МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.518.4+517.518.5

Графов Денис Александрович

РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ В КРАТНЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Специальность 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре математического анализа и геометрии физико-математического факультета Московского государственного областного университета.

Научный руководитель:	Блошанский Игорь Леонидович доктор физико–математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Голубов Борис Иванович доктор физико–математических наук, профессор ("Московский физико-технический институт (государственный университет)", профессор кафедры высшей математики)
	Гольдман Михаил Львович доктор физико–математических наук, профессор ("Российский университет дружбы народов", профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации)
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный университет "СПбГУ"

Защита диссертации состоится 24 июня 2015 г. в 16:45 на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8 этаж) и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su

Автореферат разослан «__» мая 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико – математических
наук, профессор Власов В. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа относится к важной и бурно развивающейся области многомерного гармонического анализа, имеющей широкое применение в различных отраслях современной науки и техники, – к теории кратных тригонометрических рядов и интегралов Фурье. Наиболее значительные исследования в области многомерного гармонического анализа проводятся с середины 60-х годов прошлого столетия. Здесь был обнаружен ряд новых закономерностей, резко отличающих кратные ряды и интегралы от одномерных.

Исследования в этой области дают обоснования решений методом Фурье эволюционных уравнений математической физики и позволяют исследовать граничные свойства аналитических функций многих переменных.

1. Рассмотрим N-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_N)$, и положим $(nx) = n_1x_1 + \dots + n_Nx_N$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$.

Введем множество $\mathbb{R}^N_\sigma = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j \geq \sigma,\ j = 1, \dots, N\}$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, и множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами. Положим $\mathbb{Z}^N_\sigma = \mathbb{R}^N_\sigma \cap \mathbb{Z}^N$.

Пусть $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — неубывающая функция. Через $\Phi(L)(\mathbb{T}^N)$ обозначим множество суммируемых на $\mathbb{T}^N = \{x \in \mathbb{R}^N\colon -\pi \leq x_j < \pi, j = 1, \dots, N\}$ функций f таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^N} \Phi(|f(x)|)dx < \infty,$$

а через $\Phi(L)(\mathbb{R}^N)$ — множество суммируемых на $\mathbb{R}^N$ функций g таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Phi(|g(x)|)dx < \infty.$$

Если $\Phi(u) = u^p$, $p \geq 1$, то обозначим $\Phi(L) = L_p$; если $\Phi(u) = u\log^+ u$, где $\log^+ u = \log\max\{1, u\}$, то $\Phi(L) = L\log^+ L$.

Пусть 2π-периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^N)$ разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k e^{i(kx)}.$$

Для любого вектора $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_0^N$ рассмотрим прямоугольную частичную сумму этого ряда

$$S_n(x; f) = \sum_{|k_1| \le n_1} \cdots \sum_{|k_N| \le n_N} c_k e^{i(kx)}, \tag{1}$$

частным случаем которой является кубическая частичная сумма $S_{n_0}(x; f)$, когда $n_1 = \dots = n_N = n_0$.

Пусть функция $g \in \Phi(L)(\mathbb{R}^N)$ разложена в кратный интеграл Фурье:

$$g(x) \sim \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(\xi) e^{i(\xi x)} d\xi.$$

Для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_0^N$ рассмотрим собственный интеграл Фурье

$$J_\alpha(x; g) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \dots \int\limits_{-\alpha_N}^{\alpha_N} \widehat{g}(\xi) e^{i(\xi x)} d\xi_1 \dots d\xi_N. \tag{2}$$

Частным случаем "прямоугольной частичной суммы" (2) является "кубическая частичная сумма" $J_{\alpha_0}(x; g)$, когда $\alpha_1 = \dots = \alpha_N = \alpha_0$.

Предположим, что $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$. Обозначим через $R_\alpha(x; f, g)$ следующую разность:

$$R_\alpha(x; f, g) = R_{\alpha, n}(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g), \tag{3}$$

и символом $R_\alpha(x; f)$ разность

$$R_\alpha(x; f) = R_{\alpha, n}(x; f) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g), \text{ если } g(x) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^N. \tag{4}$$

В диссертации изучается поведение разностей (3) и (4) при $\alpha \to \infty$ (т.е. $\min\limits_{1 \le j \le N} \alpha_j \to \infty$) в зависимости от гладкости функций $f(x)$ и $g(x)$, а также от ограничений, накладываемых на компоненты $n_1, \dots, n_N$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ векторов n и α, в частности, изучается случай, когда некоторые из компонент этих векторов являются элементами (однократных) "лакунарных последовательностей".

2. Хорошо известно, что в классах L_p, $p > 1$, некоторые подпоследовательности частичных сумм рядов Фурье обладают лучшими свойствами сходимости почти всюду (п.в.) по сравнению со всей последовательностью $S_n(x; f)$,

например, те подпоследовательности, у которых компоненты вектора n являются элементами (однократных) лакунарных [1] последовательностей.

Так, в одномерном случае, А. Н. Колмогоровым [2] ещё в 1922 г. было установлено: для любой функции $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$ $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_{n^{(\lambda)}}(x;f) = f(x)$ п.в. на $\mathbb{T}^1$, где $\{n^{(\lambda)}\}$, $n^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda = 1, 2, \ldots,$ — лакунарная последовательность. Указанный результат А. Н. Колмогорова был распространен в 1931 г. Дж. Литтлвудом и Р. Пэли [3] на классы $L_p(\mathbb{T}^1), p > 1$. Позже Р. Госселином [4] и В. Тотиком [5] было установлено, что в $L_1(\mathbb{T}^1)$ этот результат неверен. Далее, в 2005 г. С. В. Конягин [6], во-первых, показал, что положительный результат справедлив для любой функции $f \in L(\log^+ L)(\mathbb{T}^1)$. А во-вторых, он доказал, что для любой функции $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$, и для любой последовательности $\{n^{(\nu)}\}$, $n^{(\nu)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $n^{(\nu)} \to \infty$ при $\nu \to \infty$, существует функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^1)$, для которой $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} |S_{n^{(\nu)}}(x;f)| = +\infty$ всюду на $\mathbb{T}^1$. Затем в 2012 г. В. Ли [7] было доказано, что для любой функции $f \in L(\log^+ \log^+ L)(\log^+ \log^+ \log^+ L)(\mathbb{T}^1)$ и для любой лакунарной последовательности $\{n^{(\lambda)}\}$, $n^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda = 1, 2, \ldots,$ $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_{n^{(\lambda)}}(x;f) = f(x)$ п.в. на $\mathbb{T}^1$.

