n,i}_*), \\ \bar{l}_i(j), \text{ если } l^{n,i}_* = \bar{l}_i(j^{n,i}_*); \end{cases}$$

функции $\tilde{l}_i$ и числа $j^{n,1}_* \in \{0,\, Nd\}$, $j^{n,2}_* \in \{0,\, j_0(N)\}$, $l^{n,i}_* \in \{0,\, \tilde{l}_i(j^{n,i}_*),\, \bar{l}_i(j^{n,i}_*)\}$ $(i = 1,\, 2)$ будут определены позже. Тогда $\sum\limits_{j,l} \mu^i_{j,l} \overset{n}{\lesssim} n$. Кроме того, положим $c_N(j) = \varepsilon|j - j^{n,1}_*|$.

Шаг 5.1. Оценим первое слагаемое в сумме Σ_0. Обозначим для $l \in L_j$

$$d_{n,j,l} = n^{-\frac{\delta}{d}} 2^{-l\delta} 2^{j(-\alpha+\frac{\delta}{d})} \cdot 2^{c_N(j)\delta} d_{\mu^1_{j,l}}(B^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_1,q_1},\, l^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_2,q_2}).$$

Применим теорему 6.1.1.

- $p_1 \leqslant 2$, $q_1 \leqslant 2$. Тогда в силу (6.53)

$$d_{n,j,l} \overset{n,j,l}{\lesssim}$$
$$\begin{cases} n^{-\frac{\delta}{d}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{2}} \cdot 2^{l\left(-\delta+\frac{d}{p_2}\right)+\frac{\tau^1_n(l,\,j)}{2}+j\left(-\alpha+\frac{\delta}{d}-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}\right)+\frac{\sigma^1_n(j)}{2}+c_N(j)\left(\delta-\frac{d}{p_2}\right)}, \quad l \leqslant \bar{l}_1(j), \\ n^{-\frac{\delta}{d}} 2^{-l\delta} 2^{j(-\alpha+\frac{\delta}{d})+c_N(j)\delta}, \text{ если } l > \bar{l}_1(j). \end{cases}$$

Положим $\tilde{l}_1 = \bar{l}_1$,

$$F^1_n(j,\, l) = \begin{cases} n^{-\frac{\delta}{d}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{2}} \cdot 2^{l\left(-\delta+\frac{d}{p_2}\right)+j\left(-\alpha+\frac{\delta}{d}-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}\right)}, \text{ если } l \leqslant \bar{l}_1(j), \\ n^{-\frac{\delta}{d}} 2^{-l\delta} 2^{j\left(-\alpha+\frac{\delta}{d}\right)}, \text{ если } l > \bar{l}_1(j) \end{cases}$$

и возьмем некоторое

$$(j^{n,1}_*,\, l^{n,1}_*) \in$$
$$\operatorname{Argmax}\left\{F^1_n(0,\, 0),\, F^1_n(Nd,\, 0),\, F^1_n(0,\, \bar{l}_1(0)),\, F^1_n(Nd,\, \bar{l}_1(Nd))\right\} =$$
$$= \operatorname{Argmax}\left\{n^{-\frac{\delta}{d}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{2}},\, n^{-\alpha+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{2}},\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\alpha-\frac{p_2\delta}{2d}+\frac{p_2\delta}{q_2\cdot d}}\right\}$$

(см. (6.44)). При этом, можно считать, что $j^{n,1}_* = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ или $j^{n,1}_* = Nd$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Применим лемму 5.1.4 для $\varphi^n_1(\xi) = 0$ и $\varphi^n_2(\xi) = \bar{l}_1(\xi)$. Если ε достаточно мало, то

$$\Sigma'_0 := \sum_{j=0}^{Nd} \sum_{l \in L_j} n^{-\delta/d} 2^{-l\delta} 2^{j(-\alpha+\delta/d)} \rho\left(2^j\right) 2^{c_N(j)\delta} d_{\mu^1_{j,l}}(B^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_1,q_1},\, l^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_2,q_2}) \overset{n}{\lesssim}$$
$$\lesssim \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{2}},\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\alpha-\frac{1}{2}+\frac{1}{q_2}}\rho(n),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}-\alpha+\frac{p_2\delta}{q_2\cdot d}}\rho(n),\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\} \overset{n}{\lesssim}$$
$$\overset{n}{\lesssim} \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{2}},\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\alpha-\frac{1}{2}+\frac{1}{q_2}}\rho(n),\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\}. \tag{6.56}$$

В самом деле, пусть $q_2 > 2$, $p_2 > 2$ (случаи $p_2 = 2$ и $q_2 = 2$ рассматриваются аналогично). Заметим, что

$$\frac{p_2\delta}{2d} + \alpha - \frac{p_2\delta}{q_2 d} = \frac{\alpha q_2}{2} \cdot \frac{2}{q_2} + \frac{p_2\delta}{2d}\left(1 - \frac{2}{q_2}\right) \geqslant \min\left\{\frac{\alpha q_2}{2},\, \frac{p_2\delta}{2d}\right\} \tag{6.57}$$

(и равенство выполнено только если $\frac{\alpha q_2}{2} = \frac{p_2\delta}{2d}$). По условиям теоремы, $\frac{\alpha q_2}{2} \neq \min\left\{\frac{\delta}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_2},\, \frac{p_2\delta}{2d},\, \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{q_2}\right\}$.

Если $\frac{\alpha q_2}{2} < \min\left\{\frac{\delta}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_2},\, \frac{p_2\delta}{2d},\, \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{q_2}\right\}$, то существует $\theta > 0$ такое, что $\frac{\alpha q_2}{2} + \theta < \min\left\{\frac{\delta}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_2},\, \frac{p_2\delta}{2d},\, \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{q_2},\, \alpha + \frac{p_2\delta}{2d} - \frac{p_2\delta}{q_2 \cdot d}\right\}$. Поэтому $\Sigma_0' \overset{n}{\lesssim} n^{-\frac{\alpha q_2}{2} - \theta} \overset{n}{\lesssim} n^{-\frac{\alpha q_2}{2}} \rho(n^{\frac{q_2}{2}})$ (в этом случае множество S из леммы 5.1.4 пустое).

Пусть $\frac{\alpha q_2}{2} > \min\left\{\frac{\delta}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_2},\, \frac{p_2\delta}{2d},\, \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{q_2}\right\}$. В силу (6.57),

$$\frac{p_2\delta}{2d} + \alpha - \frac{p_2\delta}{q_2 d} > \min\left\{\frac{\delta}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_2},\, \frac{p_2\delta}{2d},\, \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{q_2}\right\}$$

и минимум правой части достигается в единственной точке. Значит, множество S из леммы 5.1.4 непусто и сумма может быть оценена сверху величиной $\max\left\{n^{-\frac{\delta}{d} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{2}},\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{q_2}}\rho(n)\right\}$.

- $\lambda(\mathbf{p}) \leqslant \lambda(\mathbf{q})$, $\lambda(\mathbf{p}) < 1$. Положим $\tilde{l}_1(j) := \frac{j}{d}\left(1 - \frac{2}{q_2}\right)$, $\overline{m}^1_{j,l} = 2^{Nd + ld - j}$. Тогда условие $n > \overline{m}^1_{j,l}(k^1_{j,l})^{2/q_2}$ эквивалентно неравенству $l < \tilde{l}_1(j)$. Так как $j \leqslant Nd$, $p_2 \geqslant 2$ и $q_2 \geqslant 2$, то $\tilde{l}_1(j) \leqslant \bar{l}_1(j)$. Значит,

$$\begin{gathered}
d_{n,j,l} \overset{n,j,l}{\lesssim} n^{-\frac{\delta}{d} - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} \cdot 2^{l\left(-\delta + \frac{d}{p_2} - \frac{d}{p_1} + \frac{\lambda(\mathbf{q})d}{2}\right) + j\left(-\alpha + \frac{\delta}{d} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} + \frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2} - \frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}\right)} \times \\
\times 2^{\frac{\sigma^1_n(j)\lambda(\mathbf{q})}{2} + \frac{\tau^1_n(l,\, j)\lambda(\mathbf{q})}{2} + c_N(j)d\left(\frac{\delta}{d} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} - \frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}\right)}, \text{ если } 0 \leqslant l < \tilde{l}_1(j), \\
d_{n,j,l} \overset{n,j,l}{\lesssim} n^{-\frac{\delta}{d} - \frac{\lambda(\mathbf{p})}{2} + \frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}} \cdot 2^{l\left(-\delta + \frac{\lambda(\mathbf{p})d}{p_2}\right) + j\left(-\alpha + \frac{\delta}{d} - \frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2} + \frac{\lambda(\mathbf{p})}{q_2}\right)} \times \\
\times 2^{\frac{\sigma^1_n(j)\lambda(\mathbf{p})}{2} + \frac{\tau^1_n(l,\, j)\lambda(\mathbf{p})}{2} + c_N(j)d\left(\frac{\delta}{d} - \frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}\right)}, \text{ если } \tilde{l}_1(j) \leqslant l < \bar{l}_1(j), \\
d_{n,j,l} \overset{n,j,l}{\lesssim} n^{-\frac{\delta}{d}} 2^{-l\delta} 2^{j(-\alpha + \frac{\delta}{d})} \cdot 2^{c_N(j)\delta}, \text{ если } l \geqslant \bar{l}_1(j).
\end{gathered}$$

