Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи

Локуциевский Лев Вячеславович

Особые экстремали в задачах с многомерным управлением

Специальность 01.01.02 — «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (ФГБОУ ВО «МГУ им. М.В. Ломоносова»).

Научный консультант:	чл.-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор **Зеликин Михаил Ильич**
Официальные оппоненты:	**Нейштадт Анатолий Исерович,** доктор физико-математических наук, Институт космических исследований РАН (ФГБУН ИКИ РАН), ведущий научный сотрудник
	Овсеевич Александр Иосифович, доктор физико-математических наук, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН (ФГБУН ИПМех РАН), ведущий научный сотрудник
	Сачков Юрий Леонидович, доктор физико-математических наук, доцент, Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН (ФГБУН ИПС РАН), руководитель Исследовательского центра процессов управления
Ведущая организация:	Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН (ФГБУН ИМ СО РАН)

Защита состоится *25 декабря 2015 г. в 16 часов 45 минут* на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы д.1, Главное здание МГУ, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su.

Автореферат разослан «___» ________________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85, доктор физико-
математических наук, профессор В.В. Власов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одной из основных задач оптимального управления является задача построения оптимального синтеза. Оптимальным синтезом называется совокупность оптимальных решений системы с фиксированными начальными или конечными условиями. Зачастую построение оптимального синтеза сопряжено с серьезными трудностями: дело заключается в том, что оптимальный синтез на фазовом пространстве, вообще говоря, не образует гладкую динамическую систему (даже локально). Оптимальные траектории могут быть негладкими, и, более того, отсутствует единственность: траектории могут как пересекаться, так и разветвляться. Наличие таких сложных особенностей связано с тем, что гамильтонова система принципа максимума Понтрягина чаще всего имеет разрывную правую часть. В этом случае ее решение понимается в обобщенном смысле по Филиппову[1]. А именно, рассмотрим дифференциальное уравнение с разрывной правой частью $\dot{x} = f(x)$. Тогда, если правая часть f непрерывна на некотором открытом всюду плотном множестве G, то дифференциальное уравнение заменяется дифференциальным включением $\dot{x} \in F(x)$, где $F(x)$ есть минимальное выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки $f(y)$ при $y \to x, y \in G$. При довольно общих предположениях решение такого включения существует[2], однако, как показывают даже простые примеры, не является единственным.

Основные идеи качественного исследования поведения решений гладкой системы обыкновенных дифференциальных уравнений восходят к Пуанкаре, который в своих мемуарах 1881-1882 года создал начала качественной теории дифференциальных уравнений[3]. В ее основе лежит изучение динамики траекторий в окрестности стационарных точек и циклов системы. Линеаризация системы в окрестности стационарной точки позволяет отыскать сепаратрисные многообразия[4]. Для изучения структуры решений в окрестности цикла Z обычно используют отображение последования Пуанкаре. Для этого рассматривают произвольную достаточно малую площадку S, трансверсально пересекающую Z в некоторой точке x_0. Отображение последования $\Phi : S \to S$ переводит точку $x \in S$ в точку следующего пересечения с S траектории системы, проходящей через x. Если точка x достаточно близка к Z, то отображение Φ корректно определено. Точка x_0, очевидно, является неподвижной точкой отображения Φ, поэтому линеаризация Φ в окрестности x_0 позволяет построить устойчивые и неустойчивые поверхности, образованные траекториями системы, стремящимися к Z в прямом или обратном

[1] А.Ф. Филиппов,«Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью»,Матем.сб.,1960,51(93):1,99-128.

[2] А.Ф. Филиппов,«Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью». М.: Наука, 1985.

[3] Henri Poincaré, «Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (1ère et 2nde partie)», Journal de mathématiques pures et appliquées, 1881-82.

[4] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л., «Методы качественной теории в нелинейной динамике», Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

времени соответственно.

Основным препятствием к исследованию поведения траекторий принципа максимума Понтрягина является негладкость гамильтониана, в результате чего правая часть гамильтоновой системы оказывается разрывной. А именно, рассмотрим задачу оптимального управления на гладком многообразии M, в которой управление u меняется в некотором множестве Ω. Тогда гамильтоновы поднятия оптимальных траекторий в кокасательное расслоение T^*M являются траекториями гамильтоновой системы $\mathcal{H}(q,p) = \max_{u\in\Omega} H(q,p,u)$, где H – функция Понтрягина. Если максимум в этом выражении единственен и гладко зависит от q и p в какой-то области, то гамильтониан $\mathcal{H}$ является гладкой функцией в этой области. Чаще всего гамильтониан $\mathcal{H}$ является гладким на некотором открытом всюду плотном множестве, а множество $\mathcal{S}$ его точек негладкости является замкнутым подмножеством T^*M (например, стратифицированным подмногообразием). На областях гладкости систему можно изучать с помощью классических инструментов теории гладких гамильтоновых систем. Однако, для построения полной картины оптимального синтеза этого оказывается недостаточно, так как в точках множества $\mathcal{S}$ единственность может теряться (что полностью меняет характер глобального поведения решений). Более того, могут возникать траектории, целиком лежащие на множестве разрыва $\mathcal{S}$. Такие траектории принято называть особыми (или особыми экстремалями).

Первые примеры особых экстремалей относятся к 1960-ым годам: это работы Д.П. ЛяСалля[5] 1960 г., П. Контенсу[6] 1962 г., Г.Д. Кэлли[7] 1964 г., Г.М. Роббинса[8] 1965 г., Р.Е. Коппа и Г.Д. Мойера[9] 1965 г. и др. Довольно быстро стало понятно, что в огромном количестве задач оптимального управления особые экстремали являются оптимальными и, более того, выступают в качестве магистралей: любая неособая траектория из их окрестности выходит на особую за конечное время[10].

Важно отметить, что единственность решения системы принципа максимума Понтрягина теряется далеко не во всех точках $\mathcal{S}$. В большинстве случаев оптимальная траектория теряет гладкость при пересечении с $\mathcal{S}$, но единственность при этом сохраняется. Потеряться же единственность обычно может только в точках на особой траектории. Поэтому, наряду со стационарными точками и циклами, особые экстремали и геометрическая структура их окрестностей лежат в основе изучения поведения траекторий гамильтоновых систем с разрывной правой частью.

[5]J.P. LaSalle, «The time optimal control problems», Contributions to the theory of nonlinear oscillators, V, 1-24, 1960.

[6]P. Contensou, «Etude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique», Astronaut. Acta 8, p. 134-150, 1962.

[7]H.J. Kelley, «A second variation test for singular extremals», AIAA J. 2, 1380-1382, 1964.

[8]H.M. Robbins, «Optimality of intermediate-thrust arcs of rocket trajectories», AIAA J. 3, 1094-1098, 1965.

[9]R.E. Kopp, H.G. Moyer, «Necessary conditions for singular extremals», AIAA J. 3, 1439-1444, 1965.

[10]М.И. Зеликин, В.Ф. Борисов, «Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики», Оптимальное управление, Современная математика и ее приложения, 11, Тбилиси, 2003, 3–161.

Структуру оптимального синтеза в целом и, в частности, поведение оптимальных траекторий в окрестности особых экстремалей можно исследовать с помощью методов теории динамических систем, которая на текущий момент получила очень глубокое и серьезное развитие. Известен огромный спектр методов и средств для изучения статистического поведения орбит. Достаточно упомянуть символическую динамику, предложенную М. Морсом и Г.А. Хедлундом[11] в 1938 г. и с успехом примененную С. Смейлом при изучении динамики его знаменитой подковы[12] в 1967 г.; эргодическую теорию и теорему Биркхоффа[13]; меру Синая-Рюэля-Боуэна[14]; полулокальный анализ и гомоклиническую динамику[15] и многое др. Однако, до недавнего времени применение современных результатов теории динамических систем в теории оптимального управления натыкалось на очень серьезное препятствие: как уже было сказано, решение гамильтоновой системы с разрывной правой частью не единственно, и поэтому динамическая система (пусть даже и не гладкая) в классическом смысле не определена. В настоящей диссертации частично восполнен этот пробел: предложен оригинальный метод ниспадающей системы скобок Пуассона, позволяющий эффективно исследовать качественное поведение решений в окрестности точек неединственности (например, точек на особых экстремалях) для задач с многомерным управлением за счет разрешения особенности отображения последования Пуанкаре поверхности $\mathcal{S}$ негладкости гамильтониана на себя. Отметим, что получающаяся в результате динамическая система уже корректно определена, но, вообще говоря, не является гладкой, а только липшицевой. Поэтому автор обобщил некоторые классические результаты теории гладких гиперболических динамических систем на липшицев случай [4].

Субриманова геометрия, очень активно развивающаяся в последние годы, является важным приложением теории задач с многомерным управлением. Особые траектории, с одной стороны, играют в ней очень важную роль, а, с другой стороны, с ними всегда сопряжено много сложностей. Основная трудность в исследовании особых траекторий в субримановой геометрии заключается в следующем: любая нормальная траектория (коэффициент при функционале в функции Понтрягина $\lambda_0 \neq 0$) не является особой, а любая анормальная траектория ($\lambda_0 = 0$) обязана быть особой и, вообще говоря, может быть негладкой. Поэтому понятия анормальной траектории и особой экстремали сливаются. Известно следующее: (i) любая не особая субриманова геодезическая является траекторией гладкой гамильтоновой системы и потому сама является гладкой; (ii) в 1994 г. Р. Монтгомери построил пример субриманового многообразия, в котором некоторая гладкая стро-

[11] M. Morse, G. A. Hedlund, «Symbolic Dynamics». American Journal of Mathematics, 60: 815–866, 1938.
[12] S. Smale, «Differentiable dynamical systems», Bulletin of the American Mathematical Society, 73 (6): 747, 1967.
[13] G.D. Birkhoff, «Proof of the ergodic theorem», Proc. Nat. Acad. Sci. USA , 17, pp. 656–660, 1931.
[14] J.R. Dorfman, «An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics», Cambridge University Press, 1999.
[15] Каток А.Б., Хасселблат Б., «Введение в современную теорию динамических систем», М.: Факториал, 1999.

го анормальная экстремаль является кратчайшей траекторией[16]; (iii) есть примеры негладких особых экстремалей, которые не являются оптимальными. Например, в 2014 г. Р. Монти построил пример левоинвариантной субримановой задачи на группе Карно, в которой есть семейство (не оптимальных) особых экстремалей, которые являются лишь липшицевыми[17]. Однако, открытым в течение уже более 20 лет[18,19] остается следующий вопрос, особенно активно обсуждаемый в последнее время: существуют ли субримановы задачи, в которых негладкая особая траектория является кратчайшей траекторией, соединяющей две данные точки. Ответ на этот вопрос имеет принципиальное значение, так как многие важные теоремы в субримановой геометрии получены для задач, в которых нет особых траекторий, являющихся кратчайшими.

Таким образом, построение оптимального синтеза в задачах с многомерным управлением тесно связано с изучением особых экстремалей и геометрической структуры их окрестностей. Поэтому актуальность тематики диссертации не вызывает сомнений.

Степень разработанности темы. Во многих работах исследовались особые траектории в задачах оптимального управления с одномерным управлением из отрезка $\Omega = [a,b]$. В этом случае множество $\mathcal{S}$ точек разрыва правой части принципа максимума Понтрягина обычно является гиперповерхностью (возможно, с особенностями). Важно отметить, что степень вырождения системы в окрестности особой траектории на гиперповерхности $\mathcal{S}$ определяется ее порядком $h \in \mathbb{N}$. Впервые определение порядка возникло практически одновременно в 1967 г. в работах Г.Д. Кэлли, Р.Е. Коппа, Г.Г. Мойера[20] и Г.М. Роббинса[21]. Эти определения существенно различаются, поэтому исторически с определением порядка связано много путаницы: многие авторы использовали в формулировках одно определение порядка, а в доказательствах – другое. Впервые явно на существующую путаницу указал Р. М. Льюис[22] в 1980 г. Он выделил два наиболее часто используемых определения порядка: локальный порядок траектории и глобальный (intrinsic) порядок системы. В качестве мотивации он указал, что хорошо известная и часто обсуждаемая теорема о невозможности регулярного сопряжения (стыковки) неособой

[16] R. Montgomery, «Abnormal minimizers», SIAM J. Control Optim., 32, 1605–1620, 1994

[17] R. Monti, «The regularity problem for sub-Riemannian geodesics», Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry, Springer INdAM Series Volume 5, pp. 313-332, 2014

[18] R. Montgomery, «A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications», Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002

[19] A.Agrachev,«Some open problems»,Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry,INDAM,5,2014,1-13

[20] H.J. Kelley, R.E. Kopp, H.G. Moyer, «Singular extremals», Topics in Optimization, Academic Press, 63-101, 1967

[21] H.M. Robbins, «A generalized Legendre-Clebsch condition for the singular cases of optimal control», IBM J. Res. Develop., 11, 361-372, 1967.

[22] Lewis, R. M.,«Definitions of Order and Junction Conditions in Singular Optimal Control Problems», SIAM Journal on Control, Vol. 18, No. 1, 1979.

траектории с особой экстремалью четного порядка верна в терминах глобального порядка и не верна в терминах локального порядка. Также Льюис в своей работе доказал, что локальный порядок всегда не меньше глобального.

Определение глобального порядка позволяет использовать гамильтонов формализм и поэтому дает мощный инструментарий для исследования не только самих особых траекторий, но и для изучения поведения неособых траекторий в их окрестности. Однако, если локальный порядок траектории строго больше глобального порядка системы, то определение глобального порядка фактически перестает работать. Такие особые экстремали называют атипичными. Несмотря на название, атипичные особые экстремали встречаются очень часто. В очень большом спектре задач любая особая траектория является атипичной. Определение локального порядка, напротив, работает и для атипичных траекторий. Однако, вычисление локального порядка связано с дифференцированием управления на особой траектории (которое не всегда корректно и почти всегда очень не удобно) и не дает инструментов для исследования окрестности особой экстремали. Таким образом, на данный момент даже в задачах с одномерным управлением существует серьезный пробел в методах исследования особых экстремалей и их окрестностей. Правильное (с точки зрения автора диссертации) определение порядка особой экстремали в задачах с одномерным управлением было введено автором в [1] (подробнее см. ниже).

