"УТВЕРЖДАЮ"

чл. корр. РАН Гончаров С. С.

19 ноября 2015 года

Директор Института математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Отзыв ведущей организации
на диссертацию Локуциевского Льва Вячеславовича
«Особые экстремали в задачах с многомерным управлением»,
представленной на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.02 —
дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление

Основы современной теории оптимального управления были заложены в фундаментальных работах Л. С. Понтрягина, Р. В. Гамкрелидзе, В. Г. Болтянского и Е. Ф. Мищенко в 50-ых годах прошлого века. С самого начала эта теория была ориентирована на приложения к инженерным задачам, необходимость решения которых стимулирует развитие этой области математики по настоящее время. Одновременно с принципом максимума Понтрягина возникло понятие особых экстремалей, которые идут вдоль поверхности разрыва правой части гамильтоновой системы принципа максимума, и не могут быть найдены непосредственно. Следует отметить, что особые экстремали возникают в многочисленных задачах и исследование их свойств привлекает внимание специалистов из различных стран.

В последние годы очень активно обсуждается вопрос о структуре особых экстремалей в субримановых задачах. В этих задачах понятия особых и анормальных (т. е. с $\lambda_0 = 0$) экстремалей совпадают, что неизбежно вызывает подчас непреодолимые трудности. Открытым вплоть до настоящего времени остается вопрос о гладкости кратчайших особых экстремалей в субримановых задачах. Этот вопрос имеет большое значение, так как многие результаты в этой области опираются на предположение, что кратчайшие особые экстремали отсутствуют. Причина этого в том, что в окрестностях особых экстремалей регулярное поведение системы, как правило, существенно усложняется.

Диссертационное исследование Локуциевского Льва Вячеславовича посвящено изучению особых экстремалей и структуры их окрестностей в задачах оптимального управления следующего вида

$$\dot{x} = f_0(x) + u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + \ldots + u_k f_k(x), \tag{1}$$

где многомерное управление $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in \Omega$, $x \in M$.

Диссертация состоит из введения, девяти глав, заключения, списка литературы, списков рисунков и таблиц.

Во введении приводится историческая справка, обзор предшествующих результатов в данной проблематике, формулируются цели и задачи исследования, его теоретическая значимость, научная новизна, методы и методология исследования.

Первая глава «Гамильтоновость потока особых траекторий» состоит из восьми параграфов. В этой главе Локуциевский Л. В. дает новое определение порядка особой экстремали в задачах с одномерным управлением. Это определение сочетает в себе преимущества двух классических определений: глобального порядка системы и локального порядка траекторий. Первое определение удобно лишь при отсутствии атипичных особых траекторий, а второе удобно при работе с одной атипичной траекторией, но не позволяет эффективно исследовать структуру ее окрестности. Новое определение натурального порядка совпадает с классическим определением глобального порядка, если нет атипичных траекторий, а если они есть, определение натурального порядка дает инструментарий для построения более тонкой иерархии порядков особых экстремалей. Важный результат первой главы сформулирован в теореме 1.2, смысл которой состоит в том, что при наличии натурального порядка особые траектории обязаны быть гладкими, не могут пересекаться с другими особыми траекториями, а их поток гамильтонов. В качестве применения полученных в первой главе результатов соискатель приводит полное описание особых траекторий в задаче управления движением намагниченного «волчка Лагранжа» под воздействием регулируемого внешнего магнитного поля.

Во второй главе «Флаг порядков особой экстремали в задачах с многомерным управлением» доказаны два основных результата. Первый результат — это теорема о сопряжении особой траектории с неособой в задачах с многомерным управлением. Этот результат обобщает аналогичное утверждение для задач с одномерным управлением. Вторая решаемая проблема состоит в том, чтобы найти оптимальное управление в виде обмоток клиффордова тора и доказать, что эти обмотки являются иррациональными. Точнее, изучается обобщенная задача Фуллера:

$$\int_0^\infty \langle Cx, x\rangle \, dt \to \inf$$

$$x^{(q)} = u, \qquad x, u \in \mathbb{R}^n, \qquad |u| \le 1,$$

где матрица C симметрична и положительно определена. Хочется отметить обнаруженное автором (совместно с М. И. Зеликиным) качество решения, которое отличает их от классического фокуса в ОДЕ: решения в виде логарифмических спиралей попадают в начало координат за конечное время.

