МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.518.4+517.518.5

Графов Денис Александрович

РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ В КРАТНЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

(специальность 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — доктор

физико-математических наук,

профессор И. Л. Блошанский

Москва — 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Рассмотрим N-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, \ldots, x_N)$, и положим $(nx) = n_1x_1 + \cdots + n_Nx_N$, $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}$.

Введем множество $\mathbb{R}^N_\sigma = \{(x_1, \ldots , x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j \geq \sigma,\ j = 1, \ldots , N\}$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, и множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами. Положим $\mathbb{Z}^N_\sigma = \mathbb{R}^N_\sigma \cap \mathbb{Z}^N$.

Пусть $\Phi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ — неубывающая функция. Через $\Phi(L)(\mathbb{T}^N)$ обозначим множество суммируемых на $\mathbb{T}^N = \{x \in \mathbb{R}^N\colon -\pi \leq x_j < \pi, j = 1, \ldots , N\}$ функций f таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^N} \Phi(|f(x)|)dx < \infty,$$

а через $\Phi(L)(\mathbb{R}^N)$ — множество суммируемых на $\mathbb{R}^N$ функций g таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Phi(|g(x)|)dx < \infty.$$

Если $\Phi(u) = u^p$, $p \geq 1$, то обозначим $\Phi(L) = L_p$; если $\Phi(u) = u \log^+ u$, где $\log^+ u = \log \max\{1, u\}$, то $\Phi(L) = L \log^+ L$.

Пусть 2π-периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^N)$ разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k e^{i(kx)}.$$

Для любого вектора $n = (n_1, \ldots , n_N) \in \mathbb{Z}^N_0$ рассмотрим прямоугольную частичную сумму этого ряда

$$S_n(x; f) = \sum_{|k_1|\leq n_1} \cdots \sum_{|k_N|\leq n_N} c_k e^{i(kx)}, \tag{0.1}$$

частным случаем которой является кубическая частичная сумма $S_{n_0}(x;f)$, когда $n_1 = \cdots = n_N = n_0$.

Пусть функция $g \in \Phi(L)(\mathbb{R}^N)$ разложена в кратный интеграл Фурье:

$$g(x) \sim \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(\xi) e^{i(\xi x)} d\xi.$$

Для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_0^N$ рассмотрим собственный интеграл Фурье

$$J_\alpha(x;g) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \ldots \int\limits_{-\alpha_N}^{\alpha_N} \widehat{g}(\xi) e^{i(\xi x)} d\xi_1 \ldots d\xi_N. \qquad (0.2)$$

Частным случаем "прямоугольной частичной суммы" (0.2) является "кубическая частичная сумма" $J_{\alpha_0}(x;g)$, когда $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N = \alpha_0$.

Предположим, что $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$. Обозначим через $R_\alpha(x;f,g)$ следующую разность:

$$R_\alpha(x;f,g) = R_{\alpha,n}(x;f,g) = S_n(x;f) - J_\alpha(x;g), \qquad (0.3)$$

и символом $R_\alpha(x;f)$ разность

$$R_\alpha(x;f) = R_{\alpha,n}(x;f) = S_n(x;f) - J_\alpha(x;g), \text{ если } g(x) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^N. \qquad (0.4)$$

В диссертации изучается поведение разностей (0.3) и (0.4) при $\alpha \to \infty$ (т.е. $\min\limits_{1 \le j \le N} \alpha_j \to \infty$) в зависимости от гладкости функций $f(x)$ и $g(x)$, а также от ограничений, накладываемых на компоненты $n_1, \ldots, n_N$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ векторов n и α, в частности, нас будет интересовать случай, когда некоторые из компонент этих векторов являются элементами (однократных) "лакунарных последовательностей".

2. Хорошо известно, что в классах L_p, $p > 1$, некоторые подпоследовательности частичных сумм рядов Фурье обладают лучшими свойствами сходимости почти всюду (п.в.) по сравнению со всей последовательностью $S_n(x;f)$,

например, те подпоследовательности, у которых компоненты вектора n являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей.

Определение 1. *Последовательность* $\{n^{(s)}\}$, $n^{(s)} \in \mathbb{Z}_0^1$, *называется лакунарной, если* $n^{(1)} = 1$ *и* $\frac{n^{(s+1)}}{n^{(s)}} \geq q > 1$, $s = 1, 2, \ldots$.

В одномерном случае А. Н. Колмогоровым ещё в 1922 г. в работе [1] было установлено: для любой функции $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$ $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_{n^{(\lambda)}}(x; f) = f(x)$ п.в. на $\mathbb{T}^1$, где $\{n^{(\lambda)}\}$, $n^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda = 1, 2, \ldots,$ — лакунарная последовательность. Указанный результат А. Н. Колмогорова был распространен в 1931 г. Дж. Литтлвудом и Р. Пэли [2] на классы $L_p(\mathbb{T}^1), p > 1$. Позже Р. Госселином [3] и В. Тотиком [4] было установлено, что в $L_1(\mathbb{T}^1)$ этот результат неверен. Далее, в 2005 г. С. В. Конягин [5], во-первых, показал, что положительный результат справедлив для любой функции $f \in L(\log^+ L)(\mathbb{T}^1)$. [1] А во-вторых, он усилил отрицательный результат В. Тотика [4], доказав, что для любой функции $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$, и для любой последовательности $\{n^{(\nu)}\}$, $n^{(\nu)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $n^{(\nu)} \to \infty$ при $\nu \to \infty$, существует функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^1)$, для которой $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} |S_{n^{(\nu)}}(x; f)| = +\infty$ всюду на $\mathbb{T}^1$. Затем в 2012 г. в работе В. Ли [7] было доказано, что для любой функции $f \in L(\log^+ \log^+ L)(\log^+ \log^+ \log^+ L)(\mathbb{T}^1)$ и для любой лакунарной последовательности $\{n^{(\lambda)}\}$, $n^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda = 1, 2, \ldots,$ $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_{n^{(\lambda)}}(x; f) = f(x)$ п.в. на $\mathbb{T}^1$.

Первый результат для кратных рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм" был получен в 1971 г. П. Шёлиным в работе [8], где было доказано, что для любой лакунарной последовательности

[1] Заметим, что вопрос о том, достаточно ли условие $f \in L(\log^+ L)(\mathbb{T}^1)$ для сходимости п.в. тригонометрического ряда Фурье функции f на $\mathbb{T}^1$ (по всей последовательности), остается открытым. Наиболее общий положительный результат (для сходимости п.в. тригонометрического ряда Фурье функции f по всей последовательности) принадлежит Н. Ю. Антонову [6]: если $f \in L(\log^+ L)(\log^+ \log^+ \log^+ L)(\mathbb{T}^1)$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится п.в. на $\mathbb{T}^1$.

$\{n_1^{(\lambda_1)}\}$, $n_1^{(\lambda_1)} \in \mathbb{Z}_0^1, \lambda_1 = 1, 2, \ldots$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$,

$$\lim_{\lambda_1,\, n_2 \to \infty} S_{n_1^{(\lambda_1)},\, n_2}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^2.$$

В 1977 г. М. Кожима в работе [11] обобщил результат П. Шёлина, доказав, что если функция $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 2$, и $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_0^1, \lambda_j = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N-1$, — лакунарные последовательности, то

$$\lim_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1},\, n_N \to \infty} S_{n_1^{(\lambda_1)}, \ldots, n_{N-1}^{(\lambda_{N-1})},\, n_N}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^N.$$ [2]

Далее, аналогичная тенденция (т.е. улучшение свойств сходимости п.в. "лакунарной последовательности частичных сумм" по сравнению со всей последовательностью $S_n(x; f)$) была обнаружена при исследовании *обобщенной локализации почти всюду* (ОЛ) и *слабой обобщенной локализации почти всюду* (СОЛ) [3] кратных тригонометрических рядов Фурье функций из $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 3$.

Так, И. Л. Блошанским и О. В. Лифанцевой было показано (см., например, [12], [13] или [14]), что, в отличие от случая, когда все компоненты "номера" n прямоугольной частичной суммы $S_n(x; f)$ "свободны" (см., в частности, [15]), в случае, когда прямоугольные частичные суммы $S_n(x; f)$ кратных тригонометрических рядов Фурье имеют "номер" n, в котором некоторые компоненты являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей, мы получаем "увеличение" множества, на котором ряд с такой "лакунарной последовательностью частичных сумм" сходится, с од-

---

[2] В 1977 г. Д. К. Санадзе, Ш. В. Хеладзе [9] обобщили результат М. Кожимы [11] на классы $L(\log^+ L)^{3N-2}(\mathbb{T}^N)$. И в 2014 г. Н. Ю. Антонов [10] доказал, что если $f \in L(\log^+ L)^{N-1}(\log^+ \log^+ L)(\log^+ \log^+ \log^+ \log^+ L)(\mathbb{T}^N)$, то последовательность $S_{n^{(\lambda)}}(x; f)$ сходится п.в. на $\mathbb{T}^N$ (здесь $n^{(\lambda)} = (\delta_1 n_1^{(\lambda_1)} + O(1), \ldots, \delta_N n_1^{(\lambda_1)} + O(1)) \in \mathbb{Z}_0^N$, $\delta_1, \ldots, \delta_N$ - положительные вещественные числа, а $n_1^{(\lambda_1)}$ - произвольная лакунарная последовательность).

[3] Данные понятия означают, что для кратного ряда Фурье функции f, равной нулю на множестве $\mathfrak{A}$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ (μ — N-мерная мера Лебега), исследуется вопрос о сходимости п.в. либо на всем множестве $\mathfrak{A}$ (ОЛ), либо на каких-либо его подмножествах $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mu\mathfrak{A}_1 > 0$ (СОЛ).

новременным "уменьшением" множества, на котором необходимо равенство нулю функции f (при $N=3$ результаты касаются ОЛ, при $N>3$ – СОЛ).

Заметим, что ни результат М. Кожимы, ни результат И. Л. Блошанского и О. В. Лифанцевой "существенно усилены" быть не могут. В обоих случаях (с разной степенью сложности) для построения контрпримеров используется функция Ч. Феффермана из работы [16]. [4]

3. Далее, перейдем к вопросам равносходимости разложений в ряд и интеграл Фурье.

Рассмотрим разности (0.3) и (0.4) при условии, что компоненты "номеров" $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$ "частичных сумм" $S_n(x; f)$ и $J_\alpha(x; g)$ связаны соотношениями:

$$n_j = [\alpha_j], \text{ где } [\alpha_j] - \text{ целая часть } \alpha_j \in \mathbb{R}_0^1, \ j = 1, \ldots, N. \qquad (0.5)$$

При $N=1$ для функции $f \in L_1(\mathbb{T}^1)$ на любом отрезке, целиком лежащем внутри интервала $(-\pi, \pi)$, разность $R_\alpha(x; f, g)$ равномерно стремится к нулю при $\alpha \to \infty$ (см. [17, с. 362-364]). Таким образом, в одномерном случае имеет место равномерная равносходимость разложений в тригонометрический ряд и интеграл Фурье.

Для кратного случая исследование вопроса о поведении разностей $R_\alpha(x; f, g)$ и $R_\alpha(x; f)$ при суммировании как по прямоугольникам, так и по квадратам, было проведено И. Л. Блошанским. [5]

Опираясь на результаты 1966 г. Л. Карлесона [21] и 1967 г. Р. Ханта [22], в 1975 г. в работе [23] И. Л. Блошанский доказал, что для $N=2$ и $p>1$ $R_\alpha(x; f, g) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^2$. Точнее (см. [23, теорема 4]) была

[4] Непрерывная функция, двойной тригонометрический ряд Фурье которой (при суммировании по прямоугольникам) неограниченно расходится всюду внутри $\mathbb{T}^2$.

[5] Равносуммируемость сферических и интегральных сферических Бохнера-Рисса была исследована И. Стейном [18] (см. также обзорные статьи Б. И. Голубова [19] и Ш. А. Алимова, Р. Р. Ашурова, А. К. Пулатова [20]).

доказана следующая

Теорема A. *Для любых функций $g(x)$ и $f(x)$ таких, что $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, и $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^2$,*

$$\lim_{\alpha_1,\,\alpha_2 \to \infty} R_{\alpha_1,\,\alpha_2}(x; f, g) = 0 \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^2;$$

более того,

$$\left\| \sup_{\alpha_1,\,\alpha_2 > 0} |R_{\alpha_1,\,\alpha_2}(x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},$$

где константа $C(p)$ [6] *не зависит от функций f и g.*

Таким образом, при $N = 2$ и $p > 1$ тригонометрический ряд и интеграл Фурье в смысле сходимости п.в. на $\mathbb{T}^2$ при суммировании по прямоугольникам ведут себя одинаково. В той же работе [23] была выяснена существенность вида сходимости $R_\alpha(x; f, g)$ и условий $N = 2$, $p > 1$. А именно, были построены непрерывные функции $f_1 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^2)$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha \to \infty}} |R_\alpha(0; f_1)| = +\infty$, и $f_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N > 2$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha \to \infty}} |R_\alpha(x; f_2)| = +\infty$ всюду внутри $\mathbb{T}^N$ ([23, теорема 7]). В классе же L_1 приведен пример функции f_3 такой, что $\overline{\lim\limits_{\alpha \to \infty}} |R_\alpha(x; f_3)| = +\infty$ в каждой точке $x \in \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$ ([23, теорема 6]).

Дальнейшее исследование вопросов равносходимости пошло по двум направлениям. В первом случае возник вопрос о возможности построения контрпримеров (при $p = 1$, $N \geq 2$) для суммирования по квадратам.[7] Это было связано с тем, что при построении контрпримеров в работе [23] учитывался прямоугольный метод суммирования, что, в свою очередь, давало возможность "варьировать переменные" α_j. Заметим, что в случае суммирования по квадратам построение контрпримеров оказалось существенно более сложным.

[6] В дальнейшем через C, $C(p)$, $C(\delta)$, $C(p, \delta)$ будем обозначать константы, вообще говоря, разные.

[7] Из работ Н.Р. Тевзадзе [24] и П. Шёлина [8] следует, что для $N \geq 3$ и $p > 1$ $R_{\alpha_0}(x; f, g) \to 0$ при $\alpha_0 \to \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^N$.

Так, в 1976 г. в работе [25] была построена суммируемая функция $f \in L_1(\mathbb{T}^2)$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha_0\to\infty}} |R_{\alpha_0}(x;f)| = +\infty$ для п.в. $x \in \mathbb{T}^2$. Последняя оценка выполняется за счет "разной скорости расходимости" двойного ряда Фурье функции $f(x)$ и двойного интеграла Фурье функции $g(x)$, $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^2$, $g(x) = 0$ вне $\mathbb{T}^2$, по одним и тем же подпоследовательностям $\{\alpha_0(k,x)\}$, $\alpha_0(k,x) \in \mathbb{R}^1$, $k = 1, 2, \ldots$. Позже, в 1990 г. в работе [26] были построены две суммируемые функции f и g: $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$, совпадающие на $\mathbb{T}^N$ и такие, что кратный ряд Фурье функции f неограниченно расходится п.в. на $\mathbb{T}^N$ по некоторым подпоследовательностям, в то время как кратный интеграл Фурье функции g сходится п.в. по тем же подпоследовательностям.

Далее, поскольку, начиная с трехмерного случая (как было доказано в [23]) равносходимость п.в. разложений в ряд и интеграл Фурье при суммировании по прямоугольникам отсутствует даже для непрерывных функций, то вторым направлением исследования стал вопрос о нахождении "классов равносходимости" при $N \geq 3$.

Так, в 1978 г. И. Л. Блошанским (см. [27]) было установлено, что для функций $f \in H^\omega(\mathbb{T}^3)$, где

$$H^\omega(\mathbb{T}^N) = \left\{ f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N) : \omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta,\\ x,y\in\mathbb{T}^N}} |f(x) - f(y)| = O(\omega(\delta)) \right\},$$

$\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ при $\delta \to +0$, а $\omega_0(\delta) = (\log\frac{1}{\delta}\log\log\log\frac{1}{\delta})^{-1}$, [8]

$$R_\alpha(x;f) \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^3.$$

Однако, уже в классе $H^{\omega_2}(\mathbb{T}^3)$, определяемом модулем непрерывности $\omega_2(\delta) = \lambda(\delta) \cdot \omega_1(\delta)$, где $\omega_1(\delta) = \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}$, а произвольная функция $\lambda(\delta)$ удовлетворяет (при $\delta \to +0$) двум условиям: $\lambda(\delta)$ монотонно стремится к

[8] Класс функций $H^\omega(\mathbb{T}^2)$, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ при $\delta \to +0$, впервые появился в работе К. И. Осколкова [28], где была доказана сходимость п.в. в этом классе двойных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам).

$+\infty$ и $\lambda(\delta)\cdot\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}$ стремится к $+0$, равносходимость п.в. не справедлива (доказательство этого факта опирается на оценки работы М. Бахбуха и Е. М. Никишина [29], см. [27] [9]).

Далее, в 1996 г. в работе [30] И. Л. Блошанским, О. К. Ивановой и Т. Ю. Рословой было доказано, что для функций $f \in L(\log^+ L)^2(\mathbb{T}^2)$ равносходимость рассматриваемых разложений имеет место, т.е. $\lim\limits_{\alpha\to\infty} R_\alpha(x;f) = 0$ п.в. на $\mathbb{T}^2$.

В этой же работе они доказали, что существует функция $f \in L(\log^+\log^+ L)^{1-\varepsilon}(\mathbb{T}^2)$, $0<\varepsilon<1$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\infty}}\,|R_\alpha(x;f)| = +\infty$ для почти всех $x\in\mathbb{T}^2$.

И в 1998 г. в работе [31] Т. Ю. Рослова, во-первых, усилила отрицательный результат И. Л. Блошанского ([23, теорема 6]), доказав, что для любой функции $\Phi(u) = o(u\log^+\log^+ u)$ при $u\to\infty$ существует функция $f\in\Phi(L)(\mathbb{T}^2)$ такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha\to\infty}}\,|R_\alpha(x;f)| = +\infty$ всюду на $\mathbb{T}^2$. А, во-вторых, она показала, что для любой функции $f\in L(\log^+ L)(\log^+\log^+ L)(\mathbb{T}^2)$ $\lim\limits_{\alpha\to\infty} R_\alpha(x;f) = 0$ п.в. на $\mathbb{T}^2$.

4. Полученные в рамках второго направления (т.е., нахождения "классов равносходимости" при $N\ge 3$) результаты поставили вопрос о справедливости равносходимости п.в. (рассматриваемых разложений) при дополнительных условиях на функции $f(x)$ и $g(x)$ (в частности, в классах L_p, $p>1$, при $N\ge 3$), и дополнительных ограничениях на вектор α.

Глава I настоящей работы посвящена исследованию вопроса о равносходимости на $\mathbb{T}^N$ разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье функций $f\in L_p(\mathbb{T}^N)$ и $g\in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p>1$, $N\ge 2$, $g(x)=f(x)$ на $\mathbb{T}^N$, в случае, когда "частичные суммы" указанных разложений, т.е. $S_n(x;f)$

[9] В работе [29] построена функция из класса $H^{\omega_1}(\mathbb{T}^2)$, прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье которой расходятся в каждой точке квадрата $[-\pi+\varepsilon,\,\pi-\varepsilon]^2$, $\varepsilon>0$.

и $J_\alpha(x;g)$ соответственно, имеют "номера" $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$, в которых некоторые компоненты являются элементами "лакунарных последовательностей".

В § 1.1 главы I мы рассматриваем поведение разностей $R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$ (0.3), (0.4) при $N \geq 2$, когда компоненты n_j вектора $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и компоненты α_j вектора $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$ связаны более широким соотношением, чем (0.5), а именно:

$$| \alpha_j - n_j | \leq \varrho, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{0.6}$$

где ϱ — некоторая константа, не зависящая от n и α.

Также в данном параграфе мы исследуем вопрос об эквивалентном поведении разностей $R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$ и

$$RS_{n+m}(x; f) = S_{n+m}(x; f) - S_n(x; f), \quad n,\, m \in \mathbb{Z}_0^N. \tag{0.7}$$

На первый взгляд, обе эти разности должны "вести себя в предельном случае" (т.е. в случае, когда $\alpha \to \infty$ и $n \to \infty$, а параметр m ограничен) одинаково (т.к. имеют одно и то же количество "особенностей"), но это оказалось не так.

Справедлива следующая теорема.

Теорема I.I. *Для любого* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}_0^2$, *удовлетворяющего условию* (0.6), *и для любых функций* $g(x)$ *и* $f(x)$ *таких, что* $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, *и* $g(x) = f(x)$ *при* $x \in \mathbb{T}^2$,

$$\lim_{\alpha_1,\, \alpha_2 \to \infty} R_{\alpha_1,\, \alpha_2}(x; f, g) = 0 \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^2;$$

более того,

$$\left\| \sup_{\alpha_1,\, \alpha_2 > 0} |R_{\alpha_1,\, \alpha_2}(x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},$$

где константа $C(p)$ *не зависит от функций* f *и* g.

Результат теоремы показывает, что в двумерном случае в классах L_p, $p > 1$, равносходимость п.в. разложений в тригонометрический ряд и интеграл Фурье имеет место при условии, что компоненты n_j и α_j векторов n и α связаны соотношением (0.6).

Эквивалентным теореме I.I является следующий результат.

Теорема I.I$'$. *Для любой ограниченной последовательности* $\{m(n)\}$, $m(n) \in \mathbb{Z}_0^2$, $n \in \mathbb{Z}_0^2$, *и для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} RS_{n+m(n)}(x; f) = 0 \text{ \textit{почти всюду на} } \mathbb{T}^2.$$ [10]

Результат, сформулированный в виде теоремы I.I$'$, означает, что для последовательности частичных сумм двойных рядов Фурье функций из L_p, $p > 1$, имеет место свойство "почти фундаментальности".

Замечание 1. Под эквивалентностью теорем I.I и I.I$'$ мы подразумеваем, что из справедливости теоремы I.I следует справедливость теоремы I.I$'$, а из результата теоремы I.I$'$ (плюс результат теоремы A) следует результат теоремы I.I.

Естественно, встает вопрос о поведении разностей $RS_{n+m}(x; f)$ и $R_\alpha(x; f)$ при $N \geq 3$. Как оказалось, начиная с трехмерного случая, указанные разности не эквивалентны. Точнее, справедливы следующие результаты. Для разности $RS_{n+m}(x; f)$ имеет место

Теорема I.II. *Для любой ограниченной последовательности* $\{m(n)\}$, $m(n) \in \mathbb{Z}_0^2$, $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_0^2$, *для любых лакунарных последовательностей* $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, $j = 3, \dots, N$, *и для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 3$, *почти всюду на* $\mathbb{T}^N$

$$\lim_{n_1, n_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N \to\infty} RS_{n_1+m_1(n),\, n_2+m_2(n),\, n_3^{(\lambda_3)}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}}(x; f) = 0.$$

[10] Заметим, что эта оценка справедлива и для расходящихся п.в. двойных рядов Фурье.

В свою очередь, для разности $R_\alpha(x;f)$ справедлив следующий результат, который уточняет отрицательный результат И. Л. Блошанского ([23, теорема 7]).

Теорема I.III. *Существует функция* $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$, *такая, что для любых* $N-2$ *возрастающих последовательностей* $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ *при* $\nu_j \to \infty$, $j = 3, \ldots, N$,

$$\overline{\lim_{n_1, n_2, \nu_3, \ldots, \nu_N \to \infty}} |R_{n_1, n_2, \alpha_3^{(\nu_3)}, \ldots, \alpha_N^{(\nu_N)}}(x;f)| = +\infty \ \text{ всюду внутри } \mathbb{T}^N.$$

Результат теоремы I.III, с точки зрения вопросов равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье (которые мы исследуем в настоящей работе), показывает, что как только мы оставляем две компоненты вектора n (а значит и вектора α) "свободными" (т.е., в частности, не являющимися элементами никаких лакунарных последовательностей), то класс $\mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$, уже не есть "класс равносходимости п.в." указанных разложений.

В § 1.2 главы I нами исследуется вопрос о справедливости равносходимости рассматриваемых разложений в случае, когда не более одной компоненты в векторе α остается "свободной".

Для формулировки результатов введем следующие понятия и обозначения.

Пусть $\{n^{(\kappa)}\}$, $n^{(\kappa)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\kappa = 1, 2, \ldots,$ – произвольная лакунарная последовательность, и пусть ϱ – некоторая постоянная.

Определение 2. *Последовательность* $\{\alpha^{(\kappa)}\}$, $\alpha^{(\kappa)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\kappa = 1, 2, \ldots,$ *будем называть вещественной лакунарной последовательностью, если* $[\alpha^{(\kappa)}] = n^{(\kappa)}$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ (*здесь* $[\xi]$ – *целая часть* $\xi \in \mathbb{R}^1$), *и обобщенной вещественной лакунарной последовательностью, если*

$$|\ \alpha^{(\kappa)} - n^{(\kappa)}\ | \leq \varrho, \quad \kappa = 1, 2, \ldots. \tag{0.8}$$

Пусть M — множество чисел $\{1,\ldots,N\}$ и $k \in M$. Обозначим через $J_k = \{j_1,...,j_k\}$, $j_s < j_l$ при $s < l$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1,\ldots,m_{N-k}\}$, $m_s < m_l$ при $s < l$, — непустые подмножества множества M. Пусть $\nu = \nu(J_k) = (\nu_{j_1},\ldots,\nu_{j_k}) \in \mathbb{Z}_0^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1,\ldots,k$. Символом $n^{(\nu)} = n^{(\nu)}[J_k] = (n_1,\ldots,n_N) \in \mathbb{Z}_0^N$ обозначим N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j = j_s$, $s = 1,\ldots,k$, являются элементами *некоторых* (однократных бесконечно больших) *последовательностей натуральных чисел* (при $j \in J_k : n_j = n_j^{(\nu_j)}$ и $n_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$). В частности, символом $n^{(\lambda)} = n^{(\lambda)}[J_k] \in \mathbb{Z}_0^N$ (где $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_0^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1,\ldots,k$) будем обозначать N-мерный вектор, у которого компоненты n_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) *лакунарных* последовательностей, а символом $\alpha^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)}[J_k] = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{R}_0^N$ обозначим N-мерный вектор, у которого компоненты α_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) *обобщенных вещественных лакунарных* последовательностей. При этом последовательности частичных сумм $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x;f)$ и $J_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x;g)$ будем называть соответственно "J_k-лакунарными последовательностями прямоугольных частичных сумм" ряда Фурье и интеграла Фурье.

Справедлив следующий результат

Теорема I.IV. *Для любого $J_{N-1} \subset M$, $N \geq 3$, и для любых функций $g(x)$ и $f(x)$ таких, что $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$, если числа $\alpha_j \in \mathbb{R}_0^1$ и $n_j \in \mathbb{Z}_0^1$, $j \in M \setminus J_{N-1}$, удовлетворяют условию* (0.6), *то*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-1}, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-1}}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x;f,g) = 0 \quad \textit{почти всюду на} \quad \mathbb{T}^N;$$

более того,

$$\left\| \sup_{\substack{\lambda_j>0,\, j\in J_{N-1},\\ \alpha_j>0,\, j\in M\setminus J_{N-1}}} |R_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x;f,g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)} \le C(p)\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^N)},$$

где константа $C(p)$ не зависит от функций f и g.

Следствие (теоремы I.IV). *Для любого $J_{N-1}\subset M$, $N\ge 3$, и для любой функции $g\in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p>1$,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j\to\infty,\, j\in J_{N-1},\\ \alpha_j\to\infty,\, j\in M\setminus J_{N-1}}} J_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x;g) = g(x) \ \text{ для почти всех } x\in\mathbb{T}^N.$$

Результат теоремы I.IV (для $N\ge 3$) оказался в каком-то смысле эквивалентен результату теоремы I.I (для $N=2$), т.е. лакунарность $N-1$ компоненты в N-мерном векторе α разности $R_\alpha(x;f,g)$ (теорема I.IV) "заменяет" одну свободную компоненту в двумерном векторе (α_1,α_2) разности $R_{\alpha_1,\alpha_2}(x;f,g)$ (теорема I.I). В таком случае по-прежнему стоит вопрос о справедливости равносходимости п.в. (рассматриваемых разложений) при $N\ge 3$ либо в более "узких классах" , чем $\mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, либо в классах L_p, $p>1$, при дополнительных условиях на функции $f(x)$ и $g(x)$, но уже в случае, когда две или более компонент вектора α являются одномерными лакунарными последовательностями.

В § 1.3 главы I нами получено некоторое продвижение в первом направлении данного вопроса. Обозначим

$$H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3) = \Big\{ f\in\mathbb{C}(\mathbb{T}^3):$$

$$\omega^*(\delta,f) = \sup_{\substack{(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2<\delta^2,\\ x_j,\,y_j\in\mathbb{T}^1,\, j=1,2,3}} |f(x_1,x_2,x_3)-f(x_1,y_2,y_3)| = O(\omega(\delta)) \Big\},$$

здесь $\omega(\delta)=o(\omega_0(\delta))$ при $\delta\to+0$ (очевидно, что $H^\omega(\mathbb{T}^3)\subset H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3)$).

Теорема I.V. *Для* $J_1 = \{1\}$ *и для любой функции* $f \in H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3)$ *при условии, что* $\alpha_j \in \mathbb{R}^1_0$ *и* $n_j \in \mathbb{Z}^1_0$, $j \in M \setminus J_1$, *удовлетворяют* (0.6),

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_1, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_1}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_1]}(x; f) = 0 \quad \textit{почти всюду на} \quad \mathbb{T}^3;$$

более того, существует число $\rho = \rho(f) \in \mathbb{R}^1_{16}$ *такое, что*

$$\left\| \sup_{\alpha^{(\lambda)}[J_1] \in \mathbb{R}^3_\rho} |R_{\alpha^{(\lambda)}[J_1]}(x; f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p)\big[\omega^*(1, f) + \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}\big], \quad p > 1,$$

где константа $C(p)$ *не зависит от функции* $f(x)$.

И, наконец, в § 1.4 главы I нами доказана теорема (которая обобщает отрицательный результат Т. Ю. Рословой [31]), о том, что в двумерном случае равносходимость п.в. (рассматриваемых разложений) будет отсутствовать в классе $\Phi(L)$, где $\Phi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ — любая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$, $u \to \infty$.

Теорема I.VI. *Для любой функции* $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ *при* $u \to \infty$, *и для любых возрастающих последовательностей* $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}^1_0$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ *при* $\nu_j \to \infty$, $j = 1, 2$, *существует функция* $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^2)$ *такая, что*

$$\varlimsup_{\nu_1, \nu_2 \to \infty} |R_{\alpha_1^{(\nu_1)}, \alpha_2^{(\nu_2)}}(x; f)| = +\infty \;\; \textit{всюду внутри} \;\; \mathbb{T}^2.$$ [11]

В главе II нами получено некоторое продвижение во втором направлении исследования равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье – поиске дополнительных условий на функции $f(x)$ и $g(x)$ из классов L_p, $p > 1$, для справедливости равносходимости исследуемых разложений. И в качестве таких достаточных условий мы рассматриваем равенство нулю функции $f(x)$ на множествах определенного вида.

В § 2.1 главы II мы описываем класс "самых простых" множеств, на которых справедлива равносходимость п.в. (рассматриваемых разложений) в

[11] В частности, каждая последовательность $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$ может быть лакунарной последовательностью.

классах $L_p, p > 1, N \geq 3$, в случае, когда "частичные суммы" указанных разложений, т.е. $S_n(x; f)$ и $J_\alpha(x; g)$, имеют "номера" $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$, в которых некоторые компоненты являются элементами "лакунарных последовательностей".

Введем следующие обозначения.

Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств $\mathbb{R}[J_k]$ и $\mathbb{R}[M \setminus J_k]$, где $\mathbb{R}[J_k] = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in M \setminus J_k\}$. Обозначим также $\mathbb{T}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}[J_k] : -\pi \leq x_j < \pi \text{ при } j \in J_k\}$. Очевидно, что $\mathbb{R}[J_N] = \mathbb{R}^N$, а $\mathbb{T}[J_N] = \mathbb{T}^N$.

Пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, — произвольное (непустое) открытое множество, и пусть $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M$.

Положим

$$W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2], \quad J_2 \subset M.\,[12] \tag{0.9}$$

Множества $W[J_2]$ будем называть "N-мерными брусками". Далее, для любого J_k, $0 \leq k \leq N-2$, рассмотрим следующие множества: множество

$$W = W(J_k) = W(\Omega, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2] \tag{0.10}$$

и множество

$$W^0 = W^0(J_k) = W^0(\Omega, J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2]. \tag{0.11}$$

В § 2.1 доказана следующая теорема.

[12] При этом любой вектор $z = (z_1, \ldots, z_{2N}) \in A \times B$, где $A \subset \mathbb{R}[J_k]$, а $B \subset \mathbb{R}[M \setminus J_k]$, мы отождествляем с вектором $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ по формуле

$$x_s = \begin{cases} z_s & \text{при} \quad s \in J_k, \\ z_{N+s} & \text{при} \quad s \in M \setminus J_k. \end{cases}$$

.

Теорема II.I. *Для любого* $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$, $N \ge 3$, *и для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ *на* W,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_k,\\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \text{ для почти всех } x \in W^0.$$

Результат теоремы показывает, что для кратных рядов и интегралов Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм" равносходимость п.в. (рассматриваемых разложений) в классах L_p, $p > 1$, при $N \ge 3$ будет справедлива на множестве $W^0 = W^0(J_k)$ вида (0.11) при условии равенства нулю функции $f(x)$ на множестве $W = W(J_k)$ вида (0.10).

Естественно, встает вопрос о том, можно ли в теореме II.I добиться равносходимости п.в. (рассматриваемых разложений) на всем множестве $W(J_k)$.

Если при $N \ge 3$ величина $k = N-2$, то справедливо следующее

Следствие (теоремы II.I). *При* $N \ge 3$ *для любого* $J_{N-2} \subset M$ *и для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ *на* W,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-2},\\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-2}}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-2}]}(x; f) = 0 \text{ для почти всех } x \in W.$$

Если же при $N \ge 4$ величина k меньше $N-2$, то усилить теорему II.I, установив равносходимость на всем $W(J_k)$, нельзя, что показывает следующий результат.

Теорема II.II. *Пусть* $N \ge 4$ *и* $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-3$, *тогда существуют множество* $W = W(J_k)$ *вида* (0.10) *и функция* $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ *такие, что* $f(x) = 0$ *на* W *и для любых* k *вещественных последовательностей* $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ *при* $\nu_j \to \infty$, *справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j \to \infty,\, j \in J_k,\\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f)| = +\infty \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

В § 2.2 главы II нами доказан результат, который показывает, что теорема II.I не может быть усилена в плане отказа от равенства нулю функции $g(x)$ вне $\mathbb{T}^N$.

Теорема II.III. *Существует функция* $g(x)$, $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$, $g(x) = 0$ *при* $x \in \mathbb{T}^3$, *такая, что для любой последовательности* $\{\alpha_3^{(\nu_3)}\}$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \to \infty$ *при* $\nu_3 \to \infty$,

$$\overline{\lim_{\alpha_1, \alpha_2, \nu_3 \to \infty}} |R_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^{(\nu_3)}}(x; 0, g)| = +\infty \text{ всюду внутри } \mathbb{T}^3.$$

В качестве следствия теоремы II.III имеем:

Следствие (теоремы II.III). *Для любого* $N \geq 3$ *существуют функции* $g(x)$ *и* $f(x)$, $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$, $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $g(x) = f(x)$ *при* $x \in \mathbb{T}^N$, *такие, что для любых* $N-2$ *последовательностей* $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ *при* $\nu_j \to \infty$, $j = 3, \ldots, N$,

1. $$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) = f(x) \text{ в каждой точке } \mathbb{T}^N,$$

а

2. $$\overline{\lim_{\alpha_1, \alpha_2, \nu_3, \ldots, \nu_N \to \infty}} |J_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^{(\nu_3)}, \ldots, \alpha_N^{(\nu_N)}}(x; g)| = +\infty \text{ всюду внутри } \mathbb{T}^N.$$

Замечание 2. Несложно видеть, что результат теоремы I.III непосредственно следует из данного следствия.

В главе III диссертации в терминах свойства $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ нами доказан критерий справедливости равносходимости п.в. разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм" в классах L_p, $p > 1$, на произвольных подмножествах $\mathbb{T}^N$ положительной меры (удовлетворяющих некоторым ограничениям на границу множества).

Также в данной главе доказана теорема, которая показывает, что найденная геометрия множеств, на которых справедлива равносходимость п.в. разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм" в классах L_p, $p > 1$, перестаёт "работать" в классе $\Phi(L)$, где $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$— любая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$, $u \to \infty$.

В работе [32] И. Л. Блошанским и О. В. Лифанцевой было введено следующее понятие.

Определение 3. *Пусть* $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$, $N \ge 3$.

1. *Будем говорить, что множество* $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, *если найдется множество* $W = W(J_k)$ *вида* (0.10) *такое, что* $\mu(W \setminus \mathfrak{A}) = 0$, *причем свойство* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ *есть свойство* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, *если* $W = W(W^0, J_k)$.

2. *Свойство* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ *множества* $\mathfrak{A}$ *будем называть максимальным свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ *множества* $\mathfrak{A}$, *если для любого множества* $\widetilde{W}^0 = \widetilde{W}^0(J_k)$ *вида* (0.11) *такого, что* $\mu(\widetilde{W}^0 \setminus W^0) > 0$, *множество* $\mathfrak{A}$ *не обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(\widetilde{W}^0)$.

Далее, пусть измеримое множество $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, $N \ge 3$, удовлетворяет следующим условиям на границу:

$$\mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{int\mathfrak{B}}) = 0; \tag{0.12}$$

$$\mu_2 Fr\, pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} = 0, \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{0.13}$$

здесь $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$, μ_2 — мера на плоскости ($intP$ — множество внутренних точек, $\overline{P}$ — замыкание и FrP — граница множества P).

Теорема III.I. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *произвольное измеримое множество,* $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \ge 3$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, *и пусть* $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$.

1. *Если существует множество* $W^0 = W^0(J_k)$ *вида* (0.11) *такое, что множество* $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, *то для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \text{ почти всюду на } W^0.$$

Пусть дополнительно множество $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условиям* (0.12), (0.13), *тогда*

2. *Если свойство* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ *множества* $\mathfrak{A}$ *является максимальным свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, *то существует функция* $f_1 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ *такая, что* $f_1(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$ *и для любых* k *последовательностей вещественных чисел* $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ *при* $\nu_j \to \infty$, *справедлива оценка*

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f_1)| = +\infty \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

3. *В частности, если множество* $\mathfrak{A}$ *вообще не обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, *то существует функция* $f_2 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ *такая, что* $f_2(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$ *и для любых* k *последовательностей вещественных чисел* $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ *при* $\nu_j \to \infty$, *справедлива оценка*

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f_2)| = +\infty \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^N.$$

Результат теоремы III.I показывает, что для любого k, $1 \le k \le N-2$, справедливость или несправедливость равносходимости п.в. разложений в кратный ряд и интеграл Фурье (в случае "лакунарной последовательности частичных сумм") в классах L_p, $p > 1$, на множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$ определяется структурой и геометрией множества $\mathfrak{A}$, которые, в свою очередь, описываются свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, где величина k — это число "лакунарных компонент" вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_0^N$ ("номера" $R_\alpha(x; f)$).

Заметим, что если мы уменьшим число "свободных" компонент в векторе $\alpha = \alpha^{(\lambda)}[J_k]$ (сведя их количество до единицы, а остальные компоненты естественно оставив лакунарными), то, как следует из теоремы I.IV, для справедливости на множестве $\mathfrak{A}$ равносходимости п.в. (рассматриваемых разложений) в классах L_p, $p > 1$, от множества $\mathfrak{A}$ уже не требуется никаких ограничений (в плане структурно-геометрических характеристик), кроме измеримости.

Наконец, в § 3.3 главы III нами доказана теорема, которая показывает, что равносходимость разложений в кратный ряд и интеграл Фурье в классе $\Phi(L)$, где $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$— любая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$, $u \to \infty$, на множествах $W^0(J_k)$ вида (0.11) при условии, что $f(x) = 0$ на множестве $W(J_k)$ вида (0.10), справедлива не будет. Точнее справедлива следующая теорема.

Теорема III.II. *Пусть $N \geq 3$ и $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, тогда существуют множество $W(J_k)$ вида (0.10) и функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^N)$, $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$, такие, что $f(x) = 0$ на $W(J_k)$, и для любых k возрастающих вещественных последовательностей $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty,\, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f)| = +\infty \ \textit{почти всюду на}\ \mathbb{T}^N.$$

Выражаю глубокую благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Игорю Леонидовичу Блошанскому за постановку задач, обсуждение и постоянную поддержку в работе.