Пусть

$$F^1_n(j,\, l) = n^{-\frac{\delta}{d} - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} \cdot 2^{l\left(-\delta + \frac{d}{p_2} - \frac{d}{p_1} + \frac{\lambda(\mathbf{q})d}{2}\right) + j\left(-\alpha + \frac{\delta}{d} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} + \frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2} - \frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}\right)},$$

если $0 \leqslant l < \tilde{l}_1(j)$,

$$F^1_n(j,\, l) = n^{-\frac{\delta}{d} - \frac{\lambda(\mathbf{p})}{2} + \frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}} \cdot 2^{l\left(-\delta + \frac{\lambda(\mathbf{p})d}{p_2}\right) + j\left(-\alpha + \frac{\delta}{d} - \frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2} + \frac{\lambda(\mathbf{p})}{q_2}\right)},$$

если $\tilde{l}_1(j) \leqslant l < \bar{l}_1(j)$,

$$F^1_n(j,\, l) = n^{-\frac{\delta}{d}} 2^{-l\delta} 2^{j(-\alpha + \frac{\delta}{d})}, \text{ если } l \geqslant \bar{l}_1(j).$$

Заметим, что $\tilde{l}_1(0) = 0$. Выберем

$$\begin{gathered}
(j^{n,1}_*,\, l^{n,1}_*) \in \operatorname{Argmax}\Big\{F^1_n(0,\, 0),\, F^1_n(Nd,\, 0),\, F^1_n(0,\, \bar{l}_1(0)), \\
F^1_n(Nd,\, \bar{l}_1(Nd)),\, F^1_n(Nd,\, \tilde{l}_1(Nd))\Big\}.
\end{gathered}$$

По лемме 5.1.4, для достаточно малых ε

$$\sum_{j=0}^{Nd}\sum_{l\in L_j} n^{-\delta/d}2^{-l\delta}2^{j(-\alpha+\delta/d)}\rho\left(2^j\right)2^{c_N(j)\delta}d_{\mu^1_{j,l}}(B^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_1,q_1},\, l^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_2,q_2}) \overset{n}{\lesssim}$$
$$\lesssim \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}},\, n^{-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}}\rho(n),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\right.$$
$$\left. n^{-\frac{\delta p_2}{2d}-\alpha+\frac{\delta p_2}{q_2\cdot d}}\rho(n),\, n^{-\alpha+\left(-\frac{\delta}{d}-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{2}{q_2}\right)}\rho(n),\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\}\overset{n}{\lesssim} \tag{6.58}$$
$$\lesssim \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}},\, n^{-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}}\rho(n),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\}.$$

Это доказывается так же, как в предыдущем случае. При этом, $\varphi^n_1(\xi) = 0$, $\varphi^n_2(\xi) = \tilde{l}_1(\xi)$, $\varphi^n_3(\xi) = \bar{l}_1(\xi)$.

- $\lambda(\mathbf{p}) \geqslant \lambda(\mathbf{q})$, $\lambda(\mathbf{q}) < 1$. Пусть $\tilde{l}_1(j) = \left(N-\frac{j}{d}\right)\left(\frac{p_2}{2}-1\right)$, $\overline{m}^1_{j,l} = 2^{Nd+ld-j}$. Тогда условие $n > (\overline{m}^1_{j,l})^{\frac{2}{p_2}}k^1_{j,l}$ эквивалентно неравенству $l < \tilde{l}_1(j)$. Значит, по теореме 6.1.1,

$$d_{n,j,l} \lesssim n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}}\cdot 2^{j\left(-\alpha+\frac{\delta}{d}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}\right)+l\left(-\delta+\frac{\lambda(\mathbf{p})d}{p_2}\right)}\times$$
$$\times 2^{\frac{\sigma^1_n(j)\lambda(\mathbf{p})}{2}+\frac{\tau^1_n(l,\,j)\lambda(\mathbf{p})}{2}+c_N(j)\left(\delta-\frac{\lambda(\mathbf{p})d}{p_2}\right)},$$

если $0 \leqslant l < \tilde{l}_1(j)$,

$$d_{n,j,l} \overset{n,j,l}{\lesssim} n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{p_2}}\cdot 2^{j\left(-\alpha+\frac{\delta}{d}-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{p_2}+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}\right)+l\left(-\delta+\frac{\lambda(\mathbf{q})d}{p_2}\right)}\times$$
$$\times 2^{\frac{\sigma^1_n(j)\lambda(\mathbf{q})}{2}+\frac{\tau^1_n(l,\,j)\lambda(\mathbf{q})}{2}+c_N(j)\left(\delta-\frac{\lambda(\mathbf{q})d}{p_2}\right)},$$

если $\tilde{l}_1(j) \leqslant l < \bar{l}_1(j)$,

$$d_{n,j,l} \overset{n,j,l}{\lesssim} n^{-\frac{\delta}{d}}2^{-l\delta}2^{j(-\alpha+\frac{\delta}{d})+c_N(j)\delta},$$

если $l \geqslant \bar{l}_1(j)$.

Положим

$$F^1_n(j,\,l) = n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}}\cdot 2^{j\left(-\alpha+\frac{\delta}{d}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}\right)+l\left(-\delta+\frac{\lambda(\mathbf{p})d}{p_2}\right)},$$

если $0 \leqslant l < \tilde{l}_1(j)$,

$$F^1_n(j,\,l) = n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{p_2}}\cdot 2^{j\left(-\alpha+\frac{\delta}{d}-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{p_2}+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}\right)+l\left(-\delta+\frac{\lambda(\mathbf{q})d}{p_2}\right)},\ \text{если } \tilde{l}_1(j) \leqslant l < \bar{l}_1(j),$$
$$F^1_n(j,\,l) = n^{-\frac{\delta}{d}}2^{-l\delta}2^{j(-\alpha+\frac{\delta}{d})},\ \text{если } l \geqslant \bar{l}_1(j).$$

Заметим, что $\tilde{l}_1(0) = \bar{l}_1(0)$ и $\tilde{l}_1(Nd) = 0$. Выберем

$$(j^{n,1}_*,\, l^{n,1}_*) \in \operatorname{Argmax}\left\{F^1_n(0,\,0),\, F^1_n(Nd,\,0),\, F^1_n(0,\,\bar{l}_1(0)),\, F^1_n(Nd,\,\bar{l}_1(Nd))\right\}.$$

По лемме 5.1.4, для достаточно малых ε

$$\sum_{j=0}^{Nd}\sum_{l\in L_j} n^{-\delta/d}2^{-l\delta}2^{j(-\alpha+\delta/d)}\rho\left(2^j\right)2^{c_N(j)\delta}d_{\mu^1_{j,l}}(B^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_1,q_1},\, l^{m^1_{j,l},k^1_{j,l}}_{p_2,q_2}) \overset{n}{\lesssim}$$
$$\max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}},\, n^{-\alpha+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}}\rho(n),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\alpha+\frac{\delta p_2}{q_2\cdot d}-\frac{\delta p_2}{2d}}\rho(n),\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\}\overset{n}{\lesssim}$$
$$\lesssim \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}},\, n^{-\alpha+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}}\rho(n),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\}. \tag{6.59}$$

При этом, $\varphi^n_1(\xi)=0$, $\varphi^n_2(\xi)=\tilde l_1(\xi)$, $\varphi^n_3(\xi)=\bar l_1(\xi)$.