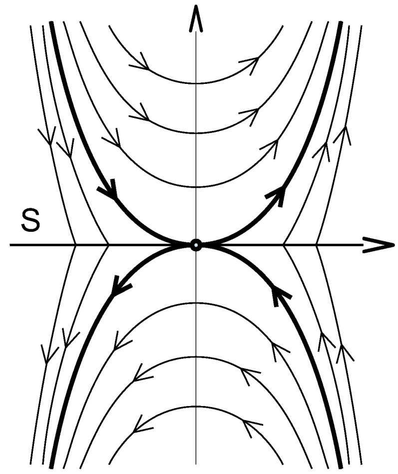

Рис. 1: Топологическая структура окрестности особой экстремали первого порядка.

Теория особых экстремалей первого и второго порядка в задачах с одномерным управлением разработана весьма полно. Окрестность особой экстремали первого (глобального) порядка устроена довольно просто: через каждую точку такой экстремали проходят две входящие неособые траектории и две исходящие[23] (см. рис. 1). Особые экстремали первого порядка довольно часто встречаются в приложениях, особенно в задачах математической экономики. Упомянем недавнюю работу [7], в которой за счет особых траекторий первого порядка автором удалось построить оптимальный синтез в задаче Хеле-Шоу, управляемой при помощи мультиполей.

С особыми экстремалями второго (глобального) порядка ситуация намного более изысканная. В большом количестве задач оптимального управления удается доказать, что сопряжение неособых траекторий с особыми неизбежно. При

[23] В.Ф. Борисов, «Условие Келли и структура лагранжева многообразия в окрестности особой экстремали первого порядка», СМФН, том 19, с. 5-44, 2006.

этом четность глобального порядка запрещает регулярную стыковку – управление обязано иметь разрыв второго рода. В 1960-70х годах широкую известность получил феномен чаттеринга, когда оптимальные траектории перед выходом на особую траекторию второго (глобального) порядка за конечное время пересекают счетное число раз гиперповерхность разрыва $\mathcal{S}$, счетное число раз переходя из одной области гладкости в другую и обратно. Оптимальное управление при этом совершает счетное число переключений между концами отрезка $\Omega = [a,b]$. Впервые этот феномен был обнаружен А.Т. Фуллером[24] в 1963 г. Однако, несмотря на большое количество примеров, довольно долго считалось, что феномен чаттеринга является чем-то исключительным и не встречается в реальных приложениях. Опровержение этого заблуждения было получено в 1990 г., когда в работах И. Купки[25] и М.И. Зеликина, В.Ф. Борисова[26,27] было доказано, что феномен чаттеринга носит общий характер, не уничтожается малым шевелением системы в общем положении, а чаттеринг-траектории являются локально оптимальными. Доказано, что в данную точку на особой траектории второго порядка входит с чаттерингом однопараметрическое семейство траекторий, образующих двумерную поверхность с конической особенностью в точке пересечения с особой экстремалью (показано в работе автора [11]). Аналогичным образом неособые траектории сходят с особой экстремали второго порядка. Важно отметить, что М.И. Зеликин и В.Ф. Борисов предложили естественную процедуру замены координат в окрестности особой траектории второго порядка, позволившую явно построить оптимальный синтез в большом количестве[28] (на тот момент не решенных) прикладных задач.

Теория задач оптимального управления с многомерным управлением разработана намного хуже (в особенности в вопросах построения оптимального синтеза). Пожалуй, самое глубокое развитие получили субримановы задачи[29], в которых многомерное управление не ограничено, $u \in \mathbb{R}^k$ и, что наиболее важно, отсутствует снос. Для задач с ограниченным управлением и сносом оптимальный синтез частично или полностью построен лишь в нескольких конкретных задачах[30]. Построение оптимального синтеза для задач с ограниченным многомерным управлением сопряжено с очень большими трудностями. Во-первых, порядок особой

[24] A.T. Fuller, Study of an optimum non-linear system, J. Electronics Control, 15, (1963), pp. 63-71

[25] I. Kupka, «The ubiquity of Fuller's phenomenon», Nonlinear controlability and optimal control, Monograph textbooks Pure Appl. Math., N 133 (ed. by H.Z. Sussmann), Dekker, N.Y., pp 313-350, 1990

[26] М.И. Зеликин, В.Ф. Борисов, «Синтез в задачах оптимального управления, содержащий траектории с учащающимися переключениями и особые траектории второго порядка», Матем. заметки, том 47, выпуск 1, с. 62–73, 1990

[27] М.И. Зеликин, В.Ф. Борисов, «Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления», Тр. МИАН СССР, том 197, с. 85–166, 1991

[28] M.I. Zelikin, V.F. Borisov, «Theory of Chattering Control with applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering», Birkhäuser, Boston, MA, 1994

[29] A.A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, «Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry», Lecture Notes, Preprint SISSA 2015.

[30] A.A.Milyutin, N.P.Osmolovskii, Calculus of Variations and Optimal Control, AMS, Prov., Rhode Island, 180, 1998.

траектории уже не корректно описывать с помощью одного натурального числа. Во-вторых, в связи с ростом размерности гамильтоновой системы принципа максимума, существенную трудность начинает представлять явное отыскание решений. Даже для задач субримановой геометрии, в самом первом нетривиальном случае геодезических на группе Энгеля[31] (4-х мерное фазовое пространство с двумерным управлением $u \in \mathbb{R}^2$) экстремали явно выписываются через эллиптические функции Якоби. Здесь важно сказать, что в этой задаче есть особые экстремали, которые являются оптимальными, но не строго анормальными (то есть совпадают с неособыми траекториями). Тем не менее, субримановы сферы на группе Энгеля имеют особенности в точках пересечения с особыми экстремалями. Более того, Э. Трела в 2001 году доказал[32], что эти сферы не субаналитичны в точках на особых экстремалях (он изучал субаналитичность сфер в трехмерных пространствах Мартине, но при подходящей проекции результат переносится и на группу Энгеля).

В последние годы широкое развитие в субримановой геометрии получили методы нильпотентизации[33]. Для субримановых задач с неограниченным управлением $u \in \mathbb{R}^k$ и без сноса хорошо известна локально-аппроксимативная теорема Громова, в которой утверждается, что субриманово расстояние в ε-окрестности точки приближается с точностью $o(\varepsilon)$ с помощью левоинвариантной субримановой метрике на нильпотентном касательном конусе в этой точке[34].

Еще один показательный пример дает следующая задача, являющаяся простейшим обобщением задачи Фуллера на случай двумерного управления:

$$\int_0^\infty |x(t)|^2 dt \to \inf;$$
$$\ddot{x} = u, \quad x,u \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0.$$

В этой задаче до сих пор нет полного явного описания оптимального синтеза. Известны лишь некоторые явные решения в виде логарифмических спиралей, проходимых за конечное время. Естественное обобщение этой задачи на n-ую производную исследовалось в работе А.А. Милютина и С.В. Чуканова[35]. Явные решение в этой задаче тесно связаны с корнями мнимой части следующих полиномов специального вида:

$$P_h(\alpha) = \big(2h + i\alpha\big)\big((2h-1) + i\alpha\big) \ldots \big(1 + i\alpha\big), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

[31] А.А. Ардентов, Ю.Л. Сачков, «Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля», Матем. сб., том 202, номер 11, с. 31–54, 2011

[32] E. Trélat, «Non-subanalyticity of sub-Riemannian Martinet spheres», Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, Volume 332, Issue 6, pp. 527–532, 2001

[33] С.К. Водопьянов, «Дифференцируемость отображений в геометрии многообразий Карно», Сиб. матем. журн., 48:2 (2007), 251–271.

[34] M. Gromov, «Carnot-Carathéodory spaces seen from within», Sub-Riemannian Geometry, Progress in Mathematics Volume 144, 1996, pp 79-323

[35] А.А. Милютин, А.Е. Илютович, Н.П. Осмоловский, С.В. Чуканов. Оптимальное управление в линейных системах. 1993г. М.:Наука, 268 стр.

Впервые этот многочлен был выписан А.А. Милютиным и С.В. Чукановым в 1993 г. в упомянутой работе. Недавно выяснилось в работах автора диссертации (совместно с М.И. Зеликиным) [3, 8], что линейная независимость специальных корней $\mathrm{Im} P_h(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$ влечет существование оптимального управления в виде иррациональной всюду плотной обмотки клиффордова тора.

Особенности оптимальных траекторий в одномерных и многомерных задачах поиска были исследованы в работах автора [9, 13]. В таких задачах оптимальные траектории могут иметь так называемые вихревые особенности, сходные чаттерингу. Эти особенности возникают как при начале движения, так и при окончании [12]. При наличии вихревой особенности в начале движения оптимальное управление имеет разрыв второго рода, а оптимальная траектория за любой сколь угодно малый начальный промежуток времени обязана побывать с обеих сторон от любой гиперплоскости, проходящей через точку начала движения. При этом существование оптимальной траектории гарантирует соответствующая теорема [5].

Еще один важный вопрос связан с возможными типами особенностей оптимального управления. А именно, оба основополагающих результата теории оптимального управления — и теорема А.Ф. Филиппова о существовании оптимальной траектории, и принцип максимума Понтрягина – предполагают, что управление есть измеримая функция времени. В 1995 г. М.И. Зеликиным был построен пример, в котором оптимальное управление имеет счетное число точек разрыва со счетным числом точек накопления[36]. Известен C^∞ пример, построенный А.Ф. Филипповым в 1959 г., в котором оптимальное управление имеет особенность на множестве канторового типа[37], однако, в примере А.Ф. Филиппова это канторово множество уже вмонтировано в функцию, определяющую постановку задачи. Еще один интересный пример был построен в 1986 г. Д.Б. Силиным[38], в котором управление терпит разрыв на множестве положительной лебеговой меры. Множеством допустимых управлений в этом примере является не субаналитичный выпуклый многогранник с бесконечным числом граней.

Таким образом, вопрос о том, насколько «плохим» может быть оптимальное управление, до сих пор остается открытым. В задачах, аффинных по одномерному управлению, оптимальное управление в общем положении имеет счетное число точек разрыва на конечном промежутке времени (доказано в приведенных выше работах И. Купки и М.И. Зеликина-В.Ф. Борисова). В работе 1995 г. А.А. Аграчев[39] доказал, что в этом классе задач множество точек разрыва опти-

[36]М.И. Зеликин, «Нерегулярность оптимального управления в регулярных экстремальных задачах», Фундамент. и прикл. матем., 1:2 (1995), 399–408.

[37]А.Ф.Филиппов, «О некоторых вопросах оптимального регулирования», Вестник МГУ, Матем. и мех., 2(1959).

[38]Д.Б. Силин, «Линейные задачи оптимального быстродействия с разрывными на множестве положительной меры управлениями», Матем. сб., 129(171):2 (1986), 264–278

[39]A. Agrachev, «On regularity properties of extremal controls». J. Dynamical and Control Systems, 1995, v.1, 319–324

мального управления не может быть совершенным множеством, если выполнено условие Хермандера.

Необходимо отметить, что А.И. Овсеевичем для линейных управляемых систем были получены весьма удобные аппроксимативные теоремы для множеств достижимости и оптимального управления в задаче быстродействия[40].

Довольно полно изучены необходимые и достаточные условия второго порядка локальной оптимальности траекторий. Исследования в этом направлении начались с работ Б.С. Гоха[41,42] в 1966 г. Далее над необходимыми и достаточными условиями второго порядка работали такие известные специалисты как А.Д. Кренер[43], Р.В. Гамкрелидзе и А.А. Аграчев[44,45], А.А. Милютин[46], А.В. Дмитрук[47,48] и Н.П. Осмоловский[49]. Следует отметить работу М.И. Зеликина, Л.Ф. Зеликиной и К.В. Хлюстова[50], в которой с помощью метода дифференциальных форм построен оптимальный синтез в ряде задач с особыми траекториями первого порядка и управлением из тетраэдра и, более того, доказана его глобальная оптимальность.

Таким образом, экстремальные задачи с ограниченным многомерным управлением, несмотря на очень серьезный интерес как с теоретической точки зрения, так и с прикладной, на данный момент остаются одной из наименее разработанных областей теории оптимального управления.

Цели и задачи. Целями проведенного в диссертации исследования являются разработка методов анализа типичной структуры оптимального синтеза в задачах, аффинных по многомерному управлению, и применение полученных результатов к изучению характерных особенностей гамильтоновых систем с разрывной правой частью. Основными задачами исследования являются:

[40] A.I. Ovseevich, «Limit Behavior of Attainable Sets of Linear Systems», Computing. 2005, vol. 75, N 1.

[41] B.S. Goh, «The Second Variation for the Singular Bolza Problem», SIAM Journal on Control, 4(2), 309–325, 1966.

[42] B.S. Goh, «Necessary Conditions for Singular Extremals Involving Multiple Control Variables», SIAM Journal on Control, 4(4), 716–731, 1966.

[43] A.J. Krener, «The High Order Maximal Principle and Its Application to Singular Extremals», SIAM Journal on Control and Optimization; 15(2), 1977

[44] А.А. Аграчев, Р.В. Гамкрелидзе, «Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия», Матем. сб., 100(142):4(8), 610–643, 1976

[45] А.А. Аграчев, «Необходимое условие оптимальности второго порядка в общем нелинейном случае», Матем. сб., 102(144):4, 551–568, 1977

[46] Милютин А.А., «О квадратичных условиях экстремума в гладких задачах с конечномерным образом». В сборнике: «Методы теории экстремальных задач в экономике», из-во «Наука», стр.138-165., 1981

[47] А.В. Дмитрук, «Квадратичные условия понтрягинского минимума в задаче оптимального управления линейной по управлению. I. Теорема о расшифровке», Изв. АН СССР. Сер. матем., 50:2 (1986), 284–312

[48] А.В. Дмитрук, «Квадратичные условия понтрягинского минимума в задаче оптимального управления, линейной по управлению. II. Теоремы об ослаблении ограничений равенства», Изв.АН СССР.Сер. мат.,51:4,1987,812-832

[49] Н.П. Осмоловский, «Условия второго порядка слабого локального минимума в задаче оптимального управления (необходимость, достаточность)». Докл АН СССР, 1975, т. 225, No 2, с.259—262.

[50] Л.Ф. Зеликина, М.И. Зеликин, К.В. Хлюстов, «Особые стратифицированные многообразия для инволютивных управляемых систем», Дифф. Ур., 2001, т. 37, N 9, стр. 1161-1167.

