ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертации Васильевой Анастасии Андреевны
«Теоремы вложения и поперечники весовых функциональных классов»
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Основным объектом исследований в диссертации А.А.Васильевой являются весовые классы функций с обобщенной гладкостью. Актуальность рассматриваемых в диссертации проблем не вызывает сомнения. В настоящее время пространства Соболева и их различные обобщения находят приложения практически во всех разделах современной непрерывной математики. Теоремы вложения, начиная еще с работ С.Л.Соболева, играют важную роль в теории дифференциальных уравнений. Связанные с теоремами вложения оценки поперечников характеризуют возможность аппроксимации конечномерными компактами.

Исследования по рассматриваемой в диссертации тематике имеют довольно длинную историю – колмогоровские поперечники и пространства Соболева появились почти одновременно в тридцатые годы прошлого века. Поперечники, связанные с пространствами Соболева, изучались в работах В.М. Тихомирова, М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка, Ю.И. Маковоза, Р.С. Исмагилова, Б.С. Кашина и других авторов. Были получены порядковые оценки поперечников соболевских классов функций в невесовом случае.

Теоремы вложения для весовых пространств Соболева существенным образом зависят от строения области и характеристик весовых функций. В весовом случае достаточные условия ограниченности и компактности оператора вложения соболевских классов функций в пространства функций меньшей гладкости и пространства Лебега были получены в работах Л.Д. Кудрявцева, А. Куфнера, П.И. Лизоркина и М.О. Отелбаева, Х. Трибеля, О.В. Бесова, В.Г. Мазьи и других авторов. Список цитируемой литературы содержит большое количество работ по этой тематике.

В различных ситуациях оценки поперечников весовых классов Соболева в пространствах Лебега были получены в работах М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка, Х. Трибеля, В.Д. Степанова, Е.Н. Ломакиной, М.О. Отелбаева, В.Д. Эванса и других авторов. При переходе к весовым классам Соболева появляются новые постановки задач. Самостоятельный интерес представляет вопрос об описании областей и классов весовых функций, для которых порядковые оценки поперечников оказываются такими же как и в невесовом случае. С другой стороны, безусловно важным вопросом является влияние характеристик (особенностей) весовых функций на порядковые оценки поперечников.

Диссертация имеет довольно большой объем, состоит из введения, шести глав, списка основных обозначений и списка литературы.

Во введении даются определения основных используемых в диссертации понятий, описываются постановки задач, приводится историческая справка и формулируются основные результаты.

В главе 1 рассматриваются весовые пространства Соболева $W^r_{p,g}(\Omega)$ на областях $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, удовлетворяющих условию Джона $(\Omega \in \mathbf{FC}(a))$. Рассмотрение областей с условием Джона представляется вполне естественным, поскольку для таких областей многие характеристики, связанные с невесовыми пространствами Соболева, имеют такой же вид, как и для единичного куба.

В теореме 1 доказывается вложение весового пространства Соболева $W^r_{p,g}(\Omega)$ в весовое пространство Лебега для весов, зависящих от расстояния до фиксированных граничных множеств и удовлетворяющих условиям довольно общего вида. В теореме 2 при выполнении условий теоремы 1 получены оценки поперечников весовых пространств Соболева, совпадающие по порядку с оценками для невесового случая.

Доказательства основных результатов первой главы основаны на введении в области определения древоподобной структуры, построении подходящих разбиений деревьев и аппроксимации соболевских функций кусочно-полиномиальными.

Основная задача, решаемая в главе 2, заключается в нахождении оценок поперечников весовых пространств Соболева в областях с липшицевой границей для достаточно широкого класса весовых функций, свойства которых по выделенной переменной характеризуются при помощи монотонно возрастающей последовательности липшицевых функций с фиксированным показателем Липшица.

В отличие от невесового случая, когда пространства Соболева в областях с липшицевой границей устроены вполне регулярным образом, в весовом случае многое зависит именно от структуры весов. Используемые в диссертации условия позволяют контролировать характеристики весовых функций, однако это требует построения последовательности довольно громоздких конструкций разбиения области. Автор весьма удачно иллюстрирует разбиение куба последовательностью простых диаграмм, которые помогают понять основные принципы разбиения.

В теореме 3 получены оценки поперечников для липшицевых областей и рассматриваемого класса весов. Как и в главе 1 порядковые оценки совпадают с с оценками для невесового случая.