Шаг 5.2. Для оценки второго слагаемого в сумме Σ_0 снова применим теорему 6.1.1. Заметим, что

$$\bar l_2(j_0(N))=0. \tag{6.60}$$

- $p_1\leqslant 2$, $q_1\leqslant 2$. Тогда, в силу (6.54),

$$n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}d_{\mu^2_{j,l}}(B^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}_{p_1,q_1},\, l^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}_{p_2,q_2}) \overset{n,j,l}{\lesssim}$$
$$\lesssim \left\{\begin{array}{l} n^{-\alpha+\frac{1}{q_2}-\frac12}\cdot 2^{l\left(-\delta+\frac{d}{p_2}\right)}2^{j\left(-\alpha+\frac{1}{q_2}\right)}\cdot 2^{\frac{\sigma^2_n(j)}{2}+\frac{\tau^2_n(l,j)}{2}}, \text{ если } l\leqslant \bar l_2(j), \\ n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}, \text{ если } l>\bar l_2(j). \end{array}\right.$$

Положим

$$F^2_n(j,\,l)=\left\{\begin{array}{l} n^{-\alpha+\frac{1}{q_2}-\frac12}2^{l\left(-\delta+\frac{d}{p_2}\right)}2^{j\left(-\alpha+\frac{1}{q_2}\right)}, \text{ если } l\leqslant \bar l_2(j), \\ n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}, \text{ если } l>\bar l_2(j). \end{array}\right.$$

Выберем

$$(j^{n,2}_*,\, l^{n,2}_*)\in \mathrm{Argmax}\left\{F^2_n(0,\,0),\, F^2_n(0,\,\bar l_2(0)),\, F^2_n(j_0(N),\,0)\right\}.$$

Применим лемму 5.1.4 для $\varphi^n_1(\xi)=0$, $\varphi^n_2(\xi)=\bar l_2(\xi)$, учитывая (6.60). Если ε достаточно мало, то

$$\Sigma_0'':=\sum_{0\leqslant j\leqslant j_0(N)}\sum_{l\in\mathbb{Z}_+} n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}\rho\,(2^jn)\,d_{\mu^2_{j,l}}(B^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}_{p_1,q_1},\, l^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}_{p_2,q_2}) \overset{n}{\lesssim}$$
$$\lesssim \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}+\frac{1}{p_2}-\frac12},\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\alpha-\frac12+\frac{1}{q_2}}\rho(n),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}-\alpha+\frac{\delta p_2}{q_2 d}}\rho(n),\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\} \overset{n}{\lesssim}$$
$$\overset{n}{\lesssim} \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}+\frac{1}{p_2}-\frac12},\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\alpha-\frac12+\frac{1}{q_2}}\rho(n),\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\}. \tag{6.61}$$

В самом деле, рассмотрим случай $p_2>2$, $q_2>2$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). По условию теоремы,

$$\min\left\{\frac{\delta}{d}+\frac12-\frac{1}{p_2},\,\frac{p_2\delta}{2d}\right\}\neq \min\left\{\alpha+\frac12-\frac{1}{q_2},\,\frac{\alpha q_2}{2}\right\}.$$

Если $\min\left\{\frac{\delta}{d}+\frac12-\frac{1}{p_2},\,\frac{p_2\delta}{2d}\right\}<\min\left\{\alpha+\frac12-\frac{1}{q_2},\,\frac{\alpha q_2}{2}\right\}$, то в силу (6.57)

$$\frac{p_2\delta}{2d}+\alpha-\frac{\delta p_2}{q_2 d}>\min\left\{\frac{\delta}{d}+\frac12-\frac{1}{p_2},\,\frac{p_2\delta}{2d}\right\}$$

и

$$\Sigma_0''\overset{n}{\lesssim} n^{-\min\left\{\frac{\delta}{d}+\frac12-\frac{1}{p_2},\,\frac{p_2\delta}{2d}\right\}}.$$

При этом, множество S из леммы 5.1.4 пусто.

Если $\min\left\{\frac{\delta}{d}+\frac12-\frac{1}{p_2},\,\frac{p_2\delta}{2d}\right\}>\min\left\{\alpha+\frac12-\frac{1}{q_2},\,\frac{\alpha q_2}{2}\right\}$, то в силу (6.57)

$$\frac{p_2\delta}{2d}+\alpha-\frac{\delta p_2}{q_2 d}>\min\left\{\alpha+\frac12-\frac{1}{q_2},\,\frac{\alpha q_2}{2}\right\},$$

правая часть достигает минимума в единственной точке и

$$\Sigma_0''\overset{n}{\lesssim}\max\left\{n^{-\alpha-\frac12+\frac{1}{q_2}}\rho(n),\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\}.$$

При этом, множество S из леммы 5.1.4 непусто.

- $\lambda(\mathbf{p}) \leqslant \lambda(\mathbf{q})$, $\lambda(\mathbf{p}) < 1$. Положим $\tilde{l}_2(j) = N\left(1 - \frac{2}{q_2}\right) - \frac{2j}{q_2 d}$. Тогда условие $n > m_{j,l}^2 (k_{j,l}^2)^{2/q_2}$ эквивалентно неравенству $l < \tilde{l}_2(j)$ и

$$n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}d_{\mu^2_{j,l}}(B_{p_1,q_1}^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}},\, l_{p_2,q_2}^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}) \overset{n,j,l}{\lesssim}$$
$$\begin{cases} n^{-\alpha-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}}\cdot 2^{j\left(-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}\right)+l\left(-\delta+\frac{d}{p_2}-\frac{d}{p_1}+\frac{\lambda(\mathbf{q})d}{2}\right)}2^{\frac{\lambda(\mathbf{q})\sigma_n^2(j)}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{q})\tau_n^2(l,\,j)}{2}}, & l < \tilde{l}_2(j), \\ n^{-\alpha-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{q_2}}\cdot 2^{j\left(-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{q_2}\right)+l\left(-\delta+\frac{\lambda(\mathbf{p})d}{p_2}\right)}2^{\frac{\lambda(\mathbf{p})\sigma_n^2(j)}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{p})\tau_n^2(l,\,j)}{2}}, & \tilde{l}_2(j) \leqslant l < \bar{l}_2(j), \\ n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}, \quad l \geqslant \bar{l}_2(j). \end{cases}$$

Пусть

$$F_n^2(j,\,l) = \begin{cases} n^{-\alpha-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}}\cdot 2^{j\left(-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}\right)+l\left(-\delta+\frac{d}{p_2}-\frac{d}{p_1}+\frac{\lambda(\mathbf{q})d}{2}\right)}, & 0 \leqslant l < \tilde{l}_2(j), \\ n^{-\alpha-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{q_2}}\cdot 2^{j\left(-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{q_2}\right)+l\left(-\delta+\frac{\lambda(\mathbf{p})d}{p_2}\right)}, & \tilde{l}_2(j) < l \leqslant \bar{l}_2(j), \\ n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}, \quad l \geqslant \bar{l}_2(j). \end{cases}$$

Выберем

$$(j_*^{n,2},\, l_*^{n,2}) \in \operatorname{Argmax}\left\{F_n^2(0,\,0),\, F_n^2(0,\,\bar{l}_2(0)),\, F_n^2(0,\,\tilde{l}_2(0)),\, F_n^2(j_0(N),\,0)\right\}.$$

В силу леммы 5.1.4 (с учетом (6.60) и равенства $\tilde{l}_2(j_0(N)) = 0$), для достаточно малых ε получаем

$$\begin{gathered}\sum_{0\leqslant j\leqslant j_0(N)}\sum_{l\in\mathbb{Z}_+} n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}\rho\,(2^j n)\,d_{\mu^2_{j,l}}(B_{p_1,q_1}^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}},\, l_{p_2,q_2}^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}) \overset{n}{\lesssim} \\ \lesssim \max\Big\{n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}},\, n^{-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}}\rho(n),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}}, \\ n^{-\frac{\delta p_2}{2d}-\alpha+\frac{\delta p_2}{q_2\cdot d}}\rho(n),\, n^{-\alpha+\left(-\frac{\delta}{d}-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{2}{q_2}\right)}\rho(n),\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\Big\} \overset{n}{\lesssim} \\ \lesssim \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}},\, n^{-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}}\rho(n),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\}.\end{gathered} \tag{6.62}$$