ГЛАВА I. КРАТНЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ L_p, $p \geq 1$

Введение

В § 1.1 главы I мы рассматриваем поведение разностей $R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$ (0.3), (0.4) при $N \geq 2$, когда компоненты n_j вектора $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и компоненты α_j вектора $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$ связаны более широким соотношением, чем (0.5), а именно:

$$| \alpha_j - n_j | \leq \varrho, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{1.1}$$

где ϱ — некоторая константа, не зависящая от n и α.

В § 1.1 доказана следующая

Теорема I.I. *Для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}_0^2$, удовлетворяющего условию (1.1), и для любых функций $g(x)$ и $f(x)$ таких, что $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, и $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^2$,*

$$\lim_{\alpha_1, \alpha_2 \to \infty} R_{\alpha_1, \alpha_2}(x; f, g) = 0 \ \textit{почти всюду на} \ \mathbb{T}^2;$$

более того,

$$\left\| \sup_{\alpha_1, \alpha_2 > 0} |R_{\alpha_1, \alpha_2}(x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.2}$$

где константа $C(p)$ не зависит от функций f и g.

При доказательстве теоремы I.I, мы полностью повторяем основную часть доказательства И. Л. Блошанского теоремы А. Отличие доказательства теоремы I.I от доказательства теоремы А состоит в использовании более тонкого аппарата исследования, а именно: нами было показано, что для оценки некоторых интегралов, возникающих в процессе доказательства, возможно использовать вторую теорему о среднем в случае, когда вектора α и n связаны условием (1.1). Для корректности изложения этого результата мы (в § 1.1) приводим полное доказательство теоремы I.I.

Также в данном параграфе мы исследуем вопрос об эквивалентном поведении разностей $R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$ и

$$RS_{n+m}(x; f) = S_{n+m}(x; f) - S_n(x; f), \quad n, m \in \mathbb{Z}_0^N.$$

Так, эквивалентным теореме I.I является следующий результат.

Теорема I.I′. *Для любой ограниченной последовательности* $\{m(n)\}$, $m(n) \in \mathbb{Z}_0^2$, $n \in \mathbb{Z}_0^2$, *и для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} RS_{n+m(n)}(x; f) = 0 \ \text{почти всюду на} \ \mathbb{T}^2.$$ [13]

На первый взгляд, обе эти разности ($R_\alpha(x; f, g)$ и $RS_{n+m}(x; f)$) должны "вести себя в предельном случае" (т.е. в случае, когда $\alpha \to \infty$ и $n \to \infty$, а параметр m ограничен) одинаково (т.к. имеют одно и тоже количество "особенностей"), но это оказалось не так, что показывают следующие теоремы.

Для разности $RS_{n+m}(x; f)$ имеет место

Теорема I.II. *Для любой ограниченной последовательности* $\{m(n)\}$, $m(n) \in \mathbb{Z}_0^2$, $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_0^2$, *для любых лакунарных последовательностей* $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \ldots$, $j = 3, \ldots, N$, *и для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 3$, *почти всюду на* $\mathbb{T}^N$

$$\lim_{n_1, n_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_N \to \infty} RS_{n_1+m_1(n), n_2+m_2(n), n_3^{(\lambda_3)}, \ldots, n_N^{(\lambda_N)}}(x; f) = 0.$$

В свою очередь, используя функцию Ч. Феффермана из работы [16], для разности $R_\alpha(x; f)$ можно доказать следующий результат

Теорема I.III. *Существует функция* $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$, *такая, что для любых* $N-2$ *возрастающих последовательностей* $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}_0^1$,

[13] Заметим, что эта оценка справедлива и для расходящихся п.в. двойных рядов Фурье.

$\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ *при* $\nu_j \to \infty$, $j = 3, \ldots, N$,

$$\overline{\lim_{n_1, n_2, \nu_3, \ldots, \nu_N \to \infty}} |R_{n_1, n_2, \alpha_3^{(\nu_3)}, \ldots, \alpha_N^{(\nu_N)}}(x; f)| = +\infty \text{ всюду внутри } \mathbb{T}^N.$$

Доказательство теоремы I.III в диссертации мы не приводим, т.к. этот результат непосредственно следует из следствия теоремы II.III (доказательство которого проведено в главе II).

В § 1.2 настоящей главы нами исследуется вопрос о справедливости равносходимости п.в. разложений в кратный ряд и интеграл Фурье в случае, когда не более одной компоненты в векторе α остается "свободной".

Как оказалось, класс $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 3$, так же, как и при $N = 2$, без дополнительных условий на функции $g(x)$ и $f(x)$, остается "классом равносходимости п.в.", если "свободных" компонент в векторе α только одна.

Введем следующие понятия и обозначения.

Пусть $\{n^{(\kappa)}\}$, $n^{(\kappa)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\kappa = 1, 2, \ldots,$ – произвольная лакунарная последовательность, и пусть ϱ – некоторая постоянная.

Определение 1.1. *Последовательность* $\{\alpha^{(\kappa)}\}$, $\alpha^{(\kappa)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, *будем называть вещественной лакунарной последовательностью, если* $[\alpha^{(\kappa)}] = n^{(\kappa)}$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ *(здесь* $[\xi]$ *— целая часть* $\xi \in \mathbb{R}^1$*), и обобщенной вещественной лакунарной последовательностью, если*

$$|\ \alpha^{(\kappa)} - n^{(\kappa)}\ | \leq \varrho, \quad \lambda = 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

Используя результат М. Кожимы [11] о сходимости кратных рядов Фурье функций из L_p, $p > 1$, с "лакунарной последовательностью частичных сумм", результат теоремы I.I, а также метод математической индукции, мы доказываем следующий результат

Теорема I.IV. *Для любого* $J_{N-1} \subset M$, $N \geq 3$, *и для любых функций* $g(x)$ *и* $f(x)$ *таких, что* $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $g(x) = f(x)$ *при* $x \in \mathbb{T}^N$, *если числа* $\alpha_j \in \mathbb{R}^1_0$ *и* $n_j \in \mathbb{Z}^1_0$, $j \in M \setminus J_{N-1}$, *удовлетворяют условию* (1.1), *то*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-1},\\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-1}}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x; f, g) = 0 \quad \text{почти всюду на} \quad \mathbb{T}^N; \tag{1.4}$$

более того,

$$\left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0,\, j \in J_{N-1},\\ \alpha_j > 0,\, j \in M \setminus J_{N-1}}} |R_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^N)},$$

где константа $C(p)$ *не зависит от функций* f *и* g.

Следствие (теоремы I.IV). *Для любого* $J_{N-1} \subset M$, $N \geq 3$, *и для любой функции* $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-1},\\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-1}}} J_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x; g) = g(x) \;\; \text{для почти всех} \;\; x \in \mathbb{T}^N.$$

Результат теоремы I.IV показывает, что в N-мерном случае ($N \geq 3$) будет справедлива равносходимость п.в. разложений в кратный ряд и интеграл Фурье при условии, когда $N-1$ компонента в векторе α ("номера" разности $R_\alpha(x; f, g)$), является *обобщенной вещественной лакунарной* последовательностью.

В § 1.3 настоящей главы нами найден более "узкий класс", чем $\mathbb{C}(\mathbb{T}^3)$, в котором справедлива равносходимость п.в. разложений в тройной ряд и интеграл Фурье в случае, когда две компоненты в векторе α являются "свободными". Обозначим

$$H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3) = \Bigg\{ f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^3) :$$

$$\omega^*(\delta, f) = \sup_{\substack{(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2<\delta^2,\\ x_j,\, y_j \in \mathbb{T}^1,\, j=1,2,3}} |f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1, y_2, y_3)| = O(\omega(\delta)) \Bigg\},$$

здесь $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ при $\delta \to +0$. Очевидно, что $H^\omega(\mathbb{T}^3) \subset H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3)$.

Опираясь на некоторые мажорантные оценки из работы И. Л. Блошанского [27] (см. также работу И. Л. Блошанского, Т. А. Мацеевич [34]) для частичных сумм ряда Фурье функций $f \in H^{\omega}(\mathbb{T}^2)$, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ при $\delta \to +0$, нами доказана следующая

Теорема I.V. *Для $J_1 = \{1\}$ и для любой функции $f \in H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3)$ при условии, что числа $\alpha_j \in \mathbb{R}^1_0$ и $n_j \in \mathbb{Z}^1_0$, $j \in M \setminus J_1$, удовлетворяют* (1.1),

$$\lim_{\substack{\lambda_j\to\infty,\, j\in J_1,\\ \alpha_j\to\infty,\, j\in M\setminus J_1}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_1]}(x; f) = 0 \quad \textit{почти всюду на} \quad \mathbb{T}^3;$$

более того, существует число $\rho = \rho(f) \in \mathbb{R}^1_{16}$ такое, что

$$\Bigg\| \sup_{\alpha^{(\lambda)}[J_1]\in\mathbb{R}^3_\rho} |R_{\alpha^{(\lambda)}[J_1]}(x; f)| \Bigg\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p)\big[\omega^*(1, f) + \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}\big], \quad p > 1,$$

где константа $C(p)$ не зависит от функции $f(x)$.

За счет того, что одна компонента α_j, $j \in J_1$, "номера" $\alpha^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)}[J_1] \in \mathbb{R}^3_0$ разности $R_{\alpha^{(\lambda)}[J_1]}(x; f)$ является *обобщенной вещественной лакунарной* последовательностью, мы можем для оценки некоторых интегралов применять мажорантную оценку П. Шёлина из работы [8] для частичных сумм ряда Фурье функций $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$. Вследствие чего нам удалось в трехмерном случае расширить "класс равносходимости" до $H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3)$.

Далее, в § 1.4 настоящей главы, используя результат С. В. Конягина [5], мы доказываем, что равносходимость п.в. (рассматриваемых разложений) будет отсутствовать в классе $\Phi(L)$, где $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — любая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$, $u \to \infty$.

Теорема I.VI. *Для любой функции $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$, и для любых возрастающих последовательностей $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}^1_0$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, $j = 1, 2$, существует функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^2)$ такая, что*

$$\overline{\lim_{\nu_1,\,\nu_2\to\infty}} |R_{\alpha_1^{(\nu_1)},\,\alpha_2^{(\nu_2)}}(x; f)| = +\infty \ \ \textit{всюду внутри} \ \mathbb{T}^2.$$ [14]

[14] В частности, каждая последовательность $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$ может быть лакунарной последовательностью.

§ 1.1. Свойство "почти фундаментальности" для последовательности частичных сумм двойных рядов Фурье функций из L_p, $p > 1$

Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье (0.1) и собственный интеграл Фурье (0.2). Можем записать эти выражения соответственно в следующем виде:

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(x+u) D_n(u) du, \tag{1.5}$$

$$J_\alpha(x; g) = \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(u) \widetilde{D}_\alpha(u-x) du = \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x+u) \widetilde{D}_\alpha(u) du, \tag{1.6}$$

где $D_n(t) = D_{n_1}(t_1) \dots D_{n_N}(t_N)$, а $\widetilde{D}_\alpha(t) = \widetilde{D}_{\alpha_1}(t_1) \dots \widetilde{D}_{\alpha_N}(t_N)$, здесь $D_{n_j}(t_j) = \frac{\sin(n_j + \frac{1}{2})t_j}{2 \sin \frac{t_j}{2}}$, $n_j \in \mathbb{Z}_0^1$, — ядро Дирихле, а $\widetilde{D}_{\alpha_j}(t_j) = \frac{\sin \alpha_j t_j}{t_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_0^1$, — упрощенное ядро Дирихле.

Доказательство теоремы I.I. Докажем сначала оценку (1.2) для функций $f(x)$ и $g(x) = g_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, где

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in [-2\pi, 2\pi)^2, \\ 0 & \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus [-2\pi, 2\pi)^2. \end{cases} \tag{1.7}$$

Для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}_0^2$, распишем собственный интеграл Фурье (1.6) функции $g_1(x)$ следующим образом:

$$J_\alpha(x; g_1) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} g_1(x+u) \widetilde{D}_\alpha(u) du = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\Delta^2} g_1(x+u) \widetilde{D}_\alpha(u) du +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta^2} g_1(x+u) \widetilde{D}_\alpha(u) du = \widetilde{J}_\alpha^{(1)}(x; g_1) + \widetilde{J}_\alpha^{(2)}(x; g_1), \tag{1.8}$$

где $\Delta = [-\delta, \delta]$, $0 < \delta < \pi$.

Рассмотрим и оценим следующую разность

$$R_{\alpha}^{(1)}(x;f,g_1)=S_n(x;f)-\widetilde{J}_{\alpha}^{(1)}(x;g_1). \tag{1.9}$$

Нам понадобится следующий результат (см. [23, теорема 1]).

Теорема B. *Пусть $f\in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p>1$, и пусть $0<\delta_1\le\pi$, $0<\delta_2\le\pi$, тогда справедливо равенство*

$$S_{n_1,\,n_2}(x;f)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}f(x+u)\widetilde{D}_{n_1}(u_1)\widetilde{D}_{n_2}(u_2)du_1du_2+\beta_{n_1,n_2}(x,f),$$

где $\beta_{n_1,n_2}(x,f)\to 0$ при $n_1,n_2\to\infty$ почти всюду на $\mathbb{T}^2$; более того,

$$\left\|\sup_{n_1,\,n_2>0}|\beta_{n_1,n_2}(x,f)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)}\le C(p)\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^2)}.$$

Применяя теорему B, разность (1.9) можем расписать следующим образом:

$$R_{\alpha}^{(1)}(x;f,g_1)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta}f(x+u)\widetilde{D}_{n_1}(u_1)\widetilde{D}_{n_2}(u_2)du_1du_2+$$

$$+\beta_{n_1,n_2}(x,f)-\widetilde{J}_{\alpha}^{(1)}(x;g_1)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta}f(x+u)\widetilde{D}_{n_1}(u_1)\widetilde{D}_{n_2}(u_2)du_1du_2-$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta}g_1(x+u)\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1)\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2)du_1du_2+\beta_{n_1,n_2}(x,f)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}g_1(x+u)\Big[\widetilde{D}_{n_1}(u_1)-\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1)\Big]du_1\right\}\widetilde{D}_{n_2}(u_2)du_2+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}g_1(x+u)\Big[\widetilde{D}_{n_2}(u_2)-\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2)\Big]du_2\right\}\times$$

$$\times\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1)du_1+\beta_{n_1,n_2}(x,f)=$$

$$=\widetilde{R}_{\alpha}^{(1)}(x;f,g_1)+\widetilde{R}_{\alpha}^{(2)}(x;f,g_1)+\beta_{n_1,n_2}(x,f). \tag{1.10}$$

Рассмотрим и оценим $\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha}(x;f,g_1)$ ($\widetilde{R}^{(2)}_{\alpha}(x;f,g_1)$ оценивается аналогично). Имеем:

$$\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha}(x;f,g_1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} g_1(x_1+u_1,x_2+u_2)\Big[\widetilde{D}_{n_1}(u_1)-\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1)\Big]du_1\right\}\times$$

$$\times\widetilde{D}_{n_2}(u_2)du_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} g_1(x_1+u_1,x_2+u_2)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(n_1-\alpha_1)}{(n_1-\alpha_1)}\frac{2\sin\frac{(n_1-\alpha_1)u_1}{2}}{u_1}\cos\frac{(n_1+\alpha_1)u_1}{2}du_1\right\}\widetilde{D}_{n_2}(u_2)du_2,$$

при этом будем считать, что $n_1-\alpha_1\neq 0$, в противном случае $\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha}(x;f,g_1)=0$.

Рассмотрим функцию $y(t)=\frac{2\sin\frac{(n_1-\alpha_1)t}{2}}{(n_1-\alpha_1)t}$. Очевидно, что эта функция четна и положительна на интервале $(0,\frac{\pi}{\varepsilon})$, где $\varepsilon=|n_1-\alpha_1|$. Докажем, что наша функция убывает на интервале $(0,\frac{\pi}{\varrho})$ (величина ϱ определена в (1.1)). Для этого достаточно доказать, что функция $\widetilde{y}(t)=\frac{2\sin\frac{\varepsilon t}{2}}{\varepsilon t}$ убывает на интервале $(0,\frac{\pi}{\varrho})$. Имеем:

$$\widetilde{y}\,'(t)=\frac{t\varepsilon^2\cos\frac{\varepsilon t}{2}-2\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t}{2}}{(t\varepsilon)^2}=\frac{\varepsilon(t\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t}{2}-2\sin\frac{\varepsilon t}{2})}{(t\varepsilon)^2},$$

и т.к. $t\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t}{2}-2\sin\frac{\varepsilon t}{2}<0$ ($\operatorname{tg} v>v$ при $v\in(0,\frac{\pi}{2})$), то $\widetilde{y}\,'(t)<0$ при $t\in(0,\frac{\pi}{\varepsilon})$. Следовательно, принимая во внимание, что $\varepsilon=|n_1-\alpha_1|\le\varrho$ (см. оценку (1.1)), мы получаем убывание функции $\widetilde{y}(t)$ на интервале $(0,\frac{\pi}{\varrho})$.

Пусть $a=\min\{\frac{\pi}{\varrho},\delta\}$. Разобьем $\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha}(x;f,g_1)$ следующим образом:

$$\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha}(x;f,g_1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} g_1(x_1+u_1,x_2+u_2)\frac{(n_1-\alpha_1)}{(n_1-\alpha_1)}\frac{2\sin\frac{(n_1-\alpha_1)u_1}{2}}{u_1}\times\right.$$

$$\times\cos\frac{(n_1+\alpha_1)u_1}{2}du_1\Bigg\}\widetilde{D}_{n_2}(u_2)du_2=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left\{\frac{1}{\pi}\left\{\int\limits_{-\delta}^{-a}+\int\limits_{-a}^{a}+\int\limits_{a}^{\delta}\right\}g_1(x_1+u_1,x_2+u_2)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(n_1-\alpha_1)}{(n_1-\alpha_1)}\frac{2\sin\frac{(n_1-\alpha_1)u_1}{2}}{u_1}\cos\frac{(n_1+\alpha_1)u_1}{2}du_1\right\}\widetilde{D}_{n_2}(u_2)du_2=$$

$$=\widetilde{R}_\alpha^{(1,1)}(x;f,g_1)+\widetilde{R}_\alpha^{(1,2)}(x;f,g_1)+\widetilde{R}_\alpha^{(1,3)}(x;f,g_1). \qquad (1.11)$$

Далее, применяя вторую теорему о среднем в $\widetilde{R}_\alpha^{(1,2)}(x;f,g_1)$ [15] к множителю $\frac{2\sin\frac{(n_1-\alpha_1)u_1}{2}}{(n_1-\alpha_1)u_1}$, будем иметь

$$\widetilde{R}_\alpha^{(1,2)}(x;f,g_1)=\frac{n_1-\alpha_1}{\pi}\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}g_1(x_1+u_1,x_2+u_2)\widetilde{D}_{n_2}(u_2)du_2\right\}\times$$

$$\times\cos\frac{(n_1+\alpha_1)u_1}{2}du_1, \qquad (1.12)$$

где $0<\delta_1,\delta_2<a$.

В таком случае, учитывая (1.1), (1.11) и (1.12), получим:

$$|\widetilde{R}_\alpha^{(1)}(x;f,g_1)|\le C\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}g_1(u_1,x_2+u_2)\widetilde{D}_{n_2}(u_2)du_2\right|du_1.$$

Выражение под знаком модуля для п.в. $u_1\in[-2\pi,2\pi)$ можно рассматривать как "главный член" собственного интеграла Фурье функции $g_1(x)$ по переменной x_2. Обозначим этот интеграл через $\widetilde{J}_{\alpha_2}(x_2,g_1;u_1)$. Тогда для него можно применить интегральный аналог неравенства Ханта (см. [23, оценка (2.1)]):

$$\left\|\sup_{\beta>0}|J_\beta(x,\psi)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^1)}\le C\,\|\psi(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^1)}\,,\quad p>1. \qquad (1.13)$$

---

[15] Интегралы $\widetilde{R}_\alpha^{(1,1)}(x;f,g_1)$ и $\widetilde{R}_\alpha^{(1,3)}(x;f,g_1)$ оцениваются без применения теоремы о среднем, поскольку $|\frac{\sin\frac{(n_1-\alpha_1)u_1}{2}}{u_1}|\le const$, при $u_1\in[-\delta,-a]\bigcup[a,\delta]$.

Используя (1.13) и неравенство Гёльдера, получим оценку:

$$\left\| \sup_{\alpha_1,\,\alpha_2>0} |\widetilde{R}_\alpha^{(1)}(x;f,g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \le C(p,\delta)\|g_1\|_{L_p([-2\pi,2\pi)^2)}. \tag{1.14}$$

Учитывая результат теоремы B, а также то, что $\widetilde{R}_\alpha^{(2)}(x;f,g_1)$ оценивается аналогично, получим оценку для $R_\alpha^{(1)}(x;f,g_1)$:

$$\left\| \sup_{\alpha_1,\,\alpha_2>0} |R_\alpha^{(1)}(x;f,g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \le C(p,\delta)\|g_1\|_{L_p([-2\pi,2\pi)^2)}. \tag{1.15}$$

Далее, рассмотрим и оценим $\widetilde{J}_\alpha^{(2)}(x;g_1)$. Имеем:

$$\begin{gathered} \widetilde{J}_\alpha^{(2)}(x;g_1) = \\ = \frac{1}{\pi^2}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{-\delta}\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{-\infty}^{-\delta}\int\limits_{\delta}^{+\infty} + \int\limits_{\delta}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{+\infty}\int\limits_{\delta}^{+\infty} \right\} g_1(x_1+u_1,x_2+u_2)\times \\ \times \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1)\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2)du_1du_2 + \\ + \frac{1}{\pi^2}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{-\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{\delta}^{+\infty} + \int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{+\infty}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \right\} g_1(x_1+u_1,x_2+u_2)\times \\ \times \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1)\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2)du_1du_2 = A_\alpha^{(1)}(\delta,x,g_1) + A_\alpha^{(2)}(\delta,x,g_1). \end{gathered} \tag{1.16}$$

Интегралы из $A_\alpha^{(1)}(\delta,x,g_1)$ оцениваются с помощью неравенства Гёльдера и, очевидно, не превосходят величины $C\|g_1\|_{L_p([-2\pi,2\pi)^2)}^p$.

Рассмотрим и оценим

$$A_\alpha^{(2)}(\delta,x,g_1) = \sum_{k=1}^{4} A_\alpha^{(2,k)}(\delta,x,g_1).$$

Для этого оценим каждый из интегралов, входящих в $A_\alpha^{(2)}(\delta,x,g_1)$, например, интеграл

$$A_\alpha^{(2,2)}(\delta,x,g_1) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{\delta}^{+\infty} g_1(x_1+u_1,x_2+u_2)\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1)\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2)du_1du_2$$

(остальные интегралы в $A_\alpha^{(2)}(\delta,x,g_1)$ оцениваются аналогично).

Применяя неравенство Гёльдера, получаем оценку:

$$|A_\alpha^{(2,2)}(\delta, x, g_1)|^p \le C \int\limits_{\delta}^{+\infty} \Big| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} g_1(x_1+u_1, x_2+u_2) \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1) du_1 \Big|^p du_2 \le$$

$$\le C \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \Big| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} g_1(x_1+u_1, u_2) \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1) du_1 \Big|^p du_2.$$

Выражение под знаком модуля для п.в. $u_2 \in [-2\pi, 2\pi)$ можно рассматривать как "главный член" собственного интеграла Фурье функции $g_1(x)$ по переменной x_1. Обозначим этот интеграл через $\widetilde{J}_{\alpha_1}(x_1, g_1; u_2)$.

Тогда, применяя для интеграла $\widetilde{J}_{\alpha_1}(x_1, g_1; u_2)$ оценку (1.13), а также неравенство Гёльдера, получим:

$$\Big\| \sup_{\alpha_1,\, \alpha_2 > 0} |A_\alpha^{(2,2)}(\delta, x, g_1)| \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \le C \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi)^2)}. \tag{1.17}$$

Поскольку остальные интегралы в $A^{(2)}_{\alpha_1,\, \alpha_2}(\delta, x, g_1)$ оцениваются аналогично, то из оценок (1.8)-(1.10) и (1.15)-(1.17), используя стандартный прием (см., например, [33, с. 58-59]), можно сделать вывод, что для п.в. $x \in \mathbb{T}^2$

$$R_\alpha(x; f, g_1) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g_1) \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty,$$

т.е. теорема I.I доказана для функции $g_1(x)$.

Теперь докажем теорему для функции, определенной условием

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2) & \text{при} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2, \\ 0 & \text{вне} \quad \mathbb{T}^2. \end{cases} \tag{1.18}$$

Для этого разделим квадрат $[-2\pi, 2\pi)^2$ на девять частей: $[-2\pi, 2\pi)^2 = \mathbb{T}^2 \cup \cup_{i=2}^{9} T_i^2$, где $T_1^2 = [\pi, 2\pi)^2$, $T_2^2 = [-2\pi, -\pi] \times [\pi, 2\pi)$, $T_3^2 = [-2\pi, -\pi]^2$, $T_4^2 = [\pi, 2\pi) \times [-2\pi, -\pi]$, $T_5^2 = [\pi, 2\pi) \times [-\pi, \pi]$, $T_6^2 = [-\pi, \pi] \times [\pi, 2\pi)$, $T_7^2 = [-2\pi, -\pi] \times [-\pi, \pi]$, $T_8^2 = [-\pi, \pi] \times [-2\pi, -\pi]$.

Определим на этих множествах следующие функции:

$$\widetilde{g}_i(u_1,u_2)=\begin{cases} g_1(u_1,u_2) & \text{при} \quad (u_1,u_2)\in T_i^2, \\ 0 & \text{вне} \quad T_i^2, \end{cases}$$

$i=1,\dots,8$.

В таком случае, для доказательства теоремы I.I для функции $g(x)$, удовлетворяющей условию (1.18), достаточно доказать, что справедливы оценки:

$$\left\|\sup_{\alpha_1,\,\alpha_2>0}|J_\alpha(x,\widetilde{g}_i)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)}\le C\|g_1\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},\ \ i=1,\dots,8. \tag{1.19}$$

Доказательство проведем для $i=5$ (для остальных i доказательство аналогично):

$$J_\alpha(x,\widetilde{g}_5)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{g}_5(u_1,u_2)\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2-x_2)du_2\right\}\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1-x_1)du_1=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\widetilde{J}_{\alpha_2}(x_2,\widetilde{g}_5;u_1)\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1-x_1)du_1.$$

Пусть $J_*(x_2,\widetilde{g}_5;u_1)=\sup\limits_{\alpha_2>0}|\widetilde{J}_{\alpha_2}(x_2,\widetilde{g}_5;u_1)|$, тогда имеем:

$$\left\|\sup_{\alpha_1,\,\alpha_2>0}|J_\alpha(x,\widetilde{g}_5)|\right\|^p_{L_p(\mathbb{T}^2)}\le$$

$$\le\int\limits_{\mathbb{T}^2}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}|J_*(x_1,\widetilde{g}_5;u_2)|\frac{du_2}{|u_2-x_2|}\right)^p dx_1dx_2\le$$

$$\le\int\limits_{\mathbb{T}^1}\left(\left\{\int\limits_{-\pi}^{0}+\int\limits_{0}^{\pi}\right\}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}|J_*(x_1,\widetilde{g}_5;u_2)|\frac{du_2}{|u_2-x_2|}\right)^p dx_2\right)dx_1=A_1+A_2.$$

Если $x_2\in[-\pi,0]$, $u_2\in[\pi,2\pi]$, то $|u_2-x_2|\ge\pi$, тогда для A_1 можно применить оценку (1.13) и получить оценку (1.19). Далее рассмотрим и оценим A_2. Сделав замену переменных в A_2: $x_2^{'}=\pi-x_2$, получим:

$$A_2=\int\limits_{\mathbb{T}^1}\left\{\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}|J_*(x_1,\widetilde{g}_5;u_2)|\frac{du_2}{|u_2+x_2-\pi|}\right)^p dx_2\right\}dx_1,$$

сделав еще одну замену переменных $u_2' = u_2 - \pi$, имеем:

$$A_2 = \int\limits_{\mathbb{T}^1} \left\{ \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} |J_*(x_1, \widetilde{g}_5; u_2 + \pi)| \frac{du_2}{(u_2 + x_2)} \right)^p dx_2 \right\} dx_1. \tag{1.20}$$

Далее, применяя в (1.20) неравенство Гильберта — Шура — Харди (см. [33, стр. 318]) и оценку (1.13), получим:

$$A_2 \le C(p) \cdot \|g_1\|^p_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Таким образом оценки (1.15), (1.17) и (1.19) доказывают теорему для функции $g(x)$, удовлетворяющей условию (1.18).

И, наконец, покажем, что результат теоремы I.I справедлив для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$, удовлетворяющей условию $g(x) = f(x)$ на $\mathbb{T}^2$. Для этого достаточно оценки интегралов, в которых присутствует бесконечный предел (например, интегралы (1.16), (1.17) и (1.19)), начинать с применения неравенства Гёльдера. Например, оценка интеграла

$$A_\alpha^{(1,2)}(\delta, x, g_1) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_\delta^{+\infty} \int\limits_\delta^{+\infty} g_1(x_1 + u_1, x_2 + u_2) \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1) \widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2) du_1 du_2$$

(см. оценку (1.16)) проводится так:

$$|A_\alpha^{(1,2)}(\delta, x, g_1)|^p \le \left\{ \frac{1}{\pi^{p'}} \int\limits_\delta^{+\infty} t^{-p'} \, dt \right\}^{\frac{2p}{p'}} \cdot \|g_1\|^p_{L_p(\mathbb{R}^2)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Теорема I.I доказана.

Доказательство эквивалентности теорем I.I и I.I$'$. Вначале докажем, что из теоремы I.I следует результат теоремы I.I$'$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2_0$, и $\{m(n)\}$, $m(n) \in \mathbb{Z}^2_0$, $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2_0$, – произвольная ограниченная последовательность. Рассмотрим разность $RS_{n+m}(x; f)$ между частичными суммами ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$,

$p > 1$, и пусть $J_\alpha(x; g)$ — собственный интеграл Фурье функции $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$, при условии, что $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{T}^2$, и $n_j = [\alpha_j]$, $j = 1, 2$. Тогда

$$RS_{n+m}(x; f) = S_{n+m}(x; f) - S_n(x; f) = \Big[S_{n+m}(x; f) - J_\alpha(x; g)\Big] -$$

$$- \Big[S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)\Big] = R_\alpha^{(1)}(x; f, g) - R_\alpha^{(2)}(x; f, g). \qquad (1.21)$$

Так как последовательность $\{m(n)\}$ ограничена, учитывая (1.1), получаем: $\mid \alpha_j - (m_j + n_j) \mid \leq const, j = 1, 2$. Тогда, учитывая, что $n_j = [\alpha_j]$, $j = 1, 2$, для разностей $R_\alpha^{(1)}(x; f, g)$ и $R_\alpha^{(2)}(x; f, g)$ можно применить теорему I.I. А значит, в правой части равенства (1.21) получаем: $R_\alpha^{(1)}(x; f, g) - R_\alpha^{(2)}(x; f, g) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^2$, что и доказывает теорему I.I$'$.

Далее, докажем, что из теоремы I.I$'$ следует результат теоремы I.I.

Рассмотрим разность $R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$ между частичной суммой ряда Фурье функци $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, и собственный интегралом Фурье функции $g \in L_p(\mathbb{R}^2)$, при условии, что $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{T}^2$, а компоненты векторов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_0^2$ и $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_0^2$ связаны соотношением (1.1). Введем вектор $n' = (n'_1, n'_2) \in \mathbb{Z}_0^2$ такой, что $n'_j = [\alpha_j]$, $j = 1, 2$, и рассмотрим разность

$$R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g) = \Big[S_n(x; f) - S_{n'}(x; f)\Big] +$$

$$+ \Big[S_{n'}(x; f) - J_\alpha(x; g)\Big]. \qquad (1.22)$$

Поскольку $\mid \alpha_j - n_j \mid \leq \varrho$, и $n'_j = [\alpha_j]$, $j = 1, 2$, то в равенстве (1.22) для первой разности можно применить результат теоремы I.I$'$, а для второй разности теорему А, что и доказывает теорему I.I. Эквивалентность теорем I.I и I.I$'$ доказана.

Доказательство теоремы I.II. Пусть $\{m(n)\}$, $m(n) \in \mathbb{Z}_0^2$, $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_0^2$, – произвольная ограниченная последовательность и пусть

$\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \ldots,$ $j = 3, \ldots, N,$ — лакунарные последовательности. Обозначим $n^{(\lambda,\, m)} = (n_1 + m_1(n),\, n_2 + m_2(n),\, n_3^{(\lambda_3)},\, \ldots, n_N^{(\lambda_N)}) \in \mathbb{Z}_0^N$ и $n^{(\lambda)} = (n_1,\, n_2,\, n_3^{(\lambda_3)},\, \ldots, n_N^{(\lambda_N)}) \in \mathbb{Z}_0^N$, и распишем разность $RS_{n^{(\lambda,\, m)}}(x; f) = S_{n^{(\lambda,\, m)}}(x; f) - S_{n^{(\lambda)}}(x; f)$ в следующем виде

$$RS_{n^{(\lambda,\, m)}}(x; f) =$$

$$= \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(x+u) D_{n^{(\lambda,\, m)}}(u) du - \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(x+u) D_{n^{(\lambda)}}(u) du =$$

$$= \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(x+u) \Big[D_{n_1+m_1(n)}(u_1) D_{n_2+m_2(n)}(u_2) - D_{n_1}(u_1) D_{n_2}(u_2) \Big] \times$$

$$\times D_{n_3^{(\lambda_3)}}(u_3) \ldots D_{n_N^{(\lambda_N)}}(u_N) du_1 \ldots du_N =$$

$$= \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(x+u) \Big[D_{n_2+m_2(n)}(u_2) - D_{n_2}(u_2) \Big] D_{n_1}(u_1) \times$$

$$\times D_{n_3^{(\lambda_3)}}(u_3) \ldots D_{n_N^{(\lambda_N)}}(u_N) du_1 \ldots du_N +$$

$$+ \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(x+u) \Big[D_{n_1+m_1(n)}(u_1) - D_{n_1}(u_1) \Big] D_{n_2+m_2(n)}(u_2) \times$$

$$\times D_{n_3^{(\lambda_3)}}(u_3) \ldots D_{n_N^{(\lambda_N)}}(u_N) du_1 \ldots du_N =$$

$$= \widetilde{RS}^{(1)}_{n^{(\lambda,\, m)}}(x; f) + \widetilde{RS}^{(2)}_{n^{(\lambda,\, m)}}(x; f). \tag{1.23}$$

Рассмотрим и оценим $\widetilde{RS}^{(1)}_{n^{(\lambda,\, m)}}(x; f)$ ($\widetilde{RS}^{(2)}_{n^{(\lambda,\, m)}}(x; f)$ оценивается аналогично). В силу определения ядра Дирихле имеем:

$$\widetilde{RS}^{(1)}_{n^{(\lambda,\, m)}}(x; f) =$$

$$= \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(x+u) \Big[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_2+m_2(n)} \cos(ku_2) - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n_2} \cos(ku_2) \Big] \times$$

$$\times D_{n_1}(u_1) D_{n_3^{(\lambda_3)}}(u_3) \ldots D_{n_N^{(\lambda_N)}}(u_N) du_1 \ldots du_N =$$

$$= \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(x+u) \Big[\sum_{k=n_2+1}^{n_2+m_2(n)} \cos(ku_2) \Big] \times$$

$$\times D_{n_1}(u_1)D_{n_3^{(\lambda_3)}}(u_3)\dots D_{n_N^{(\lambda_N)}}(u_N)du_1\dots du_N.$$

Последовательность $\{m(n)\}$ ограниченная, а значит

$$|\widetilde{RS}^{(1)}_{n^{(\lambda,\,m)}}(x;f)| \le C\int\limits_{\mathbb{T}^1}\Bigl|\frac{1}{\pi^{N-1}}\int\limits_{\mathbb{T}^{N-1}} f(x_1+u_1,u_2,x_3+u_3,\dots,x_N+u_N)\times$$

$$\times D_{n_1}(u_1)D_{n_3^{(\lambda_3)}}(u_3)\dots D_{n_N^{(\lambda_N)}}(u_N)du_1du_3\dots du_N\Bigr|\,du_2. \tag{1.24}$$

Выражение под знаком модуля в (1.24) для п.в. $u_2\in\mathbb{T}^1$ можно рассматривать как частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по переменным $x_1,x_3,\dots,x_N$. Т.к. последовательности $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $j=3,\dots,N$, являются лакунарными последовательностями, то для оценки интеграла в (1.24) можно применить мажорантную оценку М. Кожимы (см. [11]), т.е. оценку вида:

$$\Bigl\|\sup_{\lambda_1,\dots,\lambda_{\varkappa-1},n_\varkappa>0}|S_{n_1^{(\lambda_1)},\dots,n_{\varkappa-1}^{(\lambda_{\varkappa-1})},n_\varkappa}(x;\phi)|\Bigr\|_{L_p(\mathbb{T}^\varkappa)}\le C(p)\cdot\|\phi\|_{L_p(\mathbb{T}^\varkappa)}, \tag{1.25}$$

здесь функция $\phi\in L_p(\mathbb{T}^\varkappa)$, $p>1$, $\varkappa\ge 3$, а $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)}\in\mathbb{Z}_0^1$, $\lambda_j=1,2,\dots$, $j=1,\dots,\varkappa-1$, — лакунарные последовательности. [16]

Используя оценку (1.25), неравенство Гёльдера, а также оценку (1.24), получаем следующую оценку для $\widetilde{RS}^{(1)}_{n^{(\lambda,\,m)}}(x;f)$:

$$\Bigl\|\sup_{n_1,n_2,\lambda_3,\dots,\lambda_N>0}|\widetilde{RS}^{(1)}_{n^{(\lambda,\,m)}}(x;f)|\Bigr\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}\le C(p)\cdot\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}. \tag{1.26}$$

Так как $\widetilde{RS}^{(2)}_{n^{(\lambda,\,m)}}(x;f)$ оценивается аналогично, то из (1.23) и (1.26) следует

$$\Bigl\|\sup_{n_1,n_2,\lambda_3,\dots,\lambda_N>0}|RS_{n^{(\lambda,\,m)}}(x;f)|\Bigr\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}\le C(p)\cdot\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^N)},$$

что и доказывает теорему I.II.

§ 1.2. Равносходимость почти всюду разложений в кратный ряд и интеграл Фурье, "прямоугольные частичные суммы" которых рассматриваются по некоторым подпоследовательностям

[16] Заметим, что при $\varkappa=2$ оценка (1.25) получена в работе П. Шёлина [8].

Доказательство теоремы I.IV.[17] Доказательство теоремы I.IV проведем методом математической индукции по N ($N \geq 2$). Для $N = 2$ результат теоремы является частным случаем более общей теоремы I.I.

Не ограничивая общности будем считать, что $J_{N-1} = \{1, 2, \ldots, N-1\}$. Положим $D_{n_0}(t_0) = D_0(t_0) = \widetilde{D}_{\alpha_0}(t_0) = \widetilde{D}_0(t_0) = 1$.

Пусть $q \geq 3$, и пусть $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, q-1$, — лакунарные последовательности, причем $n_0^{(\lambda_0)} = 0$. Символом $n^{(\lambda,\, q)}$ обозначим вектор $n^{(\lambda,\, q)} = (n_1^{(\lambda_1)}, \, \ldots, \, n_{q-1}^{(\lambda_{q-1})}, \, n_q) \in \mathbb{Z}_0^q$. Для любого m, $0 \leq m \leq q$, и для любой 2π-периодической (по каждому аргументу) функции $f \in L_1(\mathbb{T}^q)$ положим:

$$\left(S^{(m)} J^{(q-m)}\right)_{n^{(\lambda,\, q)}}(x; f) = \frac{1}{\pi^q} \int\limits_{\mathbb{T}^q} f(x+u) \cdot \prod_{0 \leq j \leq m} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \times$$

$$\times \prod_{m+1 \leq j \leq q-1} \widetilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \widetilde{D}_{n_q}(u_q) du_1 \ldots du_q \quad \text{при} \quad 0 \leq m \leq q-1, \text{[18]} \qquad (1.27)$$

$$\left(S^{(m)} J^{(q-m)}\right)_{n^{(\lambda,\, q)}}(x; f) =$$

$$= \frac{1}{\pi^q} \int\limits_{\mathbb{T}^q} f(x+u) \prod_{1 \leq j \leq q-1} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot D_{n_q}(u_q) du \quad \text{при} \;\; m = q. \qquad (1.27')$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. *Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^q)$, $p > 1$, $q \geq 3$, и для любого m, $1 \leq m \leq q$,*

$$\left(S^{(m)} J^{(q-m)}\right)_{n^{(\lambda,\, q)}}(x; f) = \left(S^{(m-1)} J^{(q-m+1)}\right)_{n^{(\lambda,\, q)}}(x; f) + I_{n^{(\lambda,\, q)}}(x, f), \qquad (1.28)$$

где $I_{n^{(\lambda,\, q)}}(x, f) \to 0$ при $\lambda_1, \, \ldots, \, \lambda_{q-1}, \, n_q \to \infty$ почти всюду на $\mathbb{T}^q$; более того,

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1}, n_q > 0} \left| I_{n^{(\lambda,\, q)}}(x, f) \right| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \leq C(p) \cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^q)}. \qquad (1.29)$$

---

[17] Схема доказательства теоремы I.IV основывается на схеме доказательства И. Л. Блошанского теоремы 4 из работы [23].

