

Отзыв официального оппонента о диссертационной работе  
Анастасии Андреевны Васильевой “Теоремы вложения и поперечники весовых  
функциональных классов” представленной на соискание ученой степени доктора  
физико-математических наук по специальности 01.01.01 – “вещественный,  
комплексный и функциональный анализ”

В работе исследуются вложения весовых функциональных пространств и количественные характеристики этих вложений — колмогоровские, линейные и гельфандовские поперечники.

Перейдем к содержанию диссертации. В первой главе изучается следующая задача: найти достаточные условия на веса  $g$  и  $v$ , при которых поперечники весового класса Соболева  $W_{p,g}^r(\Omega)$  на области, удовлетворяющей условию Джона, в весовом пространстве Лебега  $L_{q,v}(\Omega)$  имеют такие же порядки, как в случае  $\Omega = [0, 1]^d$  и  $g \equiv 1$ ,  $v \equiv 1$ . Области, удовлетворяющие условию Джона, могут иметь довольно сложную структуру, но не имеют нулевых внутренних углов. В 1980-е годы Ю.Г. Решетняком и Б. Боярским было доказано, что условие непрерывного (соответственно компактного) вложения невесового класса Соболева  $W_p^r(\Omega)$  в пространство  $L_q(\Omega)$  для области с условием Джона такое же, как в случае  $\Omega = [0, 1]^d$ .

В частности, в случае, когда веса являются функциями расстояния до некоторых подмножеств границы, удовлетворяющими  $\Delta_2$ -условию, функции, задающая веса  $g$  и  $v$ , являются соответственно убывающей и возрастающей, при этом  $gv \in L_\infty(\Omega)$  с  $\frac{1}{\kappa} = \frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ , при выполнении некоторых стандартных условий на параметры  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $d$  получены порядковые оценки поперечников.

Основная трудность при решении этой задачи состояла в построении подходящей последовательности разбиений, чтобы в дальнейшем можно было применить метод дискретизации Майорова. Для этого на области  $\Omega$  была введена древоподобная структура и затем получены результаты о семействах разбиений деревьев и кубов. Ранее разбиения метрических деревьев и кубов с похожими свойствами были получены в работах Бирмана, Соломяка, ДеВора, Петрушева, Коэна. Однако для оценки поперечников потребовались некоторые дополнительные свойства разбиений, и автор привел независимую конструкцию, описанную в виде рекурсии.

Во второй главе рассматривается та же задача для более простых областей, но для весов, допускающих локально сильные изменения. Предполагается, что эти веса монотонны по последнему аргументу, а их поверхности уровня липшицевы с одной и той же константой. Как и в предыдущей главе, предполагается, что  $gv \in L_\infty(\Omega)$ .

Из-за локальной нерегулярности весов возникают большие технические трудности, связанные с аппроксимацией кусочно-полиномиальными функциями. В частности, приходится строить дополнительные разбиения кубов, получать поточечные оценки гладких функций через специально построенный интегральный оператор.

В третьей главе получены оценки норм двухвесового оператора суммирования на дереве при дополнительных условиях на веса. При  $p \geq q$  изучен случай  $p \geq 1$ ,  $0 < q < \infty$ . Показано, что при дополнительных условиях на веса и дерево норма оператора суммирования на дереве эквивалентна норме оператора суммирования последовательностей; если дерево регулярное, то доказано точное равенство между этими нормами. При  $1 < p < q < \infty$  оценки выведены из результатов Эванса — Харриса — Пика.

В четвертой главе доказываются теоремы вложения весовых классов Соболева на области с условием Джона с весами, являющимися функциями расстояния до



$h$ -множества  $\Gamma$ , содержащегося в границе. Примерами  $h$ -множеств могут быть как липшицевы поверхности, так и некоторые фрактальные множества (кривая Коха, канторово множество и его многомерные аналоги). Предполагается, что функции, задающие веса, удовлетворяют  $\Delta_2$ -условию, и  $v \in L_q(\Omega)$ .

Для доказательства теорем вложения используется построенная в первой главе древоподобная структура области, строится разбиение дерева по множеству  $\Gamma$  и задача сводится к оценкам норм двухвесовых операторов суммирования на деревьях.