- $\lambda(\mathbf{p}) \geqslant \lambda(\mathbf{q})$, $\lambda(\mathbf{q}) < 1$. Тогда $n \leqslant (m^2_{j,l})^{\frac{2}{p_2}}k^2_{j,l}$. Значит,

$$n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}d_{\mu^2_{j,l}}(B_{p_1,q_1}^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}},\, l_{p_2,q_2}^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}) \overset{n,j,l}{\lesssim}$$
$$\lesssim \begin{cases} n^{-\alpha-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}}2^{l\left(-\delta+\frac{\lambda(\mathbf{q})d}{p_2}\right)}2^{j\left(-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}\right)}\cdot 2^{\frac{\lambda(\mathbf{q})\sigma_n^2(j)}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{q})\tau_n^2(l,\,j)}{2}}, & \text{если } l < \bar{l}_2(j), \\ n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}, \quad \text{если } l \geqslant \bar{l}_2(j). \end{cases}$$

Положим

$$F_n^2(j,\,l) = \begin{cases} n^{-\alpha-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}}2^{l\left(-\delta+\frac{\lambda(\mathbf{q})d}{p_2}\right)}2^{j\left(-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}\right)}, & \text{если } l < \bar{l}_2(j), \\ n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}, \quad \text{если } l \geqslant \bar{l}_2(j) \end{cases}$$

и выберем

$$(j_*^{n,2},\, l_*^{n,2}) \in \operatorname{Argmax}\left\{F_n^2(0,\,0),\, F_n^2(0,\,\bar{l}_2(0)),\, F_n^2(j_0(N),\,0)\right\}.$$

По лемме 5.1.4, для достаточно малых ε

$$\begin{gathered}\sum_{0\leqslant j\leqslant j_0(N)}\sum_{l\in\mathbb{Z}_+} n^{-\alpha}2^{-l\delta}2^{-j\alpha}\rho\,(2^j n)\,d_{\mu^2_{j,l}}(B_{p_1,q_1}^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}},\, l_{p_2,q_2}^{m^2_{j,l},k^2_{j,l}}) \overset{n}{\lesssim} \\ \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}},\, n^{-\alpha+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}}\rho(n),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\alpha+\frac{\delta p_2}{q_2 d}-\frac{\delta p_2}{2d}}\rho(n),\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\} \\ \overset{n}{\lesssim} \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2}},\, n^{-\alpha+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}}\rho(n),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\frac{\alpha q_2}{2}}\rho(n^{\frac{q_2}{2}})\right\}.\end{gathered} \tag{6.63}$$

Шаг 5.3. Оценим последнее слагаемое суммы Σ_0.

Положим $j_*^n = 0$, если $\alpha \geqslant \frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}$, $j_*^n = j_0(N)$, если $\alpha < \frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}$, $\sigma_n^5(j) = \varepsilon|j - j_*^n|$, $\mu_j^5 = n2^{-[\sigma_n^5(j)]}$. Тогда $\sum\limits_{j=0}^{j_0} \mu_j^5 \overset{n}{\lesssim} n$. Из теоремы H и (6.55) получаем

$$n^{-\alpha} \sum_{0\leqslant j\leqslant j_0(N)} 2^{-j\alpha}\rho(2^j n) d_{\mu_j^5}(B_{q_1}^{k_j^5}, l_{q_2}^{k_j^5}) \overset{n}{\lesssim}$$

$$\lesssim n^{-\alpha} \sum_{0\leqslant j\leqslant j_0(N)} 2^{-j\alpha}\rho(2^j n) n^{-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}} \cdot 2^{\frac{\lambda(\mathbf{q})\sigma_n^5(j)}{2}} 2^{(j+Nd)\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}} =$$

$$= n^{-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}} \sum_{0\leqslant j\leqslant j_0(N)} 2^{j\left(-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}\right)}\rho(2^j n)\cdot 2^{\frac{\lambda(\mathbf{q})\sigma_n^5(j)}{2}} =: \Sigma_*.$$

Для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\Sigma_* \overset{n}{\lesssim} \begin{cases} n^{-\alpha+\frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}-\frac{\lambda(\mathbf{q})}{2}}, \text{ если } \alpha > \frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}, \\ n^{-\alpha q_2/2}\rho(n^{q_2/2}), \text{ если } \alpha < \frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}. \end{cases} \tag{6.64}$$

Если $\alpha = \frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2}$, то по условиям теоремы получаем $\frac{\alpha q_2}{2} = \alpha + \frac{\lambda(\mathbf{q})}{2} - \frac{\lambda(\mathbf{q})}{q_2} > \min\left\{\frac{\delta}{d} + \frac{\lambda(\mathbf{p})}{2} - \frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2},\, \frac{p_2\delta}{2d}\right\}$. Значит,

$$\Sigma_* \overset{n}{\lesssim} n^{-\min\left\{\frac{\delta}{d}+\frac{\lambda(\mathbf{p})}{2}-\frac{\lambda(\mathbf{p})}{p_2},\, \frac{p_2\delta}{2d}\right\}}. \tag{6.65}$$

Из (6.56), (6.58), (6.59), (6.61), (6.62), (6.63), (6.64) и (6.65) получаем требуемую оценку сверху.

Шаг 6. Оценим Σ_1 для $1 < p_1 \leqslant 2 \leqslant p_2 < \infty$ и $1 < q_1 \leqslant 2 \leqslant q_2 < \infty$. По теореме 6.2.1,

$$\lambda_n(B_{p_1,q_1}^{m,k}, l_{p_2,q_2}^{m,k}) \overset{m,k,n}{\lesssim} \begin{cases} \Phi_0(m, k, n, p_1, p_2, q_1, q_2), & \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \geqslant 1,\ \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2} \geqslant 1, \\ \Phi_0(m, k, n, p_2', p_1', q_1, q_2), & \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \leqslant 1,\ \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2} \geqslant 1, \\ \Phi_0(m, k, n, p_1, p_2, q_2', q_1'), & \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \geqslant 1,\ \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2} \leqslant 1, \\ \Phi_0(m, k, n, p_2', p_1', q_2', q_1'), & \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \leqslant 1,\ \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2} \leqslant 1. \end{cases}$$

Остается применить (1.134) и уже доказанную оценку сверху для Σ_0.

Доказательство оценки снизу. Пусть $p_2 \geqslant 2$, $q_2 \geqslant 2$. Возьмем $\varepsilon = 0$. В силу (6.41), (6.42), (6.45), (6.48), (6.49), (6.51) и (6.52), существуют $\nu_n \overset{n}{\asymp} n$ и $\mu_n \overset{n}{\asymp} n$ такие, что $\mu_n \leqslant \frac{\nu_n}{2}$ и

$$d_{\mu_n}(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2) \overset{n}{\gtrsim} \max\Big\{d_{\mu_n}(P_{\mathcal{N}_{0,0}^1} : X_1 \to X_2),$$

$$d_{\mu_n}(P_{\mathcal{N}^1_{0,\bar{l}_1(0)}} : X_1 \to X_2),\, d_{\mu_n}(P_{\mathcal{N}^1_{Nd,0}} : X_1 \to X_2),\, d_{\mu_n}(P_{\mathcal{N}^2_{j_0(N),0}} : X_1 \to X_2)\Big\} \overset{n}{\gtrsim}$$
$$\gtrsim \max\Big\{n^{-\frac{\delta}{d}} d_{\mu_n}(B_{p_1,q_1}^{\nu_n,1}, l_{p_2,q_2}^{\nu_n,1}),\, n^{-\frac{\delta}{d}}\cdot 2^{N\left(\frac{p_2}{2}-1\right)\delta},$$
$$n^{-\alpha}\rho(n) d_{\mu_n}(B_{p_1,q_1}^{1,\nu_n}, l_{p_2,q_2}^{1,\nu_n}),\, n^{-\alpha}\cdot 2^{-j_0(N)\alpha}\rho(2^{j_0(N)}n)\Big\} =$$
$$= \max\Big\{n^{-\frac{\delta}{d}} d_{\mu_n}(B_{p_1}^{\nu_n}, l_{p_2}^{\nu_n}),\, n^{-\frac{p_2\delta}{2d}},\, n^{-\alpha}\rho(n) d_{\mu_n}(B_{q_1}^{\nu_n}, l_{q_2}^{\nu_n}),\, n^{-\alpha q_2/2}\rho(n^{q_2/2})\Big\}.$$

Аналогично, если $1 < p_1 \leqslant 2 \leqslant p_2 < \infty$, $1 < q_1 \leqslant 2 \leqslant q_2 < \infty$, то

$$a_{\mu_n}(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2) \overset{n}{\gtrsim} \max\Big\{n^{-\frac{\delta}{d}}\lambda_{\mu_n}(B_{p_1}^{\nu_n}, l_{p_2}^{\nu_n}),\, n^{-\frac{\min(p_2,\, p_1')\delta}{2d}},$$

$$n^{-\alpha}\rho(n)\lambda_{\mu_n}(B_{q_1}^{\nu_n}, l_{q_2}^{\nu_n}),\, n^{-\frac{\alpha\min(q_2,\, q_1')}{2}}\rho(n^{\min(q_2,\, q_1')/2})\Big\}$$

(здесь используется (6.43) вместо (6.42)). Остается применить теорему H.