[18] Очевидно, что при $m = q-1$ упрощенные ядра Дирихле $\widetilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)$ с номерами $j \geq m+1$ отсутствуют.

Замечание 1.2. При $q=2$ результат леммы 1.1 доказан И. Л. Блошанским в работе [23].

Доказательство леммы 1.1. Фиксируем произвольное m, $1 \le m \le q$, $q \ge 3$ (чтобы не загромождать запись, не ограничивая общности, будем считать, что $m \ne q-1,\, q$) и рассмотрим интеграл $\left(S^{(m)}J^{(q-m)}\right)_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)$ (1.27). Имеем:

$$\left(S^{(m)}J^{(q-m)}\right)_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f) = \left(S^{(m-1)}J^{(q-m+1)}\right)_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f) +$$

$$+\frac{1}{\pi^q}\int\limits_{\mathbb{T}^q} f(x+u) \prod_{0\le j\le m-1} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot G_{n_m^{(\lambda_m)}}(u_m)\cdot \prod_{m+1\le j\le q-1} \widetilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\times$$

$$\times \widetilde{D}_{n_q}(u_q)du_1\dots du_q = \left(S^{(m-1)}J^{(q-m+1)}\right)_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f) + I_{n^{(\lambda,\,q)}}(x,f), \tag{1.30}$$

где функция $G_r(t) = D_r(t) - \widetilde{D}_r(t) = \varphi(t)\sin rt + \frac{1}{2}\cos rt$, в свою очередь, $\varphi(t)$ - 2π-периодическая, непрерывная функция, которая на $[-\pi,\,\pi]$ определяется так:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{t} \ \text{ при } \ t\in[-\pi,\,0)\cup(0,\,\pi] \ \text{ и } \ \varphi(t)=0 \ \text{ при } \ t=0.$$

Оценим второй интеграл в (1.30). Имеем:

$$I_{n^{(\lambda,\,q)}}(x,f) = \frac{1}{\pi^q}\int\limits_{\mathbb{T}^q} f(x+u) \prod_{0\le j\le m-1} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot G_{n_m^{(\lambda_m)}}(u_m)\times$$

$$\times \prod_{m+1\le j\le q-1} \left\{ D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) - G_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \right\}\cdot \left\{ D_{n_q}(u_q) - G_{n_q}(u_q) \right\} du_1\dots du_q =$$

$$= I^{(1)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f) + \sum_{2\le j\le 2(q-m)-1} I^{(j)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f) + I^{(2(q-m))}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f). \tag{1.31}$$

При этом, мы будем считать, что в первом слагаемом (т.е. $I^{(1)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)$) в сумме (1.31) в q-кратном интеграле на местах с номерами $m+1,\dots,q$ "стоят" только ядра Дирихле, в свою очередь, в последнем слагаемом (т.е. $I^{(2(q-m))}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)$) на этих местах нет ни одного ядра Дирихле. Остальные слагаемые в сумме (1.31) пронумерованы произвольным образом. [19]

Оценим каждое слагаемое в сумме (1.31). Оценим, например, следующий интеграл, обозначив его для определенности $I^{(2)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)$ (остальные интегралы $I^{(j)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)$, $j=1,3,\ldots,2(q-m)$, оцениваются аналогично):

$$I^{(2)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)=-\frac{1}{\pi^q}\int\limits_{\mathbb{T}^q} f(x+u)\prod_{0\le j\le m-1} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot G_{n_m^{(\lambda_m)}}(u_m)\times$$

$$\times G_{n_{m+1}^{(\lambda_{m+1})}}(u_{m+1})\cdot\prod_{m+2\le j\le q-1} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot D_{n_q}(u_q)\,du_1\ldots du_q.$$

В силу ограниченности функции $G_r(t)$ и 2π-периодичности функции $f(x)$ имеем:

$$|I^{(2)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)|\le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{T}^2}\Big|\frac{1}{\pi^{q-2}}\int\limits_{\mathbb{T}^{q-2}} f(x_1+u_1,\ldots,x_{m-1}+u_{m-1},u_m,u_{m+1},x_{m+2}+u_{m+2},\ldots,$$

$$x_q+u_q)\prod_{\substack{0\le j\le q-1,\\ j\ne m,\,m+1}} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)D_{n_q}(u_q)\,du_1\,\ldots\,du_{m-1}\,du_{m+2}\,\ldots\,du_q\Big|\,du_m\,du_{m+1}=$$

$$=C\int\limits_{\mathbb{T}^2}\big|\,S_{\widetilde{n}^{(\lambda,\,q-2)}}(\widetilde{x}^{(q-2)},f;u_m,\,u_{m+1})\big|du_m\,du_{m+1}, \tag{1.32}$$

здесь вектора $\widetilde{n}^{(\lambda,\,q-2)}$ и $\widetilde{x}^{(q-2)}$ определяются так: $\widetilde{n}^{(\lambda,\,q-2)}=(n_1^{(\lambda_1)},\ldots,\,n_{m-1}^{(\lambda_{m-1})},$ $n_{m+2}^{(\lambda_{m+2})},\,\ldots,\,n_{q-1}^{(\lambda_{q-1})},\,n_q)$, $\widetilde{x}^{(q-2)}=(x_1,\,\ldots,\,x_{m-1},x_{m+2},\ldots,x_q)$.

Выражение под знаком модуля в (1.32) для п.в. $(u_m,\,u_{m+1})\in\mathbb{T}^2$ можно рассматривать как частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по переменным $\widetilde{x}^{(q-2)}$. Так как последовательности $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $j=1,\ldots,m-1,m+2,\,\ldots,\,q-1$, являются лакунарными последовательностями, то для оценки интеграла в (1.32) можно применить мажорантную оценку М. Кожимы (1.25).

[19] Они отличаются числом и месторасположением функций $G_{n_j^{(\lambda_j)}}$, $m+2\le j\le q$, на местах с номерами $m+2,\ldots,q$ в этом же интеграле.

Используя оценку (1.25), неравенство Гёльдера, а также оценку (1.32), получаем следующую оценку для интеграла $I^{(2)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)$:

$$\left\| \sup_{\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_{q-1},\,n_q>0} |I^{(2)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \le C(p)\cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^q)}. \tag{1.33}$$

Принимая во внимание, что остальные интегралы в (1.31) оцениваются аналогично, можем сделать вывод: оценка (1.29) доказана. Учитывая, что для бесконечно дифференцируемых функций "остаточный член" $I_{n^{(\lambda,\,k)}}(x,f)$ в равенстве (1.28) стремится к нулю при $\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_{k-1},\,n_k\to\infty$ п.в. на $\mathbb{T}^k$, из мажорантной оценки (1.29) стандартные рассуждения (см., например, [33, с. 58-59]) дают возможность утверждать, что это же справедливо и для любой функции $f\in L_p(\mathbb{T}^k)$, $k\ge 3$, $p>1$, и для любого m, $1\le m\le k$. Лемма 1.1 доказана.

Следствие леммы 1.1. *Для любой функции $f\in L_p(\mathbb{T}^q)$, $p>1$, $q\ge 3$, и для любого m, $1\le m\le q$,*

$$\left(S^{(m)}J^{(q-m)}\right)_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f) = \left(S^{(0)}J^{(q)}\right)_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f) + I_{n^{(\lambda,\,q)}}(x,f;m), \tag{1.34}$$

где $I_{n^{(\lambda,\,q)}}(x,f;m)\to 0$ при $\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_{q-1},\,n_q\to\infty$ почти всюду на $\mathbb{T}^q$; более того,

$$\left\| \sup_{\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_{q-1},\,n_q>0} |I_{n^{(\lambda,\,q)}}(x,f;m)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \le C(p)\cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^q)}. \tag{1.35}$$

Результат следствия получается путем последовательного применения (m раз) результата леммы 1.1 к интегралу (1.27) (к интегралу (1.27$'$)).

Далее, предположим, что результат теоремы I.IV верен для некоторого $N=q-1$, $q\ge 3$, т.е. если $\{\alpha_j^{(\lambda_j)}\}$, $\alpha_j^{(\lambda_j)}\in\mathbb{R}^1_0, \lambda_j=1,2,\ldots,\ j=1,\ldots,q-2$, — обобщенные вещественные лакунарные последовательности, $|\ \alpha_j^{(\lambda_j)}-n_j^{(\lambda_j)}\ |\le \varrho$, $j=1,\ldots,q-2$, где ϱ — некоторая константа, числа $|\ \alpha_{q-1}-n_{q-1}\ |\le\varrho$, и разность

$$R_{\alpha_1^{(\lambda_1)},\dots,\alpha_{q-2}^{(\lambda_{q-2})},\alpha_{q-1}}(x;f,g)=$$

$$=S_{n_1^{(\lambda_1)},\dots,n_{q-2}^{(\lambda_{q-2})},n_{q-1}}(x;f)-J_{\alpha_1^{(\lambda_1)},\alpha_2^{(\lambda_2)},\dots,\alpha_{q-2}^{(\lambda_{q-2})},\alpha_{q-1}}(x;g),$$

то для любых функций g, f: $g\in L_p(\mathbb{R}^{q-1})$, $f\in L_p(\mathbb{T}^{q-1})$, $p>1$, и $g(x)=f(x)$ при $x\in\mathbb{T}^{q-1}$,

$$\lim_{\lambda_1,\dots,\lambda_{q-2},\alpha_{q-1}\to\infty} R_{\alpha_1^{(\lambda_1)},\dots,\alpha_{q-2}^{(\lambda_{q-2})},\alpha_{q-1}}(x;f,g)=0 \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^{q-1}. \tag{1.36}$$

Более того,

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\dots,\lambda_{q-2},\alpha_{q-1}>0}|R_{\alpha_1^{(\lambda_1)},\dots,\alpha_{q-2}^{(\lambda_{q-2})},\alpha_{q-1}}(x;f,g)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^{q-1})}\le C(p)\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{q-1})}. \tag{1.37}$$

Докажем, что теорема I.IV справедлива для $N=q$, т.е. для любых функций g, f таких, что $g\in L_p(\mathbb{R}^q)$, $f\in L_p(\mathbb{T}^q)$, $p>1$, и $g(x)=f(x)$ при $x\in\mathbb{T}^q$, справедливо неравенство

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\dots,\lambda_{q-1},\alpha_q>0}|R_{\alpha_1^{(\lambda_1)},\dots,\alpha_{q-1}^{(\lambda_{q-1})},\alpha_q}(x;f,g)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)}\le C(p)\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^q)}, \tag{1.38}$$

где $\mid \alpha_j^{(\lambda_j)}-n_j^{(\lambda_j)}\mid\le\varrho$, $\alpha_j^{(\lambda_j)}\in\mathbb{R}_0^1, \lambda_j=1,2,\dots,$ $j=1,\dots,q-1,$ — лакунарные последовательности, $\mid\alpha_q-n_q\mid\le\varrho$ (заметим, что так же, как и при доказательстве леммы, предел (1.4) для $N=q$ будет следовать из оценки (1.38)).

Докажем сначала оценку (1.38) для функций $f(x)$ и $g(x)=g_1(x)$, $x\in\mathbb{R}^q$, где

$$g_1(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x\in[-2\pi,2\pi)^q,\\ 0 & \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^q\setminus[-2\pi,2\pi)^q.\end{cases} \tag{1.39}$$

По аналогии с вектором $n^{(\lambda,q)}\in\mathbb{Z}_0^q$ обозначим $\alpha^{(\lambda,q)}=(\alpha_1^{(\lambda_1)},\dots,\alpha_{q-1}^{(\lambda_{q-1})},\alpha_q)\in\mathbb{R}_0^q$ и рассмотрим разность

$$R_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x;f,g_1)=S_{n^{(\lambda,q)}}(x;f)-J_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x;g_1). \tag{1.40}$$

Распишем собственный интеграл Фурье $J_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;g_1)$ следующим образом:

$$J_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;g_1)=\frac{1}{\pi^k}\int\limits_{\mathbb{T}^q} g_1(x+u)\widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(u)du+\frac{1}{\pi^q}\int\limits_{\mathbb{R}^q\diagdown\mathbb{T}^q} g_1(x+u)\widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(u)du=$$

$$=J^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;g_1)+J^{(2)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;g_1). \tag{1.41}$$

Рассмотрим и оценим следующую разность

$$R^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;f,g_1)=S_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)-J^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;g_1). \tag{1.42}$$

Применяя следствие леммы 1.1 для $S_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)=\big(S^{(q)}J^{(0)}\big)_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f)$ (см. обозначения (1.27) и равенство (1.34)), разность (1.42) можем расписать следующим образом:

$$R^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;f,g_1)=\frac{1}{\pi^q}\int\limits_{\mathbb{T}^q} f(x+u)\widetilde{D}_{n^{(\lambda,\,q)}}(u)du+I^{(0)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x,f)-J^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;g_1)=$$

(здесь интеграл $I^{(0)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x,f)=I_{n^{(\lambda,\,q)}}(x,f;q)$ удовлетворяет оценкам (1.34) и (1.35)); в силу определения функции $g_1(x)$ (1.39) имеем:

$$=\frac{1}{\pi^q}\int\limits_{\mathbb{T}^q} g_1(x+u)\widetilde{D}_{n^{(\lambda,\,q)}}(u)du-J^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;g_1)+I^{(0)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x,f)=$$

$$=\frac{1}{\pi^q}\int\limits_{\mathbb{T}^q} g_1(x+u)\prod_{0\le j\le q-1}\widetilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot\widetilde{D}_{n_q}(u_q)du_1\,\ldots\,du_q-\frac{1}{\pi^q}\int\limits_{\mathbb{T}^q} g_1(x+u)\times$$

$$\times\prod_{0\le j\le q-1}\widetilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\widetilde{D}_{\alpha_q}(u_q)du_1\ldots du_q+I^{(0)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x,f)=$$

$$=\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;f,g_1)+I^{(0)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x;f). \tag{1.43}$$

Далее распишем первый интеграл в разности (1.43) следующим образом:

$$\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;f,g_1)=$$

$$=\sum_{l=1}^{q-2}\frac{1}{\pi^{q-1}}\int\limits_{\mathbb{T}^{q-1}}\prod_{0\le j\le l-1}\widetilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot\prod_{l+1\le j\le q-1}\widetilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot\widetilde{D}_{n_q}(u_q)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_1(x+u)\bigl[\widetilde{D}_{n_l^{(\lambda_l)}}(u_l)-\widetilde{D}_{\alpha_l^{(\lambda_l)}}(u_l)\bigr]du_l\right\} du_1\,\ldots\,du_{l-1}\,du_{l+1}\ldots\,du_q+$$

$$+\frac{1}{\pi^{q-1}}\int\limits_{\mathbb{T}^{q-1}}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_1(x+u)\bigl[\widetilde{D}_{n_{q-1}^{(\lambda_{q-1})}}(u_{q-1})-\widetilde{D}_{\alpha_{q-1}^{(\lambda_{q-1})}}(u_{q-1})\bigr]du_{q-1}\right\}\times$$

$$\times\prod_{1\le j\le q-2}\widetilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot\widetilde{D}_{n_q}(u_q)\,du_1\,\ldots\,du_{q-2}\,du_q+$$

$$+\frac{1}{\pi^{q-1}}\int\limits_{\mathbb{T}^{q-1}}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_1(x+u)\bigl[\widetilde{D}_{n_q}(u_q)-\widetilde{D}_{\alpha_q}(u_q)\bigr]du_q\right\}\times$$

$$\times\prod_{1\le j\le q-1}\widetilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\,du_1\,\ldots\,du_{q-1}=\sum_{l=1}^{q}\widetilde{R}^{(1,l)}_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x;f,g_1). \tag{1.44}$$

Здесь мы учли, что при $l=0$ в равенстве (1.44) отсутствует интеграл вида $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\,du_0$, а (по нашей договоренности) ядро $\widetilde{D}_{\alpha_0^{(\lambda_0)}}(u_0)=1$.

Оценим $\widetilde{R}^{(1,2)}_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x;f,g_1)$ (остальные интегралы в (1.44) оцениваются аналогично). Расписав упрощенные ядра Дирихле и применяя вторую теорему о среднем, интеграл в фигурной скобке $\widetilde{R}^{(1,2)}_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x;f,g_1)$ можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_1(x+u)\bigl[\widetilde{D}_{n_2^{(\lambda_2)}}(u_2)-\widetilde{D}_{\alpha_2^{(\lambda_2)}}(u_2)\bigr]du_2=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_1(x+u)\frac{n_2^{(\lambda_2)}-\alpha_2^{(\lambda_2)}}{n_2^{(\lambda_2)}-\alpha_2^{(\lambda_2)}}\times$$

$$\times\frac{2\sin\frac{(n_2^{(\lambda_2)}-\alpha_2^{(\lambda_2)})u_2}{2}}{u_2}\cdot\cos\frac{(n_2^{(\lambda_2)}+\alpha_2^{(\lambda_2)})u_2}{2}\,du_2=$$

$$=\frac{n_2^{(\lambda_2)}-\alpha_2^{(\lambda_2)}}{\pi}\cdot\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} g_1(x+u)\cos\frac{(n_2^{(\lambda_2)}+\alpha_2^{(\lambda_2)})u_2}{2}\,du_2,$$

где $0<\delta_1,\delta_2<\pi$. Имеем:

$$\widetilde{R}^{(1,2)}_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x;f,g_1)=\frac{n_2^{(\lambda_2)}-\alpha_2^{(\lambda_2)}}{\pi}\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2}\left\{\frac{1}{\pi^{q-1}}\int\limits_{\mathbb{T}^{q-1}} g_1(x+u)\widetilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1)\times\right.$$

$$\times \prod_{3\le j\le q-1} \widetilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot \widetilde{D}_{n_q}(u_q)\,du_1du_3\dots du_q \Bigg\}\cos\frac{(n_2^{(\lambda_2)}+\alpha_2^{(\lambda_2)})u_2}{2}\,du_2.$$

Тогда получаем:

$$|\widetilde{R}^{(1,2)}_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x;f,g_1)|\le$$

$$\le C\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}|\frac{1}{\pi^{q-1}}\int\limits_{\mathbb{T}^{q-1}} g_1(x_1+u_1,u_2,x_3+u_3,\dots,x_q+u_q)\widetilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1)\times$$

$$\times \prod_{3\le j\le q-1} \widetilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot \widetilde{D}_{n_q}(u_q)\,du_1du_3\dots du_q|\,du_2. \tag{1.45}$$

Далее, воспользуемся индуктивным предположением. Принимая во внимание следующие оценки: мажорантную оценку (1.37) для разности $R_{\alpha_1^{(\lambda_1)},\dots,\alpha_{q-2}^{(\lambda_{q-2})},\alpha_{q-1}}(x;f,g)$, $f\in L_p(\mathbb{T}^{q-1})$, [20] мажорантную оценку М. Кожимы (1.25) для частичной суммы $S_{n_1^{(\lambda_1)},\dots,n_{q-2}^{(\lambda_{q-2})},n_{q-1}}(x;f)$:

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\dots,\lambda_{q-1},n_q>0}|S_{n_1^{(\lambda_1)},\dots,n_{q-2}^{(\lambda_{q-2})},n_{q-1}}(x;f)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^{q-1})}\le C(p)\cdot\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^{q-1})},\quad p>1$$

(в обеих оценках $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)}\in\mathbb{Z}_0^1,\lambda_j=1,2,\dots,$ $j=1,\dots,q-2,$ — лакунарные последовательности), получаем интегральный аналог неравенства М. Кожимы (для собственного интеграла Фурье (0.2) при $N=q-1$, $q\ge 3$), т.е. оценку вида:

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\dots,\lambda_{q-2},\alpha_{q-1}>0}|J_{\alpha_1^{(\lambda_1)},\alpha_2^{(\lambda_2)},\dots,\alpha_{q-2}^{(\lambda_{q-2})},\alpha_{q-1}}(x;g)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^{q-1})}\le C(p)\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{q-1})},\quad p>1 \tag{1.46}$$

(здесь $\{\alpha_j^{(\lambda_j)}\}$, $\alpha_j^{(\lambda_j)}\in\mathbb{R}_0^1,\lambda_j=1,2,\dots,$ $j=1,\dots,q-2,$ — обобщенные вещественные лакунарные последовательности). [21]

[20] Здесь функции f, $g: f\in L_p(\mathbb{T}^{q-1})$, $g\in L_p(\mathbb{R}^{q-1})$, $p>1$, и $g(x)=f(x)$ при $x\in\mathbb{T}^{q-1}$.

[21] Заметим, что при $q=3$ оценка (1.46) является фактически интегральным аналогом неравенства Шёлина.

Применим в (1.45) оценку (1.46). Используя неравенство Гёльдера, получаем следующую мажорантную оценку для второго слагаемого в сумме (1.44):

$$\left\| \sup_{\lambda_1,\, \dots,\, \lambda_{q-1},\, n_q > 0} |\widetilde{R}^{(1,2)}_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x; f, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \le C(p) \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi)^q)}.$$

Учитывая, что остальные слагаемые в сумме (1.44) оцениваются аналогично, мы получаем оценку для интеграла $\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x; f, g_1)$

$$\left\| \sup_{\lambda_1,\, \dots,\, \lambda_{q-1},\, n_q > 0} |\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x; f, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \le C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi)^q)}. \tag{1.47}$$

В свою очередь, учитывая оценку (1.35) для интеграла $I^{(0)}_{n^{(\lambda,\,q)}}(x, f) = I_{n^{(\lambda,\,q)}}(x, f; q)$ (см. следствие для $m = q$), из оценок (1.47) и (1.43) мы получаем аналогичную оценку для разности $R^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x; f, g_1)$, точнее,

$$\left\| \sup_{\lambda_1,\, \dots,\, \lambda_{q-1},\, n_q > 0} |R^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x; f, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \le C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi)^q)}. \tag{1.48}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы I.IV (в случае, когда в качестве функции g рассматривается функция g_1 (1.39)) нам осталось оценить $J^{(2)}_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x; g_1)$ в (1.41).

Пусть r, v, l — целые числа, $0 \le r, l \le q$, $0 \le v < q$ и пусть $m = (m_1, \dots, m_q) \in \mathbb{Z}^q$. Обозначим

$$\mathfrak{A}(r, v, l) = \{m \in \mathbb{Z}^q :\ 0 = m_0 < m_1 < \dots < m_r \le q;$$

$$0 = m_0 < m_{r+1} < \dots < m_{r+v} \le q;$$

$$1 \le m_{r+v+1} < \dots < m_{r+v+l} \le q; \quad m_{\mu_1} \ne m_{\mu_2} \ \text{при} \ \mu_1 \ne \mu_2\},$$

$$0 \le r, l \le q, 0 \le v < q, \ \ r + v + l = q.$$

Обозначим точки $-\pi$ и π на оси Ox_j соответственно $-a_j$ и a_j, $j = 1, \dots, q$. Распишем интеграл $J^{(2)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x; g_1)$ следующим образом:

$$J^{(2)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x; g_1) = \frac{1}{\pi^q} \int\limits_{\mathbb{R}^q \setminus \mathbb{T}^q} g_1(x+u) \widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(u)\, du = \sum_{\substack{0 \le r, l \le q \\ 0 \le v < q \\ r+v+l=q}} \ \sum_{m \in \mathfrak{A}(r,v,l)} \frac{1}{\pi^q} \int\limits_{-\infty}^{-a_{m_1}} \dots$$

$$\dots \int\limits_{-\infty}^{-a_{m_r}} \int\limits_{-a_{m_{r+1}}}^{a_{m_{r+1}}} \dots \int\limits_{-a_{m_{r+v}}}^{a_{m_{r+v}}} \int\limits_{a_{m_{r+v+1}}}^{+\infty} \dots \int\limits_{a_{m_{r+v+l}}}^{+\infty} g_1(x+u)\widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(u)\,du =$$

$$= \sum_{\substack{0\le r,l\le q\\ 0\le v<q\\ r+v+l=q}} \sum_{m\in\mathfrak{A}(r,v,l)} A^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(m;x,g_1). \tag{1.49}$$

При этом мы предполагаем, что при $r=0$ в (1.49) отсутствуют интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{-a_j}$ $(j=1,\dots,q)$, при $v=0$ — интегралы вида $\int\limits_{-a_j}^{a_j}$ $(j=1,\dots,q)$, при $l=0$ — интегралы вида $\int\limits_{a_j}^{+\infty}$ $(j=1,\dots,q)$.

Обозначим через $B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1)$ внутреннюю сумму в (1.49), т.е.

$$B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1) = \sum_{m\in\mathfrak{A}(r,v,l)} A^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(m;x,g_1). \tag{1.50}$$

Учитывая (1.49) и (1.50), имеем

$$J^{(2)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;g_1) = \sum_{\substack{0\le r,l\le q\\ 0\le v<q\\ r+v+l=q}} B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1).$$

Разобьем последнюю сумму на три суммы:

$$J^{(2)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;g_1) = \sum_{\substack{0\le r,l\le q\\ v=0\\ r+l=q}} B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1) + \sum_{\substack{0\le r,l\le q\\ v=1\\ r+l=q-1}} B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1) +$$

$$+ \sum_{\substack{0\le r,l\le q\\ 2\le v<q\\ r+v+l=q}} B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1) = B^{(0)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1) + B^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1) + B^{(2)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1). \tag{1.51}$$

Предложение 1.1.

$$\left\| \sup_{\lambda_1,\dots,\lambda_q,\alpha_q>0} |B^{(0)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \le C(p)\cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi,2\pi)^q)}, \quad p>1,$$

где константа $C(p)=C(p,\,q)$ не зависит от функции g_1.

Доказательство предложения 1.1. Рассмотрим и оценим $B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1)$ при $v=0$, $0\le r,l\le q$, $r+l=q$. Имеем:

$$B^{(r,0,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1) = \sum_{m\in\mathfrak{A}(r,0,l)} A^{(r,0,l)}_{\alpha^{(\lambda,q)}}(m;x,g_1), \quad 0\le r,l\le q,\ \ r+l=q. \tag{1.52}$$

Фиксируем произвольный вектор $m \in \mathfrak{A}(r,0,l)$ и рассмотрим $A^{(r,0,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(m;x,g_1)$ из суммы (1.52). В силу определений множества $\mathfrak{A}(r,v,l)$ и суммы (1.49) можем записать

$$A^{(r,0,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(m;x,g_1)=\frac{1}{\pi^q}\int\limits_{-\infty}^{-a_{m_1}}\dots\int\limits_{-\infty}^{-a_{m_r}}\int\limits_{a_{m_{r+1}}}^{+\infty}\dots\int\limits_{a_{m_{r+l}}}^{+\infty}g_1(x+u)\times$$

$$\times\prod_{1\le j\le q-1}\widetilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot\widetilde{D}_{\alpha_q}(u_q)\,du_1\dots du_q,\quad 0\le r,l\le q,\ \ r+l=q. \qquad (1.53)$$

Так как для любого $\sigma\in\mathbb{R}^1_0$

$$|\widetilde{D}_\sigma(t)|\le|t|^{-1}\ \text{ при }\ 0<|t|<+\infty, \qquad (1.54)$$

то из (1.39), (1.53) и (1.54), учитывая неравенство Гёльдера, получаем:

$$|A^{(r,0,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(m;x,g_1)|^p\le C(p)\cdot\|g_1\|_{L_p([-2\pi,2\pi)^q)}.$$

В силу произвольности выбора вектора m из множества $\mathfrak{A}(r,0,l)$ последняя оценка справедлива для каждого слагаемого в сумме (1.52) при $v=0$. Тогда, учитывая опять-таки неравенство Гёльдера, мы получаем оценку и для $B^{(0)}_{\alpha^{(\lambda,q)}}(x,g_1)$:

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_{q-1},\,\alpha_q>0}|B^{(0)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)}\le C(p)\cdot\|g_1\|_{L_p([-2\pi,2\pi)^q)}.$$

Предложение 1.1 доказано.

Предложение 1.2.

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_{q-1},\,\alpha_q>0}|B^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)}\le C(p)\cdot\|g_1\|_{L_p([-2\pi,2\pi)^q)},\quad p>1,$$

где константа $C(p)=C(p,\,q)$ не зависит от функции g_1.

Доказательство предложения 1.2. Рассмотрим и оценим $B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1)$ при $v=1$, $0\le r,l\le q$, $r+l=q-1$. Для этого рассмотрим и оценим каждое слагаемое в сумме (1.50) при $v = 1$, которое для произвольного вектора $m \in \mathfrak{A}(r,1,l)$ имеет вид:

$$A^{(r,1,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(m;x,g_1) = \frac{1}{\pi^{q+1}} \int\limits_{-\infty}^{-a_{m_1}} \dots \int\limits_{-\infty}^{-a_{m_r}} \int\limits_{-a_{m_{r+1}}}^{a_{m_{r+1}}} \int\limits_{a_{m_{r+2}}}^{+\infty} \dots \int\limits_{a_{m_{r+1+l}}}^{+\infty} g_1(x+u)\times$$

$$\times \prod_{1\le j\le q-1} \widetilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \widetilde{D}_{\alpha_q}(u_q)\, du_1 \dots du_q, \quad 0 \le r,l \le q,\ \ r+l=q. \qquad (1.55)$$

В силу (1.29) и (1.54), учитывая неравенство Гёльдера, получаем:

$$|A^{(r,1,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(m;x,g_1)|^p \le C(p,\,q) \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \dots \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \Big|\frac{1}{\pi} \int\limits_{-a_{m_{r+1}}}^{a_{m_{r+1}}} g_1(u_{m_1},\dots,u_{m_r},x_{m_{r+1}}+$$

$$+u_{m_{r+1}},u_{m_{r+2}},\dots,u_{m_q})\widetilde{D}_{\alpha_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}})du_{m_{r+1}}\Big|^p du_{m_1}\dots du_{m_r}\, du_{m_{r+2}}\dots du_{m_q} =$$

$$= C(p,\,q) \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \dots \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \Big|\widetilde{J}_{\alpha_{m_{r+1}}}(x_{m_{r+1}},g_1;\widetilde{u}^{(q-1)})\Big|^p du_{m_1}\dots du_{m_r} du_{m_{r+2}}\dots du_{m_q}. \qquad (1.56)$$

Выражение под знаком модуля для п.в. $\widetilde{u}^{(q-1)} = (u_{m_1},..,u_{m_r},u_{m_{r+2}},\dots,u_{m_q}) \in [-2\pi,2\pi)^{q-1}$ можно рассматривать как "главный член" одномерного собственного интеграла Фурье функции $g_1(x)$ по переменной $x_{m_{r+1}}$. В свою очередь, для одномерного собственного интеграла Фурье функции $\psi \in L_p(\mathbb{R}^1)$, $p>1$, справедлив интегральный аналог неравенства Ханта (1.13).

Применяя оценку (1.13) в интеграле (1.56) и учитывая неравенство Гёльдера, определение функции g_1 (1.39), а также произвольность выбора вектора m из множества $\mathfrak{A}(r,1,l)$, получаем:

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_{q-1},\,\alpha_q>0} |B^{(1)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \le C(p,\,q)\cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi,2\pi)^q)}.$$

Предложение 1.2 доказано.

Предложение 1.3.
$$\left\| \sup_{\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_q,\,\alpha_q>0} |B^{(2)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \le C(p)\cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi,2\pi)^q)}, \quad p>1,$$
где константа $C(p)=C(p,\,q)$ не зависит от функции g_1.

Доказательство предложения 1.3. Рассмотрим и оценим $B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1)$ при $0\le r,l\le q$, $2\le v<q$, $r+v+l=q$. Для этого рассмотрим и оценим каждое слагаемое в сумме (1.50) при $2\le v<q$, которое для произвольного вектора $m\in\mathfrak{A}(r,v,l)$ имеет вид:

$$A^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(m;x,g_1)=$$
$$=\frac{1}{\pi^q}\int\limits_{-\infty}^{-a_{m_1}}\dots\int\limits_{-\infty}^{-a_{m_r}}\int\limits_{-a_{m_{r+1}}}^{a_{m_{r+1}}}\dots\int\limits_{-a_{m_{r+v}}}^{a_{m_{r+v}}}\int\limits_{a_{m_{r+v+1}}}^{+\infty}\dots\int\limits_{a_{m_{r+v+l}}}^{+\infty} g_1(x+u)\times$$
$$\times\prod_{1\le j\le q-1}\widetilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\cdot\widetilde{D}_{\alpha_q}(u_q)\,du_1\dots du_q,$$
$$0\le r,l\le q,\ 2\le v<q,\ r+v+l=q. \tag{1.57}$$

В силу (1.39), (1.54), учитывая неравенство Гёльдера, получаем

$$|A^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(m;x,g_1)|^p\le C(p,\,q)\times$$
$$\times\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\dots\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\left|\widetilde{J}_{\alpha_{m_{r+1}}^{(\lambda_{m_{r+1}})},\dots,\alpha_{m_{r+v}}^{(\lambda_{m_{r+v}})}}(\widetilde{x}^{(v)},g_1;\widetilde{u}^{(q-v)})\right|^p du_{m_1}\dots du_{m_r}du_{m_{r+v+1}}\dots du_{m_q}. \tag{1.58}$$

Выражение под знаком модуля для п.в. $\widetilde{u}^{(q-v)}=(u_{m_1},..,u_{m_r},u_{m_{r+v+1}},\dots,u_{m_q})\in[-2\pi,2\pi)^{q-v}$ можно рассматривать как "главный член" собственного интеграла Фурье функции $g_1(x)$ по переменным $\widetilde{x}^{(v)}=(x_{m_{r+1}},\,\dots,\,x_{m_{r+v}})$. Применяя оценку (1.46) для этого интеграла, учитывая неравенство Гёльдера, оценки (1.57) и (1.39), а также произвольность выбора вектора m из множества $\mathfrak{A}(r,v,l)$, получаем:

$$\left\| \sup_{\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_{q-1},\,\alpha_q>0} |B^{(2)}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x,g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \le C(p,\,q)\cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi,2\pi)^q)}.$$

Предложение 1.3 доказано. Из результатов предложений 1.1-1.3 вытекает справедливость теоремы I.IV при $N = q$ для функции g_1.

Теперь докажем теорему при $N = q$ для функции, определенной условием:

$$g(x_1, \dots, x_q) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_q) & \text{при} \quad (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{T}^q, \\ 0 & \text{вне} \quad \mathbb{T}^q. \end{cases} \tag{1.59}$$

Для этого разделим куб $[-2\pi, 2\pi)^q$ на 3^q частей: $[-2\pi, 2\pi)^q = \mathbb{T}^q \cup \cup_{i=2}^{3^q} T_i^q$. Параллелепипеды T_i^q, $i = 2, \dots, 3^q$, которые перенумеруем в произвольном порядке, имеют вид:

$$T_i^q = \bigotimes_{1 \le \tau \le r} [-2\pi, -a_{m_\tau}] \times \bigotimes_{r+1 \le \tau \le r+v} [-a_{m_\tau}, a_{m_\tau}] \times \bigotimes_{r+v+1 \le \tau \le r+v+l} [a_{m_\tau}, 2\pi),$$

$$m \in \mathfrak{A}(r, v, l), \;\; 0 \le r, l \le q, \;\; 0 \le v < q, \;\; r + v + l = q.$$ [22]

Определим на этих множествах $3^q - 1$ функций:

$$\widetilde{g}_i(x_1, \dots, x_q) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_q) & \text{при} \quad (x_1, \dots, x_q) \in T_i^q, \\ 0 & \text{вне} \quad T_i^q, \quad i = 2, \dots, 3^q. \end{cases} \tag{1.60}$$

Предложение 1.4.

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}, \alpha_q > 0} |J_{\alpha^{(\lambda, q)}}(x; \widetilde{g}_i)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^q)} \le C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p(\mathbb{R}^q)}, \quad p > 1, \tag{1.61}$$

$i = 2, \dots, 3^q$, где константа $C(p) = C(p, q)$ не зависит от функции g_1.

Доказательство предложения 1.4. Докажем оценку (1.61) для одного из параллелепипедов T_i^q (для остальных параллелепипедов доказательство аналогично). Пусть для определенности это будет множество T_2^q, которое имеет вид $\mathbb{T}^{q-1} \times [\pi, 2\pi]$. В таком случае имеем:

$$J_{\alpha^{(\lambda)}}(x; \widetilde{g}_1) =$$

[22] При этом мы предполагаем, что при $r = 0$ в в этом множестве отсутствуют отрезки вида $[-2\pi, -a_{m_\tau}]$, при $v = 0$ — отрезки вида $[-a_{m_\tau}, a_{m_\tau}]$, при $l = 0$ — отрезки вида $[a_{m_\tau}, 2\pi)$.

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left\{\frac{1}{\pi^{q-1}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{g}_1(u)\prod_{1\le j\le q-1}\widetilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j-x_j)du_1\ldots du_{q-1}\right\}\times$$

$$\times\widetilde{D}_{\alpha_q}(u_q-x_q)du_q = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\widetilde{J}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(\widetilde{x},\widetilde{g}_1;u_q)\widetilde{D}_{\alpha_q}(u_q-x_q)du_q, \qquad (1.62)$$

где, в данном случае, $\alpha^{(\lambda,\,q)} = ({\alpha_1}^{(\lambda_1)},\ldots,{\alpha_{q-1}}^{(\lambda_{q-1})})$ и $\widetilde{x} = (x_1,\ldots,x_{q-1})$.

Пусть $J_*(\widetilde{x},\widetilde{g}_1;u_q) = \sup\limits_{\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_{q-1}>0}|\widetilde{J}_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(\widetilde{x},\widetilde{g}_1;u_q)|$, тогда имеем:

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_{q-1},\,\alpha_q>0}|J_{\alpha^{(\lambda,\,q)}}(x;\widetilde{g}_1)|\right\|^p_{L_p(\mathbb{T}^q)}\le$$

$$\le\int\limits_{\mathbb{T}^q}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}|J_*(\widetilde{x},\widetilde{g}_1;u_q)|\frac{du_q}{|u_q-x_q|}\right)^p dx_1\ldots dx_q\le$$

$$\le\int\limits_{\mathbb{T}^{q-1}}\left(\left\{\int\limits_{-\pi}^{0}+\int\limits_{0}^{\pi}\right\}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}|J_*(\widetilde{x},\widetilde{g}_1;u_q)|\frac{du_q}{|u_q-x_q|}\right)^p dx_q\right)dx_1\ldots dx_{q-1} =$$

$$= A_1 + A_2.$$

Если $x_q\in[-\pi,0]$, $u_q\in[\pi,2\pi]$, то $|u_q-x_q|\ge\pi$, тогда для A_1 можно применить оценку (1.46) и получить оценку (1.61). Далее рассмотрим и оценим A_2. Сделав замену переменных в A_2: $x_q^{'}=\pi-x_q$, получим:

$$A_2 = \int\limits_{\mathbb{T}^{q-1}}\left\{\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}|J_*(\widetilde{x},\widetilde{g}_1;u_q)|\frac{du_q}{|u_q+x_q-\pi|}\right)^p dx_q\right\}dx_1\ldots dx_{q-1},$$

сделав еще одну замену переменных $u_q^{'}=u_q-\pi$, имеем:

$$A_2 = \int\limits_{\mathbb{T}^{q-1}}\left\{\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}|J_*(\widetilde{x};\widetilde{g}_1,u_q+\pi)|\frac{du_q}{(u_q+x_q)}\right)^p dx_q\right\}dx_1\ldots dx_{q-1}. \qquad (1.63)$$

Далее, применяя в (1.63) неравенство Гильберта — Шура — Харди (см. [33, стр. 318]) и оценку (1.46), получим:

$$A_2\le C(p,\,q)\cdot\|g_1\|^p_{L_p(\mathbb{R}^q)}.$$

Предложение 1.4 доказано.

Из результатов предложений 1.1 – 1.4 следует справедливость теоремы I.IV при $N = q$ для функции $g(x)$, удовлетворяющей условию (1.59).

В силу метода математической индукции получаем, что теорема I.IV верна для любого $N \geq 3$ для функции $g(x)$, удовлетворяющей условию:

$$g(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_N) & \text{при} \quad (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^N, \\ 0 & \text{вне} \quad \mathbb{T}^N. \end{cases}$$

И, наконец, покажем, что результат теоремы I.IV справедлив для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, удовлетворяющей условию $g(x) = f(x)$ на $\mathbb{T}^N$. Для этого достаточно оценить интегралы, в которых присутствует бесконечный предел (например, интегралы (1.53), (1.55), (1.57)). А они оцениваются также, как мы об этом писали в конце доказательства теоремы I.I. Теорема I.IV доказана.

