

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
доктора физико-математических наук,
профессора Калябина Геннадия Анатольевича
на диссертационную работу
Васильевой Анастасии Андреевны
"ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ПОПЕРЕЧНИКИ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ" ,
представленную на соискание ученой
степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Теория вложения функциональных классов, основы которых заложены С. Л. Соболевым более 80 лет назад, уже давно является важным самостоятельным разделом вещественного анализа и широко применяется к дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и вычислительной математике. Количественно дополняющая ее теория поперечников, берущая начало в работе А. Н. Колмогорова (1936) и активно развиваемая многими авторами начиная с 1960-х, также имеет разнообразные приложения в современной математике. Возникшие позднее весовые варианты функциональных пространств над общими областями позволяют, например, исследовать дифференциальные уравнения с переменными (вырождающимися) коэффициентами при сильных особенностях границы. Несмотря на весьма значительный прогресс в теории поперечников, достигнутый в последние 40 лет, многие принципиально важные вопросы до сих пор не имеют удовлетворительного решения. Именно эти трудные задачи служат предметом синтетического исследования в рецензируемой диссертации А. А. Васильевой.

Достоверность и обоснованность сформулированных положений подтверждаются приводимыми подробными разъяснениями и строгими доказательствами, базирующимися на современных методах теории функций, многочисленными публикациями автора по теме диссертации в высокорейтинговых математических журналах и апробацией результатов на специализированных семинарах и конференциях международного уровня.

В диссертации автором самостоятельно получены несколько новых важных результатов, среди которых можно выделить широкие **достаточные условия** на весовые функции, обеспечивающих совпадение порядков поперечников с их значениями для невесовых классов Соболева (в диссертации эти классы всюду определяются через конечность $L_{p,q}$ -норм производных **только наивысших** порядков) на кубе; **теоремы вложения** весовых классов Соболева на областях с условием Джона в весовые пространства Лебега и **порядковые оценки** поперечников для случая, когда веса являются функциями расстояния от заданного h -множества; для конечномерных шаров в ранее мало исследованных **смешанных нормах**, а также для весовых **пространств Бесова** на евклидовых пространствах \mathbb{R}^d .

Диссертация состоит из введения, шести глав и списка литературы, содержащего 201 название. Общий ее объем составляет 259 страниц, в ней имеется 7 информативных рисунков, наглядно поясняющих геометрически трудные места в доказательствах.

Во **Введении** (стр. 4 – 30), представляющем собой законченный математический текст, приведены все необходимые определения, обстоятельный исторический обзор литературы по изучаемой проблематике, а также сформулируются 14 основных Теорем и даются их сопоставление с ранее полученными результатами ведущих

специалистов в этой области. Известные теоремы, используемые в дальнейших построениях, имеют отдельную удобную нумерацию латинскими буквами.

В **Главе 1** даются широкие достаточные условия на веса, при которых формулы для порядков поперечников и s -чисел классов Соболева в областях с условием Джона те же, что и в случае невесовых классов на кубе. Это продолжает классические исследования Тихомирова, Исмагилова, Майорова, Кашина, Бирмана – Соломяка, относящиеся к пространствам Соболева с единичным весом на кубе в пространстве Лебега с весом и без веса, а также дополняет одномерные результаты Лифшица, Линде, Ланга, Эванса, Эдмундса и других авторов. Для доказательства порядковых оценок на областях с условием Джона вводится древоподобная структура и используются специальные разбиения деревьев.

Глава 2 посвящена доказательству теоремы 3, дающей качественно такие же порядковые оценки поперечников весовых классов Соболева в областях с липшицевой границей относительно весовых пространств Лебега в предположении монотонности весов вдоль выделенного направления, причем допускаются их быстрые изменения даже вдали от границы области.

В **Главе 3** получены точные оценки норм двухвесовых операторов суммирования (неравенства типа Харди) на пространствах функций, определенных на почти регулярных деревьях, дополняющие результаты Эванса-Харриса-Пика, Беннетта, Бравермана-Степанова, Гольдмана, Гроссе-Эрдмана и других авторов.

Глава 4 посвящена доказательству теорем 9, 10, 11, дающих достаточные условия вложения $W_{p,g}(\Omega) \hookrightarrow L_{q,v}(\Omega)$ в случае, когда весовые функции g, v зависят только от расстояния до заданного h -множества Γ (примерами h -множеств могут служить снежинка Коха, липшицева k -мерная поверхность и т.п.). Ранее частные вари-

анты вложений такого рода исследовались Яковлевым, Куфнером, Опицем, Трибелем, Эль Колли.