Если $p_2 \leqslant 2$ и $q_2 \leqslant 2$, то аналогично получаем

$$a_{\mu_n}(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2) \geqslant d_{\mu_n}(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2) \overset{n}{\gtrsim}$$
$$\gtrsim \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}} d_{\mu_n}(B^{\nu_n}_{p_1}, l^{\nu_n}_{p_2}), n^{-\alpha}\rho(n) d_{\mu_n}(B^{\nu_n}_{q_1}, l^{\nu_n}_{q_2})\right\} \overset{n}{\asymp} \max\left\{n^{-\frac{\delta}{d}}, n^{-\alpha}\rho(n)\right\}.$$

Аналогичная оценка выполнена для $a_{\mu_n}(P_{\mathcal{N}} : X_1 \to X_2)$, если $p_1 \geqslant 2$, $q_1 \geqslant 2$. $\square$

Заключение

В диссертации получены новые теоремы вложения весовых классов Соболева на области с условием Джона и получены оценки поперечников. Кроме того, получены оценки поперечников весовых классов Бесова с весами, имеющими сильную особенность в точке, при дополнительных условиях на параметры p_1, p_2, q_1, q_2.

Дальнейшие цели исследования по данному направлению состоят в следующем.

1. Получить оценки других характеристик компактного вложения весовых классов Соболева (например, энтропийных чисел).

2. Получить оценки поперечников весовых и невесовых классов Соболева на областях, не удовлетворяющих условию Джона (например, гельдеровых областях, областях с условием гибкого рога, областях с условием распадающегося гибкого конуса).

3. Получить теоремы вложения весовых классов Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона, для более общих весов (например, в случае, когда веса являются произведением функций расстояния до подмножеств границы области).

4. В теоремах 12, 13, 14 оценки поперечников получены при условии $\theta_{j_*} < \min_{j\ne j_*} \theta_j$. Остается не изученным предельный случай, когда это условие не выполнено.

5. Получить оценки поперечников конечномерных шаров в смешанной норме в случаях, не изученных в диссертации и в работах А.Д. Изаака и Э.М. Галеева, и применить эти результаты к получению оценок поперечников весовых классов Бесова.

Список обозначений

Литература

[1] М.С. Айтенова, Л.К. Кусаинова, “Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. I”, *Мат. журн. Алматы*, **2**:1 (2002) 3–9.

[2] М.С. Айтенова, Л.К. Кусаинова, “Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. II”, *Мат. журн. Алматы*, **2**:2 (2002), 7–14.

[3] С.Б. Бабаджанов, В.М. Тихомиров, “О поперечниках одного класса в пространстве L^p”, *Изв. АН Узб. ССР, сер. физ.-мат.*, **11**:2 (1967), 24–30.

[4] О.В. Бесов, “О компактности вложений весовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей”, *Тр. МИАН*, **232** (2001), 72–93.

[5] О.В. Бесов, “Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей”, *Матем. сборник*, **192**:3 (2001), 3–26.

[6] О.В. Бесов, “О компактности вложений весовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей”, *Докл. РАН*, **376**:6 (2001), 727–732.

[7] О.В. Бесов, “Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях”, *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 69–82.

[8] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.: Наука, Физматлит, 1996.

[9] О.В. Бесов, “О колмогоровских поперечниках классов Соболева на нерегулярной области”, *Тр. МИАН*, **280** (2013), 41–52.

[10] М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк, “Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α”, *Матем. сборник*, **73**:3 (1967), 331–355.

[11] И.В. Бойков, “Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами”, *Ж. выч. мат. мат. физ.*, **38**:1 (1998), 25–33.

[12] И.В. Бойков, А.Н. Тында, “Оптимальные по точности приближенные методы решения интегральных уравнений Вольтерра”, *Диф. уравн.*, **38**:9 (2002), 1225–1232.

[13] И.В. Бойков, А.Н. Тында, П.С. Краснощеков, “Оптимальные по точности методы решения некоторых классов слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра”, *Изв. высш. уч. завед. Поволжский рег. Физ.-мат. наук. Математика.* **2 (26)** (2013), 87–107.

[14] А.П. Буслаев, В.М. Тихомиров, “Спектры нелинейных дифференциальных уравнений и поперечники соболевских классов”, *Мат. сборник*, **181**:12 (1990), 1587–1606.

[15] Э.М. Галеев, “Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $\widetilde{L}_p$”, *Успехи мат. наук*, **32**:4 (1977), 251–252.

[16] Э.М. Галеев, “Приближение суммами Фурье класса функций с несколькими ограниченными производными”, *Мат. заметки*, **23**:2 (1978), 197–212.

[17] Э.М. Галеев, “Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных”, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **54**:2 (1990), 418–430.

[18] Э.М. Галеев, “Поперечники по Колмогорову некоторых конечномерных множеств в смешанной норме”, *Матем. заметки*, **58**:1 (1995), 144–148.

[19] А.Ю. Гарнаев, Е.Д. Глускин, “О поперечниках евклидового шара”, *ДАН СССР*, **277**:5 (1984), 1048–1052.

[20] Е.Д. Глускин, “О некоторых конечномерных задачах теории поперечников”, *Вестн. ЛГУ*, **13** (1981), 5–10.

[21] Е.Д. Глускин, “Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств”, *Мат. сборник*, **120 (162)**:2 (1983), 180–189.

[22] М.Л. Гольдман, “Точные оценки норм операторов типа Харди на конусах квазимонотонных функций”, *Труды МИАН*, **232** (2001), 109–137.

[23] Ю.Ф. Захарова, *Оптимальные методы вычисления многомерных сингулярных интегралов и решения сингулярных интегральных уравнений*: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саранск, 2004.

[24] А.Д. Изаак, “Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой”, *Матем. заметки*, **55**:1 (1994), 43–52.

[25] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров, “Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи”, *УМН*, **23**:6(144) (1968), 51–116.

[26] Р.С. Исмагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178.

[27] Б.С. Кашин, “О колмогоровских поперечниках октаэдров”, *ДАН СССР*, **214**:5 (1974), 1024–1026.

[28] Б.С. Кашин, “О поперечниках октаэдров”, *УМН*, **30**:4 (1975), 251–252.

[29] Б.С. Кашин, “Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций”, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **41**:2 (1977), 334–351.

[30] Б.С. Кашин, “О поперечниках классов Соболева малой гладкости”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, **5** (1981), 50–54.

[31] А.Н. Колмогоров, А.А. Петров, Ю.М. Смирнов, “Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов”, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **11**:6 (1947), 561–566.

[32] Л.Д. Кудрявцев, “Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений”, *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **55** (1959), 3–182.

[33] Л.Д. Кудрявцев, С.М. Никольский, “Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения”. В кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 26. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР).* М., 1988. С. 5–157.

[34] Е.Д. Куланин, *Оценки поперечников функциональных классов малой гладкости*: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 1986. 68 с.

[35] Л.К. Кусаинова, “О вложении весового пространства Соболева $W^l_p(\Omega; v)$ в пространство $L_p(\Omega;\omega)$”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 132–148.

[36] Д.А. Лабутин, "Вложение пространств Соболева на гельдеровых областях", *Труды МИАН*, **227** (1999), 170–179.

[37] П.И. Лизоркин, М.О. Отелбаев, "Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами. I", *Мат. сборник*, **108**:3 (1979), 358–377.

[38] П.И. Лизоркин, М.О. Отелбаев, "Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами. II", *Мат. сборник*, **112**:1 (1980), 56–85.

[39] П.И. Лизоркин, М.О. Отелбаев, "Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения для пространств соболевского типа с весами", *Труды МИАН*, **170** (1984), 213–232.

[40] Е.Н. Ломакина, В.Д. Степанов, "Асимптотические оценки аппроксимативных и энтропийных чисел одновесового оператора Римана–Лиувилля", *Матем. труды*, **9**:1 (2006), 52–100.

[41] В.Г. Мазья. *Пространства С.Л. Соболева.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 415 с.