§ 1.3. О справедливости равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье непрерывных функций

Доказательство теоремы I.V. Пусть $\{n_1^{(\lambda_1)}\}$, $n_1^{(\lambda_1)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda_1 = 1, 2, \dots,$ — лакунарная последовательность. Символом $n^{(\lambda)}$ обозначим вектор $n^{(\lambda)} = (n_1^{(\lambda_1)}, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_0^3$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.2. *Для любой функции* $f \in H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3)$

$$S_{n^{(\lambda)}}(x; f) = \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) \widetilde{D}_{n^{(\lambda)}}(u - x) du + I_{n^{(\lambda)}}(x, f), \tag{1.64}$$

где $I_{n^{(\lambda)}}(x, f) \to 0$ *при* λ_1, n_2, $n_3 \to \infty$ *почти всюду на* $\mathbb{T}^3$; *более того, существует номер* $\theta = \theta(f) \in \mathbb{Z}_{16}^1$ *такой, что*

$$\left\| \sup_{n^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}_\theta^3} |I_{n^{(\lambda)}}(x, f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \leq C(p) \big[\omega^*(1, f) + \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \big], \quad p > 1, \tag{1.65}$$

где константа $C(p)$ не зависит от функции $f(x)$.

Доказательство леммы 1.2. Используя функцию $G_r(t) = D_r(t) - \widetilde{D}_r(t) = \varphi(t)\sin rt + \frac{1}{2}\cos rt$, введенную в (1.30), распишем частичную сумму $S_{n^{(\lambda)}}(x;f)$ функции f следующим образом:

$$S_{n^{(\lambda)}}(x;f) = \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) D_{n^{(\lambda)}}(u-x)du_1du_2du_3 =$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) \widetilde{D}_{n^{(\lambda)}}(u-x)du_1du_2du_3+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)\Big[\widetilde{D}_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)G_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_3}(u_3-x_3)+$$

$$+\widetilde{D}_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)G_{n_3}(u_3-x_3)+$$

$$+\widetilde{D}_{n_3}(u_3-x_3)G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)G_{n_2}(u_2-x_2)\Big]du_1du_2du_3+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)\Big[\widetilde{D}_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)\widetilde{D}_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_3}(u_3-x_3)+$$

$$+\widetilde{D}_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)\widetilde{D}_{n_3}(u_3-x_3)G_{n_2}(u_2-x_2)\Big]du_1du_2du_3+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)\widetilde{D}_{n_2}(u_2-x_2)\widetilde{D}_{n_3}(u_3-x_3)G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)du_1du_2du_3+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)G_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_3}(u_3-x_3)du_1du_2du_3 =$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) \widetilde{D}_{n^{(\lambda)}}(u-x)du_1du_2du_3+$$

$$+A^{(1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f) + A^{(2)}_{n^{(\lambda)}}(x,f) + A^{(3)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)G_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_3}(u_3-x_3)du_1du_2du_3 =$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) \widetilde{D}_{n^{(\lambda)}}(u-x)du_1du_2du_3 + I_{n^{(\lambda)}}(x,f). \tag{1.66}$$

Очевидно, что последний интеграл из $I_{n^{(\lambda)}}(x,f)$ не превосходит $C\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}$.

Предложение 1.5. *Для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^3)$, $p > 1$,

$$\left\| \sup_{\lambda_1,\, n_2,\, n_3 > 0} |A^{(1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \leq C(p)\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}, \tag{1.67}$$

где константа $C(p)$ *не зависит от функции* f.

Доказательство предложения 1.5. Рассмотрим и оценим $A^{(1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f) = \sum\limits_{k=1}^{3} A^{(1,k)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$, оценив каждый из интегралов, входящих в $A^{(1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$, например,

$$A^{(1,2)}_{n^{(\lambda)}}(x,f) = \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)\widetilde{D}_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)G_{n_3}(u_3-x_3)\,du_1\,du_2\,du_3.$$

Учитывая определение функции $G_r(t)$, распишем интеграл $A^{(1,2)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$:

$$A^{(1,2)}_{n^{(\lambda)}}(x,f) =$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)D_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)G_{n_3}(u_3-x_3)\,du_1\,du_2\,du_3 -$$

$$-\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)G_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)G_{n_3}(u_3-x_3)\,du_1\,du_2\,du_3. \tag{1.68}$$

Очевидно, что последний интеграл из (1.68) не превосходит $C\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}$.

Далее, рассмотрим и оценим первый интеграл из (1.68). Имеем:

$$\left|\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)D_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)G_{n_3}(u_3-x_3)\,du_1\,du_2\,du_3\right| \leq$$

$$\leq C\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u_1,u_2,u_3)D_{n_2}(u_2-x_2)du_2\right|du_1\,du_3. \tag{1.69}$$

Выражение под знаком модуля в последнем интеграле для п.в. $(u_1,u_3) \in \mathbb{T}^2$ можно рассматривать как одномерную частичную сумму ряда Фурье (0.1) функции $f(x)$ по переменной x_2. В свою очередь, для одномерной частичной суммы ряда Фурье функции $\phi \in L_p(\mathbb{T}^1)$, $p > 1$, справедлива оценка Ханта (см. [22]), т.е. оценка вида

$$\left\|\sup_{n>0}|S_n(x;\phi)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^1)} \leq C(p)\|\phi\|_{L_p(\mathbb{T}^1)}. \tag{1.70}$$

Применяя оценку (1.70) в интеграле (1.69), учитывая неравенство Гёльдера и равенство (1.68), а также то, что остальные интегралы из $A^{(1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$ оцениваются аналогично интегралу $A^{(1,2)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$, получаем:

$$\left\| \sup_{\lambda_1,\, n_2,\, n_3 > 0} |A^{(1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p) \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)},$$

что и доказывает предложение 1.5.

Предложение 1.6. *Для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^3)$, $p > 1$,

$$\left\| \sup_{\lambda_1,\, n_2,\, n_3 > 0} |A^{(2)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p) \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}, \tag{1.71}$$

где константа $C(p)$ *не зависит от функции* f.

Доказательство предложения 1.6. Рассмотрим и оценим $A^{(2)}_{n^{(\lambda)}}(x,f) = \sum\limits_{k=1}^{2} A^{(2,k)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$, оценив каждый из интегралов, входящих в $A^{(2)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$, например,

$$A^{(2,1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f) = \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) \widetilde{D}_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1) \widetilde{D}_{n_2}(u_2 - x_2) G_{n_3}(u_3 - x_3)\, du_1\, du_2\, du_3.$$

Учитывая определение функции $G_r(t)$, распишем интеграл $A^{(2,1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$:

$$A^{(2,1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f) =$$

$$= \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) D_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1) D_{n_2}(u_2 - x_2) G_{n_3}(u_3 - x_3)\, du_1\, du_2\, du_3 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) \Big[-D_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1) G_{n_2}(u_2 - x_2) -$$

$$- D_{n_2}(u_2 - x_2) G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1) \Big] G_{n_3}(u_3 - x_3)\, du_1\, du_2\, du_3 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1) G_{n_2}(u_2 - x_2) G_{n_3}(u_3 - x_3)\, du_1\, du_2\, du_3 =$$

$$= \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) D_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1) D_{n_2}(u_2 - x_2) G_{n_3}(u_3 - x_3)\, du_1\, du_2\, du_3 +$$

$$+\widetilde{A}^{(2,1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)G_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_3}(u_3-x_3)\,du_1\,du_2\,du_3. \qquad (1.72)$$

Очевидно, что последний интеграл из (1.72) не превосходит $C\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}$.

Интегралы из $\widetilde{A}^{(2,1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$ оцениваются аналогично интегралам из суммы $A^{(1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$, следовательно:

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\,n_2,\,n_3>0}|\widetilde{A}^{(2,1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p)\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}. \qquad (1.73)$$

Далее, рассмотрим и оценим первый интеграл из (1.72). Имеем:

$$\left|\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)D_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)D_{n_2}(u_2-x_2)G_{n_3}(u_3-x_3)\,du_1\,du_2\,du_3\right| \le$$

$$\le C\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u_1,u_2,u_3)D_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)D_{n_2}(u_2-x_2)du_1\,du_2\right|du_3. \qquad (1.74)$$

Выражение под знаком модуля в (1.74) для п.в. $u_3\in\mathbb{T}^1$ можно рассматривать как двойную частичную сумму ряда Фурье (0.1) функции $f(x)$ по переменным x_1, x_2. Т.к. последовательность $\{n_1^{(\lambda_1)}\}$ является лакунарной, то для оценки внутреннего интеграла в (1.74) можно применить мажорантную оценку П. Шёлина (см. [8]):

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\,n_2>0}|S_{n_1^{(\lambda_1)},n_2}(x;\phi)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \le C(p)\|\phi\|_{L_p(\mathbb{T}^2)}, \qquad (1.75)$$

где $\phi\in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p>1$.

Применяя последнюю оценку в интеграле (1.74) и учитывая неравенство Гёльдера, оценки (1.72) и (1.73), и то, что другой интеграл из $A^{(2)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$ оценивается аналогично $A^{(2,1)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$, будем иметь:

$$\left\|\sup_{\lambda_1,\,n_2,\,n_3>0}|A^{(2)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p)\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}.$$

Предложение 1.6 доказано.

Предложение 1.7. *Для любой функции $f \in H^{\omega^*}(\mathbb{T}^3)$ существует такой номер $\theta = \theta(f) \in \mathbb{Z}^1_{16}$, для которого справедливо неравенство*

$$\left\| \sup_{n^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}^3_\theta} |A^{(3)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p)\big[\omega^*(1,f) + \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}\big], \quad p > 1, \tag{1.76}$$

где константа $C(p)$ не зависит от функции f.

Доказательство предложения 1.7. Рассмотрим и оценим $A^{(3)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$. Имеем:

$$A^{(3)}_{n^{(\lambda)}}(x,f) = \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) \widetilde{D}_{n_2}(u_2 - x_2) \widetilde{D}_{n_3}(u_3 - x_3) G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1)\, du_1\, du_2\, du_3 =$$

$$= \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) D_{n_2}(u_2 - x_2) D_{n_3}(u_3 - x_3) G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1)\, du_1\, du_2\, du_3 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) \Big[-D_{n_2}(u_2 - x_2) G_{n_3}(u_3 - x_3) - D_{n_3}(u_3 - x_3) G_{n_2}(u_2 - x_2) \Big] \times$$

$$\times G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1)\, du_1\, du_2\, du_3 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1) G_{n_2}(u_2 - x_2) G_{n_3}(u_3 - x_3)\, du_1\, du_2\, du_3 =$$

$$= \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) D_{n_2}(u_2 - x_2) D_{n_3}(u_3 - x_3) G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1)\, du_1\, du_2\, du_3 +$$

$$+ \widetilde{A}^{(3)}_{n^{(\lambda)}}(x,f) +$$

$$+ \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1) G_{n_2}(u_2 - x_2) G_{n_3}(u_3 - x_3)\, du_1\, du_2\, du_3. \tag{1.77}$$

Очевидно, что последний интеграл из (1.77) не превосходит $C\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}$.

Интегралы из $\widetilde{A}^{(3)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)$ оцениваются аналогично интегралу (1.69), следовательно:

$$\left\| \sup_{\lambda_1, n_2, n_3 > 0} |\widetilde{A}^{(3)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p) \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}. \tag{1.78}$$

Далее, рассмотрим и оценим первый интеграл из (1.77). Имеем:

$$\left| \frac{1}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u) D_{n_2}(u_2 - x_2) D_{n_3}(u_3 - x_3) G_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1)\, du_1\, du_2\, du_3 \right| \le$$

$$\leq C\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u_1,u_2,u_3)D_{n_2}(u_2-x_2)D_{n_3}(u_3-x_3)\,du_2\,du_3\right|du_1. \quad (1.79)$$

Выражение под знаком модуля в (1.79) для п.в. $u_1 \in \mathbb{T}^1$ можно рассматривать как двойную частичную сумму ряда Фурье (0.1) функции $f(x)$ по переменным x_2, x_3. Тогда для оценки внутреннего интеграла в (1.79) можно применить мажорантную оценку из работы И. Л. Блошанского [27] (см. также работу И. Л. Блошанского, Т. А. Мацеевич [34]):

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{Z}^2_\theta}|S_n(x;\phi)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \leq C(p)\big[\omega(1,\phi)+\|\phi\|_{L_p(\mathbb{T}^2)}\big], \quad p>1, \quad (1.80)$$

где $\phi \in H^\omega(\mathbb{T}^2)$, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ при $\delta \to +0$, $\theta = \theta(f) \in \mathbb{Z}^1_{16}$.

Применяя оценку (1.80) в интеграле (1.79) и учитывая неравенство Гёльдера, а также оценки (1.77) и (1.78), получим:

$$\left\|\sup_{n^{(\lambda)}\in\mathbb{Z}^3_\theta}|A^{(3)}_{n^{(\lambda)}}(x,f)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \leq C(p)\big[\omega^*(1,f)+\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}\big].$$

Предложение 1.7 доказано.

Из оценок (1.66), (1.67), (1.71) и (1.76) имеем: существует номер $\theta = \theta(f) \in \mathbb{Z}^1_{16}$ такой, что

$$\left\|\sup_{n^{(\lambda)}\in\mathbb{Z}^3_\theta}|I_{n^{(\lambda)}}(x,f)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \leq C(p)\big[\omega^*(1,f)+\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}\big].$$

Используя последнюю оценку, а также рассуждения из доказательства предложения 5 работы [34], получим, что $I_{n^{(\lambda)}}(x,f) \to 0$ при λ_1, n_2, $n_3 \to \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^3$. Лемма 1.2 доказана.

Далее, по аналогии с вектором $n^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}^3_0$ обозначим $\alpha^{(\lambda)} = (\alpha_1^{(\lambda_1)},\, \alpha_2,\, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3_0$ и рассмотрим следующую разность

$$R_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f) = S_{n^{(\lambda)}}(x;f) - J_{\alpha^{(\lambda)}}(x;g), \quad (1.81)$$

где $\alpha_1^{(\lambda_1)}$ – произвольная обобщенная вещественная лакунарная последовательность, а $|\alpha_i - n_i| \leq \varrho$, $i = 2, 3$.

Учитывая определение функций $f(x)$ и $g(x)$, а также применяя лемму 1.2 для частичной суммы $S_{n^{(\lambda)}}(x;f)$ (см. (1.64)), распишем разность (1.81) следующим образом:

$$R_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)=$$

$$=\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)\widetilde{D}_{n^{(\lambda)}}(u-x)du-\frac{1}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3} f(u)\widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda)}}(u-x)du+I_{n^{(\lambda)}}(x,f)=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\Big[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\Big\{\,\widetilde{D}_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)-\widetilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)\,\Big\}du_1\Big]\times$$

$$\times\widetilde{D}_{n_2}(u_2-x_2)\widetilde{D}_{n_3}(u_3-x_3)du_2\,du_3+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\Big[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\Big\{\,\widetilde{D}_{n_2}(u_2-x_2)-\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2-x_2)\,\Big\}du_2\Big]\times$$

$$\times\widetilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)\widetilde{D}_{n_3}(u_3-x_3)du_1\,du_3+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\Big[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\Big\{\,\widetilde{D}_{n_3}(u_3-x_3)-\widetilde{D}_{\alpha_3}(u_3-x_3)\,\Big\}du_3\Big]\times$$

$$\times\widetilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2-x_2)du_1\,du_2+I_{n^{(\lambda)}}(x,f)=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\widetilde{R}^{(i)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)+I_{n^{(\lambda)}}(x,f). \tag{1.82}$$

Рассмотрим и оценим $\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)$. Делая замену переменных $u_1-x_1=u_1'$ и расписав упрощенные ядра Дирихле, а также применяя вторую теорему о среднем, интеграл в квадратной скобке $\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)$ можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\Big\{\,\widetilde{D}_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)-\widetilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1-x_1)\,\Big\}du_1=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x_1}^{\pi-x_1} f(x_1+u_1,u_2,u_3)\Big\{\,\widetilde{D}_{n_1^{(\lambda_1)}}(u_1)-\widetilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1)\,\Big\}du_1=$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x_1}^{\pi-x_1} f(x_1+u_1,u_2,u_3) \frac{n_1^{(\lambda_1)}-\alpha_1^{(\lambda_1)}}{n_1^{(\lambda_1)}-\alpha_1^{(\lambda_1)}} \frac{2\sin\frac{(n_1^{(\lambda_1)}-\alpha_1^{(\lambda_1)})u_1}{2}}{u_1} \times$$

$$\times \cos\frac{(n_1^{(\lambda_1)}+\alpha_1^{(\lambda_1)})u_1}{2} du_1 =$$

$$= \frac{n_1^{(\lambda_1)}-\alpha_1^{(\lambda_1)}}{\pi} \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} f(x_1+u_1,u_2,u_3) \cos\frac{(n_1^{(\lambda_1)}+\alpha_1^{(\lambda_1)})u_1}{2}\, du_1,$$

где $0 \le \delta_1, \delta_2 < 2\pi$. Имеем:

$$\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f) = \frac{n_1^{(\lambda_1)}-\alpha_1^{(\lambda_1)}}{\pi} \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} \Big[\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} f(x_1+u_1,u_2,u_3) \widetilde{D}_{n_2}(u_2-x_2) \times$$

$$\times \widetilde{D}_{n_3}(u_3-x_3)\, du_2 du_3 \Big] \cdot \cos\frac{(n_1^{(\lambda_1)}+\alpha_1^{(\lambda_1)})u_1}{2}\, du_1.$$

Тогда получаем:

$$|\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)| \le$$

$$\le C \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} f(u_1,u_2,u_3) \widetilde{D}_{n_2}(u_2-x_2) \widetilde{D}_{n_3}(u_3-x_3)\, du_2 du_3|\, du_1. \qquad (1.83)$$

Далее, принимая во внимание следующие оценки: мажорантную оценку для разности $R_{\alpha_1,\alpha_2}(x;\phi)$, $\phi \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$ (см. теорема I.I):

$$\Big\| \sup_{\alpha_1,\alpha_2>0} |R_{\alpha_1,\alpha_2}(x;\phi)| \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \le C(p) \|\psi\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \qquad (1.84)$$

(при условии, что $\psi(x) \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$, $\psi(x) = \phi(x)$ при $x \in \mathbb{T}^2$), а также оценку (1.80), получаем мажорантную оценку для собственного интеграла Фурье (0.2) $J_\alpha(x;\psi)$ ($N = 2$) функции ψ:

$$\Big\| \sup_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2_\rho} |J_{\alpha_1,\alpha_2}(x,\psi)| \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \le C(p) \big[\omega(1,\phi) + \|\phi\|_{L_p(\mathbb{T}^2)}\big] \qquad (1.85)$$

(при условии, что $\psi(x) = \phi(x)$ при $x \in \mathbb{T}^2$, $\phi(x) \in H^\omega(\mathbb{T}^2)$, $\omega(\delta) = o(\omega_0(\delta))$ при $\delta \to +0$, $\rho = \rho(f) \in \mathbb{R}^1_{16}$).

Поскольку выражение под знаком модуля в (1.83) для п.в. $u_1 \in \mathbb{T}^1$ можно рассматривать как собственный интеграл Фурье (0.2) функции $g(x)$ по переменным x_2, x_3, то для оценки внутреннего интеграла в (1.83) можно применить мажорантную оценку (1.85). Используя неравенство Гёльдера, получим мажорантную оценку для $\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)$:

$$\left\| \sup_{\alpha^{(\lambda)} \in \mathbb{R}^3_\rho} |\widetilde{R}^{(1)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \leq C(p)\big[\omega^*(1,f) + \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}\big]. \tag{1.86}$$

Теперь рассмотрим и оценим $\widetilde{R}^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)$. Делая замену переменных $u_2 - x_2 = u_2'$ и расписав упрощенные ядра Дирихле, а также применяя вторую теорему о среднем, интеграл $\widetilde{R}^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)$ можно представить следующим образом:

$$\widetilde{R}^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f) = \frac{n_2 - \alpha_2}{\pi} \int\limits_{-\delta_1'}^{\delta_2'} \Big[\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} f(u_1, x_2 + u_2, u_3) \widetilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1) \times$$

$$\times \widetilde{D}_{n_3}(u_3 - x_3)\, du_1 du_3 \Big] \cdot \cos\frac{(n_2 + \alpha_2)u_2}{2}\, du_2,$$

где $0 \leq \delta_1', \delta_2' < 2\pi$.

Тогда получаем:

$$|\widetilde{R}^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)| \leq$$

$$\leq C \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} f(u_1, u_2, u_3) \widetilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1 - x_1) \widetilde{D}_{n_3}(u_3 - x_3)\, du_1 du_3|\, du_2. \tag{1.87}$$

Далее, принимая во внимание мажорантную оценку (1.84) и мажорантную оценку П. Шёлина (1.75), получаем интегральный аналог неравенства П. Шёлина (для собственного интеграла Фурье (0.2) при $N = 2$), т.е. оценку вида:

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \alpha_2 > 0} |J_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \alpha_2}(x;\psi)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \leq C(p) \|\psi\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \tag{1.88}$$

(здесь функция $\psi \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $p>1$, $\{\alpha_1^{(\lambda_1)}\}$, $\alpha_1^{(\lambda_1)} \in \mathbb{R}_0^1, \lambda_1 = 1,2,\ldots,$ — обобщенная вещественная лакунарная последовательность).

Применим в (1.87) интегральный аналог неравенства П. Шёлина (1.88). Используя неравенство Гёльдера, получаем следующую мажорантную оценку для $\widetilde{R}^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)$:

$$\Big\| \sup_{\lambda_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3>0} |\widetilde{R}^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)| \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p)\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}. \tag{1.89}$$

Поскольку интеграл $\widetilde{R}^{(3)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)$ оценивается аналогично $\widetilde{R}^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)$, то справедлива и следующая оценка:

$$\Big\| \sup_{\lambda_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3>0} |\widetilde{R}^{(3)}_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)| \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p)\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}. \tag{1.90}$$

Из оценок (1.65), (1.82), (1.86), (1.89) и (1.90) следует существование числа $\rho=\rho(f)\in\mathbb{R}^1_{16}$ такого, что

$$\Big\| \sup_{\alpha^{(\lambda)}\in\mathbb{R}^3_\rho} |R_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)| \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^3)} \le C(p)\big[\omega^*(1,f)+\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^3)}\big].$$

Используя последнюю оценку, а также рассуждения из доказательства предложения 5 работы [34], получим, что $R_{\alpha^{(\lambda)}}(x;f)\to 0$ при λ_1, α_2, $\alpha_3\to\infty$ п.в. на $\mathbb{T}^3$.

Теорема I.V доказана.

§ 1.4. Равносходимость разложений в ряд и интеграл Фурье функций из $\Phi(L)$, где $\Phi(u)=o(u\log^+\log^+ u)$ при $u\to\infty$

Доказательство теоремы I.VI. Пусть $\{\alpha_1^{(\nu_1)}\}$ – некоторая возрастающая последовательность вещественных чисел, $\alpha_1^{(\nu_1)}\in\mathbb{R}^1_0$, $\alpha_1^{(\nu_1)}\to\infty$ при $\nu_1\to\infty$, и пусть $n_1^{(\nu_1)}=[\alpha_1^{(\nu_1)}]$ при $\nu_1=1,2,\ldots$.

Далее, для последовательности целых чисел $\{n_1^{(\nu_1)}\}$ и для некоторой неубывающей функции $\Phi\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$, такой, что $\Phi(u)=o(u\log^+\log^+ u)$

при $u \to \infty$, существует функция $f_1(x_1) \in \Phi(L)(\mathbb{T}^1)$, построенная С. В. Конягиным [5], для которой

$$\overline{\lim_{\nu_1\to\infty}} |S_{n_1^{(\nu_1)}}(x_1; f_1)| = +\infty \quad \text{всюду на} \quad \mathbb{T}^1. \tag{1.91}$$

Тогда функцию $f(x)$ на $\mathbb{T}^2$ определим так:

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2),$$

где $f_2(x_2) \equiv 1$ при $x_2 \in \mathbb{T}^1$.

Далее, определим функции $g_1(x_1)$, $g_2(x_2)$ и $g(x)$:

$$g_1(x_1) = f_1(x_1) \text{ при } x_1 \in \mathbb{T}^1 \text{ и } g_1(x_1) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^1,$$

$$g_2(x_2) = f_2(x_2) \text{ при } x_2 \in \mathbb{T}^1 \text{ и } g_2(x_2) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^1,$$

и, наконец,

$$g(x) = f(x) \text{ при } x \in \mathbb{T}^2 \text{ и } g(x) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^2.$$

Зафиксируем некоторую возрастающую последовательность вещественных чисел $\{\alpha_2^{(\nu_2)}\}$, $\alpha_2^{(\nu_2)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_2^{(\nu_2)} \to \infty$ при $\nu_2 \to \infty$, и обозначим $\alpha^{(\nu)} = (\alpha_1^{(\nu_1)}, \alpha_2^{(\nu_2)})$. Рассмотрим разность $R_\alpha(x; f)$ (0.3) при $\alpha = \alpha^{(\nu)}$. Учитывая определение функций f и g, имеем:

$$R_{\alpha^{(\nu)}}(x; f) = S_{n_1^{(\nu_1)}}(x_1; f_1) \cdot S_{n_2^{(\nu_2)}}(x_2; f_2) - J_{\alpha_1^{(\nu_1)}}(x_1; g_1) \cdot J_{\alpha_2^{(\nu_2)}}(x_2; g_2). \tag{1.92}$$

Пусть

$$R_{\alpha_1^{(\nu_1)}}(x_1; f_1) = S_{n_1^{(\nu_1)}}(x_1; f_1) - J_{\alpha_1^{(\nu_1)}}(x_1; g_1), \quad x_1 \in \mathbb{T}^1.$$

Тогда мы можем продолжить оценку разности (1.92). Имеем:

$$R_{\alpha^{(\nu)}}(x; f) = S_{n_1^{(\nu_1)}}(x_1; f_1) \cdot \Big[S_{n_2^{(\nu_2)}}(x_2; f_2) - J_{\alpha_2^{(\nu_2)}}(x_2; g_2) \Big] +$$

$$+ R_{\alpha_1^{(\nu_1)}}(x_1; f_1) \cdot J_{\alpha_2^{(\nu_2)}}(x_2; g_2). \tag{1.93}$$

В силу свойств интегрального синуса получаем:

$$R_{\alpha_2^{(\nu_2)}}(x_2; f_2) =$$

$$= S_{n_2^{(\nu_2)}}(x_2; f_2) - J_{\alpha_2^{(\nu_2)}}(x_2; g_2) = 1 - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha_2^{(\nu_2)}(-\pi - x_2)}^{\alpha_2^{(\nu_2)}(\pi - x_2)} \frac{\sin u_2}{u_2}\, du_2 \neq 0 \qquad (1.94)$$

для бесконечного числа номеров $\nu_2 = \nu_2(x_2) \to \infty$.

Рассмотрим равенство (1.93). С одной стороны, учитывая определение функции f_1, разность $R_{\alpha_1^{(\nu_1)}}(x_1; f_1)$ равномерно стремится к нулю при $\nu_1 \to \infty$ на любом отрезке, целиком лежащем внутри интервала $(-\pi, \pi)$ (см. [17, с. 362-364]). С другой стороны, при фиксированной последовательности $\alpha_2^{(\nu_2)}$, в силу определения функции f_1, найдется такая подпоследовательность $\widetilde{\alpha}_1^{(\nu_1)}$ последовательности $\alpha_1^{(\nu_1)}$, для которой (так как из (1.94) разность $R_{\alpha_2^{(\nu_2)}}(x_2; f_2) \neq 0$ для бесконечного числа номеров $\nu_2 = \nu_2(x_2) \to \infty$)

$$\lim_{\nu_1, \nu_2 \to \infty} |R_{\widetilde{\alpha}_1^{(\nu_1)}, \alpha_2^{(\nu_2)}}(x; f)| = +\infty \quad \text{всюду внутри} \quad \mathbb{T}^2,$$

а значит, и

$$\varlimsup_{\nu_1, \nu_2 \to \infty} |R_{\alpha_1^{(\nu_1)}, \alpha_2^{(\nu_2)}}(x; f)| = +\infty \quad \text{всюду внутри} \quad \mathbb{T}^2.$$

Теорема I.VI доказана.

ГЛАВА II. СТРУКТУРНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВ, НА КОТОРЫХ СПРАВЕДЛИВА РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ В КРАТНЫЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Введение

Настоящая глава диссертации посвящена исследованию структурно-геометрических характеристик "самых простых" подмножеств $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$ (положительной меры), на которых справедлива равносходимость п.в. разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье функций $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$ и $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, $N \geq 3$, $g(x) = f(x)$ на $\mathbb{T}^N$, в случае, когда "прямоугольные частичные суммы" указанных разложений, т.е. $S_n(x; f)$ и $J_\alpha(x; g)$ соответственно, имеют "номера" $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$, в которых некоторые компоненты являются элементами "лакунарных последовательностей".

Глава состоит из двух параграфов. В § 2.1 мы указываем класс подмножеств $\mathbb{T}^N$ (положительной меры), на которых справедлива равносходимость п.в. рассматриваемых нами разложений.

Введем следующие обозначения.[23] Пусть M — множество чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, $N \geq 3$, и $k \in M$. Обозначим: $J_k = \{j_1, \ldots, j_k\}$, $j_s < j_t$ при $s < t$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \ldots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_t$ при $s < t$, — непустые подмножества множества M.

Обозначим через $\Omega_{x_s x_t}$, $\Omega_{x_s x_t} \subset [-\pi, \pi)^2$, произвольное открытое множество в плоскости $Ox_s x_t$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$.

[23] В настоящей главе для удобства изложения доказательств мы будем использовать другой способ построения "N-мерных брусков", чем во введении.

Положим

$$W_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-\pi, \pi)^{N-2}. \tag{2.1}$$

Множества $W_{x_s x_t}$ будем называть "N-мерными брусками". Далее, для любого J_k, $1 \le k \le N-2$, рассмотрим следующие множества: множество

$$W = W(J_k) = \bigcup_{\substack{s,t \in M \setminus J_k, \\ s<t}} W_{x_s x_t} \tag{2.2}$$

и множество

$$W^0 = W^0(J_k) = \bigcap_{\substack{s,t \in M \setminus J_k, \\ s<t}} W_{x_s x_t} \tag{2.3}$$

(при этом предполагаем, что множество W^0 не пусто).

Используя результат И. Л. Блошанского и О. В. Лифанцевой [12] о слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм" $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$ в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \ge 3$, мы доказываем следующую теорему.

Теорема II.I. *Для любого $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$, $N \ge 3$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на W,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \ \textit{для почти всех} \ x \in W^0. \tag{2.4}$$

Следствие (теоремы II.I). *При $N \ge 3$ для любого $J_{N-2} \subset M$ и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на W,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-2}, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-2}}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_{N-2}]}(x; f) = 0 \ \textit{для почти всех} \ x \in W.$$

Результат теоремы II.I показывает, что для кратных рядов и интегралов Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм" равносходимость п.в. в классах L_p, $p > 1$, при $N \ge 3$ будет справедлива на множестве $W^0 = W^0(J_k)$ вида (2.3) при условии равенства нулю функции $f(x)$ на множестве $W = W(J_k)$ вида (2.2).

Заметим, что при $N \geq 3$ и $k = N-2$ множество $W^0 = W = W_{x_s x_t}$, т.е. равенство (2.4) выполняется на всем множестве W.

Встает вопрос о том, можно ли в теореме II.I добиться равносходимости п.в. (рассматриваемых разложений) на множестве, больше чем W^0, в частности, на всем множестве $W(J_k)$, при условии $N \geq 4$ и $k \leq N-3$?

Если при $N \geq 4$ величина k меньше $N-2$, то усилить теорему II.I, установив равносходимость на всем множестве $W(J_k)$, нельзя, что показывает следующий результат.

Теорема II.II. *Пусть $N \geq 4$ и $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-3$, тогда существуют множество $W = W(J_k)$ вида (2.2) и функция $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такие, что $f(x) = 0$ на W и для любых k вещественных последовательностей $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty,\, j \in J_k,\\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f)| = +\infty \ \textit{почти всюду на}\ \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

При доказательстве данной теоремы нами используется конструкция, предложенная И. Л. Блошанским в работе [15, теорема 2].

В § 2.2, модифицируя конструкцию функции Ч. Феффермана [16], двойной тригонометрический ряд Фурье которой неограниченно расходится всюду внутри $\mathbb{T}^2$, мы доказываем, что теорема II.I не может быть усилена в плане отказа от равенства нулю функции $g(x)$ вне $\mathbb{T}^N$.

Теорема II.III. *Существует функция $g(x)$, $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$, $g(x) = 0$ при $x \in \mathbb{T}^3$, такая, что для любой последовательности $\{\alpha_3^{(\nu_3)}\}$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \to \infty$ при $\nu_3 \to \infty$,*

$$\varlimsup_{\alpha_1, \alpha_2, \nu_3 \to \infty} |R_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^{(\nu_3)}}(x; 0, g)| = +\infty \ \textit{всюду внутри}\ \ \mathbb{T}^3.$$

Следующее следствие показывает, за счет чего разность $R_\alpha(x; f, g)$ (0.3) в теореме II.III неограниченно расходится.

Следствие (теоремы II.III). *Для любого $N \geq 3$ существуют функции $g(x)$ и $f(x)$, $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$, $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$, такие, что для любых $N-2$ последовательностей $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, $j = 3, \ldots, N$,*

$$\mathbf{1}. \qquad \lim_{n\to\infty} S_n(x;f) = f(x) \text{ в каждой точке } \mathbb{T}^N,$$

а

$$\mathbf{2}. \qquad \overline{\lim_{\alpha_1,\alpha_2,\nu_3,\ldots,\nu_N\to\infty}} |J_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3^{(\nu_3)},\ldots,\alpha_N^{(\nu_N)}}(x;g)| = +\infty \text{ всюду внутри } \mathbb{T}^N.$$

§ 2.1. Равносходимость почти всюду разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм"

Доказательство теоремы II.I. Для доказательства теоремы II.I нам понадобится следующий результат, доказанный И. Л. Блошанским и О. В. Лифанцевой в работе [12].

Теорема C. *Для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, $N \geq 3$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на W,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j\to\infty, j\in J_k,\\ n_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}} S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x;f) = 0 \text{ для почти всех } x \in W^0.$$

Рассмотрим разность

$$R_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x;f) = S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x;f) - J_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x;g).$$

В таком случае результат теоремы II.I будет доказан, если будет доказана следующая теорема.

Теорема II.I$'$. *Для любого* $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$, $N \ge 3$, *и для любой функции* $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, $g(x) = 0$ *на* $W \bigcup (\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{T}^N)$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} J_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x; g) = 0 \ \textit{для почти всех } x \in W^0. \tag{2.5}$$

Доказательство теоремы II.I$'$. Фиксируем произвольное k, $1 \le k \le N-2$, $N \ge 3$. Не ограничивая общности будем считать, что $J_k = \{N-k+1, \ldots, N\}$, соответственно, $M \setminus J_k = \{1, \ldots, N-k\}$. Пусть $\alpha^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)}[J_k] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_0^N$ — N-мерный вектор, у которого компоненты α_j с номерами $j \in J_k$ — элементы некоторых (однократных) обобщенных вещественных лакунарных последовательностей.

Далее, пусть r, v, l — целые числа, $0 \le r, v, l \le N-k$, и пусть $m = (m_1, \ldots, m_{N-k}) \in \mathbb{Z}^{N-k}$. Обозначим

$$\mathfrak{A}(r,v,l) = \{m \in \mathbb{Z}^{N-k} : \ 0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_r \le N-k;$$

$$0 = m_0 < m_{r+1} < \cdots < m_{r+v} \le N-k;$$

$$1 \le m_{r+v+1} < \cdots < m_{r+v+l} \le N-k; \quad m_{\mu_1} \ne m_{\mu_2} \text{ при } \mu_1 \ne \mu_2\},$$

$$0 \le r, v, l \le N-k, \ \ r+v+l = N-k. \tag{2.6}$$

Для любого вектора $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{N-k}) \in \mathbb{R}^{N-k}$, $0 < \delta_j \le \pi$, $j = 1, \ldots, N-k$, можем расписать интеграл $J_{\alpha^{(\lambda)}}(x; g)$ следующим образом:

$$J_{\alpha^{(\lambda)}}(x; g) = \frac{1}{\pi^N} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{-\delta_1} + \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} + \int\limits_{\delta_1}^{+\infty} \right\} \cdots \left\{ \int\limits_{-\infty}^{-\delta_{N-k}} + \int\limits_{-\delta_{N-k}}^{\delta_{N-k}} + \int\limits_{\delta_{N-k}}^{+\infty} \right\} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^k} g(x+u) \widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda)}}(u) du = \sum_{\substack{0 \le r,v,l \le N-k \\ r+v+l = N-k}} \sum_{m \in \mathfrak{A}(r,v,l)} \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{-\infty}^{-\delta_{m_1}} \cdots \int\limits_{-\infty}^{-\delta_{m_r}} \int\limits_{-\delta_{m_{r+1}}}^{\delta_{m_{r+1}}} \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{-\delta_{m_{r+v}}}^{\delta_{m_{r+v}}} \int\limits_{\delta_{m_{r+v+1}}}^{+\infty} \cdots \int\limits_{\delta_{m_{r+v+l}}}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} g(x+u) \widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda)}}(u) du =$$

$$= \sum_{\substack{0\le r,v,l\le N-k\\ r+v+l=N-k}} \sum_{m\in\mathfrak{A}(r,v,l)} A^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m;\delta,x,g). \tag{2.7}$$

При этом мы предполагаем, что при $r=0$ в (2.7) отсутствуют интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{-\delta_j}$, при $v=0$ — интегралы вида $\int\limits_{-\delta_j}^{\delta_j}$, при $l=0$ — интегралы вида $\int\limits_{\delta_j}^{+\infty}$, где $j=1,\dots,N-k$.

Обозначим через $B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g)$ внутреннюю сумму в (2.7), т.е.

$$B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g) = \sum_{m\in\mathfrak{A}(r,v,l)} A^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m;\delta,x,g) \tag{2.8}$$

(число слагаемых в сумме (2.8), в силу определения множества $\mathfrak{A}(r,v,l)$ (2.6), равно $\frac{(N-k)!}{r!v!l!}$).

В таком случае, учитывая (2.7) и (2.8), имеем

$$J_{\alpha^{(\lambda)}}(x;g) = \sum_{\substack{0\le r,v,l\le N-k\\ r+v+l=N-k}} B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g).$$

Разобьем последнюю сумму на три суммы:

$$J_{\alpha^{(\lambda)}}(x;g) = \sum_{\substack{0\le r,l\le N-k\\ v=0\\ r+l=N-k}} B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g) +$$

$$+ \sum_{\substack{0\le r,l\le N-k\\ v=1\\ r+l=N-k-1}} B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g) + \sum_{\substack{0\le r,l\le N-k\\ 2\le v\le N-k\\ r+v+l=N-k}} B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g) =$$

$$= B^{(0)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g) + B^{(1)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g) + B^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g). \tag{2.9}$$

Предложение 2.1. *Для любого вектора* $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_{N-k})\in\mathbb{R}^{N-k}$, $0<\delta_j<\pi$, $j=1,\dots,N-k$, $B^{(0)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g)\to 0$ *при* $\lambda_j\to\infty$, $j\in J_k$, $\alpha_j\to\infty$, $j\in M\setminus J_k$, *почти всюду на* $\mathbb{T}^N$; *более того*

$$\left\| \sup_{\substack{\lambda_j>0, j\in J_k,\\ \alpha_j>0, j\in M\setminus J_k}} |B^{(0)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta,x,g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)} \le C\,\|g\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}, \quad p>1,$$

где константа $C=C(p,\delta)$ *не зависит от функции* g.