В главе 3 рассматриваются двухвесовые операторы суммирования на деревьях. Существенное отличие рассматриваемой ситуации от двухвесовых операторов интегрирования и операторов суммирования последовательностей заключается в специфике определения оператора суммирования на деревьях.

В теореме 4 при $1 < p < q < \infty$ и достаточно просто формулируемых условиях на веса получены двухсторонние оценки нормы двухвесового оператора суммирования на деревьях, действующего из определенного на вершинах дерева пространства l_p в аналогичное пространство l_q.

В параграфе 3.3 рассматриваются оценки при показателях суммируемости $1 \leq p \leq \infty$ и $0 < q \leq p$. При дополнительных условиях в теореме 8 доказывается эквивалентность различных оценок в данном случае.

Глава 4 посвящена получению теорем вложения для весовых пространств Соболева в областях, удовлетворяющих условию Джона, в случае весовых функций, значения которых зависят от расстояния до некоторого h-множества Γ, лежащего на границе области.

В случае степенной функции $h(t) = t^s$ мера μ, заданная на h-множестве, допускает двухстороннюю оценку через s-меру Хаусдорфа. Такие множества обычно называют однородными s-множествами, они могут иметь фрактальную структуру, но на них удается корректно определить следы функций из пространств Соболева и Бесова. Из используемого в работе условия (37) для функции h следует выполнение для меры μ условия удвоения, что в свою очередь влечет оценку снизу для меры шара через некоторую степенную функцию от радиуса шара. Условия для функций φ_g и φ_v являются неявным ограничением на поведение весовых функций вблизи множества Γ.

В теоремах 9, 10, 11 при различных достаточных условиях на функцию h, доказывается вложение пространства Соболева $W^r_{p,g}(\Omega)$ в пространство Лебега $L_{q,v}(\Omega)$ и находятся оценки нормы оператора вложения.

Доказательства основаны на введении древоподобной структуры, согласованной со специальным разбиением однородного h-множества Γ, и сведении вопроса о существовании вложения к полученным в предыдущей главе оценкам нормы двухвесового оператора суммирования на дереве.

В главе 5 рассматривается ситуация, когда порядковые оценки поперечников весовых пространств Соболева отличаются от соответствующих оценок, получаемых в невесовом случае.

При выполнении условий предыдущей главы рассматриваются функции $h(t)$ специального вида: $h(t) = t^{\theta}\Lambda(t)$, где положительная на полуоси функция Λ абсолютно непрерывна и удовлетворяет часто используемому в различных ситуациях ограничению на поведение в окрестности нуля: $t\Lambda'(t)/\Lambda(t) \to 0$ при $t \to +0$. Выполнение аналогичных условий предполагается и для весовых функций.

Автор рассматривает специальный класс весовых функций, удовлетворяющих требуемым условиям и имеющих различные логарифмические особенности. Результаты теоремы 12 обобщают и уточняют результаты Х. Трибеля и показывают зависимость порядковых оценок поперечников от параметров рассматриваемых весовых функций. При этом в пункте 2 теоремы 12 вместо привычной степенной асимптотика оказывается логарифмической. Помимо этого обсуждаются вырожденные случаи, когда $\vartheta_n(W^r_{p,g}, L_{q,v}) = \infty$ при любых $n \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом асимптотические оценки поперечников даже для вполне регулярных областей существенным образом зависят от свойств весовых функций, что, вообще говоря, представляется вполне естественным.

В последней главе 6 получены порядковые оценки поперечников весовых пространств Бесова для специального класса весов, для описания особенностей которых используются логарифмические функции. При этом предполагается, что веса удовлетворяют широко используемому в теоремах вложения условию Макенхаупта. В работе выявлен новый эффект влияния сильных сингулярностей в нуле на асимптотические оценки поперечников, при изучавшихся ранее слабых сингулярностях определяющую роль играло поведение весовых функций на бесконечности. Используя изоморфность пространств Бесова с весами, удовлетворяющими условию Макенхаупта, пространствам последовательностей, автор строит подходящее "расщепление"носителей последовательностей (аналог разбиения области) и в ряде не изученных раньше случаев получает оценки поперечников конечномерных шаров в невесовой смешанной норме. Затем эти результаты применяются для оценки поперечников весовых классов Бесова.

В диссертационной работе А.А. Васильевой помимо 14-ти выделенных автором основных теорем имеется большое количество содержательных вспомогательных результатов, которые могут быть полезными при дальнейших исследованиях по рассматриваемой тематики.

