УТВЕРЖДАЮ
Директор
Института математики и механики
им. Н.Н.Красовского
Уральского отделения
Российской академии наук
доктор физ.-мат. наук

_______________ Н.Ю. Лукоянов
03 декабря 2015 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертационной работе Васильевой Анастасии Андреевны "Теоремы вложения и поперечники весовых функциональных классов", представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа посвящена изучению свойств многомерных функциональных пространств, а именно доказательству новых теорем вложения весовых пространств Соболева на областях с условием Джона, получению двухсторонних совпадающих по порядку оценок поперечников весовых пространств Соболева в весовых пространствах Лебега и поперечников весовых пространств Бесова.

Задачи о вложениях функциональных классов берут начало с исследований С. Л. Соболева, С. М. Никольского, О. В. Бесова и других авторов. Функциональные пространства с весами имеют важные приложения в задачах, связанных с решением дифференциальных уравнений с вырожденными коэффициентами. Первые результаты о вложениях весовых классов Соболева были получены в работах Л. Д. Кудрявцева, Й. Нечаса, А. Куфнера и Х. Трибеля.

Поперечники функциональных классов являются количественными характеристиками компактных вложений. Понятия колмогоровских, линейных, гельфандовских и бернштейновских поперечников появились в работах А. Н. Колмогорова и В. М. Тихомирова. В одномерном случае в некоторых ситуациях такие поперечники удалось вычислить точно (В. М. Тихомиров, А. П. Буслаев, Ю. Н. Субботин, Н. П. Корнейчук и другие авторы). В 1960–80-е годы усилиями Ю.И.Маковоза, В.Е.Майорова, Б.С.Кашина и многих других была решена задача о порядковых оценках поперечников соболевских классов функций в метриках Лебега на отрезке и кубе и связанная с этим задача об оценке поперечников конечномерных шаров. На нахождение точных констант здесь рассчитывать не приходится. Тогда же появились первые результаты об оценках сверху поперечников весовых классов Соболева, а подробно эта задача стала изучаться с начала 1990-х годов. К настоящему времени по теории поперечников опубликованы сотни работ, но несмотря на это, данная теория очень далека от завершения, особенно для областей со сложными границами в пространствах функций нескольких переменных. Учитывая это обстоятельство и тот факт, что теоремы вложения и результаты теории поперечников находят многочисленные применения в теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и в вычислительной математике, тематика диссертации представляется несомненно актуальной.

Диссертация состоит из оглавления, введения, шести глав, заключения, списка обозначений и списка цитируемой литературы, насчитывающего 201 наименование. Полный объем диссертации составляет 259 страниц.

Во **введении** формулируются цели и задачи диссертации, обосновывается их актуальность, описывается содержание работы, дается краткий библиографический обзор и формулируются основные результаты.

В **первой главе** при достаточно общих условиях на веса получена теорема вложения весовых классов Соболева в весовые пространства Лебега функций, определенных на многомерной области, удовлетворяющей условию Джона (теорема 1). Основным результатом этой главы является теорема 2, в которой получены двухсторонние порядковые оценки поперечников весовых классов Соболева с весами и областью, удовлетворяющими тем же условиям, что и в теореме 1. Показано, что в этом случае порядковые оценки поперечников такие же, как и в невесовом случае для области, являющейся кубом.

Отметим, что в процессе доказательства теорем 1 и 2 диссертанту пришлось преодолеть значительные трудности при построении последовательности разбиений области, чтобы можно было получить нужные приближения кусочно-полиномиальными функциями и применить метод дискретизации Майорова. Большая часть главы посвящена построению древоподобной структуры области, удовлетворяющей условию Джона с параметром $a > 0$. Каждое поддерево порождает подобласть, удовлетворяющую условию Джона с параметром, зависящим только от a и размерности пространства. По функции множества строятся последовательности разбиений деревьев и кубов. Ранее похожие разбиения кубов строились в работах М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка, А. Коэна, П. Петрушева, Р. ДеВора и других авторов. В диссертации строятся разбиения, удовлетворяющие следующему дополнительному свойству: каждый элемент разбиения пересекается с не более, чем C элементами соседних разбиений, где C зависит только от максимальной степени вершины дерева (соответственно размерности пространства).