Первый результат для кратных рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм" был получен в 1971 г. П. Шёлиным [8]. Он доказал, что для любой лакунарной последовательности $\{n_1^{(\lambda_1)}\}$, $n_1^{(\lambda_1)} \in \mathbb{Z}_0^1, \lambda_1 = 1, 2, \ldots,$ и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$,

$$\lim_{\lambda_1,\, n_2\to\infty} S_{n_1^{(\lambda_1)},\, n_2}(x;f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^2.$$

В 1977 г. М. Кожима [9] обобщил результат П. Шёлина, доказав, что если функция $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 2$, и $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_0^1, \lambda_j = 1, 2, \ldots, j =$

[1] Последовательность $\{n^{(s)}\}$, $n^{(s)} \in \mathbb{Z}_0^1$, называется лакунарной, если $n^{(1)} = 1$ и $\frac{n^{(s+1)}}{n^{(s)}} \geq q > 1$, $s = 1, 2, \ldots$.

[2] A. N. Kolmogoroff. Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier // Fund. Math. 1924. V. 5. P. 96-97.

[3] J. Littlewood, R. Paley. Theorems on Fourier series and power series // J. Lond. Math. Soc. 1931. V. 6. P. 230-233.

[4] R. P. Gosselin. On the divergence of Fourier series // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9. P. 278-282.

[5] V. Totik. On the divergence of Fourier series // Publ. math., Debrecen. 1982. V. 29. № 3-4. P. 251-264.

[6] С. В. Конягин. О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье // Теория функций. Сборник научных трудов. Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11. № 2. С. 112-119.

[7] V. Lie. On the pointwise convergence of the sequence of partial Fourier Sums along lacunary subsequences // J. Funct. Anal. 2012. V.263. P. 3391-3411.

[8] P. Sjölin. Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Arkiv Matem. 1971. V. 9. № 1. P. 65-90.

[9] M. Kojima. On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series // Sci. Repts. Kanazava Univ. 1977. V. 22. № 2. P. 163-177.

$1, \ldots, N-1,$ — лакунарные последовательности, то

$$\lim_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}, n_N \to \infty} S_{n_1^{(\lambda_1)}, \ldots, n_{N-1}^{(\lambda_{N-1})}, n_N}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^N.$$

В том же 1977 г. Д. К. Санадзе, Ш. В. Хеладзе[10] обобщили результат М. Кожимы на классы $L(\log^+ L)^{3N-2}(\mathbb{T}^N)$. И в 2014 г. Н. Ю. Антонов[11] доказал, что если $f \in L(\log^+ L)^{N-1}(\log^+ \log^+ L)(\log^+ \log^+ \log^+ \log^+ L)(\mathbb{T}^N)$, то последовательность $S_{n^{(\lambda)}}(x; f)$ сходится п.в. на $\mathbb{T}^N$ (здесь $n^{(\lambda)} = (\delta_1 n_1^{(\lambda_1)} + O(1), \ldots, \delta_N n_1^{(\lambda_1)} + O(1)) \in \mathbb{Z}_0^N$, $\delta_1, \ldots, \delta_N$ - положительные вещественные числа, а $n_1^{(\lambda_1)}$ - произвольная лакунарная последовательность).

Далее, аналогичная тенденция (т.е. улучшение свойств сходимости п.в. "лакунарной последовательности частичных сумм" по сравнению со всей последовательностью $S_n(x; f)$) была обнаружена при исследовании *обобщенной локализации почти всюду* и *слабой обобщенной локализации почти всюду* кратных тригонометрических рядов Фурье функций из $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 3$.

3. Далее, перейдем к вопросам равносходимости разложений в ряд и интеграл Фурье.

Рассмотрим разности (3) и (4) при условии, что компоненты "номеров" $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$ "частичных сумм" $S_n(x; f)$ и $J_\alpha(x; g)$ связаны соотношениями:

$$n_j = [\alpha_j], \text{ где } [\alpha_j] - \text{ целая часть } \alpha_j \in \mathbb{R}_0^1, \; j = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

При $N = 1$ для функции $f \in L_1(\mathbb{T}^1)$ на любом отрезке, целиком лежащем внутри интервала $(-\pi, \pi)$, разность $R_\alpha(x; f, g)$ равномерно стремится к нулю при $\alpha \to \infty$[12]. Таким образом, в одномерном случае имеет место равномерная равносходимость разложений в тригонометрический ряд и интеграл Фурье.

Для кратного случая исследование вопроса о поведении разностей $R_\alpha(x; f, g)$ и $R_\alpha(x; f)$ при суммировании как по прямоугольникам, так и по квадратам, было проведено И. Л. Блошанским.

Равносуммируемость сферических и интегральных сферических Бохнера-Рисса была исследована И. Стейном[13] (см. также обзорные статьи

[10] Д. К. Санадзе, Ш. В. Хеладзе. О сходимости и расходимости кратных рядов Фурье-Уолша // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. 1977. Т. 55. С. 93-106.

[11] Н. Ю. Антонов. О сходимости почти всюду лакунарных последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // XXII Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". VIII международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Тезисы докладов. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ. 2014. С. 7.

[12] А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.

[13] E. Stein. On certain exponential sums arising in multiple Fourier series // Ann. Math. 1961. T. 73. № 1. C. 87-109.

Б. И. Голубова [14] и Ш. А. Алимова, Р. Р. Ашурова, А. К. Пулатова [15]).

Опираясь на результаты 1966 г. Л. Карлесона [16] и 1967 г. Р. Ханта [17], в 1975 г. И. Л. Блошанский [18] доказал, что для $N = 2$ и $p > 1$ $R_\alpha(x; f, g) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^2$. Точнее была доказана следующая

Теорема А. *Для любых функций $g(x)$ и $f(x)$ таких, что $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, и $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^2$,*

$$\lim_{\alpha_1,\,\alpha_2 \to \infty} R_{\alpha_1,\,\alpha_2}(x; f, g) = 0 \ \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^2;$$

более того,

$$\left\| \sup_{\alpha_1,\,\alpha_2 > 0} |R_{\alpha_1,\,\alpha_2}(x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \le C(p)\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},$$

где константа $C(p)$ не зависит от функций f и g.