[42] В.Г. Мазья, С.В. Поборчий, "Теоремы вложения пространств Соболева в области с пиком и в гельдеровой области", *Алгебра и анализ*, **18**:4 (2006), 95–126.

[43] В.Е. Майоров, "Дискретизация задачи о поперечниках", *УМН*, **30**:6 (1975), 179–180.

[44] Ю.И. Маковоз, "Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве", *Мат. сборник*, **87 (129)**:1 (1972), 136–142.

[45] К. Мынбаев, М. Отелбаев, *Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов* . М., Наука, 1988.

[46] М.О. Отелбаев, "Оценки поперечников по Колмогорову для одного класса весовых пространств", *Докл. АН СССР*, **235**:6, (1977) 1270–1273.

[47] Ю.Г. Решетняк, "Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей", *Сиб. матем. журнал*, **21**:6 (1980), 108–116.

[48] Ю.Г. Решетняк, "Замечание об интегральных представлениях дифференцируемых функций многих переменных", *Сиб. матем. журнал*, **25**:5 (1984), 198–200.

[49] С.Л. Соболев, "Об одной теореме функционального анализа", *Матем. сборник*, **4 (46)**:3 (1938), 471–497.

[50] С.Л. Соболев. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.

[51] М.И. Стесин, "Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций", *ДАН СССР*, **220**:6 (1975), 1278–1281.

[52] С.Б. Стечкин, "О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами", *УМН*, **9**:1(53) (1954), 133–134.

[53] В.Н. Темляков, "О приближении периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью", *ДАН СССР*, **253**:3 (1980), 544–548.

[54] В.Н. Темляков, "Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных", *ДАН СССР*, **267**:2 (1982), 314–317.

[55] В.Н. Темляков, "Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций", *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, **46**:1 (1982), 171–186.

[56] В.М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений”, *Успехи мат. наук*, **15**:3 (1960), 81–120.

[57] В.М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений.* М.: Изд-во МГУ, 1976.

[58] В.М. Тихомиров, “Теория приближений.” В кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР).* М., 1987. С. 103–260.

[59] Х. Трибель, “Интерполяционные свойства ε-энтропии и поперечников. Геометрические характеристики вложения пространств функций типа Соболева–Бесова”, *Мат. сборник*, **98**:1 (1975), 27–41.

[60] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* М.: Мир, 1980.

[61] Г.Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* М., ИЛ, 1948.

[62] Г.Н. Яковлев, “О плотности финитных функций в весовых пространствах”, *ДАН СССР*, **170**:4 (1966), 797–798.

[63] D.R. Adams, “Traces of Potentials. II”, *Indiana Univ. Math. J.*, **22** (1972/73), 907–918.

[64] D.R. Adams, “A Trace Inequality for Generalized Potentials”, *Studia Math.* **48** (1973), 99–105.

[65] H. Aikawa, K. Hirata, T. Lundh, “Martin boundary points of a John domain and unions of convex sets”, *J. Math. Soc. Japan*, **58**:1 (2006), 247–274.

[66] K.F. Andersen, H.P. Heinig, “Weighted norm inequalities for certain integral operators”, *SIAM J. Math. Anal.*, **14** (1983), 834–844.

[67] F. Antoci, “Some necessary and some sufficient conditions for the compactness of the embedding of weighted Sobolev spaces”, *Ricerche Mat.* **52**:1 (2003), 55–71.

[68] G. Bennett, “Some elementary inequalities”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **38**:152 (1987), 401–425.

[69] G. Bennett, “Some elementary inequalities. II”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **39**:156 (1988), 385–400.

[70] G. Bennett, “Some elementary inequalities. III”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **42**:166 (1991), 149–174.

[71] B. Bojarski, “Remarks on Sobolev imbedding inequalities”, (Complex Analysis, Joensuu, 1987). *Lecture Notes in Math.*, vol. 1351, Springer, Berlin, 1988, pp. 52–68.

[72] M. Bownik, “Atomic and molecular decompositions of anisotropic Besov spaces”, *Math. Z.*, **250**:3 (2005), 539–571.

[73] I.V. Boykov, “Optimal approximation and Kolmogorov widths estimates for certain singular classes related to equations of mathematical physics”, arXiv:1303.0416v1.

[74] J.S. Bradley, “Hardy inequalities with mixed norms”, *Canad. Math. Bull.* **21**:4 (1978), 405–408.

[75] M.Sh. Braverman and V.D. Stepanov, “On the discrete Hardy inequality”, *Bull. London Math. Soc.* **26**:3 (1994), 283–287.

[76] M. Bricchi, “Existence and properties of h-sets”, *Georgian Mathematical Journal*, **9**:1 (2002), 13—32.

[77] R.C. Brown, “Some embeddings of weighted Sobolev spaces on finite measure and quasibounded domains”, *J. Ineq. Appl.*, **2**:4 (1998), 325–356.

[78] H.-Q. Bui, “Weighted Besov and Triebel spaces: Interpolation by the real method”, *Hiroshima Math. J.*, **12**:3 (1982), 581–605.

[79] A.M. Caetano, “About approximation numbers in function spaces”, *J. Approx. Theory*, **94** (1998), 383–395.

[80] A.M. Caetano, S. Lopes, “Spectral theory for the fractal Laplacian in the context of h-sets”, *Math. Nachr.*, **284**:1 (2011), 5–38.

[81] L. Caso, R. D’Ambrosio, “Weighted spaces and weighted norm inequalities on irregular domains”, *J. Appr. Theory*, **167** (2013), 42–58.

[82] M. Christ, “A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral”, *Colloq. Math.*, **60/61**:2 (1990), 601–628.

[83] A. Cohen, R. DeVore, P. Petrushev, Hong Xu, “Nonlinear approximation and the space $BV(\mathbb{R}^2)$”, *Amer. J. Math.*, **121**:3, (1999), 587–628.

[84] R.A. DeVore, R.C. Sharpley, S.D. Riemenschneider, “n-widths for C_p^α spaces”, *Anniversary volume on approximation theory and functional analysis (Oberwolfach, 1983)*, 213–222, Internat. Schriftenreihe Numer. Math., **65**, Birkhäuser, Basel, 1984.

[85] L. Diening, M. Růžička, K. Schumacher, “A decomposition technique for John domains”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **35**:1 (2010), 87–114.

[86] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces–Selected Topics.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 485 (Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975; “Vishcha Shkola”, Kiev, 1980).

[87] D.E. Edmunds, W.D. Evans, *Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[88] D.E. Edmunds, W.D. Evans, “Spectral problems on arbitrary open subsets of $\mathbb{R}^n$ involving the distance to the boundary”, *J. Comp. Appl. Math.*, **194**:1 (2006), 36–53.

[89] D.E. Edmunds, J. Lang, “Approximation numbers and Kolmogorov widths of Hardy-type operators in a non-homogeneous case”, *Math. Nachr.*, **297**:7 (2006), 727–742.

[90] D.E. Edmunds, J. Lang, “Asymptotics for eigenvalues of a non-linear integral system”, *Boll. Unione Mat. Ital. (9)*, **1**:1 (2008), 105–119.

[91] D.E. Edmunds, J. Lang, “Gelfand numbers and widths”, *J. Approx. Theory*, **166** (2013), 78–84.

[92] D.E. Edmunds, H. Triebel, “Spectral theory for isotropic fractal drums”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **326** (1998), 1269–1274.

[93] D.E. Edmunds, H. Triebel, “Eigenfrequencies of isotropic fractal drums”, *Operator Theory: Advances and Applications*, **110** (1999), 81–102.

[94] D.E. Edmunds, H. Triebel, *Function spaces, entropy numbers, differential operators.* Cambridge Tracts in Mathematics, **120** (1996). Cambridge University Press.

[95] A. El Kolli, “n-ième épaisseur dans les espaces de Sobolev”, *J. Approx. Theory*, **10** (1974), 268–294.

[96] W.D. Evans, D.J. Harris, “Fractals, trees and the Neumann Laplacian”, *Math. Ann.*, **296**:3 (1993), 493–527.

[97] W.D. Evans, D.J. Harris, J. Lang, “The approximation numbers of Hardy-type operators on trees”, *Proc. London Math. Soc.* **(3) 83**:2 (2001), 390–418.

[98] W.D. Evans, D.J. Harris, L. Pick, “Weighted Hardy and Poincaré inequalities on trees”, *J. London Math. Soc.*, **52**:2 (1995), 121–136.