Во **второй главе** также изучается задача об оценках поперечников весовых классов Соболева. Здесь область Ω, на которой заданы функции из классов Соболева, имеет гораздо более простую структуру, чем в главе 1: она является множеством точек из $\mathbb{R}^d$, заключенных между графиками двух липшицевых функций, определенных на множестве $D \subset \mathbb{R}^{d-1}$ с липшицевой границей. Однако условия на веса гораздо более общие — это измеримые неотрицательные функции с очень общими условиями на рост или убывание вблизи границы множества. При сделанных предположениях получены (теорема 3) двухсторонние порядковые оценки поперечников, которые снова оказываются такими же, как и в случае единичных весов и области, являющейся кубом.

Возникающие в рассматриваемом случае технические трудности связаны с тем, что весовые функции могут очень быстро изменяться даже далеко от границы области, поэтому известными интегральными представлениями для получения теорем вложения воспользоваться не удается. Диссертантом доказывается справедливость некоторой поточечной оценки приближения гладкой функции полиномом на подобласти через специально построенный интегральный оператор, затем оценивается его норма в пространствах с весами. Кроме того, построенных в предыдущей главе разбиений куба оказывается недостаточно, приходится строить некоторые дополнительные разбиения.

Третья глава посвящена получению оценок норм операторов суммирования на дереве при некоторых дополнительных условиях на веса. При $p < q$ оценки доказываются с помощью теоремы Эванса – Харриса – Пика. При $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $p \geqslant q$ рассмотрены веса, являющиеся функциями расстояния до корня дерева. Доказана эквивалентность нормы оператора суммирования на слабо регулярном дереве и нормы двухвесового оператора суммирования последовательностей, а для регулярного дерева доказано точное равенство; это обобщает результат К. Наймарк и М.З. Соломяка, полученный для случая $p = q = 2$ и регулярного дерева.

Результаты третьей главы применяются в **четвертой главе** для доказательств теорем вложения весовых классов Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона, в случае, когда веса являются функциями расстояния до h-множества. Отметим, что примерами h-множеств являются липшицевы поверхности, а также некоторые фрактальные множества. В теоремах 9, 10 и 11 устанавливается вложение $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ при различных условиях связи между функцией h и весами g и v. При доказательстве используется построенная в первой главе древоподобная структура области с условием Джона. По h-множеству дерево разбивается на поддеревья и строится новое "редуцированное" дерево, каждой вершине которого соответствует подобласть, на которой веса являются "почти постоянными". Затем применяются интегральное представление Решетняка и оценки норм операторов суммирования на дереве.

В первом параграфе **пятой главы** рассматриваются функциональные классы на множестве с древоподобной структурой, удовлетворяющие некоторым специальным аксиомам. Примерами таких функциональных классов являются весовые классы Соболева на областях, весовые классы Соболева на метрических деревьях и их дискретные аналоги. Для этого общего случая получена оценка сверху поперечников (теорема 5.1.1). Эта теорема применяется в следующем параграфе пятой главы при получении двухсторонних порядковых оценок поперечников весовых классов Соболева на области с условием Джона. Веса здесь имеют вид $g(x) = \varphi_g(\mathrm{dist}\,(x, \Gamma))$, $v(x) = \varphi_v(\mathrm{dist}\,(x, \Gamma))$, где $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество; функции φ_g, φ_v, h имеют вид степени, умноженной на некоторую медленно меняющуюся функцию (теоремы 12 и 13). Верхняя оценка поперечников вытекает из теоремы 5.1.1. Справедливость нижней оценки, совпадающей по порядку с верхней, доказывается с помощью специальных построений функций и обобщения метода дискретизации Майорова. Кроме того, с помощью этих оценок снизу доказывается, что условия на параметры, при которых есть непрерывное вложение, являются точными. Отметим, что в отличие от первых двух глав, здесь порядковые оценки могут отличаться от оценок в невесовом случае.

Полученные в пятой главе результаты обобщают и уточняют полученные ранее результаты Трибеля. В его работах рассматривались случаи, когда либо Ω имеет гладкую границу, $\Gamma = \partial\Omega$ и $p \leqslant q$, либо Ω — шар с центром в нуле, $\Gamma = \{0\}$ и $p = q$. При этом, полученные им оценки не всегда были точными по порядку.

