"Утверждаю"
Проректор СПбГУ

С.П.Туник
19 мая 2015 г.

Отзыв ведущей организации

на работу Д.А. Графова

"Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье"

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа посвящена изучению равносходимости почти везде прямоугольных частичных сумм кратного ряда Фурье и их интегральных аналогов.

Проблемы, связанные со сходимостью рядов Фурье почти везде привлекали внимание таких известных математиков, как А.Н. Колмогоров, Ю. Марцинкевич, Дж. Литтлвуд, Л. Карлесон, Ч. Фефферман, Л. Жижиашвили, С.В. Конягин, П. Шелин, а также многих других. Исследования сходимости почти везде, как правило, относятся к наиболее трудным задачам гармонического анализа. Достаточно много естественных вопросов остаются открытыми, особенно в многомерном случае. Стоит отметить, что решение задачи в кратном случае далеко не всегда является распространением одномерного результата, и, более того, бывает, что двумерный результат, и даже трехмерный, не распространяется на более высокие размерности. Равносходимость кратных рядов и интегралов Фурье почти везде ранее изучалась научным руководителем диссертанта И.Л.Блошанским и другими его учениками. Диссертант внес существенный вклад в развитие этой темы.

В главе I доказано, что для функций из L_p, $p > 1$, имеет место равносходимость прямоугольных частичных сумм двойного ряда и интеграла Фурье (теорема I.I), если соответствующие прямоугольники мало отличаются друг от друга (условие (0.6)). Аналогичное утверждение устанавливается о сравнении двух последовательностей прямоугольных частичных сумм. Далее показано, что уже в трехмерном случае аналога теоремы I.I нет даже для непрерывных функций. Более того, установлено, что отсутствие равносходимости частичных сумм ряда Фурье порядка n и интеграла Фурье порядка α будет наблюдаться для любой последовательности $\alpha_3^{\nu_3}, \ldots, \alpha_N^{\nu_N}$, как только две первые компоненты α_1, α_2 остаются свободными и совпадают с соответствующими координатами вектора n. Далее исследуется вопрос о справедливости равносходимости рассматриваемых разложений в случае, когда не более одной компоненты в векторе α остаются свободными. В теореме I.IV установлено что равносходимость имеет место, если последовательности $\{n_k^{\nu_k}\}, \{\alpha_k^{\nu_k}\}$ лакунарны для всех k кроме одного k_0, а координаты векторов n и α с номером k_0 мало разнятся. В § 1.4 доказано, что даже в двумерном случае равносходимость почти везде отсутствует в классе $\Phi(L)$, $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$.

В главе II , исследуется наличие равносходимости многомерных (при $N > 2$) разложений в кратный ряд и интеграл Фурье при дополнительных условиях на функции f и g из классов L_p, $p > 1$. В качестве таких достаточных условий рассматривается равенство нулю функции f на множествах определенного вида (брускового типа), т.е. изучается своего рода принцип локализации для равносходимости. В § 2.1 описан класс "самых простых" множеств, на которых справедлива равносходимость почти везде прямоугольных частичных сумм порядка n и прямоугольных частичных интегралов порядка α для функций из L_p, $p > 1$, в предположении, что, некоторые компоненты векторов n и α являются элементами лакунарных последовательностей (так называемыми J_k-лакунарными последовательностями). Далее обсуждаются условия, при которых множество равносходимости может быть расширено до множества W, на котором функция f предполагается равной нулю. Показано, что при $N > 3$ и $k < N - 2$ найденное множество равносходимости расширить вообще нельзя.

В главе III доказан критерий наличия равносходимости почти везде разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм в классах L_p, $p > 1$, на произвольных подмножествах положительной меры, удовлетворяющих некоторым ограничениям на границу множества. Доказана теорема, которая показывает, что найденная геометрия множеств, на которых справедлива равносходимость почти везде в классах L_p, $p > 1$, не обеспечивает равносходимости для функций из классов $\Phi(L)$, $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$.

Отмечу следующие замечания.

Во введении величина $J_\alpha(x, g)$ определяется через преобразование Фурье функции g, при этом речь идет о широком классе функций, включающим такие, для которых преобразование Фурье не существует. Далее в тексте приведено корректное определение этой величины, но читатель увидит его только на стр. 29, после того, как узнает многочисленные формулировки утверждений, в которых фигурирует J_α.

Неудачно введено обозначение RS_{n+m}, поскольку эта величина зависит от каждого из векторов n и m, а не только от их суммы, тем более, что в формулировке теоремы I.II в некоторых координатах вообще отсутствует плюс.

Использовать обозначение R_α для величины $R_{\alpha,n}$ можно только в том случае, когда понятно о каком n идет речь. В формулировке теоремы I.III фигурируют только две первые координаты вектора n. Читателю следует догадаться, какая информация об остальных координатах пропущена, он может истолковать разными способами: для любых $n_3, \ldots, n_N$; для некоторой последовательности $n_3^{\nu_3}, \ldots, n_N^{\nu_N}$; для $n_k^{\nu_k} = [\alpha_k^{\nu_k}]$, для любых $n_k^{\nu_k}$, связанных с $\alpha_k^{\nu_k}$ соотношением (1.1), или как-то еще. Чтобы понять формулировку, читателю нужно разобраться в доказательстве теоремы II.III и следствия к ней. Аналогичные претензии к формулировкам теорем I.IV, II.I, II.II, III.I, III.II, где тоже фигурирует R_α, и ничего не сказано про некоторые компоненты n.

Формулировки теорем фигурируют дважды – во введении и в начале каждой главы, но отсутствуют непосредственно перед доказательством, что создает большой дискомфорт при чтении доказательств.

Указанные недостатки не умаляют научных достоинств диссертации. Работа содержит много новых интересных весьма непростых теорем, дающих хороший вклад в развитие современного гармонического анализа. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, включая 3 статьи в журналах из списка ВАК. Автореферат и публикации по диссертации отражают ее содержание.

Резюмируя сказанное, заключаю, что диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям, предъявленным к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а её автор, Графов Денис Александрович, безусловно заслуживает учёной степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв составлен профессором М.А. Скопиной и утвержден на заседании кафедры математического анализа Санкт-Петербургского государственного университета 14 мая 2015 г., протокол № 79.08/12-04-3.

Доктор физ.-мат. наук, профессор М.А.Скопина

Заведующий кафедрой
профессор, доктор физ.-мат. наук Н.А.Широков

И.о. декана математико-механического
факультета С.М.Селеджи