

**ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА**  
**о диссертации Графова Дениса Александровича**  
**«Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и**  
**интеграл Фурье»**  
**на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук**  
**по специальности 01. 01. 01- вещественный, комплексный и**  
**функциональный анализ**

Диссертация Д. А. Графова посвящена исследованию вопросов многомерного гармонического анализа, связанных с равносходимостью разложений функций в кратные тригонометрические ряды и в интегралы Фурье. Для функции, заданной в  $R^N$ , рассмотрены разложение ее в кратный интеграл Фурье и разложение в кратный тригонометрический ряд ее сужения на куб  $T^N = [-\pi, \pi]^N$ . Исследуется вопрос о равносходимости таких разложений почти всюду на кубе  $T^N$ , когда разница между прямоугольными (кубическими) частичными суммами таких разложений стремится к нулю почти всюду.

Исследуемая задача актуальна, она связана с изучением новых многомерных закономерностей спектральных разложений и с обоснованиями метода Фурье при решении эволюционных задач математической физики, а также с исследованиями граничных свойств аналитических функций многих переменных. Это современный, быстро развивающийся раздел многомерного математического анализа, привлекающий внимание ряда известных специалистов в этих областях. Отметим здесь работы Б. С. Кашина, С. В. Конягина, Б. И. Голубова, М. И. Дьяченко, Т. П. Лукашенко, М. К. Потапова и др. С этой тематикой тесно связаны также современные исследования по спектральной теории дифференциальных операторов предпринятых в работах В. А. Ильина, Е. И. Моисеева и их учеников. Диссертация Д. А. Графова находится в русле работ И. Л. Блошанского и его учеников. Таким образом, тема диссертации Д. А. Графова актуальна и

связана с решением важных задач многомерного анализа Фурье и его приложений. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, трех глав, и библиографии, содержащей ссылки на 36 работ, связанных с темой диссертации. Общий объем диссертации составляет 147 стр.

Во введении дан краткий обзор известных результатов, связанных с вопросами сходимости многомерных рядов и интегралов Фурье, обоснована цель исследования, его актуальность и представлены вынесенные на защиту научные положения.

Глава 1 содержит исследование вопроса о равномерности почти всюду на кубе  $T^N$  разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье для функций из  $L_p, p > 1$ , когда некоторые компоненты номеров частичных сумм образуют лакунарные последовательности. Вопрос решается положительно, когда лишь одна компонента остается свободной от условий лакулярности (Теоремы 1.1, 1.2, 1.4), в случае же, когда таких компонент 2 и более, строятся контрпримеры, доказывающие отсутствие свойства равномерности (Теорема 1.3). Кроме того, даже в случае одной свободной компоненты, отсутствие равномерности возникает для функций из пространств близких к  $L_1$  (Теорема 1.6). В связи с этими негативными результатами возникает вопрос о дополнительных условиях на раскладываемые функции, которые обеспечивают равномерность разложений. В диссертации рассмотрены два типа таких условий. Одно из них – условие принадлежности функции классу  $H^\omega$  с логарифмической мажорантой модуля непрерывности (Теорема 1.5). Второе направление состоит в требовании обращения раскладываемой функции в ноль на некоторых множествах  $W$  специальной структуры. Эти вопросы рассмотрены в главе 2. Получены описания таких множеств  $W$  и установлены соответствующие условия равномерности на связанных с ними более узких множествах  $W^0$  (Теорема 2.1). Показана существенность условий этой теоремы. При отказе от них построены примеры функций, для которых равномерность не имеет места (Теоремы 2.2 и 2.3).

В главе 3 автор доказывает « $J_k$ -лакунарную» равносходимость для функций из  $L_p, p > 1$ , которые обращаются в ноль на множествах, исчерпывающих с точностью до меры ноль крест  $W(J_k)$ . Равносходимость имеет место в центре креста, причем описан класс множеств, для которых это множество равносходимости не может быть существенно расширено (Теорема 3.1). Наконец, доказана теорема 3.2, которая показывает, что результаты о равносходимости теряют силу для функций из пространств, близких к  $L_1$ .

Оценивая диссертацию в целом, отметим, что в ней решен ряд важных актуальных задач теории многомерного анализа Фурье. Полученные результаты носят весьма нетривиальный характер, и для их получения автору пришлось преодолеть значительные трудности как технического, так и принципиального характера. Все результаты тщательно доказаны и представляют собой новые достоверные факты многомерного гармонического анализа. В совокупности, результаты диссертации вносят существенный вклад в развитие данной теории.

В качестве замечаний отметим следующее.

1. Обозначение разности частичных сумм кратного тригонометрического ряда и интеграла Фурье (см., например, формулу (3) автореферата) представляется нам не вполне удачным. В краткой форме, используемой всюду в дальнейшем, оно не отражает зависимости от номера частичной суммы тригонометрического ряда, что затрудняет для читателя правильное понимание формулировок теорем 1.1, 1.4. В частности, в формулировках не указана зависимость констант от параметра  $\rho$  в условиях соотношения (6) или (8). Нам представляется более подходящим обозначить

$$Q_\rho(\alpha) = \{n \in Z^N : |n_j - \alpha_j| \leq \rho, \quad j=1, \dots, N\},$$

$$R_\alpha(x; f, g; \rho) = \max \{|S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)| : n \in Q_\rho(\alpha)\},$$

а в теоремах 1.1 и 1.4. уточнить, что константа в оценке зависит не только от  $\rho$ , но и от  $\alpha$ .

2. Было бы полезно дополнить сложные геометрические конструкции глав 2 и 3 (особенно, главы 3) описаниями и рисунками для более простых частных случаев.

Эти замечания носят редакционный характер и не снижают высокой оценки диссертации Д. А. Графова. Диссертация является законченным, самостоятельным научным исследованием высокого уровня. Ее основные результаты подробно обоснованы и своевременно опубликованы в 12 работах, 3 из них - в центральных математических изданиях, включенных в список ВАК.

Диссертация прошла апробацию на ведущих научных семинарах на механико-математическом факультете в МГУ (семинары под руководством академика Б. С. Кашина, чл.-корр. АН С. В. Конягина, профессоров М. И. Дьяченко, Т. П. Лукашенко, В. А. Скворцова, М. К. Потапова), РГПУ им. Герцена (под руководством профессора М. А. Скопиной) и др.

Содержание диссертации автор неоднократно докладывал на Российских и международных научных конференциях. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертация Д. А. Графова удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 -вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор, Графов Денис Александрович, несомненно, заслуживает присуждения ему искомой степени.

Доктор физико-математических наук, профессор ГОЛЬДМАН М. Л.

Личную подпись проф. Гольдмана М. Л. удостоверяю.

Ученый секретарь Ученого Совета РУДН профессор САВЧИН В. М.



09.06.2015