ОТЗЫВ

о диссертации Графова Дениса Александровича «Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

В одномерном случае вопросы сходимости рядов Фурье достаточно подробно изложены в монографиях А. Зигмунда, Г.Х. Харди и В.В. Рогозинского, Н.К. Бари, И. Стейна и Г. Вейса, П.Л. Бутцера и Р.Дж. Несселя, Р. Эдвардса и многих других, а сходимость интегралов Фурье исследовалась в монографиях Е. Титчмарша, С. Бохнера, И. Стейна и др. Для рядов и интегралов Фурье интегрируемых по Лебегу функций одной переменной справедлив принцип локализации, т.е. их сходимость в заданной точке зависит лишь от значений функции в сколь угодно малой окрестности этой точки. Кроме того, имеет место теорема равносходимости интеграла Фурье интегрируемой на вещественной оси $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ функции $g(x)$ и ряда Фурье 2π- периодической функции $f_a(x)$, совпадающей с $g(x)$ на $\left[a,a+2\pi\right)$. На отрезке $\left[\alpha,\beta\right]\subset\left(a,a+2\pi\right)$ ряд Фурье функции $f_a(x)$ и интеграл Фурье функции $g(x)$ сходятся или расходятся одновременно. Более того, разность последовательности частных сумм ряда Фурье функции $f_a(x)$ и соответствующей последовательности «частных сумм» интеграла Фурье функции $g(x)$ на отрезке $\left[\alpha,\beta\right]\subset\left(a,a+2\pi\right)$ равномерно стремится к нулю.

В N-мерном случае при $N\geq 2$ принцип локализации для рядов и интегралов Фурье не справедлив для сходимости по Прингсхейму. Не имеет места и теорема равносходимости кратных рядов и интегралов Фурье. Поэтому важной задачей является получение достаточных условий на функции многих переменных, совпадающих на кубе периодов, при которых справедлива теорема равносходимости ряда Фурье и интеграла Фурье этих функций. Для сферических средних Рисса критического порядка ряда Фурье и интеграла Фурье функций $N\geq 2$ переменных теорема равносходимости доказана в работе И. Стейна (1961 г.). Для сходимости по Прингсхейму достаточные условия на функции многих переменных, при которых справедлива теорема равносходимости ряда и интеграла Фурье, получены в работах И.Л. Блошанского. В 1975 г. он доказал теорему равносходимости почти всюду на квадрате $\left[-\pi,\pi\right]^2$ для двойного интеграла Фурье функции $g\in L^p(\mathbb{R}^2),\ p>1,$ и ряда Фурье функции $f\in L^p\left[-\pi,\pi\right]^2$, совпадающих на квадрате $\left[-\pi,\pi\right]^2$. При этом было доказано, что для $p=1$ эта теорема не справедлива. Кроме того, им же доказано, что теорема, подобная сформулированной выше, не имеет места в N-мерном случае при $N\geq 3$ в классе непрерывных функций. Более того, в 1990 г. И.Л.Блошанским были построены две суммируемые функции $f\in L\left(T^N\right)$, $T^N=\left[-\pi,\pi\right)^N$, и $g\in L\left(\mathbb{R}^N\right)$, $N\geq 2$, $g\left(x\right)=0,\ x\in\mathbb{R}^N\setminus T^N$, и $f\left(x\right)=g(x),\ x\in T^N$, такие что ряд Фурье функции f неограниченно расходится почти всюду на кубе T^N по некоторым подпоследовательностям, в то время, как интеграл Фурье функции g сходится почти всюду на T^N по тем же самым подпоследовательностям.

В данной диссертации изучаются вопросы равносходимости по Прингсхейму почти всюду на кубе T^N кратных рядов и интегралов Фурье функций $f\in L^p\left(T^N\right)$ и $g\in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ в случае $p \ge 1, N \ge 3,\ f(x) = g(x), x \in T^N$. Кроме того, для размерностей $N \ge 2$ исследуются вопросы равносходимости почти всюду рядов Фурье и интегралов Фурье на специальных подмножествах $E \subset T^N$. При этом прямоугольные частичные суммы $S_n(x, f)$, где $n = (n_1, \dots, n_N)$, ряда Фурье функции f и «частичные суммы» $J_\alpha(x, g)$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, интеграла Фурье функции g имеют «номера» $n \in \mathbb{Z}_0^N$ и $\alpha \in R_0^N$, которые связаны друг с другом специальным образом, а также некоторые их компоненты являются элементами лакунарных последовательностей.

В первой главе диссертации изучается равносходимость почти всюду разложений в кратный ряд и кратный интеграл Фурье, а также поведение разностей между двумя прямоугольными частичными суммами ряда Фурье такими, у которых компоненты номеров отличаются на константу.