[99] M. Frazier, S. Roudenko, "Matrix-weighted Besov spaces and conditions of $\mathcal{A}_p$ type for $0 < p \leqslant 1$", *Indiana Univ. Math. J.*, **53**:5 (2004), 1225–1254.

[100] A. Gąsiorowska, L. Skrzypczak, "Some s-numbers of embeddings of function spaces with weights of logarithmic type", *Math. Nachr.*, 1–15 (2012) / DOI 10.1002/mana.201100086.

[101] A. Gąsiorowska, "Gelfand and Kolmogorov numbers of embedding of radial Besov and Sobolev spaces", *Function spaces IX*, 91–106, Banach Center Publ., 92, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2011.

[102] M.L. Goldman, "Hardy Type Inequalities on the Cone of Quasimonotone Functions". Research report 98/31, Russian Acad. of Sciences, Far Eastern Branch, Khabarovsk, 1998.

[103] V. Gol'dshtein, A. Ukhlov, "Weighted Sobolev spaces and embedding theorems", *Trans. AMS*, **361**:7 (2009), 3829–3850.

[104] K.-G. Grosse-Erdmann, The Blocking Technique, Weighted Mean Operators and Hardy's Inequality (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1679. Springer-Verlag, Berlin, 1998), 114 pp.

[105] P. Gurka, B. Opic, "Continuous and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces. I", *Czech. Math. J.* **38(113)**:4 (1988), 730–744.

[106] P. Gurka, B. Opic, "Continuous and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces. II", *Czech. Math. J.* **39(114)**:1 (1989), 78–94.

[107] P. Gurka, B. Opic, "Continuous and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces. III", *Czech. Math. J.* **41(116)**:2 (1991), 317–341.

[108] D.D. Haroske, *Envelopes and sharp embeddings of function spaces.* Volume 437 of Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.

[109] D.D. Haroske, I. Piotrowska, "Atomic decompositions of function spaces with Muckenhoupt weights, and some relation to fractal analysis", *Math. Nachr.*, **281**:10 (2008), 1476–1494.

[110] D.D. Haroske, C. Schneider, "Besov spaces with positive smoothness on $\mathbb{R}^n$, embeddings and growth envelopes", *J. Approx. Theory*, **161** (2009), 723–747.

[111] D.D. Haroske, L. Skrzypczak, "Entropy and approximation numbers of function spaces with Muckenhoupt weights", *Rev. Mat. Complut.*, **21**:1 (2008), 135–177.

[112] D.D. Haroske, L. Skrzypczak, "Entropy and approximation numbers of embeddings of function spaces with Muckenhoupt weights, II. General weights", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **36**:1 (2011), 111–138.

[113] D.D. Haroske, L. Skrzypczak, "Entropy numbers of embeddings of function spaces with Muckenhoupt weights, III. Some limiting cases," *J. Funct. Spaces Appl.* **9**:2 (2011), 129–178.

[114] D.D. Haroske, L. Skrzypczak, "Spectral theory of some degenerate elliptic operators with local singularities", *J. Math. An. Appl.*, **371**:1 (2010), 282–299.

[115] D.D. Haroske, H. Triebel, "Entropy numbers in weighted function spaces and eigenvalue distribution of some degenerate pseudodifferential operators I", *Math. Nachr.*, **167** (1994), 131–156.

[116] D.D. Haroske, H. Triebel, "Wavelet bases and entropy numbers in weighted function spaces", *Math. Nachr.*, **278**:(1–2) (2005), 108–132.

[117] H.P. Heinig, "Weighted norm inequalities for certain integral operators, II", *Proc. AMS*, **95** (1985), 387–395.

[118] S. Heinrich, "On the relation between linear n-widths and approximation numbers", *J. Approx. Theory*, **58**:3 (1989), 315–333.

[119] T. Horiuchi, "The imbedding theorems for weighted Sobolev spaces", *J. Math. Kyoto Univ.*, **29**:3 (1989), 365–403.

[120] Jain Pankaj, Bansal Bindu, Jain Pawan K., "Continuous and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces", *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **66**:3–4 (2000), 665–677.

[121] Jain Pankaj, Bansal Bindu, Jain Pawan K., "Certain imbeddings of Sobolev spaces with power type weights", *Indian J. Math.*, **44**:3 (2002), 303–321.

[122] Jain Pankaj, Bansal Bindu, Jain Pawan K., "Certain imbeddings of weighted Sobolev spaces", *Math. Ineq. Appl.*, **6**:1 (2003), 105–120.

[123] J. Kadlec, A. Kufner, "Characterization of functions with zero traces by integrals width weight functions, I", *Časopis. pěst. mat.*, **91** (1966), 463–471.

[124] J. Kadlec, A. Kufner, "Characterization of functions with zero traces by integrals width weight functions, II", *Časopis. pěst. mat.*, **92** (1967), 16–28.

[125] A.N. Kolmogorov, "Über die beste Annäherung von Funktion einer gegebenen funktionenklasse", *Ann. Math.*, **37** (1936), 107–110.

[126] V.N. Konovalov, D. Leviatan, "Kolmogorov and linear widths of weighted Sobolev-type classes on a finite interval," *Anal. Math.*, **28**:4 (2002), 251–278.

[127] A. Kufner, "Einige Eigenschaften der Sobolevschen Räume mit Belegungsfunktionen", *Czech. Math. J.*, **15 (90)** (1965), 597–620.

[128] A. Kufner, "Imbedding theorems for general Sobolev weight spaces", *Ann. Scuola Sup. Pisa*, **23** (1969), 373–386.

[129] A. Kufner, *Weighted Sobolev spaces.* Teubner-Texte Math., 31. Leipzig: Teubner, 1980.

[130] A. Kufner, L. Maligranda, and L.-E. Persson, The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results (Vydavatelsky Servis, Plzeň, 2007), 162 pp.

[131] A. Kufner, B. Opic, "Remark on compactness of imbeddings in weighted spaces", *Math. Nachr.*, **133** (1987), 63–70.

[132] A. Kufner and L.-E. Persson, Weighted Inequalities of Hardy Type (World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003), 357 pp.

[133] Th. Kühn, "Entropy numbers of general diagonal operators", *Rev. Mat. Complut.*, **18**:2 (2005), 479–491.

[134] Th. Kühn, "Entropy numbers in sequence spaces with an application to weighted function spaces", *J. Approx. Theory*, **153**:1 (2008), 40–52.

[135] Th. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, and L. Skrzypczak. "Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces". Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik Math/Inf/13/03, p. 1–57, Universität Jena, Germany, 2003.

[136] Th. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, and L. Skrzypczak, "Entropy numbers of Sobolev embeddings of radial Besov spaces", *J. Approx. Theory* **121** (2003), 244–268.

[137] Th. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, and L. Skrzypczak. "Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces", *Constr. Approx.*, **23** (2006), 61–77.

[138] Th. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, L. Skrzypczak, "Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces II", *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **49** (2006), 331–359.

[139] Th. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, and L. Skrzypczak, "Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces III. Weights of logarithmic type", *Math. Z.*, **255**:1 (2007), 1–15.

[140] J. Lang, "Improved estimates for the approximation numbers of Hardy-type operators", *J. Appr. Theory*, **121**:1 (2003), 61–70.

[141] J. Lehrbäck, "Weighted Hardy inequalities beyond Lipschitz domains", *Proc. AMS*, **142**:5 (2014), 1705-1715.

[142] L. Leindler, "Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood", *Acta Sci. Math.*, **31** (1970), 279–285.

[143] G. Leoni, *A first Course in Sobolev Spaces.* Graduate studies in Mathematics, vol. 105. AMS, Providence, Rhode Island, 2009.

[144] M.A. Lifshits, W. Linde, "Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **157**:745, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[145] M.A. Lifshits, W. Linde, Shi Zhan, "Small deviations of Gaussian random fields in L_q-spaces", *Electronic J. Prob.*, **11** (2006), paper 46, 1204–1233.

[146] M.A. Lifshits, "Bounds for entropy numbers for some critical operators", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **364**:4 (2012), 1797–1813.

[147] M.A. Lifshits, W. Linde, "Compactness properties of weighted summation operators on trees", *Studia Math.*, **202**:1 (2011), 17–47.

[148] M.A. Lifshits, W. Linde, "Compactness properties of weighted summation operators on trees — the critical case", *Studia Math.*, **206**:1 (2011), 75–96.

[149] W. Linde, "Kolmogorov numbers of Riemann – Liouville operators over small sets and applications to Gaussian processes", *J. Appr. Theory*, **128**:2 (2004), 207–233.