Доказательство предложения 2.1. Рассмотрим и оценим $B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g)$ при $v = 0$, $0 \le r, l \le N - k$, $r + l = N - k$. Имеем

$$B^{(r,0,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g) = \sum_{m \in \mathfrak{A}(r,0,l)} A^{(r,0,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m; \delta, x, g),$$

$$0 \le r, l \le N - k, \;\; r + l = N - k. \tag{2.10}$$

Фиксируем произвольный вектор $m \in \mathfrak{A}(r, 0, l)$ и рассмотрим $A^{(r,0,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m; \delta, x, g)$ из суммы (2.10). В силу (2.6) и (2.7) можем записать

$$A^{(r,0,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m; \delta, x, g) = \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{-\infty}^{-\delta_{m_1}} \dots \int\limits_{-\infty}^{-\delta_{m_r}} \times$$

$$\times \int\limits_{\delta_{m_{r+1}}}^{+\infty} \dots \int\limits_{\delta_{m_{r+l}}}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{T}^k} g(x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1) \dots \widetilde{D}_{\alpha_{N-k}}(u_{N-k}) \times$$

$$\times \widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda_{N-k+1})}_{N-k+1}}(u_{N-k+1}) \dots \widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda_N)}_N}(u_N) du_1 \dots du_N,$$

$$0 \le r, l \le N - k, \;\; r + l = N - k. \tag{2.11}$$

Так как

$$|\widetilde{D}_{\alpha_j}(u_j)| \le C(\delta_j) \;\text{ при }\; \delta_j \le |u_j| < +\infty, \tag{2.12}$$

то из (2.11) получаем:

$$|A^{(r,0,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m; \delta, x, g)| \le C \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dots \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big| \frac{1}{\pi^k} \int\limits_{\mathbb{R}^k} g(u_1, \dots, u_{N-k},$$

$$x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda_{N-k+1})}_{N-k+1}}(u_{N-k+1}) \dots \widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda_N)}_N}(u_N) \times$$

$$\times du_{N-k+1} \dots du_N \Big| du_1 \dots du_{N-k}.$$

Выражение под знаком модуля для почти всех $(u_1, \dots, u_{N-k}) \in [-\pi, \pi)^{N-k}$ можно рассматривать как собственный интеграл Фурье функции $g(x)$ по переменным $x_{N-k+1}, \dots, x_N$. Обозначим этот интеграл

$$J_{\alpha^{(\lambda_{N-k+1})}_{N-k+1}, \dots, \alpha^{(\lambda_{N-1})}_{N-1}, \alpha^{(\lambda_N)}_N}(x_{N-k+1}, \dots, x_N, g; u_1, \dots, u_{N-k}).$$

Так как по условию теоремы $\alpha_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})},\ldots,\alpha_{N-1}^{(\lambda_{N-1})}$ являются элементами обобщенных вещественных лакунарных последовательностей, то для оценки мажоранты этого интеграла можно применить интегральный аналог неравенства М. Кожимы (1.46).

Используя неравенство Гёльдера и оценку (1.46), а также определение функции $g(x)$, можем получить оценку для $A_{\alpha^{(\lambda)}}^{(r,0,l)}(m;\delta,x,g)$:

$$\left\|\sup_{\substack{\lambda_j>0,j\in J_k,\\ \alpha_j>0,j\in M\setminus J_k}}|A_{\alpha^{(\lambda)}}^{(r,0,l)}(m;\delta,x,g)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}\le C(p,\delta)\|g\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}. \qquad (2.13)$$

В силу произвольности выбора вектора m из множества $\mathfrak{A}(r,0,l)$ оценка (2.13) справедлива для каждого слагаемого в сумме (2.10) при $v=0$. Следовательно, используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\left\|\sup_{\substack{\lambda_j>0,j\in J_k,\\ \alpha_j>0,j\in M\setminus J_k}}|B_{\alpha^{(\lambda)}}^{(0)}(\delta,x,g)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}\le C(p,\delta)\|g\|_{L_p(\mathbb{T}^N)},$$

$$0\le r,l\le N-k,\;\; r+l=N-k.$$

Из последней оценки, используя стандартный прием (см., например, [33, с. 58-59]), получаем, что $B_{\alpha^{(\lambda)}}^{(0)}(\delta,x,g)\to 0$ при $\lambda_j\to\infty$, $j\in J_k$, $\alpha_j\to\infty$, $j\in M\setminus J_k$, п.в. на $\mathbb{T}^N$. Предложение 2.1 доказано.

Предложение 2.2. *Для любого вектора $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_{N-k})\in\mathbb{R}^{N-k}$, $0<\delta_j<\pi$, $j=1,\ldots,N-k$, $B_{\alpha^{(\lambda)}}^{(1)}(\delta,x,g)\to 0$ при $\lambda_j\to\infty$, $j\in J_k$, $\alpha_j\to\infty$, $j\in M\setminus J_k$, почти всюду на $\mathbb{T}^N$; более того*

$$\left\|\sup_{\substack{\lambda_j>0,j\in J_k,\\ \alpha_j>0,j\in M\setminus J_k}}|B_{\alpha^{(\lambda)}}^{(1)}(\delta,x,g)|\right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}\le C\,\|g\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}\,,\quad p>1,$$

где константа $C=C(p,\delta)$ не зависит от функции g.

Доказательство предложения 2.2. Рассмотрим и оценим $B_{\alpha^{(\lambda)}}^{(r,v,l)}(\delta,x,g)$ при $v=1$, $0\le r,l\le N-k-1$, $r+l=N-k-1$. Для этого рассмотрим и оценим каждое слагаемое в сумме (2.8) при $v=1$. Если $v=1$, то для произвольного вектора $m\in\mathfrak{A}(r,0,l)$ соответствующее слагаемое в сумме (2.8) имеет вид:

$$A^{(r,1,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m;\delta,x,g)=$$

$$=\frac{1}{\pi^N}\int\limits_{-\infty}^{-\delta_{m_1}}\dots\int\limits_{-\infty}^{-\delta_{m_r}}\int\limits_{-\delta_{m_{r+1}}}^{\delta_{m_{r+1}}}\int\limits_{\delta_{m_{r+2}}}^{+\infty}\dots\int\limits_{\delta_{m_{r+1+l}}}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^k}g(x_1+u_1,\dots,x_N+u_N)\times$$

$$\times\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1)\dots\widetilde{D}_{\alpha_{N-k}}(u_{N-k})\widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda_{N-k+1})}_{N-k+1}}(u_{N-k+1})\dots\widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda_N)}_N}(u_N)du_1\dots du_N,$$

$$0\le r,l\le N-k-1,\ \ r+l=N-k-1. \tag{2.14}$$

Из (2.14), учитывая оценку (2.12) и определение функции $g(x)$, получаем

$$|A^{(r,1,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m;\delta,x,g)|\le$$

$$\le C(\delta)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dots\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\widetilde{J}_{\alpha_{m_{r+1}},\alpha^{(\lambda_{N-k+1})}_{N-k+1},\dots,\alpha^{(\lambda_N)}_N}(x_{m_{r+1}},x_{N-k+1},\dots,x_N,g;$$

$$u_{m_1},\dots,u_{m_r},u_{m_{r+2}},\dots,u_{m_{N-k}})|du_{m_1}\dots du_{m_r}du_{m_{r+2}}\dots du_{m_{N-k}},$$

где через $\widetilde{J}_{\alpha_{m_{r+1}},\alpha^{(\lambda_{N-k+1})}_{N-k+1},\dots,\alpha^{(\lambda_N)}_N}(x_{m_{r+1}},x_{N-k+1},\dots,x_N,g;\cdot)$ обозначен интеграл

$$\widetilde{J}_{\alpha_{m_{r+1}},\alpha^{(\lambda_{N-k+1})}_{N-k+1},\dots,\alpha^{(\lambda_N)}_N}(x_{m_{r+1}},x_{N-k+1},\dots,x_N,g;$$

$$u_{m_1},\dots,u_{m_r},u_{m_{r+2}},\dots,u_{m_{N-k}})=$$

$$=\frac{1}{\pi^{k+1}}\int\limits_{-\delta_{m_{r+1}}}^{\delta_{m_{r+1}}}\int\limits_{\mathbb{R}^k}g(u_{m_1},\dots,u_{m_r},x_{m_{r+1}}+u_{m_{r+1}},u_{m_{r+2}},\dots,u_{m_{N-k}},$$

$$x_{N-k+1}+u_{N-k+1},\dots,x_N+u_N)\widetilde{D}_{\alpha_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}})\times$$

$$\times\widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda_{N-k+1})}_{N-k+1}}(u_{N-k+1})\dots\widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda_N)}_N}(u_N)du_{m_{r+1}}du_{N-k+1}\dots du_N.$$

Так как $g\in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p>1$, $0<\delta_{m_{r+1}}<\pi$ и

$$\widetilde{J}_{\alpha_{m_{r+1}},\alpha^{(\lambda_{N-k+1})}_{N-k+1},\dots,\alpha^{(\lambda_N)}_N}(x_{m_{r+1}},x_{N-k+1},\dots,x_N,g;\cdot)=$$

$$= \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{k+1}} - \int\limits_{-\infty}^{-\delta_{m_{r+1}}} \int\limits_{\mathbb{R}^k} - \int\limits_{\delta_{m_{r+1}}}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \right\} g(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, x_{m_{r+1}} + u_{m_{r+1}}, u_{m_{r+2}}, \dots,$$

$$u_{m_{N-k}}, x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \widetilde{D}_{\alpha_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}}) \times$$

$$\times \widetilde{D}_{\alpha_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}}(u_{N-k+1}) \dots \widetilde{D}_{\alpha_N^{(\lambda_N)}}(u_N) du_{m_{r+1}} du_{N-k+1} \dots du_N,$$

то (с учетом предложения 2.1) для п.в. $(u_{m_1}, .., u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}) \in [-\pi, \pi)^{N-k-1}$ можно рассматривать $\widetilde{J}_{\alpha_{m_{r+1}}, \alpha_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, \alpha_N^{(\lambda_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, g; \cdot)$ как "главный член" собственного интеграла Фурье функции $g(x)$ по переменным $x_{m_{r+1}}$, x_{N-k+1}, $\dots$, x_N. Обозначим этот интеграл

$$J_{\alpha_{m_{r+1}}, \alpha_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, \alpha_N^{(\lambda_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, g;$$

$$u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}) = \frac{1}{\pi^{k+1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{k+1}} g(u_{m_1}, \dots, u_{m_r},$$

$$x_{m_{r+1}} + u_{m_{r+1}}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}, x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \times$$

$$\times \widetilde{D}_{\alpha_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}}) \widetilde{D}_{\alpha_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}}(u_{N-k+1}) \dots \widetilde{D}_{\alpha_N^{(\lambda_N)}}(u_N) du_{m_{r+1}} du_{N-k+1} \dots du_N.$$

Далее, применяя те же рассуждения, что и при доказательстве предложения 2.1, получим оценки для $J_{\alpha_{m_{r+1}}, \alpha_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, \alpha_N^{(\lambda_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, g; \cdot)$, $A_{\alpha^{(\lambda)}}^{(r,1,l)}(\delta, x, g)$, $B_{\alpha^{(\lambda)}}^{(r,1,l)}(\delta, x, g)$, а затем и $B_{\alpha^{(\lambda)}}^{(1)}(\delta, x, g)$, доказав тем самым предложение 2.2.

Введем следующие множества

$$\widehat{W}(J_k) = \bigcup_{\substack{s,t \in M \setminus J_k, \\ s<t}} \widehat{W}_{x_s x_t}, \text{ где } \widehat{W}_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-2\pi, 2\pi)^{N-2}, \ s, t \in M \setminus J_k$$

(здесь $\Omega_{x_s x_t}$ – открытое множество, фигурировавшее при определении множества $W_{x_s x_t}$ (2.1)).

Очевидно, справедливы следующие вложения

$$W \subset \widehat{W} \quad \text{и} \quad W^0 \subseteq \bigcap_{\substack{s,t \in M \setminus J_k, \\ s<t}} \widehat{W}_{x_s x_t}.$$

Поскольку по условию теоремы II.I$'$ $g(x) = 0$ на $W \bigcup (\mathbb{R}^N \backslash \mathbb{T}^N)$, то

$$g(x) = 0 \text{ при } x \in \widehat{W}. \tag{2.15}$$

Для дальнейшего доказательства нам понадобится теорема Уитни (см. [33, с. 199-201] или [35]) о разложении произвольного открытого множества Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$) на кубы Q_m, ребра которых параллельны координатным осям, внутренности не пересекаются, а диаметры соизмеримы с расстоянием до замкнутого множества P ($P = \mathbb{R}^N \setminus \Omega$).

В качестве открытого множества Ω, фигурирующего в теореме Уитни, рассмотрим открытое множество $intW^0$ (множество внутренних точек множества W^0 (2.3)), в качестве замкнутого множества P — множество $\mathbb{T}^N \setminus intW^0$. Тогда, согласно теореме Уитни, имеем

$$intW^0 = \bigcup_m Q_m. \tag{2.16}$$

Рассмотрим произвольный куб Q_{m_0} из объединения (2.16). Обозначим

$$\delta^0 = \mathrm{diam} Q_{m_0}.$$

Имеем для этого куба оценку

$$\delta^0 \leq dist(Q_{m_0}, \mathbb{T}^N \setminus intW^0) \leq 4\delta^0.$$

В таком случае, элементы множества x, где $x = (x_1, \ldots, x_N) \in Q_{m_0}$, обладают следующими свойствами: во-первых,

$$(x_1 + u_1, \ldots, x_N + u_N) \in intW^0, \text{ если } |u_j| \leq \delta^0, \quad j = 1, \ldots, N;$$

во-вторых, в силу определения множеств $\widehat{W}_{x_s x_t}$ и $\widehat{W}$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$, имеем для любых $y_1, \ldots, y_{s-1}, y_{s+1}, \ldots, y_{t-1}, y_{t+1}, \ldots, y_N \in \mathbb{R}^1$:

$$(y_1, \ldots, y_{s-1}, x_s + u_s, y_{s+1}, \ldots, y_{t-1}, x_t + u_t, y_{t+1}, \ldots, y_N) \in \widehat{W}_{x_s x_t}, \tag{2.17}$$

если $(x_s, x_t) \in \Omega_{x_s x_t} \bigcap Q'_{m_0}$ и $|u_s|, |u_t| \le \delta^0$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$, где Q'_{m_0} — проекция куба Q_{m_0} на плоскость $Ox_s x_t$, а $\Omega_{x_s x_t}$ — открытое множество в плоскости $Ox_s x_t$.

Предложение 2.3. *Пусть $x \in Q_{m_0}$, тогда существует вектор δ с положительными координатами $\delta_j = \delta^0 = \mathrm{diam} Q_{m_0}$, $j = 1, \ldots, N-k$, такой, что $B^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g) = 0$.*

Доказательство предложения 2.3. Рассмотрим $B^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g)$. В силу (2.9) имеем

$$B^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g) = \sum_{\substack{0 \le r, l \le N-k \\ 2 \le v \le N-k \\ r+v+l = N-k}} B^{(r,v,l)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g). \tag{2.18}$$

Докажем, что все слагаемые в сумме (2.18) равны нулю при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{N-k})$, где $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \ldots, N-k$. Фиксируем произвольные r_0, v_0, l_0: $0 \le r_0, l_0 \le N-k$, $2 \le v_0 \le N-k$, $r_0 + v_0 + l_0 = N-k$, и рассмотрим, учитывая (2.8), $B^{(r_0,v_0,l_0)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g)$. В силу (2.8)

$$B^{(r_0,v_0,l_0)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g) = \sum_{m \in \mathfrak{A}(r_0,v_0,l_0)} A^{(r_0,v_0,l_0)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m; \delta, x, g), \tag{2.19}$$

где множество $\mathfrak{A}(r_0, v_0, l_0)$ определено в (2.6).

Докажем, что все слагаемые в сумме (2.19) равны нулю при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{N-k})$, $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \ldots, N-k$. Рассмотрим произвольное слагаемое в сумме (2.19) при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{N-k})$, где $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \ldots, N-k$. Имеем в силу (2.7)

$$A^{(r_0,v_0,l_0)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m; \delta, x, g) =$$

$$= \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\delta^0}^{+\infty} \cdots \int\limits_{\delta^0}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\delta^0}^{\delta^0} \cdots \int\limits_{-\delta^0}^{\delta^0} \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{-\delta^0} \cdots \int\limits_{-\infty}^{-\delta^0} \Big[\int\limits_{\mathbb{R}^k} g(x+u) \times$$

$$\times \widetilde{D}_{\alpha^{(\lambda)}}(u) du_{N-k+1} \ldots du_N \Big] du_{m_1} \ldots du_{m_{r_0}} \Big\} du_{m_{r_0+1}} \ldots du_{m_{r_0+v_0}} \Big) \times$$

$$\times du_{m_{r_0+v_0+1}} \ldots du_{m_{r_0+v_0+l_0}},$$

где $m = (m_1, \dots, m_{N-k}) \in \mathfrak{A}(r_0, v_0, l_0)$ (см. (2.6)).

Рассмотрим вектор $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ с координатами, удовлетворяющими следующим условиям:

$$\begin{gathered} -\infty < u_j \le -\delta^0 \ \text{ при } \ j = m_1, \dots, m_{r_0}; \\ -\delta^0 \le u_j \le \delta^0 \ \text{ при } \ j = m_{r_0+1}, \dots, m_{r_0+v_0}; \\ \delta^0 \le u_j < +\infty \ \text{ при } \ j = m_{r_0+v_0+1}, \dots, m_{r_0+v_0+l_0}; \\ -\infty < u_j < +\infty \ \text{ при } \ j = N-k+1, \dots, N; \end{gathered} \tag{2.20}$$

$0 \le r_0, l_0 \le N-k$, $2 \le v_0 \le N-k$, $r_0+v_0+l_0 = N-k$. Если $v_0 \ge 2$, а $x \in Q_{m_0}$, то в силу свойства (2.17) существует множество $\widehat{W}_{x_s x_t}$, $1 \le s < t \le N-k$, такое, что

$$x + u = (x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) \in \widehat{W}_{x_s x_t}. \tag{2.21}$$

Действительно, если $v_0 \ge 2$, то вектор u в (2.20) имеет (по крайней мере) две компоненты u_s и u_t с номерами s, t: $m_{r_0+1} \le s < t \le m_{r_0+v_0}$ такие, что $|u_s|, |u_t| \le \delta^0$; с другой стороны, так как $x \in Q_{m_0}$, то компоненты вектора x с номерами s и t удовлетворяют следующему условию: $(x_s, x_t) \in \Omega_{x_s x_t} \bigcap Q'_{m_0}$ (где Q'_{m_0}- проекция куба на плоскость $Ox_s x_t$), следовательно, в силу (2.17) получаем (2.21).

В таком случае, так как $g(x) = 0$ на $\widehat{W}_{x_s x_t}$ при любых $s, t = 1, \dots, N-k$ и $s < t$ (что следует из равенства нулю функции на $\widehat{W}$ (см. (2.15))), то из (2.21) мы получаем, что если $x \in Q_{m_0}$, а вектор u удовлетворяет условию (2.20), где $v_0 \ge 2$, то $g(x+u) = 0$, и, следовательно,

$$A^{(r_0, v_0, l_0)}_{\alpha^{(\lambda)}}(m; \delta, x, g) = 0. \tag{2.22}$$

Таким образом, из (2.22) и (2.19) следует, что при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k})$, где $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \dots, N-k$, $B^{(r_0, v_0, l_0)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g) = 0$, а в таком случае в силу (2.18) и в силу произвольности выбора чисел r_0, v_0, l_0

$(0 \leq r_0, v_0 \leq N-k,\ 2 \leq v_0 \leq N-k,\ r_0+v_0+l_0 = N-k)$ при тех же предположениях на x и δ получаем

$$B^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g) = 0, \quad x \in Q_{m_0},\ \ \delta_j = \delta^0,\ \ j = 1, \ldots, N-k,$$

что и доказывает предложение 2.3.

Рассмотрим произвольный куб Q_m из (2.16). Пусть $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{N-k})$, где $\delta_j = \delta^0 = \mathrm{diam} Q_m$, $j = 1, \ldots, N-k$, используя разложение (2.9) для этого δ, можем записать

$$J_{\alpha^{(\lambda)}}(x; g) = B^{(0)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g) + B^{(1)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g) + B^{(2)}_{\alpha^{(\lambda)}}(\delta, x, g).$$

В таком случае, в силу предложений 2.1-2.3 получаем

$$J_{\alpha^{(\lambda)}}(x; g) \to 0 \ \text{ при } \ \lambda_j \to \infty, j \in J_k,$$

$$\alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k, \ \text{ для п.в. } \ x \in Q_m. \tag{2.23}$$

Так как соотношение (2.23) справедливо для любого куба Q_m в множестве $intW^0$, то оно справедливо и для п.в. $x \in intW^0$. А поскольку $\mu(intW^0) = \mu W^0$, то соотношение (2.23) справедливо и для п.в. $x \in W^0$, что и доказывает теорему II.I$'$, а значит и теорему II.I.

Доказательство теоремы II.II. Фиксируем произвольное k, $1 \leq k \leq N-3$, $N \geq 4$. Не ограничивая общности будем считать, что $J_k = \{N-k+1, \ldots, N\}$, соответственно, $M \setminus J_k = \{1, \ldots, N-k\}$.

Фиксируем произвольные a, b, $-\pi < a < b < \pi$, и определим следующие множества

$$W = \bigcup_{\substack{s,t \in M \setminus J_k, \\ s<t}} W_{x_s x_t}, \tag{2.24}$$

где

$$W_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-\pi, \pi)^{N-2} = \{(a,b) \times (a,b)\} \times [-\pi, \pi)^{N-2},$$

и

$$W^0 = \bigcap_{\substack{s,t\in M\setminus J_k,\\ s<t}} W_{x_s\,x_t}. \tag{2.25}$$

Рассмотрим $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^2)$ — функцию Ч. Феффермана [16], т.е. функцию, двойной ряд Фурье которой неограниченно расходится в каждой внутренней точке $\mathbb{T}^2$, и положим $f_l(x_1, x_l) = f(x_1, x_l)$, $l = 2, 3, \ldots, N-k$. Таким образом,

$$\overline{\lim_{n_1,n_l\to\infty}} |S_{n_1,n_l}(x_1, x_l; f_l)| = +\infty \text{ всюду внутри } \mathbb{T}^2. \tag{2.26}$$

Обозначим также

$$\chi_l(x_1, x_l) = \begin{cases} 0 \text{ при } (x_1, x_l) \in \Omega_{x_1\,x_l} = (a, b) \times (a, b), \\ 1 \text{ при } (x_1, x_l) \in \mathbb{T}^2 \setminus \Omega_{x_1\,x_l}, \end{cases}$$

и положим

$$\varphi_l(x_1, x_l) = f_l(x_1, x_l)\chi_l(x_1, x_l), \quad l = 2, 3, \ldots, N-k. \tag{2.27}$$

Рассмотрим также 2π-периодические функции $\phi(t) \in \mathbb{C}([-\pi, \pi])$ и $\psi(t)$ такие, что

$$\phi(t) = 0 \text{ при } t \in (a, b) \quad \text{и} \quad \phi(t) \neq 0 \text{ при } t \in [-\pi, a] \cup [b, \pi], \tag{2.28}$$

$$\psi(t) \equiv 1 \text{ при } t \in \mathbb{T}^1.$$

Определим функцию $F(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \sum_{l=2}^{N-k} F_l(x) = \{\varphi_2(x_1, x_2)\phi(x_3)\ldots\phi(x_{N-k})+$$

$$+\sum_{l=3}^{N-k-1} \varphi_l(x_1, x_l)\phi(x_2)\ldots\phi(x_{l-1})\phi(x_{l+1})\ldots\phi(x_{N-k})+$$

$$+\varphi_{N-k}(x_1, x_{N-k})\phi(x_2)\ldots\phi(x_{N-k-1})\} \times \psi(x_{N-k+1})\ldots\psi(x_N). \tag{2.29}$$

Так определенная функция $F(x) \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$. Докажем, что $F(x) = 0$ при $x \in W$. Рассмотрим произвольный "брусок" $W_{x_s\,x_t} = \Omega_{x_s\,x_t} \times [-\pi, \pi)^{N-2}$,

$s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$, из W (2.24) и докажем, что $F(x) = 0$ при $x \in W_{x_s x_t}$. Итак, пусть $(x_s, x_t) \in \Omega_{x_s x_t} = (a, b) \times (a, b)$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$, а $x_i \in [-\pi, \pi), i = 1, \ldots, N, i \neq s, t$.

Рассмотрим два случая: $s = 1$ и $s \neq 1$. Пусть $s = 1$, т.е. $(x_1, x_t) \in \Omega_{x_1 x_t}$, $2 \leq t \leq N - k$. Докажем, что $F(x) = 0$ при $(x_1, x_t) \in \Omega_{x_1 x_t}$. В силу (2.26) каждая функция $F_l(x)$, входящая в $F(x)$, содержит все функции $\phi(x_i)$, $i \in E_l$, где

$$E_2 = \{3, \ldots, N - k\},$$

$$E_l = \{2, \ldots, l - 1, l + 1, \ldots, N - k\}, \quad l = 3, \ldots, N - k - 1,$$

$$E_{N-k} = \{2, \ldots, N - k - 1\}.$$

Если $l \neq t$, то $t \in E_l$ и, следовательно, $F_l = 0$ в силу равенства нулю на (a, b) функции $\phi(x_t)$ (см. (2.28)). Если $l = t$, то $F_l = 0$ в силу равенства нулю на $\Omega_{x_1 x_t}$ функции $\chi_t(x_1, x_t)$. Итак, в этом случае $F(x) = \sum F_l(x) = 0$ при $x \in W_{x_s x_t}$.

Пусть теперь $s \neq 1$, т.е. $2 \leq s \leq N - k - 1$. Докажем, что в этом случае $F(x) = 0$ при $(x_s, x_t) \in \Omega_{x_s x_t}$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$. Так как каждая функция $F_l(x)$, $l = 2, \ldots, N - k$, содержит все функции $\phi(x_i)$, $i \in E_l$, то $F_l(x) = 0$ в силу того, что хотя бы одно из чисел s или t принадлежит E_l, а функции $\phi(x_s)$, $\phi(x_t)$ равны нулю на (a, b). Следовательно, и в этом случае $F(x) = 0$ при $x \in W_{x_s x_t}$.

В силу произвольности выбора "бруска" $W_{x_s x_t}$, мы доказали, что $F(x) = 0$ при $x \in W$, где W определено в (2.24). При этом нетрудно видеть, что $F(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{T}^N \setminus W$.

Теперь определим функции $\varphi_l^{(0)}(x_1, x_l)$, $\phi^{(0)}(x_i)$, $\psi^{(0)}(x_j)$ и $G(x)$:

$$\varphi_l^{(0)}(x_1, x_l) = \varphi_l(x_1, x_l) \text{ при } (x_1, x_l) \in \mathbb{T}^2 \quad \text{и} \quad \varphi_l^{(0)}(x_1, x_l) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^2,$$

$$l = 2, \ldots, N - k,$$

$$\phi^{(0)}(x_i)=\phi(x_i) \text{ при } x_i\in\mathbb{T}^1 \quad \text{и} \quad \phi^{(0)}(x_i)=0 \text{ вне } \mathbb{T}^1,\ i=2,\ldots,N-k,$$

$$\psi^{(0)}(x_j)=\psi(x_j) \text{ при } x_j\in\mathbb{T}^1 \quad \text{и} \quad \psi^{(0)}(x_j)=0 \text{ вне } \mathbb{T}^1,\ j=N-k+1,\ldots,N,$$

и, наконец,

$$G(x)=F(x) \text{ при } x\in\mathbb{T}^N \quad \text{и} \quad G(x)=0 \text{ вне } \mathbb{T}^N.$$

Далее рассмотрим разность $R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)$. Обозначая $\widetilde{x} = (x_2,\ldots,x_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_N)\in\mathbb{T}^{N-2}$ и полагая

$$h_l(\widetilde{x})=\prod_{\substack{i=2\\ i\neq l}}^{N-k}\phi(x_i)\cdot\prod_{j=N-k+1}^{N}\psi(x_j),\quad h_l^{(0)}(\widetilde{x})=\prod_{\substack{i=2\\ i\neq l}}^{N-k}\phi^{(0)}(x_i)\cdot\prod_{j=N-k+1}^{N}\psi^{(0)}(x_j),$$

имеем, учитывая определение функций $F(x)$ и $G(x)$:

$$R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)=S_{n^{(\nu)}[J_k]}(x;F)-J_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;G)=$$

$$=\sum_{l=2}^{N-k}S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)\cdot S_{\widetilde{n}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l)-\sum_{l=2}^{N-k}J_{\alpha_1,\alpha_l}(x_1,x_l;\varphi_l^{(0)})\cdot J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l^{(0)}),\tag{2.30}$$

где $n_s = [\alpha_s]$, $s \in M\setminus J_k$, $n_s^{(\nu_s)} = [\alpha_s^{(\nu_s)}]$, $s\in J_k$, $\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k] = (\alpha_2,\ldots,\alpha_{l-1},\alpha_{l+1},\ldots,\alpha_{N-k},\alpha_{N-k+1}^{(\nu_{N-k+1})},\ldots,\alpha_N^{(\nu_N)})$, и $\widetilde{n}^{(\nu)}[J_k] = (n_2,\ldots,n_{l-1},n_{l+1},\ldots,n_{N-k},n_{N-k+1}^{(\nu_{N-k+1})},\ldots,n_N^{(\nu_N)})$.

В свою очередь, обозначив

$$R_{\alpha_1,\alpha_l}(x_1,x_l;\varphi_l)=S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)-J_{\alpha_1,\alpha_l}(x_1,x_l;\varphi_l^{(0)}),\quad (x_1,x_l)\in\mathbb{T}^2,$$

и

$$R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l)=S_{\widetilde{n}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l)-J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l^{(0)}),\quad \widetilde{x}\in\mathbb{T}^{N-2},\tag{2.31}$$

мы можем продолжить оценку разности (2.30) так:

$$R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)=\sum_{l=2}^{N-k}S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)\cdot S_{\widetilde{n}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l)-$$

$$-\sum_{l=2}^{N-k}\Big[S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)-R_{\alpha_1,\alpha_l}(x_1,x_l;\varphi_l)\Big]\cdot J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l^{(0)})=$$

$$= \sum_{l=2}^{N-k} S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l) R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l) + \sum_{l=2}^{N-k} R_{\alpha_1,\alpha_l}(x_1,x_l;\varphi_l)\cdot J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l^{(0)}) =$$

$$= I^{(1)}_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F) + I^{(2)}_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F). \qquad (2.32)$$

Имеем:

$$I^{(2)}_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F) \to 0 \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^N$$

$$\text{при} \quad \nu_j \to \infty, j \in J_k, \quad \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k.$$

Действительно, $R_{\alpha_1,\alpha_l}(x_1,x_l;\varphi_l) \to 0$ при $\alpha_1,\alpha_l \to \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^2$ (в силу теоремы A), и, в силу определения функции $h_l^{(0)}$,

$$J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l^{(0)}) \to h_l^{(0)}(\widetilde{x}) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^{N-2}$$

$$\text{при} \quad \nu_j \to \infty, j \in J_k, \quad \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k, \quad l = 2,\dots,N-k.$$

Покажем, что

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}} |I^{(1)}_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)| = +\infty \text{ для п.в.} \quad x \in \mathbb{T}^N \setminus W^0, \qquad (2.33)$$

где W^0 определено в (2.25). В силу (2.32)

$$I^{(1)}_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F) = \sum_{l=2}^{N-k} S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l) R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l).$$

Заметим, что в силу определения функции h_l, $R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l) \to 0$ для п.в. $\widetilde{x} \in \mathbb{T}^{N-2}$. Для оценки $S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)$, $l = 2,\dots,N-k$, нам понадобится следующая лемма, доказанная И. Л. Блошанским в работе [15].

Пусть $\mathbb{T}^2 = \Omega \bigcup P$, где Ω и P два произвольных измеримых множества таких, что $\mu_2(int\Omega) = \mu_2\Omega$ и $\mu_2(intP) = \mu_2 P$ (μ_2 — мера на плоскости).

Лемма A. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, и пусть $\chi(x)$ удовлетворяет условию*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{при } x \in P, \\ 0 & \textit{при } x \in \Omega. \end{cases} \qquad (2.34)$$

Тогда если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|S_n(x;f)| = +\infty \ \text{\textit{почти всюду на}}\ \mathbb{T}^2, \qquad (2.35)$$

то

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|S_n(x;f\chi)| = +\infty$ *для почти всех* $x \in P$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x;f\chi) = 0$ *для почти всех* $x \in \Omega$.

Заметим, что, в силу (2.27), $\varphi_l(x_1,x_l) = f_l(x_1,x_l)\chi_l(x_1,x_l)$, где функция $\chi_l(x_1,x_l)$ удовлетворяет условию (2.34), в случае, когда $P = \mathbb{T}^2 \setminus \Omega_{x_1\,x_l}$, а для функции $f_l(x_1,x_l)$ справедливо условие (2.35) (в силу оценки (2.26)). Тогда в силу леммы A будем иметь (для $l = 2,\dots,N-k$) :

$$\lim_{n_1,n_l\to\infty} S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l) = 0 \quad \text{для п.в. } (x_1,x_l) \in \Omega_{x_1\,x_l} = (a,b)\times(a,b) \qquad (2.36)$$

и

$$\overline{\lim_{n_1,n_l\to\infty}}\,|S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)| = +\infty \ \text{для п.в. } (x_1,x_l) \in \mathbb{T}^2 \setminus \Omega_{x_1\,x_l}. \qquad (2.37)$$

Далее рассмотрим множество $\mathbb{T}^N \setminus W^0$. Это множество (в силу выбора W^0) обладает тем свойством, что у вектора $x = (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{T}^N \setminus W^0$ m компонент из первых $N-k$ $(1 \le m \le N-k)$ удовлетворяют условию $x_{\upsilon_i} \notin (a,b)$, $i = 1,\dots,m$ (т.е. $x_{\upsilon_i} \in [-\pi,a]\bigcup[b,\pi)$). Следовательно, множество $\mathbb{T}^N \setminus W^0$ можно разбить на множества

$$A(\upsilon_1,\dots,\upsilon_m) = \{x \in \mathbb{T}^N :$$

$$x_{\upsilon_i} \notin (a,b), i = 1,\dots,m;\ x_{\upsilon_{m+1}},\dots,x_{\upsilon_{N-k}} \in (a,b)\},$$

где $1 \le \upsilon_i \le N-k$ при $i = 1,\dots,N-k$ и $\upsilon_{\iota_1} \ne \upsilon_{\iota_2}$ при $\iota_1 \ne \iota_2$, т.е.

$$\mathbb{T}^N \setminus W^0 = \bigcup_{m=1}^{N-k} \bigcup_{\upsilon_1,\dots,\upsilon_m} A(\upsilon_1,\dots,\upsilon_m). \qquad (2.38)$$

Рассмотрим два случая: $m = 1$ и $2 \le m \le N-k$. Если $m = 1$, то (2.38) имеет вид: $\mathbb{T}^N \setminus W^0 = \bigcup\limits_{\upsilon_1=1}^{N-k} A(\upsilon_1)$. Если $\upsilon_1 \ne 1$, то в силу (2.36) получаем

$$\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}} S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l)=0 \quad \text{для п.в. } x\in A(\upsilon_1)$$

$$\upsilon_1\neq 1, l=2,\dots,N-k,\ \ l\neq \upsilon_1. \tag{2.39}$$

При $l=\upsilon_1$ (см. (2.37)) $\overline{\lim\limits_{n_1,n_{\upsilon_1}\to\infty}}|S_{n_1,n_{\upsilon_1}}(x_1,x_{\upsilon_1};\varphi_{\upsilon_1})|=+\infty$, а разность (2.31) $R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l)\neq 0$ для бесконечного числа номеров $\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k](\widetilde{x})$, причем компоненты этих номеров $\alpha_i,\alpha_j^{(\nu_j)}\to\infty$, $i=2,\dots,N-k$, $j=N-k+1,\dots,N$, $i,j\neq\upsilon_1$ (см. доказательство теоремы I.VI, оценки (1.93)-(1.94)). Тогда получаем, что если n_1 и n_{υ_1} растут достаточно быстро, то выражение

$$S_{n_1,n_{\upsilon_1}}(x_1,x_{\upsilon_1};\varphi_{\upsilon_1})R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l)$$

$$\text{неограничено для п.в. } x\in A(\upsilon_1). \tag{2.40}$$

Из (2.32), (2.39), (2.40) получаем, что

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}}}|R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)|=+\infty$$

$$\text{для п.в. } x\in A(\upsilon_1),\quad 2\le \upsilon_1\le N-k. \tag{2.41}$$

Пусть теперь $\upsilon_1=1$. В этом случае $x\in A(1)$. Из оценки (2.37), имеем:

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}}}|S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l)|=+\infty \text{ для п.в. } x\in A(1),$$

$l=2,\dots,N-k$. Тогда методом "варьирования переменных" $n_l, l=2,\dots,N-k$ (как это делал И. Л. Блошанский, например, в работах [15] и [36]), т.е. устремляя достаточно быстро к бесконечности только одну из пар индексов (n_1,n_l), получим, что

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}}}|I^{(1)}_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)|=+\infty \text{ для п.в. } x\in A(1),$$

а значит, и

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in A(1). \tag{2.42}$$

Оценки (2.41) и (2.42) доказывают случай $m = 1$.

Рассмотрим второй случай, т.е. когда

$$2 \le m \le N-k, \;\; x \in \bigcup_{m=2}^{N-k} \bigcup_{\upsilon_1,\ldots,\upsilon_m} A(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_m).$$

Возьмём произвольное множество $A(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_m)$ из этого объединения. Предположим, что существует номер i, $1 \le i \le m$, такой, что $\upsilon_i = 1$. Тогда в силу оценки (2.37),

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}}} |S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in A(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_m),$$

$l = 2,\ldots,N-k$. Опять-таки путем "варьирования переменных" n_l, $l = 2,\ldots,N-k$, т.е. устремляя достаточно быстро к бесконечности только одну из пар индексов (n_1,n_l), получим, что

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in A(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_m).$$

Теперь пусть $\upsilon_i \ne 1$ при условии, что $1 \le i \le m$. Тогда в силу (2.36) получаем

$$\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}} S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in A(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_m),$$

$l = 2,\ldots,N-k,\;\; l \ne \upsilon_1,\ldots,\upsilon_m$. А при $l = \upsilon_1,\ldots,\upsilon_m$ (см. (2.37))

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}}} |S_{n_1,n_l}(x_1,x_l;\varphi_l)R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h_l)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in A(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_m).$$

Тем же методом "варьирования переменных" $n_{\upsilon_1},\ldots,n_{\upsilon_m}$, т.е. устремляя достаточно быстро к бесконечности только одну из пар индексов (n_1,n_l), $l =$

$\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m$, получаем

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in A(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m).$$

В силу произвольности $A(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m)$ имеем:

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty,\, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F)| = +\infty$$

$$\text{для п.в. } x \in \bigcup_{m=2}^{N-k} \bigcup_{\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m} A(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m). \tag{2.43}$$

Окончательно из (2.38), (2.41), (2.42) и (2.43) получаем

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

Теорема II.II доказана.

§ 2.2. О необходимых условиях справедливости равносходимости почти всюду кратных рядов и интегралов Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм"

Доказательство теоремы II.III. Построение функции $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$, для которой разность $R_{\alpha^{(\nu)}}(x; 0,\, g)$ неограниченно расходится п.в. на $\mathbb{T}^3$, не сложно.

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$ на $\mathbb{R}^3$. В свою очередь, функцию $g(x)$ на $\mathbb{R}^3$ определим так:

$$g(x) = g_0(x_1, x_2) \cdot \psi(x_3) = f_0(x_1, x_2) \cdot \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \psi(x_3), \tag{2.44}$$

где $f_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^2)$ — функция Ч. Фефферманa [16], для которой выполняется оценка

$$\varlimsup_{n_1,\, n_2 \to \infty} |S_{n_1,\, n_2}(x_1, x_2; f_0)| = +\infty \quad \text{всюду внутри} \quad \mathbb{T}^2, \tag{2.45}$$

функции φ и ψ непрерывны на $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi(t) = 1 \text{ при } t \in [-\pi, \pi] \text{ и } \varphi(t) = 0 \text{ при } t \in \mathbb{R}^1 \setminus [-2\pi, 2\pi], \tag{2.46}$$

$$\psi(x_3) = 0 \text{ при } x_3 \in (-\infty, -2\pi) \cup [-\pi, \pi] \cup (2\pi, +\infty). \tag{2.47}$$

Очевидно, что функция g, удовлетворяющая условиям (2.44), (2.46) и (2.47), непрерывна на $\mathbb{R}^3$ и равна нулю на $\mathbb{T}^3$. Далее, пусть $\{\alpha_3^{(\nu_3)}\}$ – произвольная вещественная последовательность, $\alpha_3^{(\nu_3)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \to \infty$ при $\nu_3 \to \infty$. Обозначим $\alpha^{(\nu)} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3{}^{(\nu_3)})$. Рассмотрим разность $R_\alpha(x; f, g)$ (0.3) при $N = 3$ и $\alpha = \alpha^{(\nu)}$. Учитывая (2.44), (2.46) и (2.47), имеем:

$$R_{\alpha^{(\nu)}}(x; 0, g) = -J_{\alpha^{(\nu)}}(x_1, x_2, x_3; g) = -J_{\alpha_1, \alpha_2}(x_1, x_2; g_0) \cdot J_{\alpha_3^{(\nu)}}(x_3; \psi) =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} g_0(u_1, u_2) \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1 - x_1) \widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2 - x_2) du_1\, du_2 \times$$

$$\times \frac{1}{\pi} \left\{ \int\limits_{-2\pi}^{-\pi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \right\} \psi(u_3) \widetilde{D}_{\alpha_3^{(\nu_3)}}(u_3 - x_3)\, du_3. \tag{2.48}$$

Далее, для доказательства неограниченной расходимости разности $R_{\alpha^{(\nu)}}(x; 0, g)$ п.в. на $\mathbb{T}^3$ достаточно провести следующие простые рассуждения.