1. Качественное исследование нового феномена хаотической динамики оптимальных траекторий на конечных промежутках времени в задачах, аффинных по двумерному управлению из треугольника.

2. Доказательство того факта, что новый феномен хаотического поведения экстремалей на конечных промежутках времени является ситуацией общего положения в гамильтоновых системах с разрывной правой частью.

3. Обобщение классических результатов полулокального анализа гомоклинической динамики на случай липшицевых систем.

4. Определение и исследование понятия нормального порядка особой экстремали в задачах с одномерным управлением. Построение и исследование флага порядков особой экстремали в задачах с многомерным управлением.

5. Исследование структуры множества всех особых экстремалей фиксированного порядка в задачах, аффинных по одномерному управлению.

6. Исследование геометрической структуры окрестности особой экстремали первого порядка в задачах, аффинных по многомерному управлению.

7. Исследование новых типов стыковки неособых траекторий с особыми экстремалями в задачах с многомерным управлением с помощью методов теории Галуа.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

- Разработан оригинальный метод ниспадающей системы скобок Пуассона, который позволяет сводить изучение структуры интегральных воронок произвольной гамильтоновой системы с разрывной правой частью к исследованию оптимального синтеза в соответствующей экстремальной нильпотентно-выпуклой задаче с ограниченным управлением.

- В гамильтоновых системах с разрывной правой частью обнаружен и качественно исследован новый феномен хаотического поведения на сколь угодно малых промежутках времени траекторий, лежащих в интегральных воронках точек, находящихся на стыке трех гиперповерхностей разрыва правой части системы. Данное исследование дает ответ на вопрос о типичной структуре оптимального синтеза в задачах, аффинных по многомерному управлению, поскольку доказана теорема о структурной устойчивости феномена.

- Установлено свойство полупотока для оптимального синтеза в широком классе нильпотентно-выпуклых задач. С его помощью для данного класса задач получен ответ на давний вопрос: насколько «плохим» может быть оптимальное управление. А именно, доказано, что в этом классе задач оптимальное управление может иметь не более чем счетное число точек разрыва.

- Разработан новый аппарат исследования атипичных особых экстремалей и их окрестностей в задачах с одномерным управлением. Он опирается на данное автором новое определение (натурального) порядка особой экстремали, сочетающее в себе преимущества обоих классических определений (локального порядка траектории и глобального порядка системы).
- Доказано, что особые экстремали фиксированного натурального порядка образуют гамильтонов поток на некотором симплектическом подмногообразии.
- Найдены семейства явных оптимальных решений в многомерной задаче Фуллера с n-ой производной, представляющие собой обобщенные логарифмические спирали, моделирующие вращение по иррациональной всюду плотной обмотке клиффордова тора.
- Построено обобщение классических методов символической динамики на случай липшицевых гиперболических динамических систем. В том числе, получены удобные оценки на размерности по Хаусдорфу и Минковскому множества неблуждающих точек, использующие лишь константы Липшица исходной динамической системы.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации имеют теоретический характер.

Значение разработанного автором диссертации метода ниспадающей системы скобок Пуассона заключается в том, что он является эффективным инструментом исследования особенностей гамильтоновых систем с разрывной правой частью как с теоретической точки зрения (см. [6]), так и с практической (см. [1]). Этот метод имеет широкие перспективы применения в теории негладких гамильтоновых систем, в теории оптимального управления, в особенности в задачах с многомерным управлением.

Результат о наличии хаотической структуры оптимального синтеза в задачах, аффинных по многомерному управлению, имеет принципиальное значение. С одной стороны, получен ответ на вопрос о типичной структуре оптимального синтеза в таких задачах, а, с другой стороны, разработанная техника позволяет качественно описывать оптимальный синтез в тех задачах, которые до этого момента не поддавались исследованию.

Теорема о гамильтоновости особого потока дает возможность применять весь спектр методов теории гладких гамильтоновых систем к изучению потока особых экстремалей в задачах с одномерным управлением. Например, автором был явно найден поток особых экстремалей в задаче быстродействия для управления намагниченным волчком Лагранжа в контролируемом магнитном поле. Прямой счет в этой задаче чрезвычайно сложен и неэффективен. Тем не менее, оказалось, что особый поток является интегрируемым по Лиувиллю, что и позволило получить явные формулы. Таким образом, теорема о гамильтоновости особого потока имеет широкие перспективы применения в задачах с одномерным управлением.

Существование правостороннего оптимального потока в нильпотентно-выпуклых задачах позволяет применять топологические методы к исследованию оптимального синтеза в этих задачах. Например, полученный результат о структуре множества точек разрыва оптимального управления доказан с помощью сочетания свойства полупотока и теоремы Кантора-Бендиксона, а с помощью формулы Лефшеца доказано существование некоторых оптимальных траекторий специального вида.

Методология и методы исследования. С помощью разработанного автором оригинального метода ниспадающей системы скобок Пуассона получены результаты в первой, четвертой и девятой главах диссертации.

Также в настоящем исследовании использовались нижеследующие классические методы: (1) классические методы теории оптимального управления: принцип максимума Понтрягина, функция Беллмана, необходимые условия второго порядка Гоха-Кренера; (2) классические методы теории групп и алгебр Ли; (3) современные методы теории динамических систем, а именно: методы символической динамики (топологические цепи Маркова), полулокальный анализ гомоклинических точек, теорема Адамара-Перрона и многое другое; (4) теория фрактальных множеств и, в особенности, теория нецелых размерностей по Хаусдорфу и Минковскому; (5) классические методы теории функций и функционального анализа: классическая теория банаховых пространств, слабая* топология и теорема Алаоглу; (6) классические методы теории гладких систем обыкновенных дифференциальных уравнений и теории гладких гамильтоновых систем в частности; (7) классические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью; (8) классические результаты теории Галуа; (9) гомотопические методы, в частности формула Лефшеца; (10) теорема Кантора-Бендиксона.

Достоверность и апробация.

Результаты диссертации прошли апробацию на большом количестве международных конференций и научных семинаров, в том числе, за последние 3 года:

Конференции

1. Международная конференция Крымская Осенняя Математическая Школа КРОМШ-2012, «Фрактальная структура гиперболических липшицевых динамических систем».

2. Международная конференция «Математическая теория управления и механика», 2013 г., «Stochastic dynamics of Lie algebras of Poisson brackets in the neighborhood of points of non-smoothness the Hamiltonian» (совместно с М.И. Зеликиным и Р. Хильдебрандом).
3. Конференция «Оптимальное управление и приложения», посвященная 105-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, 2013 г., «Хаотическая динамика оптимальных траекторий в задачах с многомерным управлением» (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).
4. Международная молодежная конференция «Геометрия и управление», Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, 2014 г., «Hamiltonian Flow of Singular Trajectories».
5. Международная конференция «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах», 2014 г., «Chaos in optimal synthesis in problems with multidimensional control» в двух частях (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).
6. Международная конференция «Hamiltonian systems and their application», институт Эйлера, Санкт-Петербург (2015), «On new phenomenon of chaotic behavior of non-smooth Hamiltonian systems coming from optimal control» (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом)
7. Международная конференция по Математической Теории Управления и Механике (МСТМ-2015), Суздаль, «О нильпотентно-выпуклых задачах оптимального управления»
8. Международная конференция «Nonlinear control and geometry», центр Банаха, Бедлево, Польша (2015), «On new phenomenon of chaotic behaviour of extremals in problems affine on control»,

Научные семинары

1. Семинар по оптимизации и управлению, ИЦСА и ИЦПУ ИПС имени А.К.Айламазяна, 31 мая 2012 г., «Особые экстремали в задачах с многомерным управлением».
2. Семинар «Теория приближений и теория экстремальных задач» под руководством В.М. Тихомирова и Г.Г. Магарил-Ильяева, механико-математический ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва (2012), «Хаотическая динамика оптимальных траекторий в задачах оптимального управления с управлением из многогранника» (совместно с М.И. Зеликиным и Р. Хильдебрандом).
3. Заседание Московского математического общества 12 февраля 2013 г., «Стохастическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в окрестности точек негладкости гамильтониана» (совместно с М.И. Зеликиным и Р. Хильдебрандом).
4. Семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» под руководством А.В. Фурсикова, В.М. Тихомирова,

М.И. Зеликина и В.Ю. Протасова, 25 февраля 2013 г., «Хаотическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в окрестности точек негладкости гамильтониана» (совместно с М.И. Зеликиным)

5. Семинар по эргодической теории «Случайные процессы и динамические системы» под руководством В.И. Оселедца и Б.М. Гуревича., 27 февраля 2013 г. «Хаотическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в негладких гамильтоновых системах» (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).
6. Семинар по многомерному комплексному анализу (семинар имени А.Г. Витушкина), 3 апреля 2013 г., «Стохастическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в окрестности точек негладкости гамильтониана» (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).
7. Семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» под руководством А.В. Фурсикова, В.М. Тихомирова, М.И. Зеликина и В.Ю. Протасова, 14 октября 2013 г., «Гамильтоновость потока особых траекторий».
8. Семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством А.Т. Фоменко, 24 марта 2014 г., «Особые траектории в гамильтоновых системах с разрывной правой частью» (совместно с М.И. Зеликиным).
9. Общеинститутский семинар ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, заседание №12, 24 апреля 2014 г., «Хаотическая структура оптимального синтеза в задачах, аффинных по многомерному управлению».
10. Общемосковский постоянный научный семинар «Теория автоматического управления и оптимизации», под руководством Б.Т. Поляка, 2 декабря 2014 г., (совместно с М.И. Зеликиным, Р. Хильдебрандом).

Автором диссертации в 2014 г. был прочитан курс лекций «Особые траектории в теории оптимального управления» в лаборатории Геометрической теории управления Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, содержащий результаты диссертации.

Публикации по теме диссертации. Результаты диссертации и их доказательства опубликованы в 15 работах в журналах и изданиях, удовлетворяющих требованиям ВАК для опубликования основных результатов, в том числе 12 работ изданы в российских журналах и 3 в иностранных изданиях. Все сформулированные результаты являются новыми. Все приведенные в диссертации совместные результаты содержат указания соавторов.

Структура диссертации. Диссертационная работа содержит 256 страниц и состоит из введения, заключения, списков рисунков и таблиц, литературы (содержит 83 наименования) и 9 глав, которые условно объединены в две части для удобства изложения и ориентирования читателя в тексте. Первая часть содержит 4 главы, вторая – 5. В первой части преобладает обсуждение основных свойств гамильтоновых систем с разрывной правой частью в окрестности особых экстремалей. Во второй части – обсуждение хаотической динамики в гамильтоновых системах с разрывной правой частью.

Содержание работы

Во **введении** дан краткий обзор результатов по данной тематике, приведены научная новизна, методика и теоретическая значимость работы.

В **первой главе** диссертации изучается самый важный и наиболее часто встречающийся случай – случай, когда поверхность негладкости гамильтониана является гиперповерхностью. Этот случай отвечает задачам с одномерным управлением, хотя и встречается в задачах с многомерным управлением.

Пусть $\mathcal{M}$ – $2n$-мерное симплектическое многообразие с симплектической формой $\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M})$. Через i_ω обозначим канонический изоморфизм $i_\omega : T^*\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$, индуцированный формой ω. В первой главе исследуются системы с кусочно-гладкими гамильтонианами. А именно, пусть $\mathcal{H}$ – кусочно-гладкий гамильтониан, с множеством N точек разрыва первой производной (т.е. $\mathcal{H} \in C^\infty(\mathcal{M} \setminus N)$ и $\mathcal{H} \in C^0(\mathcal{M})$). Множество N является стратифицированным подмногообразием $\mathcal{M}$ без страт полной размерности $2n$.

Определение (1.2)**.** Траектория $x(t)$, $t \in (t_0,t_1)$, системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$ называется *особой экстремалью* (или *траекторией*), если $x(t) \in N$ при $t \in (t_0,t_1)$.

Предположим, что в окрестности V точки $x_0 \in N$ множество N является гладкой гиперповерхностью, разбивающей V на две области Ω_1 и Ω_2. Пусть $\mathcal{H}|_{\Omega_i} = H_i$, $i = 1,2$, и H_i гладко продолжаются в окрестность $\overline{\Omega}_i$. Тогда в V

$$\mathcal{H} = \max(H_1,H_2), \text{ или } \mathcal{H} = \min(H_1,H_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{H} = H + Gu$$

где $H = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$, $G = \frac{1}{2}(H_1 - H_2)$, а $u = 1$ в Ω_1 и $u = -1$ в Ω_2 (или наоборот)[51]. Предположим, что $dG(x_0) \neq 0$ – этого достаточно, чтобы N было гладким многообразием в окрестности $x_0 \in N$. Обозначим

$$\mathcal{S}_k = \big\{x : G(x) = (\operatorname{ad} H)G(x) = \ldots = (\operatorname{ad} H)^{k-1}G(x) = 0\big\}.$$

Определение натурального порядка мотивировано следующей теоремой:

Теорема (1.1, о порядке особой траектории)**.** *Предположим, что дифференциалы dG, $d(\operatorname{ad} H)G$, …, $d(\operatorname{ad} H)^{2h-1}G$ линейно независимы в V и для любого четного $k \leq 2h$ выполнено $\{G,(\operatorname{ad} H)^{k-1}G\}|_{\mathcal{S}_k} = 0$. Тогда $\{G,(\operatorname{ad} H)^{2h}G\} = 0$ на $\mathcal{S}_{2h+1}$.*

[51]Всюду в первой главе $u \in [-1;1]$. Общий случай $u \in [a,b]$ немедленно сводится к $u \in [-1;1]$ очевидной аффинной заменой.

Определение (1.5)**.** Мы будем говорить, что гамильтонова система с кусочно-гладким гамильтонианом $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет в области V *натуральный порядок* $h \in \mathbb{N}$, если для всех четных $k < 2h$ выполнены соотношения $\{G,(\operatorname{ad} H)^{k-1}G\}|_{\mathcal{S}_k} = 0$, а также $\{G,(\operatorname{ad} H)^{2h-1}G\} \neq 0$ в любой точке из S_{2h}. Если же выписанные выше равенства выполнены для всех четных $k \in \mathbb{N}$, то $h = \infty$.