[150] E.N. Lomakina, V.D. Stepanov, "On asymptotic behavior of the approximation numbers and estimates of Schatten–von Neumann norms of the Hardy-type integral operators". In: Function Spaces and Applications (Proceedings of Delhi Conference, 1997), Narosa Publishing House, New Delhi, 2000, 153–187.

[151] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces.* Cambridge Univ. Press, 1995.

[152] S.D. Moura, *Function spaces of generalized smoothness.* Dissertationes Math., 398 (2001). 88 pp.

[153] B. Muckenhoupt, "Hardy's inequality with weights", *Studia Math.* **44**:1 (1972), 31–38.

[154] K. Naimark, M. Solomyak, "Geometry of Sobolev spaces on regular trees and the Hardy inequality", *Russian J. Math. Phys.*, **8**:3 (2001), 322–335.

[155] J. Nečas, "Sur une méthode pour résoudre les equations aux dérivées partielles dy type elliptique, voisine de la varitionelle", *Ann. Scuola Sup. Pisa*, **16**:4 (1962), 305–326.

[156] R. Oinarov, S.Y. Rakhimova, "Weighted Hardy inequalities and their applications to oscillation theory of half-linear differential equations", *Eur. Math. J.*, **1**:2 (2010), 110–121.

[157] A. Pietsch, "s-numbers of operators in Banach space", *Studia Math.*, **51** (1974), 201–223.

[158] A. Pinkus, *n-widths in approximation theory.* Berlin: Springer, 1985.

[159] I. Piotrowska, "Traces on fractals of function spaces with Muckenhoupt weights", *Funct. Approx. Comment. Math.*, **36** (2006), 95–117.

[160] I. Piotrowska, "Entropy and approximation numbers of embeddings between weighted Besov spaces", *Function spaces VIII*, 173–185. Banach Center Publ., **79**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2008.

[161] G. Pisier, *The volume of convex bodies and Banach spaces geometry.* New York: Cambridge Univ. Press, 1989.

[162] E.T. Sawyer, "Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **281**:1 (1984), 329–337.

[163] Shun Zhang, Gensun Fang, "Gelfand and Kolmogorov numbers of Sobolev embeddings of weighted function spaces", *J. Compl.*, **28** (2012), 209–223.

[164] Shun Zhang, Gensun Fang, Fanglun Huang, "Gelfand and Kolmogorov numbers of Sobolev embeddings of weighted function spaces. II", arXiv:1105.5499v3.

[165] G. Sinnamon, "A weighted gradient inequality", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **111**:3-4 (1989), 329–335.

[166] G. Sinnamon, V.D. Stepanov, "The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$", *J. London Math. Soc. (2)*, **54**:1 (1996), 89–101.

[167] L. Skrzypczak, "On approximation numbers of Sobolev embeddings of weighted function spaces", *J. Approx. Theory*, **136** (2005), 91–107.

[168] M. Solomyak, "On approximation of functions from Sobolev spaces on metric graphs", *J. Approx. Theory*, **121**:2 (2003), 199–219.

[169] M. Stynes, R.B. Kellogg, "N-widths for singularly perturbed problems", *Math. Bohemica*, **127**:2 (2002), 343–352.

[170] G. Talenti, "Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze", *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **39**, (1969) 171–185.

[171] G. Tomaselli, "A class of inequalities", *Boll. Un. Mat Ital.*, **2** (1969), 622–631.

[172] H. Triebel, *Theory of Function Spaces* (Birkhäuser, Basel, 1983).

[173] H. Triebel, *Theory of Function Spaces II* (Birkhäuser, Basel, 1992).

[174] H. Triebel, *Theory of function spaces III.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[175] H. Triebel, *Fractals and spectra.* Birkhäuser, Basel, 1997.

[176] H. Triebel, "Approximation numbers in function spaces and the distribution of eigenvalues of some fractal elliptic operators", *J. Approx. Theory*, **129**:1 (2004), 1–27.

[177] H. Triebel, "Entropy and approximation numbers of limiting embeddings, an approach via Hardy inequalities and quadratic forms", *J. Approx. Theory*, **164**:1 (2012), 31–46.

[178] B.O. Turesson, *Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces.* Lecture Notes in Mathematics, 1736. Springer, 2000.

[179] J. Väisälä, "Unions of John domains", *Proc. AMS*, **128**:4 (2000), 1135–1140.

[180] J. Vybiral, "Widths of embeddings in function spaces", *Journal of Complexity*, **24** (2008), 545–570.

[181] А.А. Васильева, “Колмогоровские поперечники весовых классов Соболева на кубе”, *Труды ИММ УрО РАН*, **16**:4 (2010), 100–116.

[182] А.А. Васильева, “Поперечники весовых классов Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона”, *Труды МИАН*, **280** (2013), 97–125.

[183] А.А. Васильева, “Поперечники весовых классов Соболева с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества”, *Докл. АН*, **459**:2 (2014), 142–144.

[184] А.А. Васильева, “Достаточные условия вложения весового класса Соболева на области с условием Джона”, *Сиб. мат. журнал*, **56**:1 (2015), 65–81.

[185] A.A. Vasil'eva, “Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes on a domain for a special class of weights”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **18**:3 (2011), 353–385.

[186] A.A. Vasil'eva, “Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes on a domain for a special class of weights. II”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **18**:4 (2011), 465–504.

[187] A.A. Vasil'eva, “Kolmogorov and linear widths of the weighted Besov classes with singularity at the origin”, *J. Appr. Theory*, **167** (2013), 1–41.

[188] A.A. Vasil'eva, “Embedding theorem for weighted Sobolev classes on a John domain with weights that are functions of the distance to some h-set”, *Russ. J. Math. Phys.*, **20**:3 (2013), 360–373.

[189] A.A. Vasil'eva, “Embedding theorem for weighted Sobolev classes on a John domain with weights that are functions of the distance to some h-set”, *Russ. J. Math. Phys.* **21**:1 (2014), 112–122.

[190] A.A. Vasil'eva, “Widths of weighted Sobolev classes on a John domain: strong singularity at a point”, *Rev. Mat. Compl.*, **27**:1 (2014), 167–212.

[191] A.A. Vasil'eva, “Embeddings of weighted Sobolev classes on a John domain”, *Euras. Math. J.*, **5**:3 (2014), 129–134.

[192] A.A. Vasil'eva, “Widths of function classes on sets with tree-like structure”, *J. Appr. Theory*, **192** (2015), 19–59 (published online 26 November 2014).

[193] A.A. Vasil'eva, “Estimates for norms of two-weighted summation operators on a tree under some restrictions on weights”, *Math. Nachr.* 1–24 (2015) /DOI 10.1002/mana.201300355 (published online 25 February 2015).

[194] A.A. Vasil'eva, “Widths of weighted Sobolev classes with weights that are functions of the distance to some h-set: some limit cases”, *Russ. J. Math. Phys.*, **22**:1 (2015), 127–140.

[195] А.А. Васильева, “Поперечники и теоремы вложения многомерных весовых соболевских классов”, *Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 15-ой Саратовской зимней школы.* Саратов, 2010. Стр. 43–44.

[196] А.А. Васильева, “Колмогоровские поперечники весовых классов Бесова с сингулярными весами и конечномерных шаров в смешанной норме”, *Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы.* Воронеж, 2011. Стр. 56–57.

[197] А.А. Васильева, “Колмогоровские поперечники весовых классов Соболева на области с условием гибкого конуса”. *Международная конференция, посвященная 110-й годовщине И.Г. Петровского (XXIII совместное заседание ММО и семинара им. И.Г. Петровского): тезисы докладов.* Москва, 2011. Стр. 166–167.

[198] А.А. Васильева, “Линейные поперечники весовых классов Бесова”. *Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 16-ой Саратовской зимней школы.* Саратов, 2012. Стр. 38–39.

[199] А.А. Васильева, “Теоремы вложения для весовых классов Соболева с весами, являющимися функцией расстояния до h-множества”, *Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы.* Воронеж, 2013. Стр. 40–41.

[200] А.А. Васильева, “Поперечники весовых классов Соболева с весами, являющимися функциями расстояния до h-множества”, *Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвящённая 105-летию С.Л Соболева. Тезисы докладов.* Новосибирск, 18–24 августа 2013 г. Тезисы докладов. Стр. 370.

[201] А.А. Васильева, “Оценки норм двухвесовых операторов суммирования на дереве при дополнительных условиях на веса”. *Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 17-ой Саратовской зимней школы.* Саратов, 2014. Стр. 66–68.