Третья глава «Оптимальный поток в одном классе нильпотентно-выпуклых задач» посвящена задачам следующего вида:

$$\int_0^\infty f(x)\,dt \to \inf; \qquad x^{(h)} = u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

где Ω — выпуклый компакт, а функция f выпукла с минимумом в начале координат. Основной результат главы 3 получен в теоремах 3.1 и 3.2. В этих теоремах доказано, что оптимальный синтез образует правосторонний полупоток в фазовом пространстве, и этот поток биективно поднимается в сопряженное пространство посредством функции Беллмана. В качестве важного вывода этих теорем автор получил доказательство того, что оптимальное в этих задачах решение может иметь не более чем счетное число переключений.

В четвертой главе «Особые траектории первого порядка в задачах с управлением из многогранника» исследуется задача о структуре оптимальных траекторий для гамильтоновой системы, аффинной по управлению, в окрестности особой экстремали первого порядка. Здесь для более сложной структуры множества управлений (сравнительно с известным результатом Зеликина — Зеликиной — Хлюстова) описаны структуры выхода экстремалей на особую траекторию первого порядка.

Пятая глава «Особые траектории первого порядка в задачах с управлением из многогранника» состоит из одиннадцати параграфов. Основной объект исследования этой главы — модельная нильпотентно-выпуклая задача:

$$\int_0^\infty \langle x, x\rangle\,dt \to \inf; \qquad \ddot{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

где Ω — треугольник, содержащий начало координат. Если треугольник *правильный*, то были известны некоторые ключевые моменты оптимального синтеза (см. работу [78] из списка литературы к диссертации). Эти ключевые моменты послужили отправной точкой для доказательства существования хаотической структуры оптимального синтеза не только в правильном треугольнике, но и для произвольного треугольника, близкого к правильному (теорема 5.1).

В шестой, седьмой и восьмой главах получено точное описание структуры оптимального синтеза в задаче с правильным треугольником (теорема 8.2). Для этого соискатель в шестой главе приводит полное описание топологической структуры отображения последования Пуанкаре в задаче с правильным треугольником. Отображение последования липшицево, но не гладкое.

Седьмая глава как раз и посвящена изучению фрактальной структуры гиперболических динамических систем, которые лишь липшицевы. Здесь доказаны два результата о структуре множества неблуждающих точек. В первом установлена сопряженность липшицевой динамической системы соответствующей цепи Маркова, а во втором доказана теорема об оценках на размерности множества неблуждающих точек. Для этих выводов достаточно лишь проверить выполнение некоторых квадратичных неравенств на постоянные Липшица динамической системы. В восьмой главе на основе предыдущих двух глав получена теорема 8.2 о точном описании структуры оптимального синтеза в модельной задаче с правильным треугольником, в том числе и точное описание содержащейся в нем хаотической структуры.

Последняя глава 9 посвящена распространению теорем 5.1 и 8.2 на произвольные гамильтоновы системы с разрывной правой частью: доказаны теоремы 9.1 и 9.2 о хаотической структуре в интегральных воронках. Следует заметить, что топологическая энтропия бернуллиевского сдвига в п. V теоремы 9.1 и топологическая энтропия из п. VII теоремы 8.2 равны $\log_2 \lambda$, где λ — наименьшее число Пизо (известное под названием пластического числа); оно равно единственному вещественному корню кубического уравнения $x^3 - x - 1 = 0$. (Число Пизо — целое алгебраическое вещественное число r, большее 1, такое, что расстояние от r^n до ближайшего натурального числа сходится к нулю при $n \to \infty$.)