Таким образом, при $N = 2$ и $p > 1$ тригонометрический ряд и интеграл Фурье в смысле сходимости п.в. на $\mathbb{T}^2$ при суммировании по прямоугольникам ведут себя одинаково. В той же работе И. Л. Блошанским была выяснена существенность вида сходимости $R_\alpha(x; f, g)$ и условий $N = 2$, $p > 1$. А именно, были построены непрерывные функции $f_1 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^2)$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\infty}} |R_\alpha(0; f_1)| = +\infty$, и $f_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N > 2$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\infty}} |R_\alpha(x; f_2)| = +\infty$ всюду внутри $\mathbb{T}^N$. В классе же L_1 приведен пример функции f_3 такой, что $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\infty}} |R_\alpha(x; f_3)| = +\infty$ в каждой точке $x \in \mathbb{T}^N$, $N \ge 2$.

Дальнейшее исследование вопросов равносходимости пошло по двум направлениям. В первом случае возник вопрос о возможности построения контрпримеров (при $p = 1$, $N \ge 2$) для суммирования по квадратам (из работ Н. Р. Тевзадзе [19] и П. Шёлина [8] следует, что для $N \ge 3$ и $p > 1$ $R_{\alpha_0}(x; f, g) \to 0$ при $\alpha_0 \to \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^N$). Это было связано с тем, что при построении контр-

[14] Б. И. Голубов. Кратные ряды и интегралы Фурье // В сб. Итоги науки и техники. Серия Матем. анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 19. С. 3-54.

[15] Ш. А. Алимов, Р.Р. Ашуров, А.К. Пулатов. Кратные ряды и интегралы Фурье // В сб. Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 42. С. 7-104.

[16] L. Carleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. V. 116. P. 135-157.

[17] R. Hunt. On the convergence of Fourier series // Proc. Conf. Edwardsville Ill. 1967, Southern Illinouis Univ. Press. Carbondale Ill. 1968. P. 235-255.

[18] И. Л. Блошанский. О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 153-168.

[19] Н.Р. Тевзадзе. О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом // Сообщ. АН Груз. ССР. 1970. Т. 58. № 2. С. 277-279.

[8] P. Sjölin. Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Arkiv Matem. 1971. V. 9. № 1. P. 65-90.

примеров учитывался прямоугольный метод суммирования, что, в свою очередь, давало возможность "варьировать переменные" α_j.

Так, в 1976 г. была построена суммируемая функция $f \in L_1(\mathbb{T}^2)$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha_0\to\infty}} |R_{\alpha_0}(x;f)| = +\infty$ для п.в. $x \in \mathbb{T}^2$ [20]. Последняя оценка выполняется за счет "разной скорости расходимости" двойного ряда Фурье функции $f(x)$ и двойного интеграла Фурье функции $g(x)$, $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^2$, $g(x) = 0$ вне $\mathbb{T}^2$, по одним и тем же подпоследовательностям $\{\alpha_0(k,x)\}$, $\alpha_0(k,x) \in \mathbb{R}^1$, $k = 1, 2, \ldots$. Позже, в 1990 г. были построены две суммируемые функции f и g: $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$, совпадающие на $\mathbb{T}^N$ и такие, что кратный ряд Фурье функции f неограниченно расходится п.в. на $\mathbb{T}^N$ по некоторым подпоследовательностям, в то время как кратный интеграл Фурье функции g сходится п.в. по тем же подпоследовательностям [21].

Далее, поскольку, начиная с трехмерного случая (как было доказано в работе [18]) равносходимость п.в. разложений в ряд и интеграл Фурье при суммировании по прямоугольникам отсутствует даже для непрерывных функций, то вторым направлением исследования стал вопрос о нахождении "классов равносходимости" при $N \geq 3$.

Так, в 1978 г. И. Л. Блошанским [22] было установлено, что для функций $f \in H^\omega(\mathbb{T}^3)$, где

$$H^\omega(\mathbb{T}^N) = \left\{ f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N) : \omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta,\\ x,y\in\mathbb{T}^N}} |f(x) - f(y)| = O(\omega(\delta)) \right\},$$

$\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ при $\delta \to +0$, а $\omega_0(\delta) = (\log\frac{1}{\delta} \log\log\log\frac{1}{\delta})^{-1}$,

$$R_\alpha(x;f) \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^3.$$

Класс функций $H^\omega(\mathbb{T}^2)$, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ при $\delta \to +0$, впервые появился в работе К. И. Осколкова [23], где была доказана сходимость п.в. в этом классе двойных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам).

[20] И. Л. Блошанский. Равносходимость разложений в кратный ряд и интеграл Фурье при суммировании по квадратам // Изв. АН СССР. Серия матем. 1976. Т. 40. № 3. С. 685-705.

[21] И. Л. Блошанский. Кратный интеграл и кратный ряд Фурье при суммировании по квадратам // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. № 1. С. 39-52.

[18] И. Л. Блошанский. О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 153-168.

[22] И. Л. Блошанский. О сходимости и локализации кратных рядов и интегралов Фурье. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1978.

[23] К. И. Осколков. Оценка скорости приближения непрерывной функции и ее сопряженной суммами Фурье на множестве полной меры // Изв. АН СССР. Серия матем. 1974. Т. 38. № 6. С. 1373—1407.

Однако, уже в классе $H^{\omega_2}(\mathbb{T}^3)$, определяемом модулем непрерывности $\omega_2(\delta) = \lambda(\delta)\cdot\omega_1(\delta)$, где $\omega_1(\delta) = \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}$, а произвольная функция $\lambda(\delta)$ удовлетворяет (при $\delta \to +0$) двум условиям: $\lambda(\delta)$ монотонно стремится к $+\infty$ и $\lambda(\delta)\cdot\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}$ стремится к $+0$, равносходимость п.в. не справедлива (доказательство этого факта [22] опирается на оценки работы М. Бахбуха и Е. М. Никишина [24], где была построена функция из класса $H^{\omega_1}(\mathbb{T}^2)$, прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье которой расходятся в каждой точке квадрата $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]^2$, $\varepsilon > 0$).