В теореме I.I главы I установлена равносходимость почти всюду на T^2 ряда Фурье и интеграла Фурье функций $f \in L^p(T^2)$ и $g \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$, совпадающих на квадрате T^2, при условии, что «номера» $n = (n_1, n_2)$ частичных сумм ряда Фурье функции f и «номера $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ частичных сумм» интеграла Фурье функции g удовлетворяют условиям $|n_j - \alpha_j| \le B < +\infty,\ j = 1, 2$. Этот результат уточняет теорему И.Л. Блошанского, доказанную в 1975 г. Представляет интерес результат теоремы I.I' (эквивалентной теореме I.I) о том, что разность между двумя прямоугольными частичными суммами двойного ряда Фурье стремится к нулю почти всюду на T^2, когда номера обеих частичных сумм стремятся к бесконечности при условии, что разности между соответствующими компонентами «номеров» этих частичных сумм ограничены. Это свойство было названо «почти фундаментальностью» последовательности частичных сумм двойного ряда Фурье. Установлено (теорема I.III), что для размерностей $N \ge 3$ результат, подобный теореме I.I, теряет силу даже для функций, непрерывных на T^N.

Кроме того, в этой главе для размерностей $N \ge 3$ доказана теорема равносходимости почти всюду на кубе T^N ряда Фурье функции $f \in L^p(T^N)$, $p > 1$, и интеграла Фурье функции $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $f(x) = g(x), x \in T^N$, при условии, что первые компоненты «номеров» $n = (n_1, \dots, n_N)$ частичных сумм ряда Фурье и «номеров» $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ «частичных сумм» интеграла Фурье удовлетворяют условию $|n_1 - \alpha_1| \le B < +\infty$, а остальные компоненты являются элементами лакунарных последовательностей (теорема I.IV). Следствием этой теоремы является интересный результат о сходимости почти всюду на T^N кратного интеграла Фурье функций $g \in L^p(\mathbb{R}^N), p > 1,$ при условии, что одна компонента свободная, а остальные $N-1$ компонент в номере частичной суммы являются лакунарными последовательностями (следствие теоремы I.IV). Этот результат является окончательным по числу свободных компонент, а именно, если в номере частичной суммы присутствуют две свободные компоненты, то, как следует из результата, полученного в главе II (следствие теоремы II.III), сходимости кратного интеграла уже не будет даже в классе непрерывных функций.

В главе II получен следующий результат: для всякого $N \ge 3$ построены функция f непрерывная на кубе T^N и функция g непрерывная на $\mathbb{R}^N$ и финитная, $f(x) = g(x)$, $x \in T^N$, причем ряд Фурье функции f сходится на кубе T^N, а интеграл Фурье функции g

расходится в каждой внутренней точке куба T^N (следствие теоремы II.III). Указанный результат уточняет сформулированные выше результаты И.Л.Блошанского 1975 и 1990 гг.

Сама же теорема II.III представляет интерес с точки зрения метода доказательства, в котором фактически приведена модификация знаменитой конструкции Ч. Феффермана непрерывной на квадрате T^2 функции, двойной тригонометрический ряд Фурье которой расходится по Прингсхейму в каждой точке квадрата $[-\pi+0.1\,,\,\pi-0.1]^2$. В диссертации удалось существенно изменить конец этого доказательства, что дало возможность «вплотную» подойти к границе всего квадрата T^2 и доказать расходимость двойного ряда Фурье в каждой точке. Данная модификация конструкции Ч. Феффермана отличается от имеющихся модификаций этой конструкции, полученных М.Бахбухом и Е.М.Никишиным, а также А.Н. Бахваловым.

В главе III для размерностей $N \geq 2$ исследуются вопросы равносходимости почти всюду рядов Фурье и интегралов Фурье на специальных подмножествах $E \subset T^N$, на которые накладываются ограничения структурного характера. Полученные результаты (теоремы III.I и III.II) являются точными в терминах структурно-геометрических характеристик рассматриваемых множеств.

Переходя к общей оценке диссертации, отметим, что её результаты являются новыми и представляют несомненный интерес для специалистов в области гармонического анализа. Все результаты изложены подробно, строго обоснованы и прошли апробацию на известных научных семинарах и многих научных конференциях, в том числе международных. Автореферат объективно отражает содержание диссертации и историю исследований по её тематике. Содержание диссертации достаточно полно опубликовано в 12 научных изданиях, три из которых входят в список ВАК.

Учитывая сказанное выше, считаю, что работа «Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье» безусловно удовлетворяет всем требованиям ВАК к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а её автор - Графов Денис Александрович достоин присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент -
доктор физико-математических наук,
профессор (Б.И. Голубов)

08.06.2015

Подпись профессора Б.И. Голубова заверяю –

Ученый секретарь МФТИ Ю.И. Скалько