Обозначив разность

$$R_{\alpha_1, \alpha_2}(x_1, x_2; f_0, g_0) = S_{n_1, n_2}(x_1, x_2; f_0) - J_{\alpha_1, \alpha_2}(x_1, x_2; g_0), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2,$$

где $| \alpha_j - n_j | \leq \varrho$, $j = 1, 2$, и учитывая, что $g_0(x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2)$ на $\mathbb{T}^2$, можем продолжить оценку разности (2.48). Имеем:

$$R_{\alpha^{(\nu)}}(x; 0, g) = \left\{ R_{\alpha_1, \alpha_2}(x_1, x_2; f_0, g_0) - S_{n_1, n_2}(x_1, x_2, f_0) \right\} \cdot J_{\alpha_3^{(\nu_3)}}(x_3, \psi)$$

и, если n_1 и n_2 в последнем равенстве растут достаточно быстро, то

$$\overline{\lim_{\alpha_1, \alpha_2, \nu_3 \to \infty}} |R_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^{(\nu_3)}}(x; 0, g)| = +\infty \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^3,$$

т.к. (учитывая результат теоремы I.I) разность $R_{\alpha_1,\alpha_2}(x_1, x_2; f_0,\, g_0) \to 0$ при $\alpha_1,\, \alpha_2 \to \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^2$.

В свою очередь, для построения функции $\widetilde{g} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$, для которой разность $R_{\alpha^{(\nu)}}(x; 0,\, \widetilde{g})$ неограниченно расходится в каждой внутренней точке $\mathbb{T}^3$, необходимо более внимательно рассмотреть конструкцию функции Ч. Феффермана [16].

Рассмотрим функцию

$$f_\lambda(x) = f_\lambda(x_1, x_2) = e^{i\,\lambda \cdot x_1 x_2} \ \text{ при } \ x \in [0,\, 2\pi]^2$$

(именно на этих функциях Ч. Фефферман установил в [16] "эффект расходимости" двойных тригонометрических рядов). Далее, для любого $\delta \in \mathbb{R}^1_0$, $0 < \delta < \pi$, определим множество $\mathbb{Q}_\delta = [\,\delta,\, 2\pi - \delta\,]^2$ и бесконечно дифференцируемую на $\mathbb{R}^1$ функцию

$$\varphi_\delta(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad t \in [\,\frac{\delta}{2},\, 2\pi - \frac{\delta}{2}\,], \\ 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}^1 \setminus [\,\frac{\delta}{4},\, 2\pi - \frac{\delta}{4}\,], \end{cases}$$

неубывающую на $[\,\frac{\delta}{4},\, \frac{\delta}{2}\,]$ и невозрастающую на $[\,2\pi - \frac{\delta}{2},\, 2\pi - \frac{\delta}{4}\,]$.

Положим

$$h_{\lambda,\,\delta}(x) = f_\lambda(x) \cdot \varphi_\delta(x_1) \cdot \varphi_\delta(x_2), \quad x \in [0,\, 2\pi]^2.$$

В работе [16] (лемма 1) (см. также работу М. Бахбуха и Е. М. Никишина [29], лемма 6) был доказан фактически следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}_\delta$, $0 < \delta \le 0.1$, и число $\lambda \in \mathbb{R}^1_\varkappa$, $\varkappa \ge e^{\frac{100}{\delta}}$. Тогда существует константа $\theta > 0$ такая, что*

$$|\widetilde{J}_\alpha(x;\, h_{\lambda,\,\delta})| =$$

$$= \left| \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h_{\lambda,\,\delta}(u) \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1 - x_1) \widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2 - x_2) du_1\, du_2 \right| \ge \theta \cdot \log\, \lambda, \qquad (2.49)$$

здесь $\alpha = (\alpha_1,\, \alpha_2)$, $\alpha_1 = \lambda\, x_2$, $\alpha_2 = \lambda\, x_1$.

Доказательство леммы 2.1. Распишем интеграл $\widetilde{J}_\alpha(x;\, h_{\lambda,\,\delta})$ следующим образом:

$$\widetilde{J}_\alpha(x;\, h_{\lambda,\,\delta}) = \frac{1}{\pi^2}\left\{\int\limits_0^{\frac{\delta}{4}} + \int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}} + \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{4}}^{2\pi}\right\}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\frac{\delta}{4}} + \int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}} + \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{4}}^{2\pi}\right\} h_{\lambda,\,\delta}(u)\widetilde{D}_\alpha(u-x)du.$$

В силу определения функции $\varphi_\delta(t)$, будем иметь:

$$\widetilde{J}_\alpha(x;\, h_{\lambda,\,\delta}) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left\{\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}}\right\}\left\{\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}}\right\} h_{\lambda,\,\delta}(u)\widetilde{D}_\alpha(u-x)du =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}} h_{\lambda,\,\delta}(u)\widetilde{D}_\alpha(u-x)du +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\left\{\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}}\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}}\int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}} + \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}}\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}}\int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}}\right\} h_{\lambda,\,\delta}(u)\widetilde{D}_\alpha(u-x)du +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\left\{\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}}\right\} h_{\lambda,\,\delta}(u)\widetilde{D}_\alpha(u-x)du +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\left\{\int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}} + \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}\int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}}\right\} h_{\lambda,\,\delta}(u)\widetilde{D}_\alpha(u-x)du =$$

$$= A_\alpha^{(0)}(x, h_{\lambda,\delta}) + A_\alpha^{(1)}(x, h_{\lambda,\delta}) + A_\alpha^{(2)}(x, h_{\lambda,\delta}) + A_\alpha^{(3)}(x, h_{\lambda,\delta}). \tag{2.50}$$

Далее, рассмотрим и оценим каждый интеграл из (2.50). Сначала оценим интегралы из суммы $A_\alpha^{(1)}(x, h_{\lambda,\delta})$. Для этого оценим, например, интеграл

$$\widetilde{J}_\alpha^{(1)}(x;\, h_{\lambda,\,\delta}) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} \int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} e^{i\,\lambda\cdot u_1 u_2} \cdot \varphi_\delta(u_1)\cdot\varphi_\delta(u_2)\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1 - x_1)\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2 - x_2)du_1\,du_2$$

(остальные интегралы в $A_\alpha^{(1)}(x, h_{\lambda,\delta})$ оцениваются аналогично).

Используя определение функции $\varphi_\delta(t)$, получим:

$$|\widetilde{J}_\alpha^{(1)}(x;\, h_{\lambda,\delta})| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{du_1}{x_1 - u_1} \int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{du_2}{x_2 - u_2} \le \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\delta}{4(x_1 - \frac{\delta}{2})}\cdot\frac{\delta}{4(x_2 - \frac{\delta}{2})} \le \frac{1}{4\pi^2}.$$

Из последнего неравенства следует:

$$|A_\alpha^{(1)}(x, h_{\lambda,\delta})| \le \frac{1}{\pi^2}. \tag{2.51}$$

Для оценки $A_\alpha^{(j)}(x, h_{\lambda,\delta})$, $j = 0, 2, 3$, из (2.50) установим справедливость следующего утверждения.

Рассмотрим интеграл

$$I_{\alpha_2}(x_2, u_1) = \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi - \frac{\delta}{2}} e^{i\,\lambda\cdot u_1 u_2}\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2 - x_2)du_2, \tag{2.52}$$

где $u_1 \in [\frac{\delta}{4}, 2\pi - \frac{\delta}{4}]$, $\alpha_2 = \lambda\, x_1$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}_\delta = [\delta, 2\pi - \delta]^2$.

Предложение 2.4. *Для интеграла $I_{\alpha_2}(x_2, u_1)$ справедливы оценки:*

$$|I_{\alpha_2}(x_2, u_1)| \le \begin{cases} \pi + \frac{8}{\lambda\delta(x_1 - u_1)} & \textit{при} \;\; u_1 < x_1, \\ \frac{8}{\lambda\delta(u_1 - x_1)} & \textit{при} \;\; u_1 > x_1, \\ \frac{5\pi}{2} + \frac{4}{\lambda\delta^2} + 3\ln\frac{1}{\delta} & \textit{при} \;\; x_1 - \frac{1}{\lambda} \le u_1 \le x_1 + \frac{1}{\lambda}. \end{cases} \tag{2.53}$$

Доказательство предложения 2.4. Пусть $u_1 < x_1$, имеем:

$$I_{\alpha_2}(x_2, u_1) = \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi - \frac{\delta}{2}} e^{i\,\lambda\cdot u_1 u_2}\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2 - x_2)du_2 = \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi - \frac{\delta}{2}} e^{i\,\lambda\cdot u_1 u_2}\cdot\frac{\sin\alpha_2(u_2 - x_2)}{u_2 - x_2}du_2.$$

Пусть $s=\alpha_2(u_2-x_2)$. Учитывая, что $\alpha_2=\lambda x_1$, распишем $I_{\alpha_2}(x_2,u_1)$ следующим образом:

$$I_{\alpha_2}(x_2,u_1)=e^{i\,\lambda\cdot u_1x_2}\int\limits_{-\alpha_2(x_2-\frac{\delta}{2})}^{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}\frac{\sin s}{s}\cdot e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds=$$

$$=e^{i\,\lambda\cdot u_1x_2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin s}{s}\cdot e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds-\left\{\int\limits_{-\infty}^{-\alpha_2(x_2-\frac{\delta}{2})}+\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}\right\}\frac{\sin s}{s}\cdot e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds\right).\quad(2.54)$$

Рассмотрим первый интеграл из (2.54). Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin s}{s}\cdot e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin s}{s}(\cos\frac{u_1}{x_1}s+i\sin\frac{u_1}{x_1}s)ds=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin s\cdot\cos\frac{u_1}{x_1}s}{s}ds=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(1-\frac{u_1}{x_1})s}{s}ds+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(1+\frac{u_1}{x_1})s}{s}ds\right)=\frac{1}{2}(\pi+\pi)=\pi\qquad(2.55)$$

(так как $1+\frac{u_1}{x_1}>1-\frac{u_1}{x_1}>0$).

Далее, оценим интеграл $\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}$ из (2.54) (интеграл $\int\limits_{-\infty}^{-\alpha_2(x_2-\frac{\delta}{2})}$ оценивается аналогично).

Используя формулу $\sin s=\frac{e^{i\,s}-e^{-i\,s}}{2i}$ и интегрирование по частям, получим:

$$\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}\frac{\sin s}{s}\cdot e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds=$$

$$=\frac{1}{2i}\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}\frac{e^{i\,(1+\frac{u_1}{x_1})\cdot s}}{s}ds-\frac{1}{2i}\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}\frac{e^{-i\,(1-\frac{u_1}{x_1})\cdot s}}{s}ds=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{x_1}{x_1+u_1}\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}\frac{de^{i\,(1+\frac{u_1}{x_1})\cdot s}}{s}-\frac{1}{2}\frac{x_1}{x_1-u_1}\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}\frac{de^{-i\,(1-\frac{u_1}{x_1})\cdot s}}{s}=$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x_1}{x_1+u_1}\left(-\frac{e^{i\,(1+\frac{u_1}{x_1})\cdot\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}}{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}+\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}\frac{e^{i\,(1+\frac{u_1}{x_1})\cdot s}ds}{s^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{x_1}{x_1-u_1}\left(-\frac{e^{-i\,(1-\frac{u_1}{x_1})\cdot\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}}{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}+\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}\frac{e^{-i\,(1-\frac{u_1}{x_1})\cdot s}ds}{s^2}\right).$$

Тогда будем иметь:

$$\left|\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}\frac{\sin s}{s}\cdot e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds\right|\le$$

$$\le\frac{1}{(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)\cdot(\lambda u_1+\lambda x_1)}+\frac{1}{(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)\cdot|\lambda u_1-\lambda x_1|}.$$

Так как $2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2\ge\frac{\delta}{2}$, то:

$$\left|\int\limits_{\alpha_2(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}^{+\infty}\frac{\sin s}{s}\cdot e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds\right|\le\frac{2}{\lambda\delta(u_1+x_1)}+\frac{2}{\lambda\delta|u_1-x_1|},$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{-\alpha_2(x_2-\frac{\delta}{2})}\frac{\sin s}{s}\cdot e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds\right|\le\frac{2}{\lambda\delta(u_1+x_1)}+\frac{2}{\lambda\delta|u_1-x_1|}.$$

Используя два последних неравенства, а также (2.54) и (2.55), получим:

$$I_{\alpha_2}(x_2,u_1)=\pi e^{i\,\lambda\cdot u_1x_2}+\phi_1(\lambda,\delta,u_1,x_1,x_2),\ \ x_1>u_1, \tag{2.56}$$

где $|\phi_1(\lambda,\delta,u_1,x_1,x_2)|\le\frac{4}{\lambda\delta(u_1+x_1)}+\frac{4}{\lambda\delta|u_1-x_1|}$.

Поскольку в данном случае $x_1>u_1$ и справедливо неравенство $\frac{4}{\lambda\delta(u_1+x_1)}\le\frac{4}{\lambda\delta|u_1-x_1|}=\frac{4}{\lambda\delta(x_1-u_1)}$, то:

$$|I_{\alpha_2}(x_2,u_1)|\le\pi+\frac{8}{\lambda\delta(x_1-u_1)},\ \ x_1>u_1. \tag{2.57}$$

Пусть $u_1>x_1$, имеем:

$$|I_{\alpha_2}(x_2,u_1)|\le\frac{8}{\delta\lambda(u_1-x_1)},\ \ u_1>x_1, \tag{2.58}$$

поскольку в данном случае интеграл $I_{\alpha_2}(x_2,u_1)$ расписывается аналогично предыдущему случаю (т.е., когда $x_1>u_1$), с той лишь разницей, что первого интеграла из правой части (2.54) нет (в силу того, что $1+\frac{u_1}{x_1}>0$, $1-\frac{u_1}{x_1}<0$):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin s}{s}\cdot e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(1-\frac{u_1}{x_1})s}{s}ds+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(1+\frac{u_1}{x_1})s}{s}ds\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(-\pi+\pi)=0,\ \ u_1>x_1.$$

Пусть $u_1\in[x_1-\frac{1}{\lambda},x_1+\frac{1}{\lambda}]$, имеем:

$$I_{\alpha_2}(x_2,u_1)=$$

$$=\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}e^{i\,\lambda\cdot u_1u_2}\frac{\sin\lambda x_1(u_2-x_2)}{u_2-x_2}du_2=e^{i\,\lambda\cdot u_1x_2}\int\limits_{-\lambda x_1(x_2-\frac{\delta}{2})}^{\lambda x_1(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)}\frac{\sin s}{s}e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds=$$

$$=e^{i\,\lambda\cdot u_1x_2}\int\limits_{-a}^{b}\frac{\sin s}{s}e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds=$$

$$=e^{i\,\lambda\cdot u_1x_2}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sin s}{s}e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds+e^{i\,\lambda\cdot u_1x_2}\int\limits_{a}^{b}\frac{\sin s}{s}e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds,\tag{2.59}$$

где $s=\lambda x_1(u_2-x_2)$, $a=\lambda x_1(x_2-\frac{\delta}{2})$, $b=\lambda x_1(2\pi-\frac{\delta}{2}-x_2)$.

Оценим первый интеграл из (2.59). Имеем:

$$\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sin s}{s}e^{i\,\frac{u_1}{x_1}\cdot s}ds=\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sin s}{s}\left[\cos\frac{u_1}{x_1}s+i\sin\frac{u_1}{x_1}s\right]ds=\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sin s\cdot\cos\frac{u_1}{x_1}s}{s}ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sin(1-\frac{u_1}{x_1})s+\sin(1+\frac{u_1}{x_1})s}{s}ds.$$

Если учесть, что в данном случае $|1-\frac{u_1}{x_1}|\le\frac{1}{x_1\lambda}$ ($u_1\in[x_1-\frac{1}{\lambda},x_1+\frac{1}{\lambda}]$), то получим:

$$\left|\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sin(1-\frac{u_1}{x_1})s}{s}ds\right|\le\left|1-\frac{u_1}{x_1}\right|2a\le 2(x_2-\frac{\delta}{2})\le 4\pi.$$

Оценим следующий интеграл

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{\sin(1+\frac{u_1}{x_1})s}{s} ds = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{-a} - \int\limits_{a}^{+\infty} \right\} \frac{\sin(1+\frac{u_1}{x_1})s}{s} ds =$$

$$= \pi - 2 \int\limits_{-\infty}^{-a} \frac{\sin(1+\frac{u_1}{x_1})s}{s} ds.$$

Далее, интегрируя по частям последний интеграл, получим:

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{\sin(1+\frac{u_1}{x_1})s}{s} ds =$$

$$= \pi + \frac{2x_1}{x_1+u_1} \left(-\frac{\cos(1+\frac{u_1}{x_1})a}{a} + \int\limits_{-\infty}^{-a} \frac{\cos(1+\frac{u_1}{x_1})s}{s^2} ds \right).$$

Тогда имеем:

$$\left| \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sin(1+\frac{u_1}{x_1})s}{s} ds \right| \leq \pi + \frac{4}{a} = \pi + \frac{4}{\lambda x_1 (x_2 - \frac{\delta}{2})} \leq \pi + \frac{8}{\lambda \delta^2}.$$

А значит справедливо неравенство:

$$\left| \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sin s}{s} e^{i \frac{u_1}{x_1} \cdot s} ds \right| \leq \frac{5\pi}{2} + \frac{4}{\lambda \delta^2}.$$

Теперь рассмотрим второй интеграл из (2.59). Имеем:

$$\left| \int\limits_{a}^{b} \frac{\sin s}{s} e^{i \frac{u_1}{x_1} \cdot s} ds \right| \leq \left| \ln \frac{b}{a} \right| = \left| \ln \frac{2\pi - \frac{\delta}{2} - x_2}{x_2 - \frac{\delta}{2}} \right| \leq$$

$$\leq |\ln(2\pi - \frac{\delta}{2} - x_2)| + |\ln(x_2 - \frac{\delta}{2})|.$$

Предположим, что $\frac{\delta}{2} \leq x_2 - \frac{\delta}{2} \leq 1$, тогда $|\ln(x_2 - \frac{\delta}{2})| \leq \ln \frac{2}{\delta} \leq 2 \ln \frac{1}{\delta}$, $|\ln(2\pi - \frac{\delta}{2} - x_2)| \leq \ln(2\pi - \frac{3\delta}{2}) \leq 2$. А если $1 < x_2 - \frac{\delta}{2} \leq 2\pi - \frac{3\delta}{2}$, то $|\ln(x_2 - \frac{\delta}{2})| \leq \ln(2\pi - \frac{3\delta}{2}) \leq 2$, $|\ln(2\pi - \frac{\delta}{2} - x_2)| \leq \ln(2\pi - 1)$. Следовательно,

$$\left| \int\limits_{a}^{b} \frac{\sin s}{s} e^{i \frac{u_1}{x_1} \cdot s} ds \right| \leq 3 \ln \frac{1}{\delta}.$$

Тогда

$$|I_{\alpha_2}(x_2,u_1)|\le\frac{5\pi}{2}+\frac{4}{\lambda\delta^2}+3\ln\frac{1}{\delta},\ \ u_1\in[x_1-\frac{1}{\lambda},x_1+\frac{1}{\lambda}]. \tag{2.60}$$

Оценки (2.57), (2.58) и (2.60) доказывают предложение 2.4.

Возвращаясь к оценке (2.50), оценим интегралы из суммы $A_\alpha^{(2)}(x,h_{\lambda,\delta})$. Для этого оценим, например, интеграл

$$\widetilde{J}_\alpha^{(2)}(x;\,h_{\lambda,\delta})=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}e^{i\,\lambda\cdot u_1u_2}\cdot\varphi_\delta(u_1)\cdot\varphi_\delta(u_2)\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1-x_1)\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2-x_2)du_1\,du_2$$

(другой интеграл в $A_\alpha^{(2)}(x,h_{\lambda,\delta})$ оценивается аналогично).

Поскольку $\varphi_\delta(u_2)=1$ при $u_2\in[\frac{\delta}{2},2\pi-\frac{\delta}{2}]$, то в силу (2.52):

$$\widetilde{J}_\alpha^{(2)}(x;\,h_{\lambda,\delta})=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}}\varphi_\delta(u_1)\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1-x_1)\Bigg[\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}e^{i\,\lambda\cdot u_1u_2}\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2-x_2)du_2\Bigg]du_1=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}}\varphi_\delta(u_1)\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1-x_1)I_{\alpha_2}(x_2,u_1)du_1. \tag{2.61}$$

Т.к. в (2.61) $u_1\in[\frac{\delta}{4},\frac{\delta}{2}]$, а $x_1\in[\delta,2\pi-\delta]$, то $x_1>u_1$, и в силу (2.53) будем иметь:

$$|\widetilde{J}_\alpha^{(2)}(x;\,h_{\lambda,\delta})|\le\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}}|\varphi_\delta(u_1)\cdot\frac{\sin\lambda x_2(u_1-x_1)}{u_1-x_1}|\Bigg[\pi+\frac{8}{\lambda\delta(x_1-u_1)}\Bigg]du_1\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}}\frac{du_1}{x_1-u_1}+\frac{8}{\pi^2\lambda\delta}\int\limits_{\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}}\frac{du_1}{(x_1-u_1)^2}\le\frac{1}{2\pi}+\frac{8}{\pi^2\lambda\delta^2}.$$

Получим:

$$|A_\alpha^{(2)}(x, h_{\lambda,\delta})| \le \frac{1}{\pi} + \frac{16}{\pi^2\lambda\delta^2}. \tag{2.62}$$

Теперь оценим интегралы из суммы $A_\alpha^{(3)}(x, h_{\lambda,\delta})$. Для этого оценим, например, интеграл

$$\widetilde{J}_\alpha^{(4)}(x;\, h_{\lambda,\delta}) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}} e^{i\,\lambda\cdot u_1 u_2} \cdot \varphi_\delta(u_1) \cdot \varphi_\delta(u_2) \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1 - x_1) \widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2 - x_2) du_1\, du_2$$

(другой интеграл в $A_\alpha^{(3)}(x, h_{\lambda,\delta})$ оценивается аналогично).

Поскольку $\varphi_\delta(u_2) = 1$ при $u_2 \in [\frac{\delta}{2}, 2\pi - \frac{\delta}{2}]$, то в силу (2.52):

$$\widetilde{J}_\alpha^{(4)}(x;\, h_{\lambda,\delta}) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}} \varphi_\delta(u_1) \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1 - x_1) \left[\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}} e^{i\,\lambda\cdot u_1 u_2} \widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2 - x_2) du_2 \right] du_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}} \varphi_\delta(u_1) \widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1 - x_1) I_{\alpha_2}(x_2, u_1) du_1.$$

Т.к. $u_1 \in [2\pi - \frac{\delta}{2}, 2\pi - \frac{\delta}{4}]$, а $x_1 \in [\delta, 2\pi - \delta]$, то $u_1 > x_1$, и в силу (2.53) будем иметь:

$$|\widetilde{J}_\alpha^{(4)}(x;\, h_{\lambda,\delta})| \le \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}} |\varphi_\delta(u_1) \cdot \frac{\sin \lambda x_2 (u_1 - x_1)}{u_1 - x_1}| \cdot \frac{8}{\lambda\delta(u_1 - x_1)} du_1 \le$$

$$\le \frac{8}{\pi^2\lambda\delta} \int\limits_{2\pi-\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{4}} \frac{du_1}{(u_1 - x_1)^2} \le \frac{8}{\pi^2\lambda\delta^2}.$$

Имеем:

$$|A_\alpha^{(3)}(x, h_{\lambda,\delta})| \le \frac{16}{\pi^2\lambda\delta^2}. \tag{2.63}$$

Далее, используя равенство (2.52), оценим "основной" интеграл из (2.50):

$$A_\alpha^{(0)}(x,h_{\lambda,\delta})=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}e^{i\,\lambda\cdot u_1u_2}\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1-x_1)\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2-x_2)du_1\,du_2=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left\{\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1-\frac{1}{\lambda}}+\int\limits_{x_1-\frac{1}{\lambda}}^{x_1+\frac{1}{\lambda}}+\int\limits_{x_1+\frac{1}{\lambda}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}\right\}I_{\alpha_2}(x_2,u_1)\times$$

$$\times\frac{\sin\lambda x_2(u_1-x_1)}{u_1-x_1}du_1=I_1+I_2+I_3. \qquad (2.64)$$

Сначала оценим интеграл I_3.

$$I_3=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{x_1+\frac{1}{\lambda}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}I_{\alpha_2}(x_2,u_1)\frac{\sin\lambda x_2(u_1-x_1)}{u_1-x_1}du_1.$$

В силу неравенства (2.53) для $I_{\alpha_2}(x_2,u_1)$ при $x_1<u_1$, имеем:

$$|I_3|\le\frac{8}{\pi^2\lambda\delta}\int\limits_{x_1+\frac{1}{\lambda}}^{2\pi-\frac{\delta}{2}}\frac{du_1}{(u_1-x_1)^2}\le\frac{8}{\pi^2\lambda\delta}(\frac{2}{\delta}+\lambda). \qquad (2.65)$$

Далее, оценим интеграл I_2.

$$I_2=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{x_1-\frac{1}{\lambda}}^{x_1+\frac{1}{\lambda}}I_{\alpha_2}(x_2,u_1)\frac{\sin\lambda x_2(u_1-x_1)}{u_1-x_1}du_1.$$

В силу неравенства (2.53) для $I_{\alpha_2}(x_2,u_1)$ при $u_1\in[x_1-\frac{1}{\lambda},x_1+\frac{1}{\lambda}]$, имеем:

$$|I_2|=\left|\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{x_1-\frac{1}{\lambda}}^{x_1+\frac{1}{\lambda}}I_{\alpha_2}(x_2,u_1)\frac{\sin\lambda x_2(u_1-x_1)}{u_1-x_1}du_1\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi^2}(\frac{5\pi}{2}+\frac{4}{\lambda\delta^2}+3\ln\frac{1}{\delta})\int\limits_{x_1-\frac{1}{\lambda}}^{x_1+\frac{1}{\lambda}}\left|\frac{\sin\lambda x_2(u_1-x_1)}{u_1-x_1}\right|du_1=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}(\frac{5\pi}{2}+\frac{4}{\lambda\delta^2}+3\ln\frac{1}{\delta})\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{\sin x_2p}{p}\right|dp\le\frac{4}{\pi}(\frac{5\pi}{2}+\frac{4}{\lambda\delta^2}+3\ln\frac{1}{\delta}). \qquad (2.66)$$

Теперь оценим интеграл I_1.

$$I_1 = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1 - \frac{1}{\lambda}} I_{\alpha_2}(x_2, u_1) \frac{\sin \lambda x_2 (u_1 - x_1)}{u_1 - x_1} du_1.$$

В силу оценок (2.53) и (2.56) для $I_{\alpha_2}(x_2, u_1)$ при $x_1 > u_1$, имеем:

$$I_1 = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1 - \frac{1}{\lambda}} \left[\pi e^{i\,\lambda \cdot u_1 x_2} + \phi_1(\lambda, \delta, u_1, x_1, x_2) \right] \frac{\sin \lambda x_2 (u_1 - x_1)}{u_1 - x_1} du_1 =$$

$$= \frac{e^{i\,\lambda \cdot x_1 x_2}}{\pi} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1 - \frac{1}{\lambda}} \frac{\sin \lambda x_2 (u_1 - x_1)}{u_1 - x_1} e^{i\,\lambda \cdot x_2 (u_1 - x_1)} du_1 + \phi_2(\lambda, \delta, x_1, x_2), \tag{2.67}$$

где $|\phi_2(\lambda, \delta, x_1, x_2)| \leq \frac{8}{\pi^2 \lambda \delta} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1 - \frac{1}{\lambda}} \frac{du_1}{(x_1 - u_1)^2} \leq \frac{8}{\pi^2 \delta}$.

Распишем следующий интеграл:

$$\frac{e^{i\,\lambda \cdot x_1 x_2}}{\pi} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1 - \frac{1}{\lambda}} \frac{\sin \lambda x_2 (u_1 - x_1)}{u_1 - x_1} e^{i\,\lambda \cdot x_2 (u_1 - x_1)} du_1 =$$

$$= \frac{e^{i\,\lambda \cdot x_1 x_2}}{2\pi} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1 - \frac{1}{\lambda}} \frac{\sin 2\lambda x_2 (u_1 - x_1)}{u_1 - x_1} du_1 + \frac{i e^{i\,\lambda \cdot x_1 x_2}}{2\pi} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1 - \frac{1}{\lambda}} \frac{1 - \cos 2\lambda x_2 (u_1 - x_1)}{u_1 - x_1} du_1. \tag{2.68}$$

Оценим первый интеграл из (2.68). Делая замену переменных $u_1 - x_1 = u_1'$ и интегрируя по частям, получим (учитывая, что $\lambda \geq e^{\frac{100}{\delta}}$):

$$\left| \frac{e^{i\,\lambda \cdot x_1 x_2}}{2\pi} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1 - \frac{1}{\lambda}} \frac{\sin 2\lambda x_2 (u_1 - x_1)}{u_1 - x_1} du_1 \right| \leq \frac{1}{4\pi \lambda x_2} (2\lambda + \frac{4}{\delta}) \leq \frac{1}{\delta}.$$

Аналогично:

$$\left| -\frac{i e^{i\,\lambda \cdot x_1 x_2}}{2\pi} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1 - \frac{1}{\lambda}} \frac{\cos 2\lambda x_2 (u_1 - x_1)}{u_1 - x_1} du_1 \right| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Оценим оставшийся интеграл, входящий в (2.68).

$$\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1-\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{u_1-x_1}du_1 = \ln\frac{1}{\lambda} - \ln(x_1-\frac{\delta}{2}) = -(\ln\lambda + \ln(x_1-\frac{\delta}{2})).$$

Так как $|\ln(x_1-\frac{\delta}{2})| \le 2\ln\frac{1}{\delta}$ (см. выше), то

$$\left|\frac{ie^{i\,\lambda\cdot x_1 x_2}}{2\pi}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1-\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{u_1-x_1}du_1\right| \ge \frac{1}{2\pi}\ln\lambda - \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\delta}.$$

Тогда будем иметь:

$$\left|\frac{e^{i\,\lambda\cdot x_1 x_2}}{\pi}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{x_1-\frac{1}{\lambda}} \frac{\sin\lambda x_2(u_1-x_1)}{u_1-x_1}e^{i\,\lambda\cdot x_2(u_1-x_1)}du_1\right| \ge \frac{1}{2\pi}\ln\lambda - \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta}.$$

Используя (2.67), а также последнее неравенство, интеграл I_1 оценивается следующим образом:

$$|I_1| \ge \frac{1}{2\pi}\ln\lambda - \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta} - \frac{8}{\pi^2\delta}. \tag{2.69}$$

Равенство (2.64) и оценки (2.65), (2.66) и (2.69) дают возможность оценить интеграл $A_\alpha^{(0)}(x, h_{\lambda,\delta})$:

$$|A_\alpha^{(0)}(x, h_{\lambda,\delta})| \ge$$
$$\ge \frac{1}{2\pi}\ln\lambda - \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta} - \frac{8}{\pi^2\delta} - \frac{4}{\pi}(\frac{5\pi}{2} + \frac{4}{\lambda\delta^2} + 3\ln\frac{1}{\delta}) - \frac{8}{\pi^2\lambda\delta}(\frac{2}{\delta}+\lambda). \tag{2.70}$$

Учитывая равенство (2.50) и оценки интегралов (2.51), (2.62), (2.63) и (2.70), получаем неравенство для $\widetilde{J}_\alpha(x;\, h_{\lambda,\delta})$:

$$|\widetilde{J}_\alpha(x;\, h_{\lambda,\delta})| = \left|\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_{\lambda,\delta}(u)\widetilde{D}_{\alpha_1}(u_1-x_1)\widetilde{D}_{\alpha_2}(u_2-x_2)du_1\,du_2\right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{2\pi}\ln\lambda - \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta} - \frac{8}{\pi^2\delta} - \frac{4}{\pi}(\frac{5\pi}{2} + \frac{4}{\lambda\delta^2} + 3\ln\frac{1}{\delta}) -$$
$$-\frac{8}{\pi^2\lambda\delta}(\frac{2}{\delta}+\lambda) - \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} - \frac{16}{\pi^2\lambda\delta^2} - \frac{16}{\pi^2\lambda\delta^2}.$$

Существует константа $\theta > 0$, для которой

$$|\widetilde{J}_\alpha(x;\, h_{\lambda,\,\delta})| \geq \theta \cdot \ln\, \lambda.$$

Лемма 2.1 доказана.

Далее мы приведем стандартную конструкцию. Выберем две монотонные последовательности $\{\lambda_k\}$, $\{\delta_k\}$: $\lambda_k \to \infty$ и $\delta_k \to +0$ при $k \to \infty$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$ и $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_k > \dots$), удовлетворяющие ряду условий, которые будут сформулированы ниже, но во всяком случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log\, \lambda_k}} = C_0 = const. \tag{2.71}$$

Детализируем выбор последовательностей $\{\delta_k\}$ и $\{\lambda_k\}$. Положим $\delta_1 = \frac{1}{10}$ и

$$\delta_k = \frac{\delta_{k-1}}{8}, \quad k = 2, 3, \dots \tag{2.72}$$

(и, следовательно, мы выбрали множества $\mathbb{Q}_k = \mathbb{Q}_{\delta_k} = [\delta_k,\, 2\pi - \delta_k]^2$, $k = 1, 2, \dots$).

Элементы последовательности $\{\lambda_k\}$ будем выбирать по индукции вместе с другой монотонной последовательностью $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$. Положим $\lambda_1 = m_1 = e^{1000}$. Предположим, что мы уже выбрали $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1}$ и $m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1}$. Теперь выберем $m_k > m_{k-1}$ так, чтобы

$$\max_{1 \leq j \leq k-1} \left\| \widetilde{J}_{\alpha_1,\,\alpha_2}(x;\, h_{\lambda_j,\,\delta_j}) - h_{\lambda_j,\,\delta_j}(x) \right\|_{\mathbb{C}(\mathbb{Q}_k)} < 1 \quad \text{при} \quad \min\{\alpha_1,\, \alpha_2\} > m_k \tag{2.73}$$

(последнее возможно сделать, учитывая, что для каждых λ_j и δ_j, $j = 1, \dots, k-1$, функции $Reh_{\lambda_j,\,\delta_j}$, $Imh_{\lambda_j,\,\delta_j} \in \mathbb{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$). После выбора m_k выберем $\lambda_k > \lambda_{k-1}$ так, чтобы, во-первых,

$$\lambda_k \cdot \delta_k > m_k, \tag{2.74}$$

во-вторых, выбор λ_k подчиним еще условию: $\lambda_k > e^{2^{2k}}$ и, более того,

$$\frac{\log^2\, \lambda_{k-1}}{\sqrt{\log\, \lambda_k}} < \frac{1}{2^{k+1}}\,. \tag{2.75}$$

Необходимую нам функцию определим следующим образом:

$$h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_{\lambda_j,\,\delta_j}}{\sqrt{\log\,\lambda_j}}. \tag{2.76}$$

Очевидно, что функция $h \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^2)$, $h(x_1, x_2) = 0$ при $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0,\,2\pi]^2$ (здесь мы учли оценку (2.71) и определение функций $h_{\lambda_j,\,\delta_j}$).

Теперь определим множество, на котором интеграл Фурье функции (2.76) неограниченно расходится, положим $\mathbb{Q} = \varlimsup\limits_{j\to\infty} \mathbb{Q}_j$.

Рассмотрим разность $\widetilde{J}_{\lambda_k x_2,\,\lambda_k x_1}(x; h) - h(x)$ для $x \in \mathbb{Q}$. Если $x \in \mathbb{Q}$, то $x \in \mathbb{Q}_k$ для бесконечного множества значений k, поэтому из оценки (2.49) (лемма 2.2) для этого x имеем:

$$|\widetilde{J}_{\lambda_k x_2,\,\lambda_k x_1}(x;\, h_{\lambda_k,\,\delta_k})| \geq \theta \cdot \log\,\lambda_k, \quad x \in \mathbb{Q}_k. \tag{2.77}$$

В таком случае, при $x \in \mathbb{Q}_k$ (при достаточно большом k) имеем:

$$\widetilde{J}_{\lambda_k x_2,\,\lambda_k x_1}(x; h) - h(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\log\,\lambda_j}} \cdot \widetilde{J}_{\lambda_k x_2,\,\lambda_k x_1}(x;\, h_{\lambda_j,\,\delta_j}) - h(x) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\log\,\lambda_k}} \cdot \widetilde{J}_{\lambda_k x_2,\,\lambda_k x_1}(x;\, h_{\lambda_k,\,\delta_k}) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log\,\lambda_j}} \cdot \widetilde{J}_{\lambda_k x_2,\,\lambda_k x_1}(x;\, h_{\lambda_j,\,\delta_j}) =$$

$$= \Sigma' + \Sigma'' + \Sigma'''. \tag{2.78}$$

Оценим первое слагаемое в (2.78). Учитывая оценки (2.71), (2.73), (2.74) и (2.77), можем записать:

$$\Sigma' = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\log\,\lambda_j}} \cdot \Big\{ \widetilde{J}_{\lambda_k x_2,\,\lambda_k x_1}(x_1, x_2;\, h_{\lambda_j,\,\delta_j}) - h_{\lambda_j,\,\delta_j}(x_1, x_2) \Big\} -$$

$$- \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log\,\lambda_j}} h_{\lambda_j,\,\delta_j}(x) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\log\,\lambda_j}} \cdot \Big| \widetilde{J}_{\lambda_k x_2,\,\lambda_k x_1}(x_1, x_2;\, h_{\lambda_j,\,\delta_j}) - h_{\lambda_j,\,\delta_j}(x_1, x_2) \Big| +$$

$$+\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\log\,\lambda_j}}\leq C_0. \tag{2.79}$$

Учитывая (2.75), третье слагаемое в разности (2.78) оценивается так:

$$\Sigma''' \leq \sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\log\,\lambda_j}}\cdot\log^2(\lambda_k\cdot 2\pi)\leq\sum_{j=k+1}^{\infty}2^{-j}=2^{-k}. \tag{2.80}$$

Из оценок (2.77)–(2.80) получаем:

$$|\widetilde{J}_{\lambda_k x_2,\,\lambda_k x_1}(x;h)-h(x)|\geq\theta\cdot\sqrt{\log\,\lambda_k}-C_0-2^{-k}. \tag{2.81}$$

Принимая во внимание, что $\lambda_k\to\infty$ при $k\to\infty$, можем сделать вывод, что правая часть в (2.81) может быть сделана сколь угодно большой с ростом k. В свою очередь, учитывая, что множества $\mathbb{Q}_k$, $\mathbb{Q}_k\subset\mathbb{Q}$, удовлетворяют соотношению $\mathbb{Q}_k\subset\mathbb{Q}_{k+1}$, и, следовательно, фиксированная точка $x\in\mathbb{Q}$ принадлежит бесконечному числу множеств $\mathbb{Q}_k$, мы получаем, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,|\widetilde{J}_{\lambda_k x_2,\,\lambda_k x_1}(x;h)|=\infty \text{ в каждой точке } \mathbb{Q}. \tag{2.82}$$

Таким образом, принимая во внимание равенство $\mathbb{Q}=(0,\,2\pi)^2$, из (2.82) получаем: существует функция $h\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^2)$, $h(x_1,x_2)=0$ при $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus[0,\,2\pi]^2$, такая, что

$$\overline{\lim_{\alpha_1,\,\alpha_2\to\infty}}\,|J_{\alpha_1,\,\alpha_2}(x_1,x_2;\,h)|=+\infty \text{ всюду внутри } [0,\,2\pi]^2. \tag{2.83}$$

Итак, функция $f(x)$ по-прежнему тождественно равна нулю на $\mathbb{R}^3$. В свою очередь, функцию $g(x)$, определенную ранее формулой (2.44), мы несколько изменим. Положим

$$\widetilde{g}(x_1,x_2,x_3)=\widetilde{g}_0(x_1,x_2)\cdot\psi(x_3), \tag{2.84}$$

здесь функция ψ определена в (2.47), а функцию $\widetilde{g}_0$ определим следующим образом

$$\widetilde{g}_0(x_1,x_2)=h(x_1-\pi,x_2-\pi).$$

И учитывая оценки (2.48), (2.84) и (2.83), можем сделать вывод о справедливости теоремы II.III. Теорема II.III доказана.