Далее, в 1996 г. И. Л. Блошанским, О. К. Ивановой и Т. Ю. Рословой [25] было доказано, что для функций $f \in L(\log^+ L)^2(\mathbb{T}^2)$ равносходимость рассматриваемых разложений имеет место, т.е. $\lim\limits_{\alpha\to\infty} R_\alpha(x;f) = 0$ п.в. на $\mathbb{T}^2$.

В этой же работе они доказали, что существует функция $f \in L(\log^+\log^+ L)^{1-\varepsilon}(\mathbb{T}^2)$, $0 < \varepsilon < 1$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\infty}}\,|R_\alpha(x;f)| = +\infty$ для почти всех $x \in \mathbb{T}^2$.

И в 1998 г. Т. Ю. Рослова [26], во-первых, усилила отрицательный результат И. Л. Блошанского [18], доказав, что для любой функции $\Phi(u) = o(u\log^+\log^+ u)$ при $u \to \infty$ существует функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^2)$ такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\infty}}\,|R_\alpha(x;f)| = +\infty$ всюду на $\mathbb{T}^2$. А, во-вторых, она показала, что для любой функции $f \in L(\log^+ L)(\log^+\log^+ L)(\mathbb{T}^2)$ $\lim\limits_{\alpha\to\infty} R_\alpha(x;f) = 0$ п.в. на $\mathbb{T}^2$.

4. Полученные в рамках второго направления (т.е., нахождения "классов равносходимости" при $N \geq 3$) результаты поставили вопрос о справедливости равносходимости п.в. (рассматриваемых разложений) при дополнительных условиях на функции $f(x)$ и $g(x)$ (в частности, в классах L_p, $p > 1$, при $N \geq 3$), и дополнительных ограничениях на вектор α.

Цель работы. Основной целью работы является изучение вопросов справедливости равносходимости п.в. разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье функций $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$ и $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p \geq 1$, $N \geq 3$, $g(x) = f(x)$ на $\mathbb{T}^N$, в случае, когда "прямоугольные частичные суммы" ука-

[22] И. Л. Блошанский. О сходимости и локализации кратных рядов и интегралов Фурье. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1978.

[24] М. Бахбух, Е. М. Никишин. О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14. № 6. С. 1189-1199.

[25] И. Л. Блошанский, О. К. Иванова, Т. Ю. Рослова. Обобщенная локализация и равносходимость разложений в двойной тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье функций из $L(\log^+ L)^2$ // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 437-441.

[26] Т. Ю. Рослова. Обобщенная локализация и равносходимость в двойной ряд и интеграл Фурье. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МПУ, 1998.

[18] И. Л. Блошанский. О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 153-168.

занных разложений, т.е. $S_n(x;f)$ и $J_\alpha(x;g)$ соответственно, имеют "номера" $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$, в которых некоторые компоненты являются элементами "лакунарных последовательностей".

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Для размерности пространства N, $N \geq 3$, доказано существование (построены) двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ (совпадающих на основном кубе $\mathbb{T}^N$), обладающих следующими свойствами: кратный тригонометрический ряд Фурье (суммируемый по прямоугольникам) функции $f(x)$ сходится в каждой точке $\mathbb{T}^N$, в то время как кратный интеграл Фурье ("суммируемый по прямоугольникам") функции $g(x)$ неограниченно расходится в каждой внутренней точке $\mathbb{T}^N$.

2. Доказано, что в классах L_p, $p > 1$, имеет место равносходимость почти всюду на $\mathbb{T}^2$ разложений в двойной тригонометрический ряд Фурье и двойной интеграл Фурье (в случае суммирования по прямоугольникам), если целочисленные компоненты n_j вектора $n = (n_1, n_2)$, "номера" частичной суммы ряда, и вещественные компоненты α_j вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, "номера частичной суммы" интеграла, связаны соотношениями: $\mid n_j - \alpha_j \mid \leq \varrho$, $j = 1, 2$, где ϱ некоторая константа, не зависящая от n и α.

3. Для широкого класса измеримых множеств (положительной меры) $\{E\}$, $E \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, получен критерий справедливости (в терминах структуры и геометрии множества E) равносходимости почти всюду разложений в кратный ряд и интеграл Фурье в классах L_p, $p > 1$, в случае, когда "прямоугольные частичные суммы" рассматриваемых разложений имеют соответствующие "номера" $n = (n_1, \ldots, n_N)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, в которых некоторые компоненты n_j и α_j являются элементами лакунарных последовательностей.

4. Для кратного интеграла Фурье с "вещественной лакунарной последовательностью частичных сумм" в классах L_p, $p > 1$, $N \geq 2$, найдены необходимые и достаточные условия (с точки зрения количества лакунарных компонент в "номере частичных сумм") сходимости почти всюду на $\mathbb{T}^N$.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории функций и функционального анализа.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения поведения "частичных сумм" кратных тригонометрических рядов и интегралов Фурье.

Апробация диссертации. Полученные в диссертации результаты докладывались автором на следующих научных семинарах:

МГУ, механико-математический факультет: семинар по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН Б. С. Кашина, чл.-корр. РАН С. В. Конягина, д.ф.-м.н., профессора Б. И. Голубова, д.ф.-м.н., профессора М. И. Дьяченко (2014 г.); семинар "Тригонометрические и ортогональные ряды" под руководством д.ф.-м.н., профессора М. И. Дьяченко, д.ф.-м.н., профессора В. А. Скворцова, д.ф.-м.н., профессора Т. П. Лукашенко, д.ф.-м.н., профессора М. К. Потапова (2013 г.);

Российский государственный педагогический университет имени А. И. Герцена, математический факультет: городской семинар по конструктивной теории функций под руководством д.ф.-м.н., профессора М. А. Скопиной (2015 г.);

Московский государственный областной университет, физико-математический факультет: научно-исследовательский семинар кафедры математического анализа и геометрии под руководством д.ф.-м.н., профессора И. Л. Блошанского (неоднократно: 2011 – 2014 гг.).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях: на VII международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения" (Ростов-на-Дону, 2012 г.); на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2013 г.); на Четвёртой Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвященной 90-летию со дня рождения чл.-корр. РАН Л. Д. Кудрявцева (Москва, РУДН, 2013 г.); на международной конференции "Kangro-100. Methods of Analysis and Algebra International conference dedicated to the centennial of Professor Gunnar Kangro" (Tartu, Estonia, 2013 г.); на 17-ой международной Саратовской зимней математической школе, посвященной 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова "Современные проблемы теории функций и их приложения"(Саратов, 2014 г.); на XXV Воронежской весенней математической школе "Современные методы теории краевых задач" (Воронеж, 2014 г.); на на VIII международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения" (Ростов-на-Дону, 2014 г.).