В качестве замечаний можно отметить следующие моменты:

- желание в одном предложении дать какую-то общую характеристику большого количества работ порой приводит к не совсем точным утверждениям. На странице 5 после довольно обширного списка публикаций различных авторов, внесших вклад в развитие тематики, написано:“*Отметим, что в этих работах в определении весовых пространств Соболева присутствовало ограничение не только на производные порядка r, но и на младшие производные.*” Однако, пространства Соболева, в норме которых участвовали только старшие производные, рассматривались, к примеру, в указанных автором работах О.В.Бесова.

- в начале первой главы был бы к месту хотя бы небольшой комментарий о целях и принципах использования конструкций, обсуждаемых в первых двух параграфах. Понятие "дерево" пока не является стандартным термином в теории пространств Соболева. При этом во введении терминология, связанная с теорией графов, поясняется в связи с обсуждением результатов третьей главы, хотя используется уже в первой главе.

- представляется не совсем удачной структура текста диссертации, при которой основные результаты формулируются только во введении. Быть может стоило бы продублировать их в соответствующих параграфах. Не очень удобно, когда формулировку теоремы 12, доказательство которой начинается на странице 209, следует искать на странице 23. Прежде чем начинать параграф 6.3 на странице 233 с описания свойств функций w_1 и w_2 можно было бы хотя бы указать ссылку на их определение.

- несколько нелогичным выглядит использование в одной строке двух обозначений аргумента функции:

$$supp\,\varphi \subset \{y \in \mathbb{R}^d : |y| < 2\},\ \varphi(x) = 1 \text{ для } |x| \le 1.$$

При большом объеме текста диссертации избежать некоторых погрешностей в оформлении очень сложно. При этом следует заметить, что в целом диссертация написана в соответствии со стандартными требованиями, предъявляемыми к математическим текстам, а отмеченные замечания имеют редакционный характер и не влияют на правильность представленных в работе результатов.

Оценивая диссертацию в целом, отметим:

1. Представленные в диссертационной работе А.А. Васильевой основные результаты являются новыми, снабжены строгими подробными математическими доказательствами и представляют безусловный интерес в плане развития теории классов функций с обобщенной гладкостью и их приложений.
2. Используемые в диссертации результаты других авторов снабжены аккуратными ссылками на цитируемую литературу.
3. Результаты, выделенные автором в качестве основных, представляют самостоятельный интерес, но более важно, что все они получены в рамках единого подхода, основанного на сведении исходной задачи к подходящей задаче на деревьях и последующего ее исследования. Четыре главы диссертации начинаются с конструкций соответствующих деревьев и изучения их свойств. Во второй и шестой главах строятся вполне вписывающиеся в общую схемы специальные разбиения соответственно куба и последовательности. Местами такой метод приводит к довольно громоздким построениям, но получаемые в итоге результаты подтверждают целесообразность такого подхода. Текст диссертации является хорошей иллюстрацией к быть может несколько непривычному использованию современных методов при решении задач, имеющих вполне классическую постановку.

Основные результаты диссертации изложены в 14 работах, своевременно опубликованных в изданиях, рекомендованных ВАК. Все эти работы написаны А.А. Васильевой лично, без соавторов. Результаты диссертации докладывались на международных конференциях и различных научных семинарах, в работе которых принимали участие известные специалисты по рассматриваемой в работе тематике.

Диссертация А.А. Васильевой "Теоремы вложения и поперечники весовых функциональных классов" является научно-квалификационной работой, удовлетворяющей требованиям п.9 "Положения о присуждении ученых степеней". Диссертация содержит решение ряда сложных и важных проблем, относящихся к теории весовых пространств Соболева и весовых пространств Бесова. Полученные автором результаты являются крупными научными достижениями в теории функций с обобщенной гладкостью и теории приближений.

Диссертационная работа "Теоремы вложения и поперечники весовых функциональных классов" соответствует требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор А.А. Васильева заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – «вещественный,
комплексный и функциональный анализ»
доцент Александр Сергеевич Романов.
630090, г. Новосибирск, пр. ак. Коптюга, д. 4
ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
Ведущий научный сотрудник
лаборатории прикладного анализа А.С. Романов

27.11.2015

email: asrom@math.nsc.ru

Подпись А.С. Романова
удостоверяю
Зав. оргтоделом
ИМ СО РАН Н.З. Киндалева
«27» 11 2015 г.