Теорема (1.2)**.** *Предположим, что гамильтонова система $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет в V натуральный порядок $h \neq \infty$, и дифференциалы $dG, d(\operatorname{ad} H)G, \ldots, d(\operatorname{ad} H)^{2h-2}G$ линейно независимы в V. Тогда все особые траектории системы лежат в следующем множестве:*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2h} \cap \{x : u^s(x) \in [-1;1]\}, \text{ где } u^s(x) = -\frac{(\operatorname{ad} H)^{2h}G}{\{G,(\operatorname{ad} H)^{2h-1}G\}}.$$

Более того,

(i) Множество $\mathcal{S}_{2h}$ (если не пусто) является гладким симплектическим многообразием с симплектической формой $\omega|_{\mathcal{S}_{2h}}$.

(ii) Особые траектории на $\mathcal{S}$ являются участками траекторий гладкого гамильтонового потока на $\mathcal{S}_{2h}$ с гамильтонианом $H|_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{S}}$, проходящих в множестве $\{u^s \in [-1;1]\}$.

(iii) Поток гладкого гамильтониана $\widetilde{\mathcal{H}}(x) = H(x) + G(x)u^s(x)$ в V является касательным к $\mathcal{S}_{2h}$ и его траектории на $\mathcal{S}_{2h}$ совпадают с особыми.

В первой главе с помощью разработанного автором метода ниспадающей системы скобок Пуассона доказаны теорема 1.3 о единственности для неособых траекторий вне особого многообразия и теорема 1.4 о невозможности регулярного сопряжения неособой траектории с особой траекторией четного порядка.

В первой главе рассмотрена задача оптимального управления вращением твердого тела в контролируемом магнитном поле (пример 1.6). Пусть намагниченный волчок Лагранжа закреплен в точке на оси симметрии и помещен внутрь индукционной магнитной катушки (в невесомости). Магнитное поле катушки будем считать в каждый момент времени постоянным: $h(t)e$, где $e \in \mathbb{R}^3$, $|e| = 1$, а $h(t) \in \mathbb{R}$ – напряженность поля. Вычисления проводятся в системе координат, связанной с телом. Обозначим через $J = \operatorname{diag}(J_1,J_1,J_2)$ – обратный тензор инерции, через $m \in \mathbb{R}^3$ – момент тела, а через $N \in \mathbb{R}^3$ – магнитный момент тела. Будем считать, что N лежит на оси симметрии и, значит, $JN = J_2N$. Тогда, если $u(t) \in [-u_0,u_0]$ – напряжение на катушке в момент t, а R – ее внутреннее сопротивление, то

$$\dot{m} = [m,Jm] + h[e,N]; \quad \dot{e} = [e,Jm]; \quad \dot{h} = -Rh + u; \qquad (1.5)$$

где $[\cdot,\cdot]$ обозначает векторное произведение. Таким образом, фазовое пространство $M = \{m,e,h\}$ семимерно: $M = \mathbb{R}^7 \setminus \{e = 0\}$ (с помощью линейного растяжения удобно считать, что $R = 1$, а $|e| > 0$), и $\dim T^*M = 14$. Исследуется задача быстродействия: $T \to \inf$. Пусть $\mathcal{M}' = T^*M \cap \big(\{x : [e,N] \neq 0, \langle e,[m,q]\rangle \neq 0\}\big)$.

Теорема (1.5). *Движение по любой особой экстремали на $\mathcal{M}'$ в задаче быстродействия для системы (1.5) устроено следующим образом: (i) векторы m, N и e во время движения лежат в одной плоскости и образуют друг с другом постоянные углы; (ii) вектор m имеет постоянную длину и параллелен сумме вектора N и его проекции на направление магнитного поля e;(iii) векторы m и e вращаются вокруг N с постоянной угловой скоростью $\Omega = \langle e,e\rangle + (J_2 - J_1)\dfrac{\langle e,N\rangle}{\langle N,N\rangle}$; и (iv) особое управление задается формулой $u^s = hR \in (-u_0,u_0)$.*

В **второй главе** проведено исследование понятия порядка особой экстремали в задачах с многомерным управлением. А именно, рассмотрим гамильтонову систему $\mathcal{H}(q,p,u)$, где $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^k$ выбирается из принципа максимума.

Предположим, что оптимальное управление $u^*(t)$ является внутренней точкой множества Ω, т.е. $\dfrac{\partial}{\partial u}\mathcal{H} = 0$, и $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\mathcal{H} \leq 0$. Так как $\dfrac{\partial}{\partial u}\mathcal{H} = 0$, то гессиан $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\mathcal{H}$ – корректно определенная симметрическая билинейная форма на $T_{u^*(t)}\Omega = U$.

Определение (2.1). Если на траектории при $t \in (t_0,t_1)$ выполняется $u^*(t) \in \operatorname{Int}\Omega$ (значит $\dfrac{\partial}{\partial u}\mathcal{H} = 0$) и гессиан $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\mathcal{H}\big(t,q^*(t),p^*(t),u^*(t)\big)$ имеет не полный ранг, то траектория называется *особой экстремалью* на промежутке (t_0,t_1).

Рассмотрим оптимальную особую траекторию $q^*(t),p^*(t),u^*(t)$ (управление $u^*(t)$ предполагается гладким на (t_0,t_1)). Для каждого $t \in (t_0,t_1)$ введем индуктивно флаг линейных подпространств $U_0(t) \supseteq U_1(t) \supseteq \ldots$ в пространстве U и билинейные формы $B_j(t)$ на $U_j(t)$. Положим[52] $U_0(t) \equiv U$ и $B_0(t) = \left\{\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\mathcal{H}\right\}^*$. Если ранг $B_{j-1}(t)$ не полный, то продолжим индукцию и определим

$$U_j(t) = \ker B_{j-1}(t); \quad B_j(t) = (-1)^j \left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2j}}{dt^{2j}}\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{H}\right\}^*\bigg|_{U_j(t)}.$$

Теорема (2.2). *Если ранги форм $B_j(t)$ постоянны при $t \in (\tau_1,\tau_2)$, то $B_j(t)$ и $U_j(t)$ гладко зависят от t и определены инвариантно относительно гладких зависящих от времени замен координат на U, формы $B_j(t)$ являются симметрическими неположительно определенными и $\left\{\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}}\dfrac{\partial}{\partial u}\mathcal{H}\right\}^*\bigg|_{U_{j+1}(t)} = 0\ \forall j \geq 0$.*

[52] Символ $\{\cdot\}^*$ означает подстановку особой экстремали. То есть если, например, $f = f(t,q,p,u,\dot{u})$, то $\{f\}^* = f(t,q^*(t),p^*(t),u^*(t),\dot{u}^*(t))$.

Определение (2.2). *Локальным порядком* направления $\xi(t)$ называется наибольшее $h \in \overline{\mathbb{Z}_+}$ такое, что $\xi(t) \in U_h(t)$ при всех $t \in (t_1,t_2)$.

Определение (2.3). Предположим, что размерности подпространств $U_h(t)$ постоянны при $t \in (t_1,t_2)$. *Локальным порядком* $q^*(t)$, $u^*(t)$ называется последовательность неотрицательных целых чисел $(h_0,h_1,h_2,\ldots)$, где $h_s = \mathrm{rk}\, B_s(t)\big|_{U_s(t)}$.

Во второй главе проведена процедура построения флага глобальных порядков, аналогичная переходу с локального порядка на глобальный в случае $d = 1$.

Определение (2.5). Пусть $u^*(t), t \in (t_0,t_1)$ – управление на особой траектории, которая сопрягается (стыкуется) в некоторой точке τ с неособой траекторией с управлением $\widetilde{u}(t)$. Тогда сопряжение называется *регулярным*, если (1) особое управление $u^*(t)$ гладко зависит от t в окрестности τ; (2) неособое управление $\widetilde{u}(t)$ является гладким в односторонней окрестности τ и непрерывно в самой точке τ.

Теорема (2.4). *Пусть для аффинной по управлению системы определен глобальный порядок в окрестности особой на промежутке (t_0,t_1) экстремали $q^*(t)$, $p^*(t)$, $u^*(t)$. Если особая экстремаль $q^*(t)$, $p^*(t)$, $u^*(t)$ регулярно сопрягается с неособой $\widetilde{q}(t)$, $\widetilde{p}(t)$, $\widetilde{u}(t)$ в точке $\tau \in (t_1,t_2)$, и выполнено усиленное условие Гоха-Кренера*

$$(-1)^h \frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2h}}{dt^{2h}}\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{H}\Big|_{(\tau,q^*(\tau),p^*(\tau))}\Big[\widetilde{u}(\tau)-u^*(\tau);\widetilde{u}(\tau)-u^*(\tau)\Big] < 0,$$

где $h < \infty$ – глобальный порядок направления $\widetilde{u}(t) - u^*(t)$, то h нечетно.

Во второй главе изучен класс задач, в которых, с одной стороны, сопряжение особой траектории с неособыми неизбежно (по теореме 3.1 в главе 3), а, с другой стороны, теорема 2.4 (см. [8]) запрещает регулярное сопряжение. Итак, рассмотрим оптимизационную задачу

$$\begin{gathered} J(x) = \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}\langle x,Cx\rangle\,dt \to \min \\ x^{(h)} = u, \quad |u| \le 1, \quad x \in U, \quad u \in U; \text{ и } x^{(k-1)}(0) = q_k^0\ \forall k \le h. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь $U \simeq \mathbb{R}^n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение, а C – симметрическая, положительно определенная билинейная форма. В данной задаче есть равно одна особая экстремаль $x = u = 0$. Ее порядок является последовательностью $(0,\ldots,0,\dim U,0\ldots)$ где $\dim U$ стоит на h-ом месте (подробнее см. [3, 8]). Теорема 3.1 (см. главу 3) гарантирует, что при любых начальных данных $q^0 = (q_1^0,\ldots,q_h^0)$ существует и единственное оптимальное решение задачи (2.10) и оно попадает в начало координат за конечное время $T(q^0)$.

После подходящей линейной замены координат система принципа максимума Понтрягина задачи (2.10) сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений на $z_k \in U$:

$$\dot z_1 = z_2; \dot z_2 = z_3; \ldots; \dot z_{2h} = Cu; \quad u = (-1)^{h+1}\frac{z_1}{|z_1|}. \tag{2.12}$$

Ключевую роль в отыскании явных решений играет многочлен $P_h(\alpha)$:

$$P_h(\alpha) = \big(2h + i\alpha\big)\big((2h-1) + i\alpha\big)\dots\big(1 + i\alpha\big), \tag{2.13}$$

и следующие корни α_j его мнимой части:

$$\operatorname{Im} P_h(\alpha_j) = 0, \qquad (-1)^{h+1}\operatorname{Re} P_h(\alpha_j) > 0, \qquad \alpha_j > 0. \tag{2.14}$$

Обозначим через $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ собственные числа формы C, а через $U_1,\dots,U_s$ – соответствующие собственные подпространства.

Теорема (2.6, совместно с М.И. Зеликиным). *Рассмотрим любой набор двумерных плоскостей $L_m \subseteq U_{k_m}$, $m = 1,\dots,N$. Если для некоторых (различных) $\alpha_{j_m} > 0$ из (2.14), $\mu \in \mathbb{R}$ и всех m выполнено $\frac{P_h(\alpha_{j_m})}{\lambda_{k_m}} = \mu$, то любая траектория вида*[53]

$$z_1 = \sum_{m=1}^{N} t^{2h}\, \exp\Big\{\pm i\alpha_{j_m} \ln|t|\Big\} y_m, \quad u = \mu \sum_{m=1}^{N} \exp\Big\{\pm i\alpha_{j_m} \ln|t|\Big\} y_m, \tag{2.15}$$

оптимальна для задачи (2.10) при любых $y_m \in L_m$, лишь бы $\mu^2 \sum |y_m|^2 = 1$.

На каждой оптимальной траектории (2.15) управление проходит обмотку клиффордова тора $\mathbb{T}^N = (L_1 \times \dots \times L_N) \cap \{|u| = 1\}$ и выходит за конечное время на особую экстремаль $x = u = 0$. Тор $\mathbb{T}^N$ вложен в сферу $S^{n-1} = \{|u| = 1\} \subseteq V$ единичного радиуса. Более того, если значения $\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_N}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то полученная обмотка тора $\mathbb{T}^N$ является всюду плотной.

Предложение (2.1). *Условие (2.14) имеет ровно $\left[\dfrac{h}{2}\right]$ корней.*

В [3] доказано, что при $h \le 15$ решения (2.14) линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Гипотеза (2.1). *Положительные решения $\{\alpha_j\}_{j=1}^{[h/2]}$ условия (2.14) линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.*

Во второй главе эта гипотеза доказана для первого нетривиального случая $h = 4$ (пример 2.3, совместно с М.И. Зеликиным). Доказательство опирается на классическую теорию Галуа.

В **третьей главе** диссертации исследована структура оптимального синтеза в следующем классе нильпотентно-выпуклых задач оптимального управления:

$$\begin{gathered} J(x) = \int_0^{+\infty} f\big(x(t)\big)\, dt \;\to\; \inf \\ x^{(h)}(t) = u(t); \qquad u(t) \in \Omega; \end{gathered} \tag{3.1}$$

[53] Если L – это двумерная плоскость, то через $\exp\{a \pm \phi i\} = e^a(\cos\phi \pm i\sin\phi)$ обозначено растяжение в e^a раз и поворот на угол ϕ (в фиксированном направлении) на L.

с начальными условиями

$$x(0) = q_1^0,\ \dot{x}(0) = q_2^0,\ \ldots\ ,x^{(h-1)}(0) = q_h^0. \tag{3.2}$$

Здесь $h \in \mathbb{N}$; $x,u \in U \simeq \mathbb{R}^N$; множество $\Omega \subset U$ является выпуклым, компактным и $0 \in \operatorname{Int}\Omega$; $f : U \to \mathbb{R}$ – некоторая неотрицательная выпуклая функция, $f(0) = 0$; а $q^0 = (q_1^0, \ldots ,q_h^0)$ – произвольные начальные данные.

Выпуклость задачи (3.1) влечет то, что принцип максимума Понтрягина является не только необходимым условием оптимальности но и, по существу, достаточным (см. теорему 3.3).

Для краткости будем писать $q = (q_1, \ldots ,q_h)$, где $q_k = x^{(k-1)}$.