Тематика работы поддержана грантом РФФИ № 14-01-00417.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах (три из перечня ВАК), список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах Блошанскому И.Л. принадлежат постановка задачи и методика исследования. Детальное доказательство проведено Графовым Д.А. самостоятельно.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем работы составляет 147 страниц, список литературы содержит 36 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается краткий обзор результатов, связанных с вопросами сходимости рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм", а также вопросами справедливости равносходимости п.в. разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье при суммировании как по прямоугольникам, так и по квадратам, и приводятся формулировки результатов, полученных в диссертации.

Глава I настоящей работы посвящена исследованию вопроса о равносходимости на $\mathbb{T}^N$ разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье функций $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$ и $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, $N \geq 2$, $g(x) = f(x)$ на $\mathbb{T}^N$, в случае, когда "частичные суммы" указанных разложений, т.е. $S_n(x; f)$ и $J_\alpha(x; g)$ соответственно, имеют "номера" $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$, в которых некоторые компоненты являются элементами "лакунарных последовательностей".

В § 1.1 главы I мы рассматриваем поведение разностей $R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$ (3), (4) при $N \geq 2$, когда компоненты n_j вектора $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и компоненты α_j вектора $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$ связаны более широким соотношением, чем (5), а именно:

$$| \alpha_j - n_j | \leq \varrho, \quad j = 1, \dots, N, \tag{6}$$

где ϱ — некоторая константа, не зависящая от n и α.

Также в данном параграфе мы исследуем вопрос об эквивалентном поведении разностей $R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$ и

$$RS_{n+m}(x; f) = S_{n+m}(x; f) - S_n(x; f), \quad n,\, m \in \mathbb{Z}_0^N. \tag{7}$$

На первый взгляд, обе эти разности должны "вести себя в предельном случае" (т.е. в случае, когда $\alpha \to \infty$ и $n \to \infty$, а параметр m ограничен) одинаково (т.к. имеют одно и то же количество "особенностей"), но это оказалось не так.

Справедлива следующая теорема.

Теорема I.I. *Для любого* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}_0^2$, *удовлетворяющего условию* (6), *и для любых функций* $g(x)$ *и* $f(x)$ *таких, что* $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, *и* $g(x) = f(x)$ *при* $x \in \mathbb{T}^2$,

$$\lim_{\alpha_1, \alpha_2 \to \infty} R_{\alpha_1, \alpha_2}(x; f, g) = 0 \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^2;$$

более того,

$$\left\| \sup_{\alpha_1, \alpha_2 > 0} |R_{\alpha_1, \alpha_2}(x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},$$

где константа $C(p)$ *не зависит от функций* f *и* g.

Результат теоремы показывает, что в двумерном случае в классах L_p, $p > 1$, равносходимость п.в. разложений в тригонометрический ряд и интеграл Фурье имеет место при условии, что компоненты n_j и α_j векторов n и α связаны соотношением (6).

Эквивалентным теореме I.I является следующий результат.

Теорема I.I$'$. *Для любой ограниченной последовательности* $\{m(n)\}$, $m(n) \in \mathbb{Z}_0^2$, $n \in \mathbb{Z}_0^2$, *и для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$,

$$\lim_{n \to \infty} RS_{n+m(n)}(x; f) = 0 \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^2.$$ [27]

Результат, сформулированный в виде теоремы I.I$'$, означает, что для последовательности частичных сумм двойных рядов Фурье функций из L_p, $p > 1$, имеет место свойство "почти фундаментальности".

Замечание 1. Под эквивалентностью теорем I.I и I.I$'$ мы подразумеваем, что из справедливости теоремы I.I следует справедливость теоремы I.I$'$, а из результата теоремы I.I$'$ (плюс результат теоремы A) следует результат теоремы I.I.

Естественно, встает вопрос о поведении разностей $RS_{n+m}(x; f)$ и $R_\alpha(x; f)$ при $N \geq 3$. Как оказалось, начиная с трехмерного случая, указанные разности не эквивалентны. Точнее, справедливы следующие результаты. Для разности $RS_{n+m}(x; f)$ имеет место

Теорема I.II. *Для любой ограниченной последовательности* $\{m(n)\}$, $m(n) \in \mathbb{Z}_0^2$, $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_0^2$, *для любых лакунарных последовательностей* $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \ldots$, $j = 3, \ldots, N$, *и для любой функции*

[27] Заметим, что эта оценка справедлива и для расходящихся п.в. двойных рядов Фурье.

$f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 3$, *почти всюду на* $\mathbb{T}^N$

$$\lim_{n_1, n_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_N \to \infty} RS_{n_1+m_1(n), n_2+m_2(n), n_3^{(\lambda_3)}, \ldots, n_N^{(\lambda_N)}}(x; f) = 0.$$

В свою очередь, для разности $R_\alpha(x; f)$ справедлив следующий результат, который уточняет отрицательный результат И. Л. Блошанского[18].

Теорема I.III. *Существует функция* $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$, *такая, что для любых* $N-2$ *возрастающих последовательностей* $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ *при* $\nu_j \to \infty$, $j = 3, \ldots, N$,

$$\overline{\lim_{n_1, n_2, \nu_3, \ldots, \nu_N \to \infty}} |R_{n_1, n_2, \alpha_3^{(\nu_3)}, \ldots, \alpha_N^{(\nu_N)}}(x; f)| = +\infty \text{ всюду внутри } \mathbb{T}^N.$$

Результат теоремы I.III, с точки зрения вопросов равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье (которые мы исследуем в настоящей работе), показывает, что как только мы оставляем две компоненты вектора n (а значит и вектора α) "свободными" (т.е., в частности, не являющимися элементами никаких лакунарных последовательностей), то класс $\mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$, уже не есть "класс равносходимости п.в." указанных разложений.

В § 1.2 главы I нами исследуется вопрос о справедливости равносходимости рассматриваемых разложений в случае, когда не более одной компоненты в векторе α остается "свободной".