Следует специально отметить разработанный Л. В. Локуциевским новый оригинальный метод исследования гамильтоновых систем с разрывной правой частью, основанный на изучении ниспадающей системы дифференциальных уравнений, позволившей свести иерархию скобок Пуассона к нильпотентно-выпуклой ситуации.

С помощью этого метода были получены основные результаты 1, 4 и 9 глав об особенностях ветвления решений в гамильтоновых системах с разрывной правой частью.

Решенные в диссертации проблемы и полученные результаты интересны и содержательны, а многие доказательства основаны на тонких геометрических и технически сложных рассуждениях. В целом они образуют полноценную теорию, отвечающую на трудные вопросы геометрической теории управления. Особенно значимым представляется решение проблемы о структурах интегральных воронок в задачах с многомерным управлением.

Изложение материала в диссертации соответствует требованиям, предъявляемым к математическим текстам: все содержательные утверждения автора снабжены полными и строгими доказательствами, все используемые в тексте результаты других авторов снабжены ссылками на цитируемые источники.

Текст диссертации написан четко и аккуратно. Немногочисленные опечатки не влияют на правильность полученных в диссертации результатов и не умаляют достижения соискателя. Роль автора в совместных результатах тщательно описана как в автореферате, так и в тексте диссертационного исследования.

Результаты являются новыми, полностью доказаны и своевременно опубликованы в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание. Результаты диссертации докладывались автором на международных конференциях и научных семинарах. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых на механико-математическом факультете МГУ, в Математическом институте им. В. А. Стеклова, в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова, в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН и др. учреждениях, в прикладных исследованиях, а также в специальных курсах для студентов-математиков.

Тематика и содержание диссертации Л. В. Локуциевского «Особые экстремали в задачах с многомерным управлением» отвечает паспорту специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертационная работа Л. В. Локуциевского «Особые экстремали в задачах с многомерным управлением» является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных ее автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области оптимального управления. В диссертации решены научные проблемы: доказана теорема о наличии хаоса на конечных (сколь угодно малых) промежутках времени в гамильтоновых системах с разрывной правой частью и получено его полное описание; показано, что особые экстремали фиксированного порядка образуют гладкий гамильтонов поток; установлено, что оптимальный синтез в нильпотентно-выпуклых задачах образует правосторонний полупоток и доказано, что оптимальное управление может иметь не более чем счетное число точек разрыва; построены примеры оптимального управления в виде иррациональной всюду плотной обмотки клиффордова тора, проходимой за конечное время; получены достаточные условия сопряженности липшицевой гиперболической динамической системы соответствующей топологической цепи Маркова и найдены оценки на размерности множества неблуждающих точек, использующие лишь константы Липшица отображения. Многие результаты диссертации получены с помощью разработанного автором метода исследования задач с помощью ниспадающей системы скобок Пуассона ограничений гамильтониана на области гладкости.

В заключение отметим, что диссертация Л. В. Локуциевского «Особые экстремали в задачах с многомерным управлением» удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждении ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, Локуциевский Лев Вячеславович, несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании лаборатории геометрического анализа Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН 18 ноября 2015 г.

Заведующий лабораторией
геометрического анализа
ФБГУН ИМ СО РАН
доктор физико-математических наук,
профессор С. К. Водопьянов

Водопьянов Сергей Константинович, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, профессор, e-mail: vodopis@math.nsc.ru, телефон: +7 (383) 329-76-15, заведующий лабораторией Геометрического анализа ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 660090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

Старший научный сотрудник
лаборатории дифференциальных и разностных уравнений
ФБГУН ИМ СО РАН
доктор физико-математических наук В. М. Гордиенко

Гордиенко Валерий Михайлович, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, e-mail: gordienk@math.nsc.ru, телефон: +7 (383) 329-76-85, старший научный сотрудник лаборатории дифференциальных и разностных уравнений ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 660090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

19 ноября 2015 г.

Подпись С. К. Водопьянова
удостоверяю В. М. Гордиенко
Зав. оргтотделом Н.З. Киндалева
ИМ СО РАН
«19» 11 2015 г.