Теорема (3.1)**.** *Предположим, что в нильпотентно-выпуклой задаче (3.1,3.2) функция f в некоторой окрестности W начала координат удовлетворяет (для некоторых констант $C_1, C_2 \geq 0$ и $\gamma \geq 1$) неравенствам $C_1|x|^\gamma \leq f(x) \leq C_2|x|^\gamma$. Тогда в задаче (3.1) определен такой непрерывный правосторонний поток P^t на U^h, $t \geq 0$, что $P^0 = \mathrm{id}$, $P^{t_1+t_2} = P^{t_1} \circ P^{t_2}$ при $t_1,t_2 \geq 0$, и*

(i) Для любых начальных данных q^0 существует и единственная оптимальная траектория $\widehat{q}(t,q^0)$ задачи (3.1,3.2), и она имеет вид $\widehat{q}(t,q^0) = P^t q^0$.

(ii) Найдется такой момент времени $T(q^0) \geq 0$, что $P^t q^0 = 0$ при $t \geq T(q^0)$. Причем функция $T(q^0)$ непрерывна. Более того, $\exists \alpha,\beta > 0$, что для любой точки q^0 из некоторой окрестности начала координат выполнено

$$\alpha \max(|q_1^0|^{\frac{1}{h}},|q_2^0|^{\frac{1}{h-1}}, \ldots ,|q_h^0|) \leq T(q_0) \leq \beta \max(|q_1^0|^{\frac{1}{h}},|q_2^0|^{\frac{1}{h-1}}, \ldots ,|q_h^0|).$$

Если $W = U$, то эта оценка выполнена для всех q^0.

(iii) Отображение P^t является сюрьекцией при любом $t \geq 0$.

Предположим дополнительно, что $f \in C^2(U)$. Обозначим через $p = (p^1, \ldots ,p^h)$ – сопряженные к $q = (q_1, \ldots ,q_h)$ переменные из принцип максимума Понтрягина. Тогда

$$\mathcal{H}(p,q,u) = -\lambda_0 f(q_1) + \sum_{i=1}^{h-1} \langle p^i,q_{i+1} \rangle + \langle p^h,u \rangle,$$

Теорема (3.2)**.** *Если $f \in C^2(U)$ и выполняются условия теоремы 3.1, то (i) оптимальная траектория $\widehat{q}(t,q^0) = P^t q^0$ нормальна, т.е. $\lambda_0 \neq 0$. Если выбрать $\lambda_0 = 1$, то сопряженная функция $\widehat{p}(t,q^0)$ единственна. Определим отображение $E : U^h \to U^{h*}$, $E(q^0) = \widehat{p}(q^0,0)$. Тогда (ii) для любых $t \geq 0$ и q^0 выполняется $\widehat{p}(t,q^0) = E(P^t q^0)$; (iii) отображение E есть локально липшицевый гомеоморфизм U^h и U^{h*}; и (iv) липшицева поверхность $L = \{(q,E(q)),q \in U^h\} \subset U^h \oplus U^{h*}$, сотканная из оптимальных траекторий, является лагранжевой.*

Отображение E является, с точностью до знака, дифференциалом функции Беллмана. Отметим еще, что в третьей главе разобрано множество примеров применения этих теорем. Например, формула Лефшеца позволяет доказать существование оптимальных траекторий специального вида (примеры 3.2 и 3.4).

В примере 3.1 с помощью теоремы Кантора-Бендиксона доказан следующий результат, дающий для данного класса задач ответ на давний открытый вопрос: насколько «плохим» может быть оптимальное управление. А именно, если в задаче (3.1) множество Ω строго выпукло, и $f \in C^2$, то управление на оптимальной траектории может иметь лишь конечное или счетное число точек разрыва.

Основной объект исследования в **четвертой главе** – это гамильтоновы системы, аффинные по многомерному управлению из многогранника $\Omega \subset U \simeq \mathbb{R}^N$ (см. [6]). Довольно часто ключевую роль при изучении глобального поведения решений таких систем играют особые экстремали и геометрия их окрестностей. Без ограничения общности, $\dim U = \dim \Omega$. Итак, на симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ задана управляемая гамильтонова система принципа максимума Понтрягина

$$\mathcal{H}(x,u) = H(x) + \langle G(x),u \rangle. \tag{4.1}$$

Здесь $x = (q,p) \in \mathcal{M}$, $H : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ и $G : \mathcal{M} \to U^*$ – бесконечно гладкие функции, а $\langle \cdot,\cdot \rangle$ обозначает действие ковектора на векторе. Оптимальное управление $\widehat{u}$ выбирается согласно принципу максимуму Понтрягина: $\langle G,\widehat{u} \rangle = \max_{v\in\Omega} \langle G, v \rangle$. Очевидная геометрическая интерпретация принципа максимума Понтрягина заключается в том, что $\widehat{u}$ лежит в опорной гиперплоскости $\langle G, v \rangle = \mathrm{const}$ к многограннику Ω (если $G \neq 0$). Пересечение опорной гиперплоскости с Ω может быть вершиной или гранью. Рассмотрим произвольную траекторию $x(t),u(t)$ системы (4.1)

Определение (4.1). (i) Если для почти всех t из промежутка (t_1,t_2) максимум в принципа максимума Понтрягина для (4.1) достигается ровно в одной вершине (возможно в разных при разных t), то траекторию $x(t),u(t)$ будем называть *неособой* на (t_1,t_2).

(ii) Зафиксируем грань Γ многогранника Ω. Если при всех t из промежутка (t_1,t_2) максимум в принципа максимума Понтрягина для (4.1) достигается одновременно на всех точках Γ и только в них, то такую траекторию будем называть *особой по грани* Γ.

Рассмотрим управляемую динамическую систему на многообразии M

$$\dot{q} = a(q) + B(q)u. \tag{4.9}$$

Здесь $q \in M$, $a(q) \in T_qM$ и $B(q) \in \mathrm{Hom}(U,T_qM)$ гладко зависят от $q \in M$. Будем считать, что $\dim M \geq \dim U = \dim \Omega$. Целевой функционал – терминального типа и не влияет на гамильтонову систему принципа максимума Понтрягина.

Определение (4.4). Будем говорить, что управление в системе (4.9) *голономно* по грани Γ, если отображение $B(q)|_{\Gamma'}$ невырождено, и поле плоскостей $B(q)\Gamma' \subseteq T_qM$ интегрируемо. Здесь Γ' – линейное подпространство, параллельное Γ.

Теорема (4.1). *Если управление в системе (4.9) голономно по грани* Γ*, то на поверхности* $\mathcal{M}_\Gamma$ *форма* $\{G,\{H,G\}\}$ *является симметрической.*

При помощи метода ниспадающей системы скобок Пуассона система принципа максимума Понтрягина для задачи, голономной по всем граням многогранника Ω сводится к следующей модельной нильпотентно-выпуклой задаче:

$$J(q) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \big\langle q(t),q(t)\big\rangle\, dt \to \inf; \qquad \dot q = u;\ u \in \Omega \subset U;\ q(0) = q_0. \quad (4.14)$$

Здесь $q,u \in U \simeq \mathbb{R}^n$, и $0 \in \operatorname{Int}\Omega$. Топология оптимального синтеза принципиально различается в случаях, когда ортогональная проекции начала координат O_Γ на плоскость грани Γ попадает в IntΓ и не попадает. В четвертой главе построен оптимальный синтез для следующего случая (см. рис. 4.2)

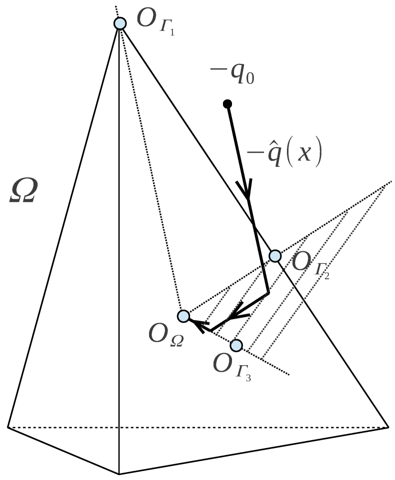

Рис. 4.2: Оптимальная траектория $-\widehat{q}(x)$

Определение (4.5). Будем называть многогранник Ω *не слишком скошенным*, если $O_\Gamma \in \operatorname{Int}\Gamma$ для любой грани Γ многогранника Ω.

Теорема (4.2). *Предположим, что компактный многогранник* Ω *является не слишком скошенным. Тогда для любой начальной точки* $q^0 \neq 0$ *существуют и единственные наборы граней* $\Gamma_1 \subset \ldots \subset \Gamma_k \neq \Omega$ *и набор чисел* $\lambda_1 > 0, \ldots ,\lambda_k > 0$ *такие, что*

$$-q^0 = \lambda_1 O_{\Gamma_1} + \ldots + \lambda_k O_{\Gamma_k} \in \operatorname{cone}(\Gamma_1, \ldots ,\Gamma_k), \qquad \lambda_j > 0\,\forall j.$$

Обозначим $t_j = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i$*,* $t_0 = 0,t_k = T(q^0)$*. Тогда* $\widehat{u}(t,q^0) = O_{\Gamma_j}$ *при* $t \in (t_{j-1},t_j)$ *и*

$$-\widehat{q}(t,q^0) = \lambda_j \frac{t_j - t}{t_j - t_{j-1}} O_{\Gamma_j} + \lambda_{j+1} O_{\Gamma_{j+1}} + \ldots + \lambda_k O_{\Gamma_k} \in \operatorname{cone}(\Gamma_j,\Gamma_{j+1}, \ldots ,\Gamma_k).$$

Для произвольной управляемой системы условие «не слишком скошенности» Ω в точке $x_0 \in \mathcal{M}_\Omega$ означает следующее: необходимо в пространстве управлений U выбрать особое управление $O_\Gamma(x_0)$ по грани Γ за начало координат, а форму $\{G,\{H,G\}\}|_{x_0}$ – за скалярное произведение, и применить определение 4.5. При этом необходимо, чтобы форма $\{G,\{H,G\}\}$ была симметрическая и положительно определенная. В голономном случае форма $\{G,\{H,G\}\}$ является симметричной. По необходимому условию локальной оптимальности Гоха-Кренера форма

$\{G,\{H,G\}\}$ должна быть симметрической неотрицательно определенной. Поэтому на локально оптимальной особой траекторией первого порядка в голономной задаче (4.9) форма $\{G,\{H,G\}\}$ положительно определенна.

Теорема (4.3). *Пусть $\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)$, $t \in (\tau_1,\tau_2)$, – оптимальная особая траектория по всему компактному многограннику Ω системы (4.1) с голономным управлением по каждой грани Ω. Предположим, что форма $\{G,\{H,G\}\}$ положительно определена в точке $\widehat{x}(t^*)$ при $t^* \in (\tau_1,\tau_2)$.*

Если многогранник Ω является не слишком скошенным относительно точки $\widehat{x}(t^*)$, то определено следующее семейство траекторий выходящих из $\widehat{x}(t^*)$ и удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина и необходимым условиям Гоха-Кренера: для каждого набора граней $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \ldots \supset \Gamma_k$ определена такая траектория $x(t)$, $u(t)$ выходящая из $\widehat{x}(t^*)$ при $t > t^*$, что $\dot{x}(t) = u\big(x(t)\big)$ $u\big(x(t)\big) = O_{\Gamma_i}\big(x(t)\big)$ при $t \in (t_{i-1},t_i)$. Здесь $t^* = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ – любой набор, а разница $t_k - t^*$ достаточно мала. Выход на особую траекторию при $t < t^*$ устроен аналогично.

В **пятой главе** изучается оптимальный синтез в следующей нильпотентно-выпуклой задаче оптимального управления:

$$\begin{gathered} J(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \big\langle x(t),x(t)\big\rangle\, dt \to \inf \\ \ddot{x} = u; \qquad u \in \Omega \subset U; \qquad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Здесь $x,u \in U \simeq \mathbb{R}^2$, а Ω является (замкнутым) треугольником, и $0 \in \operatorname{Int}\Omega$. Обозначим $y = \dot{x}$. Пусть ϕ, ψ – сопряженные к x и y переменные из принципа максимума Понтрягина, $q = (x,y)$, $p = (\phi,\psi)$, $M = U \oplus U = \{(x,y)\}$ и $\mathcal{M} = T^*M = \{(p,q)\}$. По теореме 3.2 $\lambda_0 \neq 0$ в принципе максимума Понтрягина. Положив $\lambda_0 = 1$, получаем $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\langle x,x\rangle + \langle \phi,y\rangle + \langle \psi,u\rangle$. Соответствующая гамильтонова система с разрывной правой частью имеет вид:

$$\dot{\psi} = -\phi;\ \ \dot{\phi} = x;\ \dot{x} = y;\ \ \dot{y} = u; \qquad \langle \psi,u\rangle \to \max_{u\in\Omega} \tag{5.2}$$

В задаче (5.2) существует ровно одна особая по Ω траектория: $x \equiv y \equiv \phi \equiv \psi \equiv u \equiv 0$. Она имеет второй глобальный порядок. В главе 9 доказано, что хаотическое поведение оптимальных траекторий задачи (5.1) является типичным для гамильтоновых систем с разрывной правой частью.

Гамильтонова система (5.2) обладает масштабной группой симметрий $\mathbb{R}\setminus 0$ с действием g следующего вида: $g(\lambda)(x,y,\phi,\psi) = (\lambda^2 x,\lambda y,\lambda^3\phi,\lambda^3\psi)$.

Важную роль при построении полного оптимального синтеза в задаче (5.1) играют автомодельные траектории – это такие траектории, которые являются периодическими, с точностью до подкрутки на действие g группы $\mathbb{R}_+$:

Определение (5.2)**.** Мы будем называть траекторию $(x(t),y(t),\phi(t),\psi(t))$ системы (5.2) *автомодельной*, если существуют такие $t_0 > 0$ и $\lambda_0 > 0$, что

$$g(\lambda_0)(x(t),y(t),\phi(t),\psi(t)) = \big(x(t_0+\lambda_0 t),y(t_0+\lambda_0 t),\phi(t_0+\lambda_0 t),\psi(t_0+\lambda_0 t)\big)$$

Определение (5.3)**.** *Поверхностью переключения* $\mathcal{S}$ в задаче (5.1) мы будем называть множество точек в $\mathcal{M} = T^*M$, на которых максимум по u в (5.2) достигается не в единственной точке треугольника Ω.