Для формулировки результатов введем следующие понятия и обозначения.

Пусть $\{n^{(\kappa)}\}$, $n^{(\kappa)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, – произвольная лакунарная последовательность, и пусть ϱ – некоторая постоянная.

Определение 1. *Последовательность* $\{\alpha^{(\kappa)}\}$, $\alpha^{(\kappa)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, *будем называть вещественной лакунарной последовательностью, если* $[\alpha^{(\kappa)}] = n^{(\kappa)}$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ (*здесь* $[\xi]$ — *целая часть* $\xi \in \mathbb{R}^1$), *и обобщенной вещественной лакунарной последовательностью, если*

$$| \alpha^{(\kappa)} - n^{(\kappa)} | \leq \varrho, \quad \kappa = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Пусть M — множество чисел $\{1, \ldots, N\}$ и $k \in M$. Обозначим через $J_k = \{j_1, ..., j_k\}$, $j_s < j_l$ при $s < l$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \ldots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_l$ при $s < l$, — непустые подмножества множества M. Пусть $\nu = \nu(J_k) = (\nu_{j_1}, \ldots, \nu_{j_k}) \in \mathbb{Z}_0^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \ldots, k$. Символом $n^{(\nu)} = n^{(\nu)}[J_k] = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_0^N$ обозначим N-мерный вектор, у которого

[18] И. Л. Блошанский. О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 153-168.

компоненты n_j с номерами $j = j_s$, $s = 1, \ldots, k$, являются элементами *некоторых* (однократных бесконечно больших) *последовательностей натуральных чисел* (при $j \in J_k : n_j = n_j^{(\nu_j)}$ и $n_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$). В частности, символом $n^{(\lambda)} = n^{(\lambda)}[J_k] \in \mathbb{Z}_0^N$ (где $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_0^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \ldots, k$) будем обозначать N-мерный вектор, у которого компоненты n_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) *лакунарных* последовательностей, а символом $\alpha^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)}[J_k] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_0^N$ обозначим N-мерный вектор, у которого компоненты α_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) *обобщенных вещественных лакунарных* последовательностей. При этом последовательности частичных сумм $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$ и $J_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x; g)$ будем называть соответственно "J_k-лакунарными последовательностями прямоугольных частичных сумм" ряда Фурье и интеграла Фурье.

Справедлив следующий результат

Теорема I.IV. *Для любого $J_{N-1} \subset M$, $N \geq 3$, и для любых функций $g(x)$ и $f(x)$ таких, что $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$, если числа $\alpha_j \in \mathbb{R}_0^1$ и $n_j \in \mathbb{Z}_0^1$, $j \in M \setminus J_{N-1}$, удовлетворяют условию* (6), *то*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-1}, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-1}}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x; f, g) = 0 \quad \text{почти всюду на} \quad \mathbb{T}^N;$$

более того,

$$\left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0,\, j \in J_{N-1}, \\ \alpha_j > 0,\, j \in M \setminus J_{N-1}}} |R_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^N)},$$

где константа $C(p)$ не зависит от функций f и g.

Следствие (теоремы I.IV). *Для любого $J_{N-1} \subset M$, $N \geq 3$, и для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-1}, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-1}}} J_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x; g) = g(x) \ \text{для почти всех} \ x \in \mathbb{T}^N.$$

Результат теоремы I.IV (для $N \geq 3$) оказался в каком-то смысле эквивалентен результату теоремы I.I (для $N = 2$), т.е. лакунарность $N-1$ компоненты в N-мерном векторе α разности $R_\alpha(x; f, g)$ (теорема I.IV) "заменяет" одну свободную компоненту в двумерном векторе (α_1, α_2) разности $R_{\alpha_1, \alpha_2}(x; f, g)$ (теорема I.I). В таком случае по-прежнему стоит вопрос о справедливости равносходимости п.в. (рассматриваемых разложений) при $N \geq 3$ либо в более "узких классах", чем $\mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, либо в классах L_p, $p > 1$, при дополнительных условиях на функции $f(x)$ и $g(x)$, но уже в случае, когда две или более компонент вектора α являются одномерными лакунарными последовательностями.

В § 1.3 главы I нами получено некоторое продвижение в первом направлении данного вопроса. Обозначим

$$H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3) = \Bigg\{ f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^3) :$$

$$\omega^*(\delta, f) = \sup_{\substack{(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2<\delta^2,\\ x_j,\, y_j \in \mathbb{T}^1,\, j=1,2,3}} |f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1, y_2, y_3)| = O(\omega(\delta)) \Bigg\},$$

здесь $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ при $\delta \to +0$ (очевидно, что $H^{\omega}(\mathbb{T}^3) \subset H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3)$).

Теорема I.V. *Для $J_1 = \{1\}$ и для любой функции $f \in H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3)$ при условии, что $\alpha_j \in \mathbb{R}^1_0$ и $n_j \in \mathbb{Z}^1_0$, $j \in M \setminus J_1$, удовлетворяют (6),*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_1,\\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_1}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_1]}(x; f) = 0 \quad \textit{почти всюду на} \quad \mathbb{T}^3;$$

более того, существует число $\rho = \rho(f) \in \mathbb{R}^1_{16}$ такое, что

$$\Bigg\| \sup_{\alpha^{(\lambda)}[J_1] \in \mathbb{R}^3_\rho} |R_{\alpha^{(\lambda)}[J_1]}(x; f)| \Bigg\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \leq C(p) \big[\omega^*(1, f) + \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \big], \quad p > 1,$$

где константа $C(p)$ не зависит от функции $f(x)$.

И, наконец, в § 1.4 главы I нами доказана теорема (которая обобщает отрицательный результат Т. Ю. Рословой [26]), о том, что в двумерном случае равносходимость п.в. (рассматриваемых разложений) будет отсутствовать в классе $\Phi(L)$, где $\Phi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ — любая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$, $u \to \infty$.

Теорема I.VI. *Для любой функции $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$, и для любых возрастающих последовательностей $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}^1_0$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, $j = 1, 2$, существует функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^2)$ такая, что*

$$\overline{\lim_{\nu_1,\, \nu_2 \to \infty}} |R_{\alpha_1^{(\nu_1)}, \alpha_2^{(\nu_2)}}(x; f)| = +\infty \quad \textit{всюду внутри} \quad \mathbb{T}^2 \text{ [28]}.$$

[26] Т. Ю. Рослова. Обобщенная локализация и равносходимость в двойной ряд и интеграл Фурье. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МПУ, 1998.