Доказательство следствия теоремы II.III. Для доказательства следствия достаточно в качестве 2π-периодической (по-каждому аргументу) функции $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$ (разложенной в кратный ряд Фурье), взять, например, функцию вида

$$f(x) = \prod_{j=1}^{N} f_j(x_j), \quad f_j \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^1), \quad f_j(-\pi) = f_j(\pi) = 0, \; j = 1, \ldots, N,$$

где ряд Фурье каждой функции f_j сходится в каждой точке $[-\pi, \pi]$. [24] В качестве функции $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$ (разложенной в кратный интеграл Фурье и совпадающей с функцией $f(x)$ на $\mathbb{T}^N$) достаточно взять функцию: $g(x) = f(x) \cdot \chi(x) + \widetilde{g}(x_1, x_2, x_3) \cdot \psi(x_4) \cdots \psi(x_N)$. Здесь $\chi(x)$ — характеристическая функция куба $\mathbb{T}^N$, $\widetilde{g} \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^3)$ — функция, построенная при доказательстве теоремы II.III, для которой фактически справедлива оценка

$$\overline{\lim_{\alpha_1, \alpha_2, \nu_3 \to \infty}} |J_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^{(\nu_3)}}(x_1, x_2, x_3; \widetilde{g})| = +\infty \text{ для любого } \quad x \in (-\pi, \pi)^3 \; {}^{25}$$

(см. определение функции $\widetilde{g}$, оценка (2.84)), в свою очередь функция $\psi \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^1)$ определяется следующим образом: $\psi(t) = 1$ при $t \in [-\pi, \pi]$ и $\psi(t) = 0$ при $t \in \mathbb{R}^1 \setminus [-2\pi, 2\pi]$.

---

[24] Для функции $f(x) \equiv 0$ результат следствия фактически доказан в теореме II.III.

[25] Здесь $\{\alpha_3^{(\nu_3)}\}$ – произвольная вещественная последовательность, $\alpha_3^{(\nu_3)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \to \infty$ при $\nu_3 \to \infty$.

ГЛАВА III. КРИТЕРИЙ СПРАВЕДЛИВОСТИ РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ В КРАТНЫЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Введение

В настоящей главе диссертации нами доказывается критерий справедливости равносходимости почти всюду разложений в кратный ряд и интеграл Фурье на произвольных подмножествах $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$ положительной меры (удовлетворяющих некоторым условиям на границу множества) в классах L_p, $p > 1$, в случае, когда "прямоугольные частичные суммы" рассматриваемых разложений имеют "номера" $n = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_0^N$, в которых некоторые компоненты n_j и α_j являются элементами лакунарных последовательностей.

Также в данной главе доказана теорема, которая показывает, что найденная во второй главе геометрия множеств (теорема II.I), на которых справедлива равносходимость п.в. разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм" в классах L_p, $p > 1$, перестаёт "работать" в классе $\Phi(L)$, где $\Phi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$— любая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$, $u \to \infty$.

Пусть M — множество чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, $N \geq 3$, и $k \in M$. Обозначим: $J_k = \{j_1, ..., j_k\}$, $j_s < j_t$ при $s < t$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \ldots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_t$ при $s < t$, — непустые подмножества множества M. Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств $\mathbb{R}[J_k]$ и $\mathbb{R}[M \setminus J_k]$, где $\mathbb{R}[J_k] = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in M \setminus J_k\}$. Обозначим также $\mathbb{T}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}[J_k] : -\pi \leq x_j < \pi \text{ при } j \in J_k\}$.

Пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, — произвольное (непустое) открытое множество, и пусть $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M$.

Положим $W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]$, $J_2 \subset M$. Множества $W[J_2]$ будем называть "N - мерными брусками". Далее для любого J_k, $1 \leq k \leq N-2$, рассмотрим следующие множества: множество

$$W = W(J_k) = W(\Omega, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2] \tag{3.1}$$

(которое будем называть "неполным N-мерным крестом") и множество

$$W^0 = W^0(J_k) = W^0(\Omega, J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2] \tag{3.2}$$

(которое будем называть "центром" соответствующего "N-мерного креста").

В работе [32] И. Л. Блошанским и О. В. Лифанцевой было введено следующее понятие.

Определение 3.1. *Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, $N \geq 3$.*

1. *Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, если найдется множество $W = W(J_k)$ вида (3.1) такое, что $\mu(W \setminus \mathfrak{A}) = 0$, причем свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ есть свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, если $W = W(W^0, J_k)$.*

2. *Свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ множества $\mathfrak{A}$ будем называть максимальным свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ множества $\mathfrak{A}$, если для любого множества $\widetilde{W}^0 = \widetilde{W}^0(J_k)$ вида (3.2) такого, что $\mu(\widetilde{W}^0 \setminus W^0) > 0$, множество $\mathfrak{A}$ не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(\widetilde{W}^0)$.*

Обозначим через $intP$ множество внутренних точек P, через $\overline{P}$ — замыкание множества P и через FrP — границу множества P.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, и пусть $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$. Рассмотрим следующие условия на границу множества $\mathfrak{A}$:

$$\mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{int\mathfrak{B}}) = 0; \tag{3.3}$$

$$\mu_2 Fr\, pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} = 0, \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{3.4}$$

где μ_2 — мера на плоскости.

В настоящей работе получен следующий критерий справедливости равносходимости почти всюду разложений в кратный ряд и интеграл Фурье, "прямоугольные частичные суммы" которых $S_n(x; f)$ и $J_\alpha(x; g)$ имеют "номера" $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}_0^N$, в которых ровно k $(1 \leq k \leq N-2)$ лакунарных компонент.

Теорема III.I. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *произвольное измеримое множество,* $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, *и пусть* $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$.

1. *Если существует множество* $W^0 = W^0(J_k)$ *вида* (3.2) *такое, что множество* $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, *то для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \ \text{ почти всюду на } W^0.$$

Пусть дополнительно множество $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условиям* (3.3), (3.4), *тогда*

2. *Если свойство* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ *множества* $\mathfrak{A}$ *является максимальным свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, *то существует функция* $f_1 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ *такая, что* $f_1(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$ *и для любых* k *последовательностей вещественных чисел* $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ *при* $\nu_j \to \infty$, *справедлива оценка*

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f_1)| = +\infty \ \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

3. *В частности, если множество* $\mathfrak{A}$ *вообще не обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, *то существует функция* $f_2 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ *такая, что* $f_2(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$ *и для*

любых k последовательностей вещественных чисел $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, справедлива оценка

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f_2)| = +\infty \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^N.$$

Замечание 3.1. В части достаточности теорема III.I справедлива без ограничений (3.3), (3.4).

Используя функцию, построенную С. В. Конягиным в работе [5], в § 3.3 мы доказываем, что равносходимость п.в. разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм" в классе $\Phi(L)$, где $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$— любая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$, $u \to \infty$, на множествах W^0 вида (3.2) справедлива не будет.

Теорема III.II. *Пусть $N \geq 3$ и $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, тогда существуют множество $W(J_k)$ вида (3.1) и функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^N)$, $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$, такие, что $f(x) = 0$ на $W(J_k)$ и для любых k возрастающих вещественных последовательностей $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty,\, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty,\, j\in M\setminus J_k}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f)| = +\infty \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^N.$$

Глава III диссертации состоит из трех параграфов. В § 3.1 мы рассматриваем вспомогательные леммы, которые позволяют в § 3.2 доказать теорему III.I. В § 3.3 нами доказана теорема III.II.

§ 3.1. Вспомогательные утверждения

Лемма B. *Пусть Ω — произвольное открытое множество, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, и пусть $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω*

на плоскость $\mathbb{R}[J_2], J_2 \subset M$. *Тогда существует такой набор квадратов* $\mathcal{P}$, $\mathcal{P} = (\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2, \dots, \widetilde{Q}_l, \dots)$, *что*

1. $\bigcup\limits_l \widetilde{Q}_l = \Omega[J_2]$;
2. *все* $\widetilde{Q}_l$ *попарно не пересекаются*;
3. *для любого квадрата* $\widetilde{Q}_l \in \mathcal{P}$ *существует куб* $Q_l \subset \Omega$ *такой, что:*

a) $\operatorname{diam}(Q_l) = \sqrt{\frac{N}{2}}\operatorname{diam}(\widetilde{Q}_l)$;

b) $Q_l \subset \widetilde{Q}_l \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]$;[26]

c) $\operatorname{diam}(Q_l) \leq \operatorname{dist}(Q_l, \mathbb{T}^N \setminus \Omega) \leq 4\operatorname{diam}(Q_l)$,

$$\operatorname{diam}(\widetilde{Q}_l) \leq \operatorname{dist}(\widetilde{Q}_l, \mathbb{T}^2 \setminus \Omega[J_2])$$

(*под квадратом* (*кубом*) *понимается замкнутый квадрат* (*куб*) *в* $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^N$) *с ребрами, параллельными координатным осям; два таких квадрата* (*куба*) *называются непересекающимися, если не пересекаются их внутренности*).

Доказательство леммы B см. в работе И. Л. Блошанского [36].

Пусть $a, b, q \in \mathbb{R}^1, q > 0$, и пусть $[a, a+q], [b, b+q] \subset \mathbb{T}^1$. Обозначим через Q квадрат

$$Q = [a, a+q] \times [b, b+q]. \tag{3.5}$$

Лемма C. *Пусть* $f(x, y) \in L_p(\mathbb{T}^2), p > 1$, *и пусть* $f(x, y) = 0$ *на* $\mathbb{T}^2 \setminus Q$, *где квадрат* Q *определен в* (3.5), *тогда*

$$\| \sup_{n,m>0} |S_{n,m}(x, y; f)| \, \|_{L_p(\mathbb{T}^2 \setminus Q)} \leq C(p)\|f\|_{L_p(Q)}, \tag{3.6}$$

где $C(p)$ — *константа, не зависящая ни от функции* f, *ни от квадрата* Q, $n, m \in \mathbb{Z}^1_0$.

Доказательство леммы C см. в работе И. Л. Блошанского [36].

Лемма 3.1. *Пусть* Ω — *произвольное открытое множество,* $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, *и пусть* $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ — *ортогональная проекция множества* Ω

---

[26] Из условий *a*) и *b*) следует, что $\widetilde{Q}_l$ есть ортогональная проекция куба Q_l на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$, причем кубы Q_l (соответствующие разным квадратам $\widetilde{Q}_l$) попарно не пересекаются.

на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M$. *Тогда для любого* $J_2 \subset M$ *существует измеримое множество* $\mathcal{A}(J_2)$ *и функция* $F_{J_2}(x) \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ *такие, что*

1. $\mathcal{A}(J_2) \supseteq \mathbb{T}^N \setminus \Omega$;

2. $F_{J_2}(x) = 0$ *при* $x \in \mathcal{A}(J_2)$;

3. *для любых* $N-2$ *последовательностей* $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $j \in M \setminus J_2$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ *при* $\nu_j \to \infty$, *справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in M\setminus J_2, \\ \alpha_j \to \infty, j \in J_2}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x; F_{J_2})| = +\infty \text{ для почти всех } x \in V[J_2], \tag{3.7}$$

где $V[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]$;

4. $$\| \sup_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2] \in \mathbb{R}_0^N} |R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x; F_{J_2})| \, \|_{L_p(\mathbb{T}^N \setminus V[J_2])} \le C_{J_2}(p), \quad 1 < p < \infty, \tag{3.8}$$

где $C_{J_2}(p)$ — *константа.*

Доказательство леммы 3.1. Представим прямоугольную частичную сумму $S_n(x; f)$ ряда Фурье функции $f(x)$ и собственный интеграл Фурье $J_\alpha(x; g)$ функции $g(x)$ следующим образом:

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{T}^N} f(u) D_n(u - x) du,$$

$$J_\alpha(x; g) = \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(u) \widetilde{D}_\alpha(u - x) du, \tag{3.9}$$

где $D_n(t) = D_{n_1}(t_1) \dots D_{n_N}(t_N)$, а $\widetilde{D}_\alpha(t) = \widetilde{D}_{\alpha_1}(t_1) \dots \widetilde{D}_{\alpha_N}(t_N)$, здесь $D_{n_j}(t_j) = \frac{\sin(n_j + \frac{1}{2})t_j}{2\sin\frac{t_j}{2}}$, $n_j \in \mathbb{Z}_0^1$, — ядро Дирихле, а $\widetilde{D}_{\alpha_j}(t_j) = \frac{\sin \alpha_j t_j}{t_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_0^1$, — упрощенное ядро Дирихле.

Путь Ω — произвольное открытое множество, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$. Фиксируем произвольное $J_2 = \{s, t\} \subset M$, $1 \le s < t \le N$, и рассмотрим $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ — ортогональную проекцию множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$. В силу леммы B существует набор квадратов $\mathcal{P} = (\widetilde{Q}_1, \dots, \widetilde{Q}_l, \dots)$ такой, что

$$\Omega[J_2] = \bigcup_{l=1}^{\infty} \widetilde{Q}_l, \tag{3.10}$$

все $\widetilde{Q}_l$ попарно не пересекаются и для любого квадрата $\widetilde{Q}_l \in \mathcal{P}$ существует куб $Q_l \subset \Omega$ такой, что его ортогональная проекция на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$ есть квадрат $\widetilde{Q}_l$, т.е. $\mathrm{diam}(Q_l) = \sqrt{\frac{N}{2}}\mathrm{diam}(\widetilde{Q}_l)$ и $Q_l \subset \widetilde{Q}_l \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]$.

Учитывая (3.10), можем записать:

$$V[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2] = \bigcup_{l=1}^{\infty} (\widetilde{Q}_l \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]) = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l. \tag{3.11}$$

Так как под квадратом $\widetilde{Q}_l$ понимается замкнутый квадрат в $\mathbb{R}^2$, то под множеством B_l мы можем понимать замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^N$. Далее, т.к. квадраты $\widetilde{Q}_l$ попарно не пересекаются (т.е. не пересекаются их внутренности) (см. лемму B), то попарно не пересекаются и параллелепипеды B_l.

Определим следующие две функции $F(x) = F_{J_2}(x)$ и $\widetilde{F}(x) = \widetilde{F}_{J_2}(x)$:

$$F(x) = \sum_{\upsilon=1}^{\infty} c_\upsilon f_\upsilon(x), \tag{3.12}$$

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{\upsilon=1}^{\infty} f_\upsilon(x). \tag{3.13}$$

Коэффициенты $c_\upsilon, \upsilon = 1, 2, \dots$, в (3.12) выбраны так, чтобы сходился ряд

$$\left\{ \sum_{\upsilon=1}^{\infty} |c_\upsilon|^{\frac{p}{p-1}} \right\}^{p-1} < c_0(p) = \mathrm{const}, \quad p > 1. \tag{3.14}$$

В свою очередь функции $f_\upsilon(x)$ в (3.12), (3.13) определим следующим образом:

$$f_\upsilon(x) = g_\upsilon(x_s, x_t) \cdot \prod_{j \in M \setminus J_2} \varphi_j^{(\upsilon)}(x_j), \quad s, t \in J_2, \;\; \upsilon = 1, 2, \dots, \tag{3.15}$$

где функции $\varphi_j^{(\upsilon)}(x_j)$, $j \in M \setminus J_2$, — ненулевые на $\mathbb{T}^1$ функции такие, что $\varphi_j^{(\upsilon)}(x_j) \in \mathbb{C}([-\pi,\pi])$, $|\varphi_j^{(\upsilon)}(x_j)| \le 1$ и

$$\varphi_j^{(\upsilon)}(x_j) = 0 \text{ вне } pr_{(j)}\{Q_\upsilon\},^{27} \quad j \in M \setminus J_2. \tag{3.16}$$

Функции g_υ, $\upsilon = 1,2,\dots$, в (3.15) выберем так. Пусть функция $g(x_s,x_t) \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^2)$ является функцией Ч. Феффермана [16], т.е. функцией для которой справедливо равенство:

$$\overline{\lim_{n_s,n_t\to\infty}} |S_{n_s,n_t}(x_s,x_t;g)| = +\infty \text{ п.в. на } \mathbb{T}^2, \tag{3.17}$$

тогда функцию $g_\upsilon = g_\upsilon(x_s,x_t), s,t \in J_2$ определим следующим образом:

$$g_\upsilon(x_s,x_t) = \begin{cases} g(x_s,x_t) \text{ при } (x_s,x_t) \in \widetilde{Q}_\upsilon, \\ 0 \text{ вне } \widetilde{Q}_\upsilon, \quad \upsilon = 1,2,\dots\ . \end{cases} \tag{3.18}$$

Таким образом определенные функции $F(x)$ и $\widetilde{F}(x) \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$.

Рассмотрим функции f_υ из (3.15). В силу (3.15), (3.16) и (3.18)

$$f_\upsilon(x) = 0 \text{ вне } Q_\upsilon. \tag{3.19}$$

Положим

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(J_2) = \bigcup_{\upsilon=1}^{\infty} Q_\upsilon. \tag{3.20}$$

В силу леммы В, $Q_\upsilon \subset \Omega, \upsilon = 1,2,\dots$, следовательно, $\mathcal{L} \subseteq \Omega$. В таком случае из (3.12), (3.13), (3.19) и (3.20) получаем, что

$$F(x) = 0 \text{ при } x \in \mathcal{A}(J_2) = \mathbb{T}^N \setminus \mathcal{L} \supseteq \mathbb{T}^N \setminus \Omega, \tag{3.21}$$

а также

$$\widetilde{F}(x) = 0 \text{ при } x \in \mathcal{A}(J_2). \tag{3.22}$$

Таким образом, пункты 1 и 2 леммы доказаны. Докажем пункт 3 леммы, т.е. оценку (3.7).

[27] Куб Q_υ — это куб, принадлежащий B_υ и принадлежащий Ω, такой, что $pr_{(J_2)}\{Q_\upsilon\} = \widetilde{Q}_\upsilon$.

Определим функции $\widetilde{g}_\upsilon(x_s,x_t), \widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)}(x_j), \widetilde{f}_\upsilon(x)$ и $G(x)=G_{J_2}(x)$:

$$\widetilde{g}_\upsilon(x_s,x_t)=g_\upsilon(x_s,x_t) \text{ при } (x_s,x_t)\in\mathbb{T}^2 \text{ и } \widetilde{g}_\upsilon(x_s,x_t)=0 \text{ вне } \mathbb{T}^2,$$

$$s,t\in J_2, \quad \upsilon=1,2,\ldots,$$

$$\widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)}(x_j)=\varphi_j^{(\upsilon)}(x_j) \text{ при } x_j\in\mathbb{T}^1 \text{ и } \widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)}(x_j)=0 \text{ вне } \mathbb{T}^1,$$

$$j\in M\setminus J_2, \quad \upsilon=1,2,\ldots,$$

$$\widetilde{f}_\upsilon(x)=\widetilde{g}_\upsilon(x_s,x_t)\cdot\prod_{j\in M\setminus J_2}\widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)}(x_j) \text{ при } x\in\mathbb{T}^N \text{ и } \widetilde{f}_\upsilon(x)=0 \text{ вне } \mathbb{T}^N,$$

$$s,t\in J_2, \quad \upsilon=1,2,\ldots,$$

$$G(x)=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}c_\upsilon\widetilde{f}_\upsilon(x) \text{ при } x\in\mathbb{T}^N \text{ и } G(x)=0 \text{ вне } \mathbb{T}^N, \ \upsilon=1,2,\ldots. \quad (3.23)$$

Далее рассмотрим разность $R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;F)$. Учитывая определение функций $F(x)$ и $G(x)$, имеем:

$$R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;F)=S_{n^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;F)-J_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;G)=$$

$$=\frac{1}{\pi^N}\int\limits_{\mathbb{T}^N}F(u)D_{n^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(u-x)du-\frac{1}{\pi^N}\int\limits_{\mathbb{T}^N}G(u)\widetilde{D}_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(u-x)du=$$

$$=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}c_\upsilon\frac{1}{\pi^N}\int\limits_{\mathbb{T}^N}f_\upsilon(u)D_{n^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(u-x)du-$$

$$-\sum_{\upsilon=1}^{\infty}c_\upsilon\frac{1}{\pi^N}\int\limits_{\mathbb{T}^N}\widetilde{f}_\upsilon(u)\widetilde{D}_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(u-x)du=$$

$$=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}c_\upsilon\cdot\Big[S_{n^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;f_\upsilon)-J_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;\widetilde{f}_\upsilon)\Big]=$$

$$=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}c_\upsilon\cdot R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;f_\upsilon). \quad (3.24)$$

Рассмотрим $R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;f_\upsilon)$, $\upsilon=1,2,\ldots$. В силу (3.15) имеем:

$$R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;f_\upsilon)=S_{n_s,n_t}(x_s,x_t;g_\upsilon)\cdot\prod_{j\in M\setminus J_2}S_{n_j^{(\nu_j)}}(x_j;\varphi_j^{(\upsilon)})-$$

$$-J_{\alpha_s,\alpha_t}(x_s,x_t;\widetilde{g}_\upsilon)\cdot\prod_{j\in M\setminus J_2}J_{\alpha_j^{(\nu_j)}}(x_j;\widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)}),\ \ s,t\in J_2,\ \ \upsilon=1,2,\dots\ . \tag{3.25}$$

В свою очередь, обозначив разность

$$R_{\alpha_s,\alpha_t}(x_s,x_t;g_\upsilon)=S_{n_s,n_t}(x_s,x_t;g_\upsilon)-J_{\alpha_s,\alpha_t}(x_s,x_t;\widetilde{g}_\upsilon),\ \ s,t\in J_2,$$

можем расписать разность (3.25) следующим образом

$$R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;f_\upsilon)=$$

$$=S_{n_s,n_t}(x_s,x_t;g_\upsilon)\cdot\left[\prod_{j\in M\setminus J_2}S_{n_j^{(\nu_j)}}(x_j;\varphi_j^{(\upsilon)})-\prod_{j\in M\setminus J_2}J_{\alpha_j^{(\nu_j)}}(x_j;\widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)})\right]+$$

$$+R_{\alpha_s,\alpha_t}(x_s,x_t;g_\upsilon)\cdot\prod_{j\in M\setminus J_2}J_{\alpha_j^{(\nu_j)}}(x_j;\widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)}).$$

В силу выбора функции g справедлива оценка (3.17), и, следовательно, получаем для любого $\upsilon=1,2,\dots$:

$$\overline{\lim_{n_s,n_t\to\infty}}|S_{n_s,n_t}(x_s,x_t;g_\upsilon)|=+\infty\ \text{ для п.в. }(x_s,x_t)\in\widetilde{Q}_\upsilon, \tag{3.26}$$

$$\lim_{n_s,n_t\to\infty}S_{n_s,n_t}(x_s,x_t;g_\upsilon)=0\ \text{ для п.в. }(x_s,x_t)\in\mathbb{T}^2\setminus\widetilde{Q}_\upsilon. \tag{3.27}$$

Из леммы С (оценка (3.6)) мы получаем также мажорантные оценки

$$\|\sup_{n_s,n_t>0}|S_{n_s,n_t}(x_s,x_t;g_\upsilon)|\,\|_{L_p(\mathbb{T}^2\setminus\widetilde{Q}_\upsilon)}\le C(p)\|g_\upsilon\|_{L_p(\widetilde{Q}_\upsilon)},$$

$$\|\sup_{\alpha_s,\alpha_t>0}|R_{\alpha_s,\alpha_t}(x_s,x_t;g_\upsilon)|\,\|_{L_p(\mathbb{T}^2\setminus\widetilde{Q}_\upsilon)}\le C(p)\|g_\upsilon\|_{L_p(\widetilde{Q}_\upsilon)},$$

$$1<p<\infty, \tag{3.28}$$

так как $g_\upsilon\in L_\infty(\mathbb{T}^2)$ и $g_\upsilon(x_s,x_t)=0$ вне квадрата $\widetilde{Q}_\upsilon$.

Далее, поскольку все функции $\varphi_j^{(\upsilon)}$ ненулевые, то для бесконечного числа номеров $\nu_j=\nu_j(x_j)$, $j\in M\setminus J_2$, $\upsilon=1,2,\dots$,

$$\prod_{j\in M\setminus J_2}S_{n_j^{(\nu_j)}}(x_j;\varphi_j^{(\upsilon)})-\prod_{j\in M\setminus J_2}J_{\alpha_j^{(\nu_j)}}(x_j;\widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)})\neq 0 \tag{3.29}$$

(см. доказательство теоремы I.VI).

С другой стороны, т.к. $\varphi_j^{(\upsilon)} \in \mathbb{C}([-\pi,\pi])$, то в силу неравенств Ханта (см. [22] и [23, оценка (2.1)]) имеем $2N-4$ неравенства для мажорант частичных сумм функций $\varphi_j^{(\upsilon)}$ и для мажорант собственных интегралов функций $\widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)}$:

$$\| \sup_{\nu_j>0} |S_{n_j^{(\nu_j)}}(x_j;\varphi_j^{(\upsilon)})| \|_{L_p(\mathbb{T}^1)} \le C(p)\|\varphi_j^{(\upsilon)}\|_{L_p(\mathbb{T}^1)},$$

$$\| \sup_{\nu_j>0} |J_{\alpha_j^{(\nu_j)}}(x_j;\widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)})| \|_{L_p(\mathbb{T}^1)} \le C(p)\|\widetilde{\varphi}_j^{(\upsilon)}\|_{L_p(\mathbb{R}^1)},$$

$$1<p<\infty,\ \ j \in M\setminus J_2,\ \ \upsilon = 1,2,\ldots\ . \tag{3.30}$$

В таком случае, из (3.11), (3.25) - (3.30) мы получаем, что если α_s и α_t $(s,t \in J_2)$ растут достаточно быстро, то разности $R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;f_\upsilon)$ неограничены (п.в. на $B_\upsilon = \widetilde{Q}_\upsilon \times \mathbb{T}[M\setminus J_2]$) при $\alpha_s,\alpha_t\to\infty$ и любых (стремящихся к бесконечности) последовательностей $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j=1,\ldots,N$, $j\ne s,t$ ($\alpha_j^{(\nu_j)}\to\infty$ при $\nu_j\to\infty$), т.е. (учитывая обозначения J_2 и $M\setminus J_2$) имеем

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in M\setminus J_2,\\ \alpha_j\to\infty, j\in J_2}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;f_\upsilon)| = +\infty$$

$$\text{для п.в. } x\in B_\upsilon,\ \ \upsilon=1,2,\ldots\ . \tag{3.31}$$

С другой стороны, условия (3.25), (3.27) позволяют сделать вывод, что

$$\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in M\setminus J_2,\\ \alpha_j\to\infty, j\in J_2}} R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;f_\upsilon) = 0 \text{ для п.в. } x\in\mathbb{T}^N\setminus B_\upsilon, \quad \upsilon=1,2,\ldots\ .$$

Оценки (3.15), (3.16), (3.25), (3.28) и (3.30), а также неравенство Гёльдера для сумм, позволяют нам получить следующую мажорантную оценку: для любого υ, $\upsilon=1,2,\ldots,$

$$\Big\| \sup_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]\in\mathbb{R}_0^N} |R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x;f_\upsilon)| \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^N\setminus B_\upsilon)} \le C(p)\|f_\upsilon\|_{L_p(Q_\upsilon)},$$

$$1<p<\infty, \tag{3.32}$$

где константа $C(p)$ не зависит от индекса υ.

Далее рассмотрим множество $V[J_2]$ (3.11), т.е. $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} B_l$. Фиксируем произвольное число υ $(\upsilon = 1, 2, \dots)$ и рассмотрим параллелепипед $B_\upsilon \subset \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} B_l$.

Можем записать, учитывая (3.12):

$$R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x; F) =$$

$$= c_\upsilon R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x; f_\upsilon) + R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}\Bigg(x; \sum_{\substack{l=1\\ l\neq\upsilon}}^{\infty} c_l f_l\Bigg). \tag{3.33}$$

Используя неравенство Гёльдера для сумм, а также оценки (3.13), (3.14), (3.20), (3.22), (3.24) и (3.32), мы можем показать, что для любого υ, $\upsilon = 1, 2, \dots,$

$$\Bigg\| \sup_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]\in\mathbb{R}_0^N} \Bigg| R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}\Bigg(x; \sum_{\substack{l=1\\ l\neq\upsilon}}^{\infty} c_l f_l\Bigg)\Bigg| \Bigg\|_{L_p(B_\upsilon)} \leq C(p)\|\widetilde{F}\|_{L_p(\mathbb{T}^N)},$$

$$1 < p < \infty, \tag{3.34}$$

где константа $C(p)$ не зависит от индекса υ.

Обозначим

$$\widetilde{B}_\upsilon(A) = \Bigg\{x \in B_\upsilon : \sup_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]\in\mathbb{R}_0^N} \Bigg| R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}\Bigg(x; \sum_{\substack{l=1\\ l\neq\upsilon}}^{\infty} c_l f_l\Bigg)\Bigg| > A\Bigg\}, \tag{3.35}$$

$$\widetilde{B}_\upsilon = \Bigg\{x \in B_\upsilon : \varlimsup_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in M\setminus J_2,\\ \alpha_j\to\infty, j\in J_2}} |c_\upsilon R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x; f_\upsilon)| = +\infty\Bigg\}. \tag{3.36}$$

Из оценок (3.34) и (3.31) получаем:

$$\mu\widetilde{B}_\upsilon(A) < \frac{1}{A^p}(C(p)\|\widetilde{F}\|_{L_p(\mathbb{T}^N)})^p, \quad 1 < p < \infty, \tag{3.37}$$

и

$$\mu\widetilde{B}_\upsilon = \mu B_\upsilon.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем A_0 в (3.37) так, чтобы

$$\frac{1}{A_0} \cdot C(p)\|\widetilde{F}\|_{L_p(\mathbb{T}^N)} < \varepsilon^{1/p}. \tag{3.38}$$

В таком случае из (3.37) и (3.38) получаем:

$$\mu\widetilde{B}_v(A_0) < \varepsilon.$$

Обозначим

$$B_v(\varepsilon) = \widetilde{B}_v \bigcap (B_v \setminus \widetilde{B}_v(A_0)).$$

Имеем, во-первых,

$$\mu B_v(\varepsilon) > \mu B_v - \varepsilon, \tag{3.39}$$

а во-вторых, в силу (3.35) и (3.36), для любого $x \in B_v(\varepsilon)$

$$\sup_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]\in\mathbb{R}_0^N} \left| R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}\Big(x; \sum_{\substack{l=1\\ l\neq v}}^{\infty} c_l f_l\Big)\right| < A_0 \tag{3.40}$$

и

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in M\setminus J_2,\\ \alpha_j\to\infty, j\in J_2}}} |c_v R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x; f_v)| = +\infty. \tag{3.41}$$

В таком случае получаем из (3.33), (3.39) - (3.41):

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in M\setminus J_2,\\ \alpha_j\to\infty, j\in J_2}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x; F)| = +\infty \text{ при } x \in B_v(\varepsilon)$$

и $\mu B_v(\varepsilon) > \mu B_v - \varepsilon$. В силу произвольности выбора ε мы получаем:

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in M\setminus J_2,\\ \alpha_j\to\infty, j\in J_2}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x; F)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in B_v.$$

В силу произвольности выбора v, т.е. $B_v \subset \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} B_l = V[J_2]$, последняя оценка справедлива для всех $v = 1, 2, \dots$, что и доказывает оценку (3.7), т.е. пункт 3 леммы.

Далее, неравенство Гёльдера для сумм, а также оценки (3.12) - (3.14), (3.20), (3.22), (3.24) и (3.32) позволяют нам показать, что

$$\| \sup_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]\in\mathbb{R}_0^N} |R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2]}(x; F)| \, \|_{L_p(\mathbb{T}^N\setminus \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} B_l)} \le C(p)\|\widetilde{F}\|_{L_p(\mathbb{T}^N\setminus\mathcal{A}(J_2))},$$

$1 < p < \infty$, где $C(p)$ — константа. Эта оценка, в свою очередь, доказывает пункт 4 леммы, т.е. оценку (3.8). Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Пусть Ω — произвольное открытое множество, $\Omega \subset \mathbb{T}^N, N \geq 3$, и пусть $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2], J_2 \subset M$. Фиксируем произвольное $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$. Тогда существуют измеримое множество $\mathcal{A}$ и функция $F(x) \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такие, что*

1. $\mathcal{A} \supseteq \mathbb{T}^N \setminus \Omega$; $\qquad$ (3.42)

2. $F(x) = 0$ *при* $x \in \mathcal{A}$;

3. *для любых k последовательностей вещественных чисел $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k,\\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F)| = +\infty \text{ для почти всех } x \in V, \tag{3.43}$$

где $V = \bigcup\limits_{J_2 \subset M \setminus J_k} (\Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2])$;

4. $$\| \sup_{\alpha^{(\nu)}[J_k] \in \mathbb{R}_0^N} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F)| \, \|_{L_p(\mathbb{T}^N \setminus V)} \leq C(p), \quad 1 < p < \infty, \tag{3.44}$$

где $C(p)$ — константа.

Доказательство леммы 3.2. Обозначим

$$\mathcal{A} = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} \mathcal{A}(J_2), \tag{3.45}$$

где множества $\mathcal{A}(J_2), J_2 \subset M \setminus J_k$, определены в лемме 3.1 (оценка (3.21)),

$$V = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} V[J_2] = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} (\Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]). \tag{3.46}$$

В силу пункта 1 леммы 3.1 (см. также (3.21)) имеем $\mathcal{A}(J_2) \supseteq \mathbb{T}^N \setminus \Omega$, $J_2 \subset M \setminus J_k$; в таком случае из (3.45) получаем $\mathcal{A} \supseteq \mathbb{T}^N \setminus \Omega$, т.е. оценку (3.42); пункт 1 леммы 3.2 доказан.

Положим

$$F(x) = \sum_{J_2 \subset M \setminus J_k} F_{J_2}(x), \tag{3.47}$$

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{J_2 \subset M \setminus J_k} \widetilde{F}_{J_2}(x) \tag{3.48}$$

и

$$G(x) = \sum_{J_2 \subset M \setminus J_k} G_{J_2}(x), \tag{3.49}$$

где функции F_{J_2}, $\widetilde{F}_{J_2}$ и G_{J_2} определены в лемме 3.1 (оценки (3.12), (3.13), (3.23)). В силу пункта 2 леммы 3.1 и оценки (3.22), $F_{J_2} = \widetilde{F}_{J_2} = 0$ при $x \in \mathcal{A}(J_2)$, в таком случае из (3.47) и (3.48) получаем $F(x) = \widetilde{F}(x) = 0$ при $x \in \mathcal{A}$; пункт 2 леммы 3.2 доказан.

Докажем пункт 3 леммы 3.2, т.е. оценку (3.43). Имеем, учитывая (3.47), (3.49) и оценку (3.24) из леммы 3.1:

$$R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F) = \sum_{J_2 \subset M \setminus J_k} S_{n^{(\nu)}[J_k]}(x; F_{J_2}) - \sum_{J_2 \subset M \setminus J_k} J_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; G_{J_2}) =$$

$$= \sum_{J_2 \subset M \setminus J_k} \sum_{\upsilon=1}^{\infty} c_\upsilon R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f_\upsilon^{(J_2)}), \tag{3.50}$$

где функции $f_\upsilon = f_\upsilon^{(J_2)}$ определены в лемме 3.1, оценка (3.15). В силу пункта 3 леммы 3.1, т.е. оценки (3.7), имеем:

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F_{J_2})| = +\infty$$

$$\text{для п.в. } x \in V[J_2], \;\; J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{3.51}$$

в силу оценки (3.31)

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f_\upsilon^{(J_2)})| = +\infty$$

$$\text{для п.в. } x \in B_\upsilon^{(J_2)}, \;\; \upsilon = 1, 2, \ldots, \tag{3.52}$$

где множества $B_\upsilon^{(J_2)} = B_\upsilon$ определены в лемме 3.1, оценка (3.11), т.е.

$$V[J_2] = \bigcup_{\upsilon=1}^{\infty} B_\upsilon^{(J_2)}.$$

Обозначим, учитывая (3.11) и (3.46):

$$V' = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} V'[J_2] = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} \bigcup_{\upsilon=1}^{\infty} \widetilde{B}_\upsilon^{(J_2)}, \tag{3.53}$$

где

$$V'[J_2] = \{x \in V[J_2] : \overline{\lim_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F_{J_2})| = +\infty\} \tag{3.54}$$

и

$$\widetilde{B}_\upsilon^{(J_2)} = \{x \in B_\upsilon^{(J_2)} : \overline{\lim_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, M \setminus J_k}}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f_\upsilon^{(J_2)})| = +\infty\}. \tag{3.55}$$

Учитывая (3.46) и (3.50) - (3.55), имеем:

$$\mu V = \mu V'. \tag{3.56}$$

Обозначим

$$\mathcal{R}(J_2) = \mathbb{T}^N \setminus V[J_2], \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{3.57}$$

и

$$\mathcal{R}_A(J_2) = \{x \in \mathcal{R}(J_2) : \sup_{\alpha^{(\nu)}[J_k] \in \mathbb{R}_0^N} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F_{J_2})| > A\}, \quad A > 0. \tag{3.58}$$

В силу пункта 4 леммы 3.1 имеем:

$$\mu \mathcal{R}_A(J_2) < \left(\frac{1}{A} \cdot C_{J_2}(p)\right)^p, \quad 1 < p < \infty, \tag{3.59}$$

где $C_{J_2}(p)$ — константа.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем в (3.59) A_0 так, чтобы

$$\mu \mathcal{R}_{A_0}(J_2) < \frac{\varepsilon}{2C_{N-k}^2}, \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{3.60}$$

где $C_{N-k}^2 = \frac{(N-k)(N-k-1)}{2}$. Положим

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} \mathcal{R}_{A_0}(J_2); \tag{3.61}$$

в силу (3.60) имеем:

$$\mu\mathcal{R}_\varepsilon < \varepsilon/2. \tag{3.62}$$

Рассмотрим $R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F_{J_2})$. Учитывая разложение (3.33) и оценку (3.50), имеем для любого $\upsilon = 1, 2, \dots$:

$$R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F_{J_2}) = c_\upsilon R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; f_\upsilon^{(J_2)}) + R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}\Bigg(x; \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq\upsilon}}^{\infty} c_m f_m^{(J_2)}\Bigg). \tag{3.63}$$

В то же время для мажоранты последней разности в (3.63) справедлива оценка (см. лемму 3.1, оценка (3.34)):

$$\Bigg\| \sup_{\alpha^{(\nu)}[J_k]\in\mathbb{R}_0^N} \Bigg| R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}\Bigg(x; \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq\upsilon}}^{\infty} c_m f_m^{(J_2)}\Bigg)\Bigg| \Bigg\|_{L_p(B_\upsilon^{(J_2)})} \le$$

$$\le C(p)\|\widetilde{F}_{J_2}\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}. \tag{3.64}$$

Обозначим

$$B_\upsilon^{(J_2)}(A) = \Bigg\{x \in B_\upsilon^{(J_2)} : \sup_{\alpha^{(\nu)}[J_k]\in\mathbb{R}_0^N} \Bigg| R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}\Bigg(x; \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq\upsilon}}^{\infty} c_m f_m^{(J_2)}\Bigg)\Bigg| > A\Bigg\},$$

$$A > 0. \tag{3.65}$$

В таком случае, учитывая оценку (3.64), получаем, что для данного $\varepsilon > 0$ существует $A_1 = A_1(\varepsilon, \upsilon)$ такое, что

$$\mu B_\upsilon^{(J_2)}(A_1) < \frac{\varepsilon}{2C_{N-k}^2 \cdot 2^\upsilon}\ , \quad \upsilon = 1, 2, \dots\ . \tag{3.66}$$

Положим

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \bigcup_{J_2\subset M\setminus J_k} \bigcup_{\upsilon=1}^{\infty} B_\upsilon^{(J_2)}(A_1(\varepsilon, \upsilon)), \tag{3.67}$$

в силу (3.66) имеем:

$$\mu\mathcal{B}_\varepsilon < \varepsilon/2. \tag{3.68}$$

И, наконец, положим

$$V'_\varepsilon = V' \setminus (\mathcal{R}_\varepsilon \bigcup \mathcal{B}_\varepsilon); \tag{3.69}$$

учитывая (3.62) и (3.68), имеем:

$$\mu V'_{\varepsilon} > \mu V' - \varepsilon.$$

Докажем, что для любого $x \in V'_{\varepsilon}$

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)| = +\infty. \tag{3.70}$$

Для этого нам необходимо ввести следующее множество:

$$\mathfrak{R} = \{J_2 : J_2 \subset M \setminus J_k\}. \tag{3.71}$$

Рассмотрим произвольное $x^0 \in V'_{\varepsilon}$. В силу (3.69) $x^0 \in V'$, в таком случае, с учетом (3.53) и (3.71), это означает, что существует номер $l, 1 \le l \le C^2_{N-k}$, такой, что

$$x^0 \in V'[J_2^i], \quad J_2^i \in \mathfrak{R}, \;\; i = 1, \ldots, l. \tag{3.72}$$

С другой стороны, опять-таки в силу (3.69), $x^0 \notin \mathcal{R}_{\varepsilon}\bigcup\mathcal{B}_{\varepsilon}$, т.е. в силу (3.61)

$$x^0 \notin \mathcal{R}_{A_0}(J_2), \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{3.73}$$

и в силу (3.67)

$$x^0 \notin B_{\upsilon}^{(J_2)}(A_1(\varepsilon,\upsilon)), \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \;\; \upsilon = 1, 2 \ldots \;\; . \tag{3.74}$$

Рассмотрим два случая: $l = 1$ и $l > 1$. Пусть $l = 1$; это означает, в силу (3.72), что существует такое J_2^1: $J_2^1 \in \mathfrak{R}$, что

$$x^0 \in V'[J_2^1] \tag{3.75}$$

и

$$x^0 \notin V' \setminus V'[J_2^1], \tag{3.76}$$

причем, в силу (3.73), $x^0 \notin \mathcal{R}_{A_0}(J_2), J_2 \subset M \setminus J_k$. В таком случае, в силу (3.75), (3.51) и (3.73), имеем:

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0;F_{J_2^1})| = +\infty. \tag{3.77}$$

С другой стороны, в силу (3.76), (3.53), (3.57) и (3.71)

$$x^0 \in \mathbb{T}^N \setminus V[J_2] = \mathcal{R}(J_2), \quad J_2 \in \mathfrak{R} \setminus J_2^1,$$

и, наконец, в силу (3.73)

$$x^0 \in \mathcal{R}(J_2) \setminus \mathcal{R}_{A_0}(J_2), \quad J_2 \in \mathfrak{R} \setminus J_2^1. \tag{3.78}$$

В таком случае, учитывая определения множеств $\mathcal{R}(J_2)$ (3.57) и $\mathcal{R}_A(J_2)$ (3.58), мы получаем, что

$$\sup_{\alpha^{(\nu)}[J_k] \in \mathbb{R}_0^N} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F_{J_2})| < A_0, \quad J_2 \in \mathfrak{R} \setminus J_2^1. \tag{3.79}$$

Таким образом, учитывая (3.69), (3.77) - (3.79) и (3.47), мы получаем, что в случае $l = 1$

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F)| = +\infty, \text{ если } x^0 \in V'_\varepsilon.$$

Рассмотрим второй случай, т.е. $l > 1$ (не ограничивая общности, можем считать, что $l < C_{N-k}^2$). Это означает, что

$$x^0 \in V'[J_2^i], \quad J_2^i \in \mathfrak{R}, \ i = 1, \ldots, l, \tag{3.80}$$

и

$$x^0 \notin V'[J_2^i], \quad J_2^i \in \mathfrak{R}, \ i = l+1, \ldots, C_{N-k}^2, \tag{3.81}$$

а в силу (3.73) и (3.74) $x^0 \notin \mathcal{R}_{A_0}(J_2)$, $x^0 \notin B_\upsilon^{(J_2)}(A_1)$, $J_2 \subset M \setminus J_k$. В таком случае, в силу (3.80), (3.51) и (3.54)

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F_{J_2^i})| = +\infty, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{3.82}$$

С другой стороны, в силу (3.81)

$$x^0 \in \mathbb{T}^N \setminus V[J_2^i] = \mathcal{R}(J_2^i), \quad i = l+1, \ldots, C_{N-k}^2,$$

а учитывая, что $x^0 \notin \mathcal{R}_{A_0}(J_2)$, $J_2 \subset M \setminus J_k$, имеем

$$x^0 \in \mathcal{R}(J_2^i) \setminus \mathcal{R}_{A_0}(J_2^i), \quad i = l+1, \ldots, C_{N-k}^2.$$

В таком случае, учитывая (3.57) и (3.58) (как и выше), мы получаем

$$\sup_{\alpha^{(\nu)}[J_k] \in \mathbb{R}_0^N} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F_{J_2^i})| < A_0, \quad i = l+1, \ldots, C_{N-k}^2. \tag{3.83}$$

Так как мажоранты разностей $R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F_{J_2^i})$ функций $F_{J_2^i}$, $i = l+1, \ldots, C_{N-k}^2$, ограничены (а следовательно, не влияют на расходимость $R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F)$), то остановимся и исследуем подробно разности $R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F_{J_2^i})$ функций $F_{J_2^i}$, где $i = 1, \ldots, l$.