В **Главе 5** при определенных ограничениях на h -функцию в Теоремах 12, 13 выявлено *принципиально новое* явление: колмогоровские поперечники могут двусторонне оцениваться посредством *нестепенных* величин. Для случая, когда веса имеют специальный вид и Γ – одноточечно или совпадает с $\partial\Omega$, Трибелем были получены несовпадающие степенные верхние и нижние оценки поперечников, что существенно слабее результатов Главы 5. Разработанные новые методы позволили автору найти также верхние оценки поперечников для функциональных классов на множествах с древовидной структурой (Теорема 5.1.1).

В последней **Главе 6** доказана теорема 14, в которой даются вполне эффективные (в терминах весов) формулы для порядков поперечников для пространств Бесова с весовой функцией, имеющей только одну особую точку. Эта задача ранее рассматривалась Трибелем, Хароске, Скрыпчаком в случае, когда локальная особенность отсутствует (или достаточно слабая) и поэтому на порядки поперечников не влияет. Диссертантом исследован некоторый специальный предельный случай, когда из-за особенности в точке порядки поперечников могут отличаться от оценок в невесовом случае.

Диссертация написана весьма насыщенным современным стилем, обстоятельно, с развернутыми определениями, полными и строгими доказательствами, необходимыми вспомогательными утверждениями, имеющими и самостоятельное значение, аккуратными ссылками на работы предшественников, и оформлена на высоком уровне типографского качества. Автор диссертации свободно владеет разнообразным инструментарием современного анализа.

Широкий спектр изученных в диссертации вопросов гармонич-

но сочетается с единством направления исследований – нахождение условий (компактного) вложения весовых классов Соболева в пространства Лебега и аппроксимационной квалификации этих вложений при различных предположениях относительно весовых функций и областей определения.

По теме диссертации автором опубликована 21 работа (без соавторов), из них 14 – в изданиях, рекомендованных ВАК. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации в 2009 – 2015 гг. были представлены на основных математических семинарах и конференциях по теории функциональных пространств и аппроксимации (Москва, Воронеж, Миасс, Новосибирск, Табарц (Германия) и др.).

Оппонент не обнаружил в тексте работы ни одной опечатки, хотя найдено несколько небольших стилистических погрешностей: например, одна и та же формула записана на стр. 23 – 26 три раза – под номерами (54), (60) и (69). На стр. 21 формула (39) может быть упрощена возведением ее в степень q . Отмеченные недостатки диссертации носят технический характер и никоим образом не снижают ее весьма высокой научной ценности.

Результаты диссертации имеют теоретическое значение. Они могут быть использованы в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте РАН им. В.А. Стеклова, Институте математики СО РАН им. С.Л. Соболева, Российском университете дружбы народов, Воронежском государственном университете, Саратовском государственном университете, а также в Университетах Йены (Германия), Альберты (Канада), Бари (Италия) в дальнейших теоретических исследованиях.

Некоторые части диссертации могут излагаться в виде спецкурсов на механико-математических факультетах университетов.

Сказанное позволяет сделать однозначный вывод о том, что **в целом** рецензируемая диссертационная работа по своему содержанию может быть квалифицирована как крупное научное достижение в теории вложений и аппроксимационных характеристик функциональных пространств.

Считаю, что диссертация А. А. Васильевой "**Теоремы вложения и перечисления весовых функциональных классов**" удовлетворяет всем требованиям п. 9 "Положения о присуждении ученых степеней", предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор – **Анастасия Андреевна Васильева**, безусловно, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

Профессор кафедры высшей математики и прикладной информатики ФГБОУ ВО "Самарский государственный технический университет", доктор физико-математических наук,

профессор  Калябин Геннадий Анатольевич

Место работы: 443100, г. Самара, Молодогвардейская, 244,
СамГТУ, корп. 8, комн. 508а.

Адрес электронной почты: gennadiy.kalyabin@gmail.com

Телефон: +7 (846) 337-03-13

Подпись профессора Г. А. Калябина заверяю:

Ученый секретарь ФГБОУ ВО СамГТУ,

доктор технических наук

профессор



Ю. А. Малиновская.

01.12.2015