[28] В частности, каждая последовательность $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$ может быть лакунарной последовательностью.

В главе II нами получено некоторое продвижение во втором направлении исследования равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье – поиске дополнительных условий на функции $f(x)$ и $g(x)$ из классов L_p, $p > 1$, для справедливости равносходимости исследуемых разложений. И в качестве таких достаточных условий мы рассматриваем равенство нулю функции $f(x)$ на множествах определенного вида.

В § 2.1 главы II мы описываем класс "самых простых" множеств, на которых справедлива равносходимость п.в. (рассматриваемых разложений) в классах $L_p, p > 1, N \geq 3$, в случае, когда "частичные суммы" указанных разложений, т.е. $S_n(x; f)$ и $J_\alpha(x; g)$, имеют "номера" $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$, в которых некоторые компоненты являются элементами "лакунарных последовательностей".

Введем следующие обозначения.

Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств $\mathbb{R}[J_k]$ и $\mathbb{R}[M \setminus J_k]$, где $\mathbb{R}[J_k] = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j = 0$ при $j \in M \setminus J_k\}$. Обозначим также $\mathbb{T}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}[J_k] : -\pi \leq x_j < \pi$ при $j \in J_k\}$. Очевидно, что $\mathbb{R}[J_N] = \mathbb{R}^N$, а $\mathbb{T}[J_N] = \mathbb{T}^N$.

Пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, — произвольное (непустое) открытое множество, и пусть $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M$.

Положим

$$W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2], \quad J_2 \subset M\ ^{29}. \tag{9}$$

Множества $W[J_2]$ будем называть "N-мерными брусками". Далее, для любого J_k, $0 \leq k \leq N-2$, рассмотрим следующие множества: множество

$$W = W(J_k) = W(\Omega, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2] \tag{10}$$

и множество

$$W^0 = W^0(J_k) = W^0(\Omega, J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2]. \tag{11}$$

В § 2.1 доказана следующая теорема.

[29] При этом любой вектор $z = (z_1, \ldots, z_{2N}) \in A \times B$, где $A \subset \mathbb{R}[J_k]$, а $B \subset \mathbb{R}[M \setminus J_k]$, мы отождествляем с вектором $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ по формуле

$$x_s = \begin{cases} z_s & \text{при} \quad s \in J_k, \\ z_{N+s} & \text{при} \quad s \in M \setminus J_k. \end{cases}$$

.

Теорема II.I. *Для любого $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$, $N \ge 3$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на W,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \ \text{для почти всех } x \in W^0.$$

Результат теоремы показывает, что для кратных рядов и интегралов Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм" равносходимость п.в. (рассматриваемых разложений) в классах L_p, $p > 1$, при $N \ge 3$ будет справедлива на множестве $W^0 = W^0(J_k)$ вида (11) при условии равенства нулю функции $f(x)$ на множестве $W = W(J_k)$ вида (10).

Естественно, встает вопрос о том, можно ли в теореме II.I добиться равносходимости п.в. (рассматриваемых разложений) на всем множестве $W(J_k)$.

Если при $N \ge 3$ величина $k = N - 2$, то справедливо следующее

Следствие (теоремы II.I). *При $N \ge 3$ для любого $J_{N-2} \subset M$ и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на W,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-2}, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-2}}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-2}]}(x; f) = 0 \ \text{для почти всех } x \in W.$$

Если же при $N \ge 4$ величина k меньше $N - 2$, то усилить теорему II.I, установив равносходимость на всем $W(J_k)$, нельзя, что показывает следующий результат.

Теорема II.II. *Пусть $N \ge 4$ и $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-3$, тогда существуют множество $W = W(J_k)$ вида (10) и функция $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такие, что $f(x) = 0$ на W и для любых k вещественных последовательностей $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty,\, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f)| = +\infty \ \text{почти всюду на } \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

В § 2.2 главы II нами доказан результат, который показывает, что теорема II.I не может быть усилена в плане отказа от равенства нулю функции $g(x)$ вне $\mathbb{T}^N$.

Теорема II.III. *Существует функция $g(x)$, $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$, $g(x) = 0$ при $x \in \mathbb{T}^3$, такая, что для любой последовательности $\{\alpha_3^{(\nu_3)}\}$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \to \infty$ при $\nu_3 \to \infty$,*

$$\varlimsup_{\alpha_1, \alpha_2, \nu_3 \to \infty} |R_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^{(\nu_3)}}(x; 0, g)| = +\infty \ \text{всюду внутри} \ \ \mathbb{T}^3.$$

В качестве следствия теоремы II.III имеем:

Следствие (теоремы II.III). *Для любого $N \geq 3$ существуют функции $g(x)$ и $f(x)$, $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$, $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$, такие, что для любых $N-2$ последовательностей $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, $j = 3, \dots, N$,*

$$\mathbf{1}. \qquad \lim_{n\to\infty} S_n(x; f) = f(x) \ \textit{в каждой точке} \quad \mathbb{T}^N,$$

а

$$\mathbf{2}. \qquad \overline{\lim}_{\alpha_1, \alpha_2, \nu_3, \dots, \nu_N \to \infty} |J_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^{(\nu_3)}, \dots, \alpha_N^{(\nu_N)}}(x; g)| = +\infty \ \textit{всюду внутри} \quad \mathbb{T}^N.$$

Замечание 2. Несложно видеть, что результат теоремы I.III непосредственно следует из данного следствия.

В главе III диссертации в терминах свойства $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ нами доказан критерий справедливости равносходимости п.в. разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм" в классах L_p, $p > 1$, на произвольных подмножествах $\mathbb{T}^N$ положительной меры (удовлетворяющих некоторым ограничениям на границу множества).

Также в данной главе доказана теорема, которая показывает, что найденная геометрия множеств, на которых справедлива равносходимость п.в. разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм" в классах L_p, $p > 1$, перестаёт "работать" в классе $\Phi(L)$, где $\Phi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$— любая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$, $u \to \infty$.

И. Л. Блошанским и О. В. Лифанцевой [30] было введено следующее понятие.