В пятой главе снова рассматривается задача об оценках поперечников весовых классов Соболева на области с условием Джона. Здесь веса такие же, как в четвертой главе, при этом функции, задающие веса, и функция  $h$  имеют специальный вид. В отличие от глав 1 и 2, порядки поперечников здесь могут быть не такими, как в невесовом случае.

Доказывается общая оценка сверху для поперечников функциональных классов на множествах с древоподобной структурой. Примерами таких функциональных классов являются рассмотренные здесь классы Соболева на области, а также классы Соболева на метрических деревьях и их дискретные аналоги на комбинаторных деревьях.

Для оценки снизу применяется обобщение метода дискретизации В.Е. Майорова. При этом в некоторых предельных случаях для параметров, задающих веса, возникают дополнительные технические трудности при построении функций, с помощью которых удастся применить метод дискретизации.

Из полученных оценок поперечников видно, что условия на параметры, при которых есть непрерывное или компактное вложение, неумлучшаемы.

Доказанные теоремы существенно обобщают полученные результаты Трибеля.

В шестой главе получены порядковые оценки поперечников весовых классов Бесова с сильной особенностью в точке. Известно, что пространства Бесова с весами, удовлетворяющими условию Макенхаупта, изоморфны весовым пространствам последовательностей с некоторой смешанной нормой. Ранее различными авторами изучалось влияние на порядки поперечников особенностей весов на бесконечности; если присутствовали локальные особенности, то они на порядки не влияли. Автором диссертации изучен случай, когда на порядки поперечников влияет особенность в точке. При этом возникла задача об оценках поперечников конечномерных шаров в смешанной норме (без весов).

В целом диссертация А.А. Васильевой является полным и систематическим исследованием в теории поперечников и теории функциональных пространств. Заложено трудами А.Н. Колмогорова и С.Л. Соболева направление сегодня находится в сфере интересов большого интернационального коллектива математиков. Автор диссертационной работы продолжает традиции и поддерживает приоритет результатов отечественной математической школы в теории вложений и поперечников. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации. Выносимые на защиту научные результаты диссертационной работы получены автором лично, являются новыми и обоснованы в виде четких математических доказательств. Результаты опубликованы в 21 работе, из них 14 из перечня ВАК РФ. Работ, написанных в соавторстве, не имеется.

По диссертационной работе можно сделать следующие замечания. Во-первых, граф структуры работы, взаимосвязи глав можно было бы четче геометрически обозначить. С моей точки зрения наблюдается легкая степень мотивационной недосказанности, которая, впрочем, могла быть следствием молодости соискателя. Некото-

рое неудобство для чтения вызывает отсутствие единого раздела новых понятий и обозначений, определения и обозначения являются распределенными по тексту. В отдельных случаях это приводит к нестыковкам. Например, через модуль вектора  $|x|$  обозначается как сумма координат, стр.4, так и евклидова длина, стр.12. На стр. 6 эта же характеристика обозначена как  $l_p$  норма.

Отмеченные выше замечания не оказывают существенного влияния на общую положительную оценку работы.

Оценивая диссертационную работу в целом, можно констатировать ее актуальность и научную новизну и квалифицировать ее как крупное научное достижение в теории приближений.


Всё сказанное выше позволяет заключить, что представленная диссертационная работа А. А. Васильевой “Теоремы вложения и поперечники весовых функциональных классов” удовлетворяет всем требованиям пп. 9 “Положения присуждения ученых степеней”, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, Васильева Анастасия Андреевна, заслуживает присуждение ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Заведующий кафедрой высшей математики  
ФГБОУ ВПО “Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)”  
доктор физико-математических наук, профессор  
1 декабря 2015 г.

 А.П. Буслаев

Буслаев Александр Павлович  
доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01  
apal2006@yandex.ru  
ФГБОУ ВПО “Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)”  
Почтовый адрес места работы: Россия, 125319, г. Москва, Ленинградский просп., д. 64.  
Телефон: +7 (499) 155 04 36

Подпись профессора А. П. Буслаева заверяю  
проректор МАДИ по научной работе

 Солнцев А.А.  