В первом и втором параграфах **шестой главы** получены оценки колмогоровских и соответственно линейных поперечников конечномерных шаров в невесовой смешанной норме. В ряде случаев эта задача была решена А. Д. Изааком и Э. М. Галеевым. Диссертант получила оценки в не изученных ранее ситуациях. В третьем параграфе эти результаты используются для получения порядковых оценок поперечников весовых классов Бесова с весами, имеющими сильную особенность в точке. Ранее в работе Д.Хароске и Л.Скрыпчака 2008 года было показано, что весовые пространства Бесова с весами, удовлетворяющими условию Макенхаупта, изоморфны пространствам последовательностей с некоторыми смешанными весовыми нормами. Там же были получены оценки линейных поперечников $B^{s_1}_{p_1,q_1}(w_1)$ в пространстве $B^{s_2}_{p_2,q_2}(w_2)$ в случае, когда веса имеют степенную особенность в точке. Такая особенность на порядки поперечников не влияла в случае компактного вложения. В диссертации рассмотрены веса, имеющие в окрестности нуля вид $|x|^{\beta_i}|\log|x||^{\alpha_i}$. Параметры β_i удовлетворяют некоторому предельному соотношению. Особенность такого вида уже влияет на порядки поперечников; более того, эти оценки зависят от q_i.

Оценивая диссертацию в целом, следует отметить, что изложение полученных результатов в работе проведено ясно и последовательно. Все утверждения четко сформулированы и строго доказаны. Основные теоремы диссертации обобщают и усиливают известные результаты многих авторов. Для доказательства результатов работы диссертанту пришлось преодолеть значительные идейные и технические трудности. В качестве замечания можно констатировать недостаточную, на наш взгляд, дружественность текста диссертации по отношению к читателю. К примеру, формулировки основных теорем имеются только во введении, а в текстах глав, где они доказываются, не повторяются; доказательство теоремы 10 состоит из одного предложения и выглядит так: "Теорема 10 следует из теорем 4.2.1, 7 и предложения 4.3.1"; в работе неоднократно говорится об s-числах, однако аккуратного определения этого понятия мы в диссертации не нашли, есть только ссылка на работу А. Пича. Указанный недостаток, тем не менее, никак не умаляет научную ценность работы и может быть объяснен желанием диссертанта вместить в ограниченный объем диссертации как можно большее количество информации.

Основные результаты диссертации являются новыми, они полностью отражены в публикациях автора, опубликованы в 21 научной работе, из них 14 из перечня ВАК РФ. По результатам диссертации сделаны доклады на многих российских и международных конференциях. Научные результаты диссертации, выносимые на защиту, получены автором лично, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть использованы в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Московском, Санкт-Петербургском, Уральском федеральном, Новосибирском, Самарском университетах и других вузах и научных учреждениях, где проводятся исследования по теории приближений, дифференциальным уравнениям и вычислительной математике. Кроме того, полученные в диссертации результаты могут быть использованы в учебном процессе в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Тематика и содержание диссертации А. А. Васильевой отвечает паспорту специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертационная работа “Теоремы вложения и поперечники весовых функциональных классов” Васильевой Анастасии Андреевны является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных ее автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области теории приближений функций.

Диссертация удовлетворяет п. 9 “Положения о присуждении ученых степеней” и всем другим требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, Васильева Анастасия Андреевна, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и одобрен на совместном заседании отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений ИММ УрО РАН (протокол № 103 от 03.12.2015 г.).

Зав. отделом
теории приближения функций ИММ УрО РАН
доктор физ.-мат. наук,
01.01.01,
старший научный сотрудник В. Т. Шевалдин
(e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru)

Старший научный сотрудник
отдела аппроксимации
и приложений ИММ УрО РАН
кандидат физ.-мат. наук,
01.01.01,
старший научный сотрудник С. И. Новиков
(e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru)

Подписи В.Т.Шевалдина и С.И.Новикова заверяю.

Ученый секретарь ИММ УрО РАН
кандидат физ.-мат. наук О.Н.Ульянов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16, ИММ УрО РАН; тел. +7 (343) 374-83-32