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, $N \geq 3$.*

1. *Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, если найдется множество $W = W(J_k)$ вида* (10) *такое, что $\mu(W \setminus \mathfrak{A}) = 0$, причем свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ есть свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, если $W = W(W^0, J_k)$.*

2. *Свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ множества $\mathfrak{A}$ будем называть максимальным свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ множества $\mathfrak{A}$, если для любого множества $\widetilde{W}^0 = \widetilde{W}^0(J_k)$ вида* (11) *такого, что $\mu(\widetilde{W}^0 \setminus W^0) > 0$, множество $\mathfrak{A}$ не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(\widetilde{W}^0)$.*

[30] И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева. Критерий слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности // Докл. РАН. 2008. Т. 423. № 4. С. 439-442.

Далее, пусть измеримое множество $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, $N \geq 3$, удовлетворяет следующим условиям на границу:

$$\mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{int\mathfrak{B}}) = 0; \tag{12}$$

$$\mu_2 Fr\, pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} = 0, \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{13}$$

здесь $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, μ_2 — мера на плоскости ($intP$ — множество внутренних точек, $\overline{P}$ — замыкание и FrP — граница множества P).

Теорема III.I. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, и пусть $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$.*

1. *Если существует множество $W^0 = W^0(J_k)$ вида* (11) *такое, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, то для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \ \textit{почти всюду на } W^0.$$

Пусть дополнительно множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (12), (13), *тогда*

2. *Если свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ множества $\mathfrak{A}$ является максимальным свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, то существует функция $f_1 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такая, что $f_1(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$ и для любых k последовательностей вещественных чисел $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f_1)| = +\infty \ \textit{почти всюду на } \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

3. *В частности, если множество $\mathfrak{A}$ вообще не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, то существует функция $f_2 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такая, что $f_2(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$ и для любых k последовательностей вещественных чисел $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f_2)| = +\infty \ \textit{почти всюду на } \mathbb{T}^N.$$

Результат теоремы III.I показывает, что для любого k, $1 \leq k \leq N-2$, справедливость или несправедливость равносходимости п.в. разложений в кратный ряд и интеграл Фурье (в случае "лакунарной последовательности частичных сумм") в классах L_p, $p > 1$, на множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$ определяется структурой и геометрией множества $\mathfrak{A}$, которые, в свою очередь, описываются свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, где величина k — это число "лакунарных компонент" вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_0^N$ ("номера" $R_\alpha(x; f)$).

Заметим, что если мы уменьшим число "свободных" компонент в векторе $\alpha = \alpha^{(\lambda)}[J_k]$ (сведя их количество до единицы, а остальные компоненты естественно оставив лакунарными), то, как следует из теоремы I.IV, для справедливости на множестве $\mathfrak{A}$ равносходимости п.в. (рассматриваемых разложений) в классах L_p, $p > 1$, от множества $\mathfrak{A}$ уже не требуется никаких ограничений (в плане структурно-геометрических характеристик), кроме измеримости.

Наконец, в § 3.3 главы III нами доказана теорема, которая показывает, что равносходимость разложений в кратный ряд и интеграл Фурье в классе $\Phi(L)$, где $\Phi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$— любая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$, $u \to \infty$, на множествах $W^0(J_k)$ вида (11) при условии, что $f(x) = 0$ на множестве $W(J_k)$ вида (10), справедлива не будет. Точнее справедлива следующая теорема.

Теорема III.II. *Пусть $N \geq 3$ и $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N - 2$, тогда существуют множество $W(J_k)$ вида (10) и функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^N)$, $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$, такие, что $f(x) = 0$ на $W(J_k)$, и для любых k возрастающих вещественных последовательностей $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty,\, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f)| = +\infty \ \textit{почти всюду на}\ \mathbb{T}^N.$$

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Блошанскому Игорю Леонидовичу за постановку задач, обсуждение и постоянное внимание к работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

[1] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье в случае "лакунарной последовательности частичных сумм"* // Докл. РАН. 2013. Т. 450. № 3. С. 260-263.

[2] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *Равносходимость разложений в кратный ряд и интеграл Фурье, "прямоугольные частичные суммы" которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности* // Analysis Math. 2014. Т. 40. № 3. С. 175-196.

[3] Графов Д.А. *О равносходимости разложений в тройной тригонометрический ряд и интеграл Фурье непрерывных функций с некоторым модулем непрерывности* // Вестн. Моск. Ун-та, Сер.1 Мат., Мех. 2015. № 1. С. 25-33.

[4] Grafov D.A., Bloshanskii I.L. *Equiconvergence of expansions in multiple trigonometric Fourier series and Fourier integral with "J_k-lacunary sequences of rectangular partial sums"* // Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. June 2014. V. 18. № 1. P. 69-80.

[5] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *Вопросы равносходимости разложений в тройной ряд и интеграл Фурье* // XX Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". VII международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Тезисы докладов. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ. 2012. С. 9-10.

[6] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *"Почти" фундаментальность для последовательности частичных сумм кратных рядов Фурье функций из L_p, $p > 1$* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции Воронежской зимней математической школы. Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ. 2013. С. 28-30.

[7] Графов Д.А. *Равносходимость разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции Воронежской зимней математической школы. Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ. 2013. С. 64-65.

[8] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *О равносходимости разложений в тройной тригонометрический ряд и интеграл Фурье* // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования. Тезисы докладов четвертой Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Л. Д. Кудрявцева. - Москва: Изд-во РУДН, 2013. С. 78-79.

[9] Grafov D.A., Bloshanskii I.L. *"Almost" Cauchy property for the sequence of partial sums of Fourier series of functions in* $L_p, p > 1$ // Kangro-100, Methods of Analysis and Algebra International Conference dedicated to the Centennial of Professor Gunnar Kangro. Tartu, Estonia: Estonian Mathematical Society. 2013. P. 63-64.

[10] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *Критерий равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "*J_k*-лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 17-ой международной Саратовской зимней школы, посвященной 150-летию В.А. Стеклова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2014. С. 40-42.

[11] Графов Д.А. *О сходимости и локализации кратных интегралов Фурье С "*J_k*- лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXV". Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга". 2014. С. 48-49.

[12] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *Критерий слабой обобщенной локализации для кратных интегралов Фурье с "*J_k*-лакунарной последовательностью частичных сумм"* // XXII Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". VIII международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Тезисы докладов. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ. 2014. С. 10-11.