Сформулируем основной результат пятой главы: теорему 5.1 о хаотичном поведении оптимальных траекторий в задаче (5.1). Первые три пункта теоремы описывают исследуемое множество точек Ξ на лагранжевой поверхности $M_+ = E(\mathbb{R}^4)$ (см. теоремы 3.1 и 3.2), а в последнем пункте описана хаотическая динамика траекторий на Ξ. Множество Ξ является аналогом множества неблуждающих траекторий, естественным для интегральных воронок.

Флаг глобальных порядков единственной особой траектории $x = y = \phi = \psi = u = 0$ в задаче (5.1) есть $(0,0,2,0\ldots)$. Поэтому по теореме 2.4 любая траектория из Ξ пересекает $\mathcal{S}$ счетное число раз, и хаотическая динамика поведения этих траекторий описана в терминах последовательности пересечения страт $\mathcal{S}$. Эта последовательность кодируется с помощью пространства Σ_{01} бесконечных в обе стороны слов из 0 и 1. Через $l : \Sigma_{01} \to \Sigma_{01}$ обозначена топологическая цепь Маркова, т.е. l – это сдвиг влево. Динамическая система $l : \Sigma_{01} \to \Sigma_{01}$ совпадает с динамической системой подковы Смейла на множестве неблуждающих точек.

Теорема (5.1)**.** *Существует такое число $\varepsilon > 0$, что если углы треугольника Ω в задаче (5.1) отличаются от $\pi/3$ не более чем на ε и расстояние от центра Ω до начала координат не превосходит ε $\operatorname{diam}\Omega$, то определено такое множество $\Xi \subset \mathcal{M} = T^*M = \{(x,y,\phi,\psi)\}$, что*

(I) Для любой точки $z \in \Xi$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t,z)$ гамильтоновой системы (5.2), проходящая через z, существует и единственная при $t \in [-\infty; T(z)]$, и $X(T(z),z) = 0$.

(II) Множество Ξ соткано из траекторий гамильтоновой системы (5.2): если $z \in \Xi$, то $X(t,z)$ лежит в Ξ при всех $t \in [-\infty; T(z))$.

(III) Проекция траектории $X(t,z)$ на M, продолженная нулем при $t > T(z)$, оптимальна при любом $z \in \Xi$. Траектория $X(t,z)$ пересекает $\mathcal{S}$ счетное (бесконечное) число раз в моменты $\ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 \ldots < T(z)$, $X(t_k,z) \in \mathcal{S}$ и $t_0 \le 0 < t_1$, причем $t_k \to T(z)$ при $k \to +\infty$ и $t_k \to -\infty$ при $k \to -\infty$.

(IV) Рассмотрим динамическую систему $\Phi : \Xi \cap \mathcal{S} \to \Xi \cap \mathcal{S}$, переводящую точку $z \in \Xi$ на $\mathcal{S}$ в точку следующего пересечения траектории $X(t,z)$ с $\mathcal{S}$, т.е.

$\Phi(z) = X(t_1,z)$. Существует такое натуральное $n > 0$ (одинаковое для всех треугольников Ω), что отображение Φ^n полусопряжено с топологической марковской цепью на $\bigsqcup^2 \Sigma_{01}$, а именно: существует такое непрерывное сюръективное отображение $\Psi_{01} : \Xi \cap \mathcal{S} \to \bigsqcup^2 \Sigma_{01}$, что $\Psi_{01} \circ \Phi^n = l \circ \Psi_{01}$.

В восьмой главе полностью описан оптимальный синтез в задаче (5.1) для случая, когда треугольник Ω является правильным. В этом случае на фактор-пространстве M/g существуют три важных цикла Z_{ij}, отвечающие трем выделенным семействам автомодельных траекторий. Каждое такое семейство получает при ограничении задачи (5.1) на прямую, содержащую высоту треугольника Ω. При таком ограничении получается одномерная задача Фуллера с несимметричным отрезком управлений. Также на пространстве M/g определены два трехзвенных цикла $Z^{\pm}$, найденные в пятой главе диссертации. Циклы Z_{ij} являются притягивающими, а циклы $Z^{\pm}$ – отталкивающими.

В восьмой главе показано, что почти все оптимальные траектории в задаче (5.1) в обратном времени притягиваются к одному из двух циклов $Z^{\pm}$, а в прямом времени выходят за конечное время со счетным числом переключений на один из трех циклов Z_{ij}. Выражение «почти все» означает, что на M/g определено множество точек X полной меры, удовлетворяющих описанным свойствам. Множество $(M/g) \setminus X$ имеет нецелую размерность, а поведение траекторий на нем является хаотическим (например содержит счетное число периодических траекторий).

Для доказательства этого факта в **шестой главе** на фактор-поверхности $\mathcal{S}/g$ выделены 4 множества $A.A$, $A.C$, $C.A$ и $C.C$, которые (с точностью до подкрутки на действие группы S_3) обладают следующими свойствами: (i) $\big((M/g) \setminus X\big) \cap (\mathcal{S}/g) \subset A.A \sqcup A.C \sqcup C.A \sqcup C.C$; и (ii) множества $A.A$, $A.C$, $C.A$ и $C.C$ образуют предмарковское разбиение для отображения Φ/g (см. определение 7.2).

Для получения описания хаотической структуры оптимального синтеза необходимы также метрические свойства отображения Φ/g, касающиеся гиперболичности системы. По теореме 3.2 отображение Φ/g является лишь липшицевым. Поэтому в **седьмой главе** подробно изучены динамические системы, обладающие лишь свойством липшивости.

Пусть B_1 и B_2 два прямоугольника в пространстве $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^m$, то есть $B_i = D_i \times D_i'$, где $D_i \subseteq \mathbb{R}^k$ и $D_i' \subseteq \mathbb{R}^m$, $i = 1,2$, D_i и D_i' – замкнутые диски (или гомеоморфные им подмножества $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$), и f – некоторое липшицево отображение из B_1 в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Вообще говоря, некоторые точки из B_1 могут не попасть в B_2. Обозначим через (x,y) – координаты на B_1, а через (u,v) – координаты на B_2. Здесь $x,u \in \mathbb{R}^k$ и $y,v \in \mathbb{R}^m$. Положим $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ – проекции $f(x,y)$ на $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.

Определение (7.1). Пусть $f(B_1) \cap B_2 = f(C)$. Будем называть множество C *полным* для отображения f, если (1) C связно; (2) $\mathrm{pr}'(C) = D_1'$; (3) Для любого $z \in C$ отображение $\mathrm{pr}\,|_{f(C \cap (D_1 \times \mathrm{pr}'(z)))}$ является сюрьекцией на D_2.

Здесь pr и pr′ – проекции на $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Данные требования стандартны для систем типа подковы. Обозначать через $\mathrm{Lip}_c(x \to y)$ (или $\mathrm{Lip}_c(u \to v)$) пространство липшицевых функций $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ с константой Липшица c и метрикой из пространства C^0.

Предположим, что (через ρ обозначено расстояние в соответствующем пространстве).

$$\begin{cases} \underline{u_x}\Delta x \;\le\; \rho\big(u(x_2,y_0),u(x_1,y_0)\big) \;\le\; \overline{u_x}\Delta x, \\ \qquad\qquad\;\; \rho\big(u(x_0,y_2),u(x_0,y_1)\big) \;\le\; \overline{u_y}\Delta y, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \underline{v_y}\Delta y \;\le\; \rho\big(v(x_0,y_2),v(x_0,y_1)\big) \;\le\; \overline{v_y}\Delta y, \\ \qquad\qquad\;\; \rho\big(v(x_2,y_0),v(x_1,y_0)\big) \;\le\; \overline{v_x}\Delta y, \end{cases} \tag{7.1}$$

для любых x_0,x_1,x_2,y_0,y_1 и y_2 таких, что $f(x_i,y_j) \in B_2$. Здесь и далее $\Delta x = \rho(x_2,x_1)$, $\Delta y = \rho(y_2,y_1)$. Через $\overline{u_x}$, $\underline{u_x}$ и т.д. обозначены неотрицательные константы. Мы предполагаем, что $\overline{u_x} \ge \underline{u_x} > 0$ и $\overline{v_y} \ge \underline{v_y} > 0$.

Определение (7.2). Липшицева динамическая система $f : B \to B$ допускает *разрезание на прямоугольники* (или *предмарковское разбиение*), если существует конечный набор прямоугольников B_i, $B = \sqcup B_i$ такой, что (i) для каждого отображения $f^{ij} = f|_{B_i \cap f^{-1}(B_j)}$ определены такие липшицевы константы $\overline{u_x}^{ij}$, $\underline{u_x}^{ij}$ и т.д., что выполняются условия (7.1); (ii) $\big(f(B_i) \cap f(B_j)\big) \cap B_k = \emptyset$ при любых k и $i \ne j$; и (iii) компоненты $f^{ij}(B_i) \cap B_j$ являются полными для f^{ij}.

Основные результаты о фрактальной структуре липшицевой динамической системы $f : B \to B$ в седьмой главе получены в предположении, что f удовлетворяет следующему набору условий:

Определение (7.4). Липшицева динамическая система $f : B \to B$ на предмарковском разбиении $B = \sqcup_i B_i$ удовлетворяет условиям *липшицевой гиперболичности*, если

(I) Существуют такие константы $c_i \ge 0$, что для каждой стрелки (ij) в графе Γ выполняются неравенства $\underline{u_x}^{ij} - c_i\,\overline{u_y}^{ij} > 0$ и $\dfrac{c_i\,\overline{v_y}^{ij} + \overline{v_x}^{ij}}{\underline{u_x}^{ij} - c_i\,\overline{u_y}^{ij}} \le c_j$.

(II) Константы $c_i \ge 0$ можно выбрать так, что для каждого простого цикла[54] $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k i_1)$ выполняется $\lambda_{i_1 i_2}\lambda_{i_2 i_3}\dots\lambda_{i_k i_1} < 1$, где $\lambda_{ij} = \dfrac{\underline{u_x}^{ij}\overline{v_y}^{ij} + \overline{u_y}^{ij}\overline{v_x}^{ij}}{\underline{u_x}^{ij} - c_i\overline{u_y}^{ij}}$.

[54]Цикл $(i_0, \dots i_N, i_0)$, не содержащий повторяющихся вершин, будем называть простым.

По предмарковскому разбиению очевидным образом строится граф Γ: из вершины i ведет стрелка в вершину j, если $f(B_i) \cap B_j \neq \emptyset$. Обозначим пространство бесконечных в обе стороны путей в графе Γ через Σ_Γ, а бесконечных только вправо путей в графе Γ через Σ_Γ^+. Если f обратимо, то разбиение $B = \sqcup B_i$ является предмарковским и для f^{-1}. Отображению f^{-1} отвечает граф Γ^*, построенный по Γ обращением стрелок.

Обозначим через $\mathrm{NW}(f)$ множество неблуждающих точек, а через[55] $S(f) = \{x \in B \,:\, f^k(x) \in B \,\forall k \in \mathbb{Z}\}$. Асимптотические свойства динамической системы $f : B \to B$ описываются с помощью ее ограничения на $S(f)$.

Теорема (7.1). *Предположим, что липшицева динамическая система $f : B \to B$ обладает предмарковским разбиением $B = \sqcup_{i=1}^N B_i$, отображение f обратимо:*

$$\underline{u_x}^{ij}\underline{v_y}^{ij} - \overline{u_y}^{ij}\overline{v_x}^{ij} > 0 \text{ для каждой стрелки } (ij) \text{ в графе } \Gamma,$$

и для f и f^{-1} выполнены условия липшицевой гиперболичности с константами c_i и d_i соответственно, причем $c_i d_i < 1$ для всех i. Тогда существует гомеоморфизм $\Phi_\Gamma : \Sigma_\Gamma \to S(f)$ сопрягающий динамическую систему $f : S(f) \to S(f)$ и бернуллиевский сдвиг $l : \Sigma_\Gamma \to \Sigma_\Gamma$, то есть $f \circ \Phi_\Gamma = \Phi_\Gamma \circ l$. Более того, $\mathrm{NW}(f) \subseteq S(f)$, а если граф Γ связен, то $\mathrm{NW}(f)$ и $S(f)$ совпадают.

Размерности по Хаусдорфу и Минковскому множества $\mathrm{NW}(f)$ можно оценить следующим образом. Пусть $\Lambda_\pm = (\lambda_{ij}^\pm)$, $\Lambda'_\pm = (\lambda_{ij}^{\pm\prime})$, где если (ij) является стрелкой в графе Γ, то

$$0 \quad < \quad \lambda_{ij}^{-\prime} = \frac{\underline{u_x}^{ij}\ \underline{v_y}^{ij} - \overline{u_y}^{ij}\ \overline{v_x}^{ij}}{\underline{u_x}^{ij} + c_i\overline{u_y}^{ij}} \quad \leq \quad \lambda_{ij}^{-} = \frac{\underline{u_x}^{ij}\ \overline{v_y}^{ij} + \overline{u_y}^{ij}\ \overline{v_x}^{ij}}{\underline{u_x}^{ij} - c_i\overline{u_y}^{ij}} \tag{7.15}$$

и $\lambda_{ij}^- = \lambda_{ij}^{-\prime} = 0$ в противном случае. Аналогично, если (ij) стрелка в Γ, то[56]

$$0 \quad < \quad \lambda_{ji}^{+\prime} = \frac{\underline{y_v}^{ji}\ \underline{x_u}^{ji} - \overline{y_u}^{ji}\ \overline{x_v}^{ji}}{\underline{y_v}^{ji} + d_j\overline{x_v}^{ji}} \quad \leq \quad \lambda_{ji}^{+} = \frac{\underline{y_v}^{ji}\ \overline{x_u}^{ji} + \overline{y_u}^{ji}\ \overline{x_v}^{ji}}{\underline{y_v}^{ji} - d_j\overline{x_v}^{ji}} \tag{7.16}$$

и $\lambda_{ji}^+ = \lambda_{ji}^{+\prime} = 0$ в противном случае.

Если $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geq 0$ – матрица и $s \geq 0$, то через $A_s = (a_{ij}^s)$ обозначена матрица, каждый элемент которой возведен в степень[57] s.

Теорема (7.5). *Предположим, что липшицева динамическая система $f : B \to B$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1. Тогда если граф Γ примитивен, то*

$$(s'_- + s'_+)\alpha \leq \dim_H \mathrm{NW}(f) \leq \overline{\dim_B}\mathrm{NW}(f) \leq s_- + s_+.$$

[55] Если $f^k(x) \in B$ и $f^{k+1}(x) \notin B$ для некоторого $k \geq 0$, то точка x перестает участвовать в динамической системе $f : B \to B$ после k-ой итерации. Аналогично, если $f^k(x) \in B$ и $f^{k-1}(x) \notin B$ для некоторого $k \leq 0$.