Рассмотрим $R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F_{J_2^i})$, $i = 1, \ldots, l$. Так как в силу (3.80) $x^0 \in V\,'[J_2^i]$, $i = 1, \ldots, l$, то, учитывая (3.53), мы имеем: существует номер $\upsilon_i = \upsilon(J_2^i)$ такой, что

$$x^0 \in \widetilde{B}_{\upsilon_i}^{(J_2^i)}, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{3.84}$$

С другой стороны, учитывая (3.63), мы имеем для этого υ_i:

$$\begin{gathered} R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F_{J_2^i}) = c_{\upsilon_i} R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; f_{\upsilon_i}^{(J_2^i)}) + \\ + R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}\Bigg(x^0; \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq \upsilon_i}}^{\infty} c_m f_m^{(J_2^i)}\Bigg). \end{gathered} \tag{3.85}$$

В то же время, принимая во внимание (3.74), т.е. тот факт, что $x^0 \notin B_\upsilon^{(J_2)}(A_1)$, $J_2 \subset M \setminus J_k$, $\upsilon = 1, 2, \ldots$, мы получаем, с учетом (3.84) и (3.55), что

$$x^0 \in \widetilde{B}_{\upsilon_i}^{(J_2^i)} \setminus B_{\upsilon_i}^{(J_2^i)}(A_1) \subset B_{\upsilon_i}^{(J_2^i)} \setminus B_{\upsilon_i}^{(J_2^i)}(A_1),$$

$i = 1, \ldots, l$. Следовательно, учитывая определение множеств $B_\upsilon(A_1(\upsilon_i))$ (3.65) и оценку (3.85), имеем:

$$\sup_{\alpha^{(\nu)}[J_k] \in \mathbb{R}_0^N} \Bigg| R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}\Bigg(x^0; \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq \upsilon_i}}^{\infty} c_m f_m^{(J_2^i)}\Bigg) \Bigg| \le A_1(\upsilon(J_2^i)), \quad i = 1, \ldots, l. \tag{3.86}$$

Таким образом, учитывая оценки (3.83), (3.85), (3.86) и формулу (3.50), получаем, что если $x^0 \in V'_\varepsilon$, то

$$R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0;F) = \sum_{i=1}^{l}\{c_{\upsilon_i} R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; f_{\upsilon_i}^{(J_2^i)}) + O(A_1(\upsilon_i))\} + O(1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} c_{\upsilon_i} R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; f_{\upsilon_i}^{(J_2^i)}) + O(1), \quad \upsilon_i = \upsilon(J_2^i). \tag{3.87}$$

Далее, учитывая формулу (3.25) и тот факт, что $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0)$, распишем разность $R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0;F)$ с учетом (3.87) так:

$$R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0;F) = \sum_{i=1}^{l} c_{\upsilon_i} S_{n_{s_i},n_{t_i}}(x_{s_i}^0, x_{t_i}^0; g_{\upsilon_i}) \times$$

$$\times \Bigg[\prod_{m \in M \setminus J_2^i} S_{n_m}(x_m^0; \varphi_m^{(\upsilon_i)}) - \prod_{m \in M \setminus J_2^i} J_{\alpha_m}(x_m^0; \widetilde{\varphi}_m^{(\upsilon_i)}) \Bigg] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} c_{\upsilon_i} R_{\alpha_{s_i},\alpha_{t_i}}(x_{s_i}^0, x_{t_i}^0; g_{\upsilon_i}) \cdot \prod_{m \in M \setminus J_2^i} J_{\alpha_m}(x_m^0; \widetilde{\varphi}_m^{(\upsilon_i)}) +$$

$$+ O(1), \quad s_i, t_i \in J_2^i, \;\; \upsilon_i = \upsilon(J_2^i). \tag{3.88}$$

Предположим, что

$$R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0;F) = O(1) \tag{3.89}$$

(если это не так, то оценка (3.70) доказана), тогда, учитывая, что

$$\overline{\lim_{n_s,n_t \to \infty}} |S_{n_s,n_t}(x_s^0, x_t^0; g_\upsilon)| = +\infty \;\text{ при }\; (x_s^0, x_t^0) \in pr_{(J_2)}\{\widetilde{B}_\upsilon^{(J_2)}\}, \quad s,t \in J_2,$$

а

$$\prod_{m \in M \setminus J_2^i} S_{n_m}(x_m^0; \varphi_m^{(\upsilon_i)}) - \prod_{m \in M \setminus J_2^i} J_{\alpha_m}(x_m^0; \widetilde{\varphi}_m^{(\upsilon_i)}) \neq 0$$

для бесконечного числа номеров $\alpha_m = \alpha_m(x_m^0)$ (см. лемму 3.1, оценки (3.11), (3.16) - (3.18), (3.25), (3.26) и (3.30)), мы можем нарушить условие (3.89) методом "варьирования переменных" $\alpha_j, j \in M \setminus J_k$ (как, например, в работе [15]), т.е. устремляя достаточно быстро к бесконечности в (3.88) только одну из пар индексов $(n_{s_i}, n_{t_i}), s_i, t_i \in J_2^i, i = 1, \dots, l$ (в таком случае $R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F)$ неограниченно расходится в силу неограниченной расходимости $S_{n_{s_i}, n_{t_i}}(x^0; g_{v_i})$). Таким образом, и в случае $l > 1$ (см. оценки (3.80) - (3.88))

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x^0; F)| = +\infty, \text{ если } x^0 \in V'_\varepsilon.$$

В таком случае, в силу произвольности выбора точки $x^0 \in V'_\varepsilon$ (как в случае $l = 1$, так и в случае $l > 1$) мы получаем, что при $x \in V'_\varepsilon$

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F)| = +\infty. \tag{3.90}$$

С другой стороны, в силу произвольности выбора ε в множествах $\mathcal{R}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon$, а следовательно, и в V'_ε, а также учитывая оценку (3.56), мы получаем, что оценка (3.90) справедлива для п.в. $x \in V$. Таким образом, пункт 3 леммы 3.4 доказан.

Справедливость пункта 4 леммы 3.2, т.е. оценки (3.44), следует из оценки (3.8) леммы 3.1, а также формул (3.46) - (3.48). Лемма 3.2 доказана.

§ 3.2. Критерий справедливости равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье, "прямоугольные частичные суммы" которых рассматриваются по некоторым подпоследовательностям

Доказательство теоремы III.I. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое подмножество $\mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ — N-мерная мера Лебега), и пусть $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$.

Пусть для некоторого J_k, $1 \leq k \leq N-2$, множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$. Это означает, что существует множество $W(J_k)$ вида (3.1) такое, что $\mu(W(J_k) \setminus \mathfrak{A}) = 0$. Так как $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, то $f(x) = 0$ на $W(J_k)$ и, следовательно (см. результат теоремы II.I), первая часть теоремы III.I доказана.

Докажем теперь третью часть теоремы, после чего покажем, как из 1-ой и 3-ей частей получить 2-ю часть теоремы.

Пусть теперь на множество $\mathfrak{A}$ наложены дополнительные условия (3.3) и (3.4), т.е.

$$\mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{int\mathfrak{B}}) = 0,$$

$$\mu_2 Frpr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} = 0, \quad J_2 \subset M \setminus J_k,$$

где μ_2 — мера на плоскости, $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$. И пусть множество $\mathfrak{A}$, удовлетворяющее ограничениям (3.3) и (3.4), не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, т.е. для выбранного J_k ни одно множество $W(J_k)$ вида (3.1) не вписывается почти всюду в множество $\mathfrak{A}$. В таком случае $\mu\mathfrak{B} > 0$, т.к. в противном случае $\mu(\mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}) = 0$, и мы получаем, что в $\mathfrak{A}$ вписывается п.в. множество вида (3.1) (в данном случае это N-мерный куб $\mathbb{T}^N$). Из вышесказанного и условия (3.3) также получаем, что $int\mathfrak{B} \neq \emptyset$.

Рассмотрим множества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Обозначим через $B[J_2]$ ортогональную проекцию на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M \setminus J_k$, множества $int\mathfrak{B}$, т.е.

$$B[J_2] = pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\}, \quad J_2 \subset M \setminus J_k; \tag{3.91}$$

очевидно, имеем $B[J_2] \subseteq (-\pi, \pi)^2$ и $B[J_2] \neq \emptyset$. Далее, множества $B[J_2]$, как проекции открытого множества $int\mathfrak{B}$, открытые.

Рассмотрим ортогональные проекции множества $int\mathfrak{B}$ на каждую из плоскостей $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M \setminus J_k$. Могут представиться две возможности: либо

1) существует J_2^0, $J_2^0 \subset M \setminus J_k$, такое, что

$$\mu_2 B[J_2^0] = 4\pi^2, \tag{3.92}$$

либо

2) для любого $J_2, J_2 \subset M \setminus J_k$,

$$\mu_2 B[J_2] < 4\pi^2. \tag{3.93}$$

Рассмотрим первый случай. В силу леммы 3.1 существует функция $F(x) = F_{J_2^0}(x) \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такая, что $F(x) = 0$ при $x \in \mathfrak{A}$ и для любых $N-2$ последовательностей вещественных чисел $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}, j \in M \setminus J_2^0$,

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in M\setminus J_2^0,\\ \alpha_j \to \infty, j \in J_2^0}} |R_{\alpha^{(\nu)}[M\setminus J_2^0]}(x;F)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in B[J_2^0] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2^0]$$

(лемма 3.1, оценка (3.7)). Отсюда и из оценки (3.92) получаем, что

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k,\\ \alpha_j \to \infty, j \in M\setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in \mathbb{T}^N,$$

т.е. в этом случае 3-я часть теоремы доказана.

Рассмотрим второй случай. Обозначим

$$\omega_{J_2} = \mathbb{T}^2 \setminus B[J_2], \quad J_2 \subset M \setminus J_k. \tag{3.94}$$

Имеем, во-первых, ω_{J_2} — замкнутое множество, т.к. $B[J_2]$ — открытое, и, во-вторых, из (3.93):

$$\mu_2 \omega_{J_2} > 0 \text{ для любого } J_2, J_2 \subset M \setminus J_k. \tag{3.95}$$

Построим множества

$$\widetilde{W}_{J_2} = \omega_{J_2} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2], \tag{3.96}$$

$$\widetilde{W}(J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M\setminus J_k} \widetilde{W}_{J_2}; \tag{3.97}$$

и множество

$$\widetilde{W}^0(J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M\setminus J_k} \widetilde{W}_{J_2}. \tag{3.98}$$

При этом множество $\widetilde{W}(J_k)$ (3.97) отличается от множества $W(J_k)$ вида (3.1) тем, что множества $pr_{(J_2)}\widetilde{W}_{J_2}$, $J_2 \subset M \setminus J_k$, являются замкнутыми.

Из (3.91), (3.94), (3.96) и (3.97) имеем:

$$\widetilde{W}(J_k) \bigcap int\mathfrak{B} = \emptyset,$$

тем более

$$\widetilde{W}^0(J_k)\bigcap int\mathfrak{B} = \emptyset.$$

Могут быть опять две возможности: либо

$$\text{а)}\quad \mu\widetilde{W}^0(J_k) > 0, \tag{3.99}$$

либо

$$\text{б)}\quad \mu\widetilde{W}^0(J_k) = 0. \tag{3.100}$$

Рассмотрим случай а).

Предложение 3.1. *Пусть* $\mu\widetilde{W}^0(J_k) > 0$, *тогда существует множество* $W(W^0, J_k)$ *вида* (3.1) *такое, что* $W^0(J_k) \neq \emptyset$ *и*

$$1.\quad W(W^0, J_k) \subset \widetilde{W}(J_k); \tag{3.101}$$

$$2.\quad \mu(W(W^0, J_k) \setminus \mathfrak{A}) = 0, \tag{3.102}$$

т.е. множество $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $B_2^{(J_k)}(W^0)$.

Доказательство предложения 3.1. Докажем, что для любого $J_2, J_2 \subset M \setminus J_k$, существует множество W_{J_2} вида

$$W_{J_2} = \Omega_{J_2} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2], \tag{3.103}$$

где Ω_{J_2} — открытое множество в плоскости $\mathbb{R}[J_2]$ такое, что, во-первых, $\Omega_{J_2} \subset \omega_{J_2}$, $J_2 \subset M \setminus J_k$, т.е. в силу (3.96) и (3.103)

$$W_{J_2} \subset \widetilde{W}_{J_2}, \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{3.104}$$

во-вторых,

$$\mu(\widetilde{W}_{J_2} \setminus W_{J_2}) = 0, \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{3.105}$$

и, в третьих,

$$\mu(W_{J_2} \setminus \mathfrak{A}) = 0, \quad J_2 \subset M \setminus J_k. \tag{3.106}$$

Отсюда и будет следовать (3.101) и (3.102) (причем, в силу (3.105) и условия $\mu\widetilde{W}^0(J_k) > 0,\ \ W^0(J_k) \neq \emptyset$).

Фиксируем произвольное $J_2, J_2 \subset M \setminus J_k$, и рассмотрим ортогональные проекции на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$ множеств $\overline{int\mathfrak{B}}$ и $int\mathfrak{B}$ (т.е. $\overline{B}[J_2]$ и $B[J_2]$).

Имеем, с одной стороны, в силу обозначений (3.91):

$$\overline{B}[J_2] = \overline{pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\}} =$$

$$= Fr\, pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} \bigcup int\, pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} =$$

$$= Fr\, pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} \bigcup B[J_2]. \tag{3.107}$$

Из предположения теоремы, т.е. из условия (3.4), учитывая (3.107), получаем:

$$\mu_2\overline{B}[J_2] = \mu_2 B[J_2].$$

В таком случае из условия (3.93) имеем:

$$\mu_2\overline{B}[J_2] < 4\pi^2. \tag{3.108}$$

С другой стороны, из равенства (3.4) и оценки (3.108) мы получаем, что

$$\mu_2\, int\, \omega_{J_2} = \mu_2(\,(-\pi,\pi)^2 \setminus \overline{B}[J_2]) = \mu_2\omega_{J_2} > 0. \tag{3.109}$$

Обозначим

$$W_{J_2} = int\, \omega_{J_2} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2], \tag{3.110}$$

следовательно, в (3.103) $\Omega_{J_2} = int\, \omega_{J_2}$. В таком случае мы имеем $\Omega_{J_2} \subset \omega_{J_2}, W_{J_2} \subset \widetilde{W}_{J_2}$, причем, в силу (3.109)

$$\mu_2(\widetilde{W}_{J_2} \setminus W_{J_2}) = 0.$$

Таким образом вложение (3.104) и оценка (3.105) доказаны. Докажем оценку (3.106).

В силу определения множеств W_{J_2} (3.110) имеем:

$$W_{J_2} \bigcap (\overline{B}[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]) = \emptyset.$$

С другой стороны, в силу того, что $int\mathfrak{B} \subseteq pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]$, имеем:

$$\overline{int\mathfrak{B}} \subseteq \overline{pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\}} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2] = \overline{B}[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2],$$

следовательно, получаем:

$$W_{J_2} \bigcap \overline{int\mathfrak{B}} = \emptyset. \tag{3.111}$$

Рассмотрим разность $W_{J_2} \setminus \mathfrak{A}$. Имеем:

$$W_{J_2} \setminus \mathfrak{A} = W_{J_2} \bigcap \mathfrak{B} \subseteq W_{J_2} \bigcap (\overline{int\mathfrak{B}} \bigcup \mathfrak{B}'), \tag{3.112}$$

где

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \setminus \overline{int\mathfrak{B}}, \tag{3.113}$$

в частности, если $\mathfrak{B} \subseteq \overline{int\mathfrak{B}}$, то $\mathfrak{B}' = \emptyset$. Из оценки (3.112) получаем:

$$W_{J_2} \setminus \mathfrak{A} \subseteq (W_{J_2} \bigcap \overline{int\mathfrak{B}}) \bigcup (W_{J_2} \bigcap \mathfrak{B}').$$

В свою очередь из оценки (3.111) имеем:

$$\mu(W_{J_2} \setminus \mathfrak{A}) \leq \mu(W_{J_2} \bigcap \mathfrak{B}') \leq \mu\mathfrak{B}', \tag{3.114}$$

следовательно, учитывая предположения теоремы — оценку (3.3) и обозначения (3.113), из (3.114) получаем:

$$\mu(W_{J_2} \setminus \mathfrak{A}) = 0,$$

что и доказывает оценку (3.106).

В силу произвольности выбора J_2, $J_2 \subset M \setminus J_k$, оценки (3.104) - (3.106) для множеств W_{J_2}, определенных равенством (3.110), справедливы для любого J_2, $J_2 \subset M \setminus J_k$.

В таком случае имеем, учитывая предположение, что $\mu\widetilde{W}^0(J_k) > 0$, во-первых, в силу (3.110), (3.103) - (3.105)

$$W^0(J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W_{J_2} \neq \emptyset,$$

во-вторых, в силу (3.96), (3.97) и (3.105) справедлива оценка (3.101), т.е.

$$W(W^0, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} W_{J_2} \subset \widetilde{W},$$

и, в-третьих, в силу (3.106) $\mu(W(W^0, J_k) \setminus \mathfrak{A}) = 0$, т.е. справедлива оценка (3.101), что и доказывает предложение 3.1.

Предложение 3.1 показывает, что в силу нашего предположения о том, что множество $\mathfrak{A}$ не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, случай а) - (3.99) не может быть.

Итак, остался последний случай б), т.е. (3.100). С одной стороны, в силу (3.94), (3.96) и (3.105) справедливо равенство

$$C\widetilde{W}^0(J_k) = C(\bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} \widetilde{W}_{J_2}) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} C\widetilde{W}_{J_2} =$$

$$= \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} (B[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]), \tag{3.115}$$

где $C\widetilde{W}^0(J_k) = \mathbb{T}^N \setminus \widetilde{W}^0(J_k)$, с другой стороны, в силу условия (3.100), т.е. $\mu\widetilde{W}^0(J_k) = 0$, мы имеем равенство

$$\mu C\widetilde{W}^0(J_k) = \mu\mathbb{T}^N = (2\pi)^N. \tag{3.116}$$

В то же время, в силу леммы 3.2, существует функция $F(x) \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такая, что $F(x) = 0$ при $x \in \mathfrak{A}$ и (с учетом обозначений (3.91)) для любых k последовательностей вещественных чисел $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}$, $j \in J_k$,

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F)| = +\infty$$

$$\text{для п.в. } x \in \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} (B[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2])$$

(лемма 3.2, оценка (3.43)). Отсюда, с учетом оценок (3.115) и (3.116) мы получаем, что

$$\varlimsup_{\substack{\upsilon_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\upsilon)}[J_k]}(x; F)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in \mathbb{T}^N,$$

и, следовательно, третья часть теоремы III.I доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть множество $\mathfrak{A}\setminus W^0(J_k)$ не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ (само множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$). Рассмотрим опять $B[J_2]$ — ортогональные проекции множества $int\mathfrak{B}$ на каждую из плоскостей $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M \setminus J_k$.

В силу того, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ (где W^0 — некоторое множество вида (3.2)), мы имеем для любого J_2, $J_2 \subset M \setminus J_k$:

$$\mu_2 B[J_2] < 4\pi^2.$$

Построим по аналогии с (3.96) - (3.98) множества $\widetilde{W}_{J_2}, \widetilde{W}(J_k)$ и $\widetilde{W}^0(J_k)$. Имеем $\mu\widetilde{W}^0(J_k) > 0$. Следовательно, справедливо предложение 3.1, т.е. существует множество $W(J_k)$ вида (3.1) такой, что $W(J_k) \subset \widetilde{W}(J_k)$ и $\mu(W(J_k) \setminus \mathfrak{A}) = 0$. Так как множество $\mathfrak{A}\setminus W^0(J_k)$ уже не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, то множество $W(J_k)$ есть множество $W(W^0, J_k)$. В таком случае, в силу оценки (3.105) (из предложения 3.1) имеем:

$$\mu(\widetilde{W}^0(J_k) \setminus W^0(J_k)) = 0. \tag{3.117}$$

Из равенства (3.115) получаем:

$$\mathbb{T}^N \setminus \widetilde{W}^0(J_k) = C\widetilde{W}^0(J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} (B[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]),$$

следовательно, в силу (3.117) и условия $W^0(J_k) \subset \widetilde{W}^0(J_k)$ имеем:

$$\mu(\mathbb{T}^N \setminus W^0(J_k)) = \mu(\mathbb{T}^N \setminus \widetilde{W}^0(J_k)) = \mu\Big(\bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} (B[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2])\Big). \tag{3.118}$$

В силу леммы 3.2 существует функция $F(x) \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такая, что $F(x) = 0$ при $x \in \mathfrak{A}$ и для любых k последовательностей вещественных чисел $\{\alpha_j^{(\nu_j)}\}, j \in J_k$,

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F)| = +\infty$$

$$\text{для п.в. } x \in \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} (B[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]).$$

Отсюда и из оценки (3.118) получаем:

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x; F)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in \mathbb{T}^N \setminus W^0(J_k),$$

что доказывает вторую часть теоремы III.I. Теорема III.I доказана.

§ 3.3. Равносходимость разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм" функций из $\Phi(L)$, где $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$

Доказательство теоремы III.II. Фиксируем произвольное k, $1 \le k \le N-2$, $N \ge 3$. Не ограничивая общности будем считать, что $J_k = \{N-k+1, \ldots, N\}$, соответственно, $M \setminus J_k = \{1, \ldots, N-k\}$.

Далее, фиксируем произвольные a, b, $-\pi < a < b < \pi$, и рассмотрим следующее множество

$$W = \bigcup_{\substack{s,t \in M \setminus J_k \\ s<t}} W_{x_s x_t}, \tag{3.119}$$

где

$$W_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-\pi, \pi)^{N-2} = \{(a,b) \times (a,b)\} \times [-\pi, \pi)^{N-2}.$$

Пусть $\{\alpha_N^{(\nu_N)}\}$ – некоторая возрастающая последовательность вещественных чисел, $\alpha_N^{(\nu_N)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_N^{(\nu_N)} \to \infty$ при $\nu_N \to \infty$, и пусть $n_N^{(\nu_N)} = [\alpha_N^{(\nu_N)}]$ при $\nu_N = 1, 2, \ldots$.

Далее, для последовательности целых чисел $\{n_N^{(\nu_N)}\}$ и для некоторой неубывающей функции $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, такой, что $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \to \infty$, существует функция $f(x_N) \in \Phi(L)(\mathbb{T}^1)$, построенная С. В. Конягиным [5], для которой

$$\varlimsup_{\nu_N \to \infty} |S_{n_N^{(\nu_N)}}(x_N; f)| = +\infty \text{ всюду на } \mathbb{T}^1. \tag{3.120}$$

Рассмотрим также 2π-периодические функции $\varphi(t) \in \mathbb{C}([-\pi,\pi])$ и $\psi(t)$ такие, что

$$\varphi(t) = 0 \text{ при } t \in (a,b) \quad \text{и} \quad \varphi(t) \neq 0 \text{ при } t \in [-\pi,\pi] \setminus (a,b), \tag{3.121}$$

$$\psi(t) \equiv 1 \text{ при } t \in \mathbb{T}^1.$$

Определим функцию $F(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_{N-k})\psi(x_{N-k+1})\ldots\psi(x_{N-1})f(x_N). \tag{3.122}$$

Таким образом определенная функция $F(x) \in \Phi(L)(\mathbb{T}^N)$. Покажем, что $F(x) = 0$ при $x \in W$. Рассмотрим произвольный "брусок" $W_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-\pi,\pi)^{N-2}$, $s,t \in M \setminus J_k$, $s < t$, из W (3.119) и докажем, что $F(x) = 0$ при $x \in W_{x_s x_t}$.

Действительно, поскольку $x \in W_{x_s x_t}$, то из (3.121) будет следовать, что $\varphi(x_s) = \varphi(x_t) = 0$. А значит в силу (3.122) эти функции "обнулят" $F(x)$ на множестве $W_{x_s x_t}$. В силу произвольности выбора "бруска" $W_{x_s x_t}$, мы доказали, что функция $F(x) = 0$ при $x \in W$, где W определено в (3.119).

Теперь определим функции $\varphi^{(0)}(x_i)$, $\psi^{(0)}(x_j)$, $f^{(0)}(x_N)$, и $G(x)$:

$$\varphi^{(0)}(x_i) = \varphi(x_i) \text{ при } x_i \in \mathbb{T}^1 \quad \text{и} \quad \varphi^{(0)}(x_i) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^1,$$

$$i = 1,\ldots,N-k,$$

$$\psi^{(0)}(x_j) = \psi(x_j) \text{ при } x_j \in \mathbb{T}^1 \quad \text{и} \quad \psi^{(0)}(x_j) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^1,$$

$$j = N-k+1,\ldots,N-1,$$

$$f^{(0)}(x_N) = f(x_N) \text{ при } x_N \in \mathbb{T}^1 \quad \text{и} \quad f^{(0)}(x_N) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^1,$$

и, наконец,

$$G(x) = F(x) \text{ при } x \in \mathbb{T}^N \quad \text{и} \quad G(x) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^N.$$

Зафиксируем некоторую $N-1$-мерную последовательность вещественных чисел $\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-k}, \alpha_{N-k+1}^{(\nu_{N-k+1})}, \ldots, \alpha_{N-1}^{(\nu_{N-1})}) \in \mathbb{R}_0^{N-1}$, каждая компонента которой является возрастающей последовательностью, $\alpha_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\alpha_j^{(\nu_j)} \to \infty$ при $\nu_j \to \infty$, $j = N-k+1, \ldots, N-1$, и пусть $\alpha^{(\nu)} = \alpha^{(\nu)}[J_k] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-k}, \alpha_{N-k+1}^{(\nu_{N-k+1})}, \ldots, \alpha_N^{(\nu_N)})$.

Далее рассмотрим разность $R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)$. Обозначая $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{T}^{N-1}$ и полагая

$$h(\widetilde{x}) = \prod_{i=1}^{N-k} \varphi(x_i) \cdot \prod_{j=N-k+1}^{N-1} \psi(x_j), \quad h^{(0)}(\widetilde{x}) = \prod_{i=1}^{N-k} \varphi^{(0)}(x_i) \cdot \prod_{j=N-k+1}^{N-1} \psi^{(0)}(x_j),$$

имеем, учитывая определение функций $F(x)$ и $G(x)$:

$$R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F) = S_{n^{(\nu)}[J_k]}(x;F) - J_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;G) =$$

$$= S_{\widetilde{n}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h) \cdot S_{n_N^{(\nu_N)}}(x_N;f) - J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h^{(0)}) \cdot J_{\alpha_N^{(\nu_N)}}(x_N;f^{(0)}), \tag{3.123}$$

где $n_s = [\alpha_s]$, $s \in M \setminus J_k$, $n_s^{(\nu_s)} = [\alpha_s^{(\nu_s)}]$, $s \in J_k$, и $\widetilde{n}^{(\nu)}[J_k] = (n_1, \ldots, n_{N-k}, n_{N-k+1}^{(\nu_{N-k+1})}, \ldots, n_{N-1}^{(\nu_{N-1})})$.

В свою очередь, обозначив

$$R_{\alpha_N^{(\nu_N)}}(x_N;f) = S_{n_N^{(\nu_N)}}(x_N;f) - J_{\alpha_N^{(\nu_N)}}(x_N;f^{(0)}), \quad x_N \in \mathbb{T}^1,$$

мы можем продолжить оценку разности (3.123) так:

$$R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F) = S_{\widetilde{n}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h) \cdot S_{n_N^{(\nu_N)}}(x_N;f) -$$

$$-J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h^{(0)}) \cdot \left[S_{n_N^{(\nu_N)}}(x_N;f) - R_{\alpha_N^{(\nu_N)}}(x_N;f) \right] =$$

$$= \left[S_{\widetilde{n}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h) - J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h^{(0)}) \right] \cdot S_{n_N^{(\nu_N)}}(x_N;f) +$$

$$+J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h^{(0)}) \cdot R_{\alpha_N^{(\nu_N)}}(x_N;f) =$$

$$= R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h) \cdot S_{n_N^{(\nu_N)}}(x_N;f) + J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x};h^{(0)}) \cdot R_{\alpha_N^{(\nu_N)}}(x_N;f) =$$

$$= I^{(1)}_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F) + I^{(2)}_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F). \tag{3.124}$$

Имеем:

$$I^{(2)}_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F) \to 0 \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^N$$

$$\text{при} \quad \nu_j \to \infty, j \in J_k, \quad \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k.$$

Действительно, на любом отрезке, целиком лежащем внутри интервала $(-\pi, \pi)$, разность $R_{\alpha_N^{(\nu_N)}}(x_N; f)$ равномерно стремится к нулю при $\nu_N \to \infty$ (см. [17, с. 362-364]), а, в силу определения функции $h^{(0)}$,

$$J_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x}; h^{(0)}) \to h^{(0)}(\widetilde{x}) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^{N-1}$$

$$\text{при} \quad \nu_j \to \infty, j \in J_k, \quad \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k.$$

Разность $R_{\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]}(\widetilde{x}; h) \neq 0$ для бесконечного числа номеров $\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k](\widetilde{x})$, причем компоненты этих номеров $\alpha_i, \alpha_s^{(\nu_s)} \to \infty$, $i = 1, \ldots, N-k$, $s = N-k+1, \ldots, N-1$ (см. доказательство теорем I.VI и II.II). В то же время, при фиксированной последовательности $\widetilde{\alpha}^{(\nu)}[J_k]$, в силу определения функции f (см. (3.120)), найдется такая подпоследовательность последовательности $\alpha^{(\nu)}[J_k]$, за счет которой

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |I^{(1)}_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)| = +\infty \text{ для п.в.} \quad x \in \mathbb{T}^N,$$

а значит, в силу равенства (3.124), будем иметь:

$$\varlimsup_{\substack{\nu_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} |R_{\alpha^{(\nu)}[J_k]}(x;F)| = +\infty \text{ для п.в.} \quad x \in \mathbb{T}^N.$$

Теорема III.II доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kolmogoroff A. N. *Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier* // Fund. Math. 1924. V. 5. P. 96-97.

[2] Littlewood J., Paley R. *Theorems on Fourier series and power series* // J. Lond. Math. Soc. 1931. V. 6. P. 230-233.

[3] Gosselin R. P. *On the divergence of Fourier series* // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9. P. 278-282.

[4] Totik V. *On the divergence of Fourier series* // Publ. math., Debrecen. 1982. V. 29. № 3-4. P. 251-264.

[5] Конягин С. В. *О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье* // Теория функций. Сборник научных трудов. Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11. № 2. С. 112-119.

[6] Antonov N. Yu. *Convergence of Fourier series* // East J. Approx. 1996. Т. 2. № 2. С. 187-196.

[7] Lie V. *On the pointwise convergence of the sequence of partial Fourier Sums along lacunary subsequences* // J. Funct. Anal. 2012. V.263. P. 3391-3411.

[8] Sjölin P. *Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series* // Arkiv Matem. 1971. V. 9. № 1. P. 65-90.

[9] Санадзе Д. К., Хеладзе Ш. В. *О сходимости и расходимости кратных рядов Фурье-Уолша* // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. 1977. Т. 55. С. 93-106.

[10] Антонов Н. Ю. *О сходимости почти всюду лакунарных последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье* // XXII Международная

конференция "Математика. Экономика. Образование". VIII международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Тезисы докладов. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ. 2014. С. 7.

[11] Kojima M. *On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series* // Sci. Repts. Kanazava Univ. 1977. V. 22. № 2. P. 163-177.

[12] Блошанский И. Л., Лифанцева О. В. *Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности* // Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 3. С. 334-347.

[13] Bloshanskii I. L., Lifantseva O. V. *Structural and Geometric Characteristics of Sets of Convergence and Divergence of Multiple Fourier Series with J_k -lacunary Sequence of Rectangular Partial Sums* // Analysis Math. 2013. V. 39. № 2. P. 93-121.

[14] Блошанская С. К., Блошанский И. Л., Лифанцева О. В. *Тригонометрические ряды Фурье и ряды Фурье–Уолша с лакунарной последовательностью частичных сумм* // Матем. заметки. 2013. Т. 93. № 2. С. 305-309.

[15] Блошанский И. Л. *О геометрии измеримых множеств в N-мерном пространстве, на которых справедлива обобщенная локализация для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p, $p > 1$* // Матем. сборник. 1983. Т. 121. № 1. С. 87-110.

[16] Fefferman C. *On the divergence of multiple Fourier series* // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 2. P. 191-195.

[17] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2. М.: Мир, 1965.

[18] Stein E. *On certain exponential sums arising in multiple Fourier series* // Ann. Math. 1961. T. 73. № 1. C. 87-109.

[19] Голубов Б. И. *Кратные ряды и интегралы Фурье* // В сб. Итоги науки и техники. Серия Матем. анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 19. С. 3-54.

[20] Алимов Ш. А., Ашуров Р. Р., Пулатов А.К. *Кратные ряды и интегралы Фурье* // В сб. Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 42. С. 7-104.

[21] Carleson L. *On convergence and growth of partial sums of Fourier series* // Acta Math. 1966. V. 116. P. 135-157.

[22] Hunt R. *On the convergence of Fourier series* // Proc. Conf. Edwardsville Ill. 1967, Southern Illinouis Univ. Press. Carbondale Ill. 1968. P. 235-255.

[23] Блошанский И. Л. *О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье* // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 153-168.

[24] Тевзадзе Н. Р. *О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом* // Сообщ. АН Груз. ССР. 1970. Т. 58. № 2. С. 277-279.

[25] Блошанский И. Л. *Равносходимость разложений в кратный ряд и интеграл Фурье при суммировании по квадратам* // Изв. АН СССР. Серия матем. 1976. Т. 40. № 3. С. 685-705.

[26] Блошанский И. Л. *Кратный интеграл и кратный ряд Фурье при суммировании по квадратам* // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. № 1. С. 39-52.

[27] Блошанский И. Л. *О сходимости и локализации кратных рядов и интегралов Фурье.* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1978.

[28] Осколков К. И. *Оценка скорости приближения непрерывной функции и ее сопряженной суммами Фурье на множестве полной меры* // Изв. АН СССР. Серия матем. 1974. Т. 38. № 6. С. 1373—1407.

[29] Бахбух М., Никишин Е. М. *О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций* // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14. № 6. С. 1189-1199.

[30] Блошанский И. Л., Иванова О. К., Рослова Т. Ю. *Обобщенная локализация и равносходимость разложений в двойной тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье функций из* $L(\log^+ L)^2$ // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 437-441.

[31] Рослова Т. Ю. *Обобщенная локализация и равносходимость в двойной ряд и интеграл Фурье.* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МПУ, 1998.

[32] Блошанский И. Л., Лифанцева О. В. *Критерий слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности* // Докл. РАН. 2008. Т. 423. № 4. С. 439-442.

[33] Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М.: Мир, 1973.

[34] Блошанский И. Л., Мацеевич Т. А. *Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье непрерывных функций с некоторым модулем непрерывности* // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. Сб. статей. М.: АФЦ, 1999. С. 37-56.

[35] Whitney H. *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets* // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 63-89.

[36] Блошанский И. Л. *Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из* L_p, $p \geq 1$ // Изв. АН СССР. Серия матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 243-282.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

[1] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *Вопросы равносходимости разложений в тройной ряд и интеграл Фурье* // XX Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". VII международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Тезисы докладов. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ. 2012. С. 9-10.

[2] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *"Почти" фундаментальность для последовательности частичных сумм кратных рядов Фурье функций из* L_p, $p > 1$ // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции Воронежской зимней математической школы. Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ. 2013. С. 28-30.

[3] Графов Д.А. *Равносходимость разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции Воронежской зимней математической школы. Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ. 2013. С. 64-65.

[4] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *О равносходимости разложений в тройной тригонометрический ряд и интеграл Фурье* // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования. Тезисы докладов четвертой Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Л. Д. Кудрявцева. - Москва: Изд-во РУДН, 2013. С. 78-79.

[5] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *Равносходимость разложений в крат-*

ный тригонометрический ряд и интеграл Фурье в случае "лакунарной последовательности частичных сумм" // Докл. РАН. 2013. Т. 450. № 3. С. 260-263.

[6] Grafov D.A., Bloshanskii I.L. *"Almost" Cauchy property for the sequence of partial sums of Fourier series of functions in $L_p, p > 1$* // Kangro-100, Methods of Analysis and Algebra International Conference dedicated to the Centennial of Professor Gunnar Kangro. Tartu, Estonia: Estonian Mathematical Society. 2013. P. 63-64.

[7] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *Критерий равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 17-ой международной Саратовской зимней школы, посвященной 150-летию В.А. Стеклова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2014. С. 40-42.

[8] Графов Д.А. *О сходимости и локализации кратных интегралов Фурье с "J_k- лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXV". Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга". 2014. С. 48-49.

[9] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *Критерий слабой обобщенной локализации для кратных интегралов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм"* // XXII Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". VIII международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Тезисы докладов. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ. 2014. С. 10-11.

[10] Grafov D.A., Bloshanskii I.L. *Equiconvergence of expansions in multiple trigonometric Fourier series and Fourier integral with "J_k-lacunary sequences of rectangular partial sums"* // Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. June 2014. V. 18. № 1. P. 69-80.

[11] Графов Д.А., Блошанский И.Л. *Равносходимость разложений в кратный ряд и интеграл Фурье, "прямоугольные частичные суммы" которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности* // Analysis Math. 2014. Т. 40. № 3. С. 175-196.

[12] Графов Д.А. *О равносходимости разложений в тройной тригонометрический ряд и интеграл Фурье непрерывных функций с некоторым модулем непрерывности* // Вестн. Моск. Ун-та, Сер.1 Мат., Мех. 2015. №1. С. 25-33.