[56] Константы $\underline{x_u}^{ij}$, $\overline{x_u}^{ij}$ и т.д. есть константы Липшица для отображения f_{ij}^{-1} из условия (7.1).

[57] Если $s = 0$, то A_0 состоит из 0 и 1, где единицы стоят на тех позициях, что $a_{ij} \neq 0$.

Здесь $\alpha = \min_\sigma \left\{ \frac{\log \lambda_\sigma^-}{\log \lambda_\sigma^{-\prime}}, \frac{\log \lambda_\sigma^+}{\log \lambda_\sigma^{+\prime}} \right\}$ *по всем простым циклам* σ *в* Γ*, а* $s_\pm$ *и* $s'_\pm$ *выбираются так, чтобы соответствующий спектральный радиус равнялся 1:*

$$\rho\big((\Lambda_-)_{s_-}\big) = 1;\ \rho\big((\Lambda'_-)_{s'_-}\big) = 1;\ \rho\big((\Lambda_+)_{s_+}\big) = 1;\ \rho\big((\Lambda'_+)_{s'_+}\big) = 1.$$

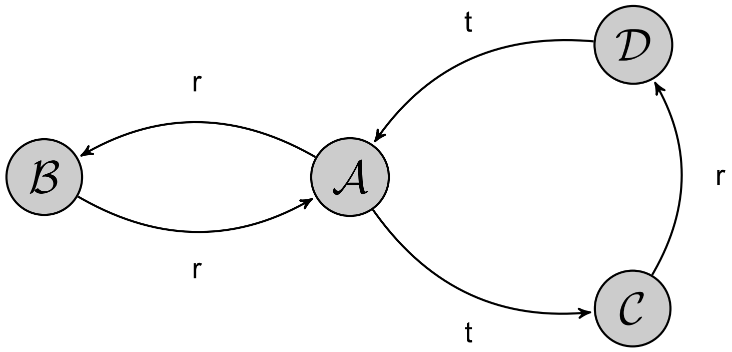

Рис. 8.2: Граф $\widehat{\Gamma}$ – прототип графа Γ из определения 8.1.

В **восьмой главе** доказана теорема о структуре хаоса в оптимальном синтезе в задаче (5.1) для случая, когда треугольник Ω является правильным. В этом случае хаотическая динамика описывается с помощью топологической цепи Маркова на следующем ориентированном графе Γ:

Определение (8.1)**.** Изображенная схема графа $\widehat{\Gamma}$ на рис. 8.2 является прототипом графа Γ. Множество вершин Γ есть прямое произведение множества вершин $\widehat{\Gamma}$ и множества упорядоченных пар чисел (ij), $i,j \in \{1,2,3\}$, $(i \neq j)$. Поэтому Γ имеет 24 вершины $\{A_{12}, A_{13}, \ldots D_{32}\}$. Из вершины A_{ij} графа Γ ведет стрелка в вершину $B_{i'j'}$ если $j = i'$ и $i \neq j'$. В знак этого факта в $\widehat{\Gamma}$ стрелка $A \to B$ помечена значком r. Из A_{ij} ведет стрелка $C_{i'j'}$ если $i' = j$ и $j' = i$. В знак этого факта в $\widehat{\Gamma}$ стрелка $A \to C$ помечена значком t. Стрелки $B_{ij} \to A_{i'j'}$, $C_{ij} \to D_{i'j'}$ и $D_{ij} \to A_{i'j'}$ строятся аналогично. Других стрелок в графе Γ нет.

Первые три пункта основной теоремы 8.2 восьмой главы описывают исследуемые множества точек $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$, сотканные из траекторий гамильтоновой системы (5.2), а остальные пункты теоремы описывают хаотическую динамику на этих множествах. Поскольку любая траектория из множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$ пересекает стратифицированное многообразие $\mathcal{S}$ разрыва правой части системы (5.2) счетное число раз перед попаданием в начало координат, то хаотическая динамика этих траекторий описана в терминах последовательности пересечения страт $\mathcal{S}$.

Обозначим через $.V$ множество путей в Γ, начинающихся из вершины V.

Теорема (8.2, совместно с Зеликиным М.И. и Хильдебрандом Р.)**.** *В расширенном фазовом пространстве* $\mathcal{M} = T^*M$ *задачи (5.1) определены два множества* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{X}^+$*, обладающие следующими свойствами*

(I) *Для любой точки $z \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^+$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t,z)$ гамильтоновой системы (5.2), проходящая через z, существует и единственна при $t \in [-\infty; T(z)]$, и $X(T(z),z) = 0$.*

(II) *Множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$ образованы из траекторий гамильтоновой системы (5.2): если $z \in \mathcal{X}^+$, то $X(t,z)$ лежит в $\mathcal{X}^+$ при всех $t \in [0; T(z))$. Если же $z \in \mathcal{X}$, то $X(t,z)$ лежит в $\mathcal{X}$ при всех $t \in [-\infty; T(z))$.*

(III) *Проекция траектории $X(t,z)$ на фазовое пространство M, продолженная 0 при $t > T(z)$ является оптимальной при любом $z \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^+$ (то есть $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^+ \subset M_+ = E(M)$). Траектория $X(t,z)$ пересекает $\mathcal{S}$ счетное число раз в моменты $\ldots < t_{-1} < t_0 \leq 0 < t_1 < t_2 \ldots < T(y)$, $X(t_k,z) \in \mathcal{S}$, причем $t_k \to T(z)$ при $k \to +\infty$ и $t_k \to -\infty$ при $k \to -\infty$.*

(IV) *Динамическая система $\Phi : \mathcal{X} \cap \mathcal{S} \to \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$, переводящая точку $z \in \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$ в точку следующего пересечения траектории $X(t,z)$ с множеством $\mathcal{S}$, $\Phi(z) = X(t_1,z)$, полусопряжена с топологической цепью Маркова на Σ_Γ^+ с помощью некоторого отображения Ψ_Γ, т.е. $\Psi_\Gamma \circ \Phi = l \circ \Psi_\Gamma$. Отображение Ψ_Γ непрерывно и сюрьективно, а прообраз любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$ есть одномерное гладкое многообразие, диффеоморфное открытому интервалу. Прообразы множеств $\Psi_\Gamma^{-1}(.A_{ij})$, $\Psi_\Gamma^{-1}(.B_{ij})$, $\Psi_\Gamma^{-1}(.C_{ij})$ и $\Psi_\Gamma^{-1}(.D_{ij})$ лежат на страте $\mathcal{S}_{ij}$ где ковектор ψ ортогонален ребру (ij) треугольника Ω.*

(V) *Динамическая система $\Phi : \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{S} \to \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{S}$, переводящая точку $z \in \mathcal{X}_+ \cap \mathcal{S}$ в точку следующего пересечения траектории $X(t,z)$ с множеством $\mathcal{S}$, $\Phi(z) = X(t_1,z)$, полусопряжена с левым сдвигом на топологической цепи Маркова на Σ_Γ^+ с помощью некоторого отображения Ψ_Γ^+, т.е. $\Psi_\Gamma^+ \circ \Phi = l \circ \Psi_\Gamma^+$. Отображение Ψ_Γ^+ непрерывно, и сюрьективно, а прообраз любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$ есть липшицево многообразие, относительная внутренность которого гомеоморфна двумерному открытому диску. Прообразы множеств $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(.A_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(.B_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(.C_{ij})$ и $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(.D_{ij})$ лежат на $\mathcal{S}_{ij}$.*

(VI) *Размерности по Хаусдорфу и Минковскому множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^+$ удовлетворяют неравенствам*

$$3.204 \leq \dim_H \mathcal{X}^+ \leq \overline{\dim}_B \mathcal{X}^+ \leq 3.408,$$
$$2.575 \leq \dim_H \mathcal{X} \leq \overline{\dim}_B \mathcal{X} \leq 3.284.$$

(VII) *Топологическая энтропия левого сдвига l на Σ_Γ и Σ_Γ^+ равна*

$$h_{\text{top}}(l) = \log_2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}} \right) \approx 0.4057$$

(VIII) *Абсолютно аналогичная картина наблюдается в гамильтоновой системе (5.2) для траекторий исходящих из начала координат, за исключением того, что, они уже не будут оптимальными в задаче (5.1).*

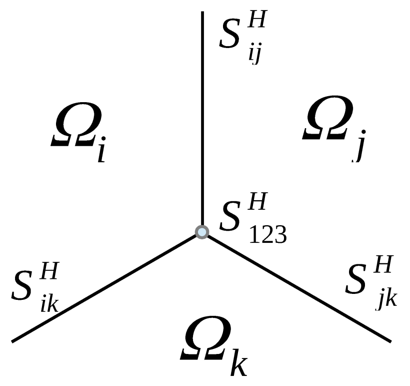

Рис. 9.1: Взаимное расположение страт $\mathcal{S}^H_{ij}$, $\mathcal{S}^H_{123}$ и областей Ω_i

В **девятой главе** диссертации с помощью разработанного автором оригинального метода ниспадающей системы скобок Пуассона получены результаты о наличии хаотических структур в интегральных воронках точек, лежащих на стыке трех гиперповерхностей разрыва правой части гамильтоновой системы.

Рассмотрим гладкое $2n$-мерное симплектическое многообразие $\mathcal{M}^{2n}$. Пусть $(2n-1)$-мерное стратифицированное подмногообразие $\mathcal{S}^H \subset \mathcal{M}$ разделяет $\mathcal{M}$ на конечное число открытых областей $\Omega_1, \ldots \Omega_k$: $(\mathcal{M} = \overline{\bigcup \Omega_i})$. Рассмотрим непрерывный гамильтониан $H(q,p) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, ограничение которого $H_i = H|_{\Omega_i}$ на любое множество Ω_i определяет гладкую функцию, C^∞ продолжимую на окрестность множества $\overline{\Omega_i}$. Рассмотрим открытое множество $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Пусть в множестве $\mathcal{U}$ содержатся части лишь от трех $(2n-1)$-мерных страт $\mathcal{S}^H_{ij} \subset \mathcal{S}^H$, $(i,j = 1,2,3)$, которые разделяют области Ω_i и Ω_j. Пусть $\mathcal{S}^H_{ij}$ примыкают друг к другу по страте $\mathcal{S}^H_{123}$ размерности $(2n-2)$. А именно, потребуем, чтобы в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathcal{S}^H_{123}$ выполнялись следующие неравенства (с возможной заменой H на $-H$, см. рис. 9.1)

$$H_i(x) > \max(H_j(x),H_k(x)) \ \forall x \in \Omega_i, \text{ для различных } i, j \text{ и } k \text{ из } \{1,2,3\}. \quad (9.1)$$

Без ограничения общности $H(x_0) = 0$. Обозначим

$$3G = 3F_0 = H_1+H_2+H_3,\ 3F_1 = H_2-H_3,\ 3F_2 = H_3-H_1,\ 3F_3 = H_1-H_2. \quad (9.2)$$

Определение (9.1). Точку $x_0 \in \mathcal{S}^H_{123}$, $H_1(x_0) = H_2(x_0) = H_3(x_0)$, будем называть *странной*, если в x_0 выполнены следующие условия:

(i) В окрестности x_0 выполняется условие (9.1) (возможно с заменой H на $-H$).

(ii) Функций F_r, $(\mathrm{ad}\, F_i)F_r$, $(\mathrm{ad}\, F_j)(\mathrm{ad}\, F_i)F_r$ и $(\mathrm{ad}\, F_k)(\mathrm{ad}\, F_j)(\mathrm{ad}\, F_i)F_r$ обращаются в ноль в точке x_0, где индекс r пробегает числа $1,2,3$, а индексы i,j,k – числа $0,1,2,3$. Набор их дифференциалов в точке x_0 имеет максимальный ранг (насколько это допускается условиями антикоммутативности, линейности, тождествами Якоби и равенством $F_1 + F_2 + F_3 \equiv 0$). Иными словами, эти дифференциалы находятся в общем положении.

(iii) Билинейная форма $B_{rr'} = \mathrm{ad}\, F_r(\mathrm{ad}\, G)^3 F_{r'}|_{x_0}, r,r' = 1,2,3,$ имеет максимально возможный ранг 2, и является симметрической, неположительно (неотрицательно) определенной, если условие (9.1) выполняется для H (соответственно для $-H$). Остальные (независимые от перечисленных) коммутаторы пятого порядка от функций G и F_r, $r = 1,2,3$, обращаются в ноль в x_0.

Динамика траекторий в интегральной воронке странной точки x_0 описывается в двух нижеследующих теоремах 9.1 и 9.2. В первой теореме дано более точное описание хаотичного поведения траекторий чем во второй, однако на форму $B_{rr'}$ наложено дополнительное ограничение, эквивалентное (для модельной задачи (5.1)) условию правильного треугольника (аналогично теореме 8.2). Во второй же теореме это условие заменено на естественное условие близости к правильному треугольнику (аналогично теореме 5.1).

Теорема (9.1, совместно с Зеликиным М.И. и Хильдебрандом Р.)**.** *Пусть точка x_0 гамильтоновой системы с кусочно-гладким гамильтонианом H является странной, а форма $B_{rr'}$ пропорциональна билинейной форме с матрицей $(1-3\delta_{rr'})^3_{r,r'=1}$ с положительным множителем, если условие (9.1) выполняется для H, и с отрицательным, если условие (9.1) выполняется для $-H$. Тогда в окрестности x_0 существует такое множество $\mathcal{X}_H(x_0)$, что*

(I) Для любой точки $z \in \mathcal{X}_H(x_0)$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t,z)$, проходящая через z, существует и единственная при $t \in [0;T(z)]$, и $X(T(z),z) = x_0$.

(II) Множество $\mathcal{X}_H(x_0)$ образовано из траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом H: если $z \in \mathcal{X}_H(x_0)$, то $X(t,z) \in \mathcal{X}_H(x_0)$ при $t \in [0;T(z))$. Более того, траектория $X(t,z)$ при $t \in (0;T(z))$ пересекает поверхность $\mathcal{S}^H$ счетное (бесконечное) число раз в моменты $t_1 < t_2 < \ldots$, $X(t_k,z) \in \mathcal{S}^H$, причем $t_k \to T(z)$ при $k \to +\infty$.

(III) Динамическая система $\Phi_H : \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \to \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$, переводящая точку $z \in \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ в точку следующего пересечения траектории $X(t,z)$ с $\mathcal{S}^H$, т.е. $\Phi_H(z) = X(t_1,z)$, полусопряжена с помощью некоторого отображения Ψ_Γ^H с односторонней топологической марковской цепью Σ_Γ^+ бесконечных вправо путей на фиксированном графе Γ (см. определение 8.1), не зависящем от x_0 и H, то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H & \xrightarrow{\Phi_H} & \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \\
\Big\downarrow \Psi_\Gamma^H & & \Big\downarrow \Psi_\Gamma^H \\
\Sigma_\Gamma^+ & \xrightarrow{l} & \Sigma_\Gamma^+
\end{array}$$

Отображение Ψ_Γ^H непрерывно и сюрьективно. Прообраз $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(\sigma)$ любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$ гомеоморфен открытому двумерному диску D^2, и диаметр $\Phi_H^k\big((\Psi_\Gamma^H)^{-1}(\sigma)\big)$ стремится к 0 при $k \to +\infty$. Прообразы множеств $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.A_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.B_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.C_{ij})$ и $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.D_{ij})$ лежат на страте $\mathcal{S}_{ij}^H$ с теми же индексами.

(IV) *Если $dG(x_0) = 0$, то размерности по Хаусдорфу и Минковскому множества $\mathcal{X}_H(x_0)$ не зависят от x_0 и H (лишь бы точка x_0 удовлетворяла условиям теоремы), совпадают с размерностями множества $\mathcal{X}$ в теореме 8.2, и, следовательно, удовлетворяют оценкам*

$$3.204762 \leq \dim_H \mathcal{X}_H(x_0) \leq \overline{\dim_B} \mathcal{X}_H(x_0) \leq 3.407495. \qquad (9.4)$$

(V) *Топологическая энтропия бернуллиевского сдвига l совпадает с топологической энтропией из п. VII теоремы 8.2 и есть*

$$h_{\text{top}}(l) = \log_2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{69}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{69}}{18}}\right) \approx 0.4057$$

(VI) *Аналогичная картина с обращением течения времени имеет место для траекторий, выходящих из точки x_0.*

Теорема (9.2)**.** *Пусть точка x_0 гамильтоновой системы с кусочно-гладким гамильтонианом H является странной. Предположим, что существует такое число $\lambda_H(x_0) > 0$ (если условие (9.1) выполняется для H) или $\lambda_H(x_0) < 0$ (если условие (9.1) выполняется для $-H$), что форма $\lambda_H(x_0)B_{rr'}$ достаточно близка*[58] *к билинейной форме с матрицей (9.3). Тогда в окрестности точки x_0 существует множество точек точек $\Xi_H(x_0)$, обладающее следующими свойствами:*

(I) *Для любой точки $z \in \Xi_H(x_0)$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t,z)$, проходящая через z, существует и единственная при $t \in [0; T(z)]$, и $X(T(z),z) = x_0$.*

(II) *Множество $\Xi_H(x_0)$ соткано из траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом H: если $z \in \Xi_H(x_0)$, то $X(t,z) \in \Xi_H(x_0)$ при $t \in [0; T(z))$. Траектория $X(t,z)$ при $t \in (0; T(z))$ пересекает поверхность $\mathcal{S}^H$ счетное (бесконечное) число раз в моменты $t_1 < t_2 < \ldots$, $X(t_k,z) \in \mathcal{S}^H$, причем $t_k \to T(z)$ при $k \to +\infty$.*

[58] *Под «достаточно близка» понимается существование такой независящей от x_0 и H окрестности матрицы (9.3) в пространстве симметрических матриц ранга 2, что форма $\lambda_H(x_0)B_{rr'}$ в ней лежит.*

(III) Рассмотрим динамическую систему $\Phi_H : \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \to \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$, *переводящую точку* $z \in \Xi_H(x_0)$ *на* $\mathcal{S}^H$ *в точку следующего пересечения траектории* $X(t,z)$ *с* $\mathcal{S}^H$, *т.е.* $\Phi_H(z) = X(t_1,z)$. *Существует такое натуральное* $n > 0$ *(одинаковое для всех гамильтоновых систем и точек* x_0 *и совпадающее со степенью* n *в теореме 5.1), что отображение* Φ_H^n *полусопряжено с топологической марковской цепью* $\bigsqcup^2 \Sigma_{01}^+$, *где* Σ_{01}^+ *– пространство бесконечных в одну сторону последовательностей из 0 и 1. Другими словами, существует такое непрерывное сюрьективное отображение* Ψ_{01}^H *из* $\Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ *в пространство* $\bigsqcup\limits^2 \Sigma_{01}^+$, *что следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H & \xrightarrow{\Phi_H^n} & \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi_{01}^H} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_{01}^H} \\ \bigsqcup\limits^2 \Sigma_{01}^+ & \xrightarrow{\quad l \quad} & \bigsqcup\limits^2 \Sigma_{01}^+ \end{array}$$

где l *обозначает сдвиг влево на каждом экземпляре* Σ_{01}^+. *Прообраз* $(\Psi_{01}^H)^{-1}(\sigma)$ *каждой точки* $\sigma \in \Sigma_{01}^+$ *гомеоморфен открытому двумерному диску* D^2, *и диаметр* $\Phi_H^k\big((\Psi_{01}^H)^{-1}(\sigma)\big)$ *стремится к 0 при* $k \to +\infty$.

(IV) Помимо описанного в пунктах (I)–(IV) канторова множества $\Xi_H(x_0)$, *в точку* x_0 *входит еще два типа траекторий со счетным числом переключений:*

(a) Существует два однопараметрических семейства "трехзвенных" траекторий R_{123} *и* R_{132}, *попадающих в точку* x_0 *за конечное время со счетным числом последовательных пересечений страт* S_{12}^H, S_{23}^H *и* S_{31}^H *в прямом порядке для* R_{123} *и в обратном порядке для* R_{132}.

(b) Существует 3 двупараметрических семейства "четырехзвенных" траекторий Q_1, Q_2 *и* Q_3. *Каждая траектория из* Q_i *счетное число раз последовательно пересекает* $\mathcal{S}_{ij}^H$, S_{ik}^H, S_{ik}^H, $\mathcal{S}_{ij}^H$ *и далее по циклу (*$i \neq j \neq k$*).*

(V) Аналогичная картина с обращением течения времени имеет место для траекторий, выходящих из точки x_0.

Замечание (9.11, совместно с Зеликиным М.И. и Хильдебрандом Р.). Появление странных точек в больших размерностях не уничтожается малым шевелением H_i, если дифференциалы их коммутаторов в x_0 до 5ого порядка включительно находятся в общем положении. Действительно, в этом случае множество странных точек $\mathcal{ST}$ является гладким многообразием в окрестности x_0 и его коразмерность легко вычисляется при помощи слов Холла через размерность свободной нильпотентной градуированной алгебры Ли глубины 5 с 3 образующими.

В **заключении** диссертации кратко перечислены основные результаты и указаны ссылки на соответствующие теоремы и примеры.

Заключение

В диссертации решены трудные задачи теории оптимального управления и теории гамильтоновых систем с разрывной правой частью. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования:

1. Теоремы о том, что особые экстремали фиксированного (натурального) порядка в задачах с одномерным управлением формируют симплектическое многообразие, а их поток на нем является гамильтоновым (теорема 1.2).

2. Доказательство интегрируемости по Лиувиллю потока особых экстремалей в задаче быстродействия для управления волчком Лагранжа под воздействием контролируемого магнитного поля (пример 1.6 и теорема 1.5).

3. Нахождение нового феномена оптимального управления в виде иррациональной всюду плотной обмотки клиффордова тора, проходимой (в положительном направлении) за конечное время (теорема 2.6 и пример 2.3).

4. Доказательство того, что в классе нильпотентно-выпуклых задач оптимальный синтез образует правосторонний поток, а оптимальное управление имеет не более чем счетное число точек разрыва (теоремы 3.1 и 3.2 и пример 3.1).

5. Теорема о структуре лагранжева многообразия в окрестности особой траектории первого порядка в задачах, аффинных и голономных по многомерному управлению из многогранника (теорема 4.3).

6. Теорема о наличии хаотических структур в оптимальном синтезе в модельной нильпотентно-выпуклой задаче с управлением из произвольного треугольника, близкого к правильному (теорема 5.1).

7. Теорема о точной хаотической структуре оптимального синтеза в модельной нильпотентно-выпуклой задаче оптимального управления с управлением из правильного треугольника (теорема 8.2).

8. Теорема о сопряженности липшицевой гиперболической динамической системы с соответствующей топологической цепью Маркова (теорема 7.1).

9. Теорема об оценках на размерности по Хаусдорфу и Минковскому множества неблуждающих точек с помощью липшицевых констант динамической системы (теорема 7.5).

10. Теоремы о наличии хаоса в интегральных воронках точек, лежащих на стыке трех гиперповерхностей разрыва правой части гамильтоновой системы (теоремы 9.1 и 9.2) и его общем положении (замечание 9.11).

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту член-корреспонденту РАН, профессору Михаилу Ильичу Зеликину за полезные обсуждения и постоянную поддержку и Роладну Хильдебранду за множество плодотворных обсуждений.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Локуциевский Л. В.* Гамильтоновость потока особых траекторий // *Математический сборник*. — 2014. — Т. 205, № 3. — С. 133–160.
2. *Зеликин М.И. Локуциевский Л.В. Хильдебранд Р.* Типичность фрактально-хаотической структуры интегральных воронок в гамильтоновых системах с разрывной правой частью // *Современная математика, фундаментальные направления*. — 2015. — Т. 56. — С. 5–128.
3. *Зеликин М. И., Киселев Д. Д., Локуциевский Л. В.* Оптимальное управление и теория Галуа // *Математический сборник*. — 2013. — Т. 204, № 11. — С. 83–98.
4. *Lokutsievskii L. V.* Fractal structure of Hyperbolic Lipschitzian Dynamical Systems // *Russian Journal of Mathematical Physics*. — 2012. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 27–44.
5. *Локуциевский Л. В.* Оптимальный вероятностный поиск // *Математический Сборник*. — 2011. — Т. 202, № 5. — С. 77–100.
6. *Локуциевский Л. В.* Особые режимы в управляемых системах с многомерным управлением из многогранника // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2014. — Т. 78, № 5. — С. 167–190.
7. *Lokutsievskiy Lev, Runge Vincent*. Optimal Control by Multipoles in the Hele-Shaw Problem // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. — 2015. — Vol. 17, no. 2. — Pp. 261–277.
8. *Зеликин М. И., Локуциевский Л.В., Хильдебранд Р.* Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением // *Труды МИАН*. — 2012. — Т. 277. — С. 74–90.
9. *Локуциевский Л. В.* Накопление переключений в задачах поиска // *Оптимальное Управление, Современная Математика Фундаментальные Направления*. — 2006. — Т. 19. — С. 70–77.
10. *Hildebrand R., Lokutsievskiy L. V., Zelikin M. I.* Generic Fractal Structure of Finite Parts of Trajectories of Piecewise Smooth Hamiltonian Systems // *Russian Journal of Mathematical Physics*. — 2013. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 25–32.
11. *Локуциевский Л. В.* Типичная структура лагранжевого многообразия в задачах с чаттерингом // *Математические заметки*. — 2014. — Т. 95, № 6. — С. 842–853.
12. *Zelikin M. I., Lokutsievskii L. V., Usachev R. A.* Vortex singularities of optimal strategies at the beginning of motion in search problems on n-dimensional Riemannian

manifolds // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2009. — Vol. 160, no. 2. — Pp. 197–220.

13. *Локуциевский Л. В.* Вихревые особенности оптимальных стратегий при начале движения в задачах поиска на n–мерных многообразиях // *Доклады Академии Наук*. — 2007. — Т. 417, № 3. — С. 316–318.
14. *Hildebrand R., Lokutsievskiy L.V., M.I. Zelikin*. Generic fractal structure of the optimal synthesis in problems with affine multidimensional control // Control Conference (ECC), 2013 European, IEEE Conference Publications, Institute of Electrical and Electronics Engineers. — 2013. — Pp. 3197–3202.
15. *Зеликин М. И., Локуциевский Л. В., Хильдебранд Р.* Стохастическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в окрестности точки негладкости гамильтониана // *Доклады Академии Наук*. — 2013. — Т. 450, № 1. — С. 1–6.

В работе [7] диссертанту принадлежат теорема о предельном переходе в уравнении Полубариновой-Кочиной и обобщенное уравнение Полубариновой-Кочиной. В. Рунге принадлежат теорема о связи управлений в уравнении Полубариновой-Кочиной и в моментах Ричардсона, необходимые и достаточные условия управляемости в задаче Хеле-Шоу с конечным числом ненулевых моментов. Оптимальный синтез в задаче Хеле-Шоу с двумя ненулевыми моментами получен авторами совместно.

В работе [8] диссертанту принадлежит теорема о флаге порядков и теорема о сопряжении особой экстремали с неособой для задач с многомерным управлением. Примеры задач с оптимальным управлением в виде иррациональной обмотки клиффордова тора получены совместно диссертантом и М.И. Зеликиным. Метод понижения размерности системы за счет использования инвариантных координат (матриц Грамма) принадлежит Р. Хильдебранду.

В работе [3] Д.Д. Киселеву принадлежит доказательство гипотезы 1 для $5 \leq h \leq 15$. Теорема 3 получена совестно диссертантом и М.И. Зеликиным.

В работе [12] М.И. Зеликину принадлежит постановка задачи, Л.В. Локуциевскому принадлежат доказательства, за исключением доказательства теоремы 10.3, Р.А. Усачеву принадлежит доказательство теоремы 10.3.

В работе [2] диссертанту принадлежат леммы 2.6, 2.7, 5.1, 5.2, 6.3 и 6.4 и теоремы 3.1 и 6.2. Р. Хильдебранду принадлежат леммы 2.3, 2.5, 2.9, 3.6 и 5.3. М.И. Зеликину принадлежит постановка задачи, леммы 2.1, 2.2, 2.4, 2.8 и 6.1. Теоремы 2.1, 5.3, 5.4 и 6.1 получены авторами совместно.

В работах [10, 14, 15] теорема 1 получена авторами совместно.