ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу
Локуциевского Льва Вячеславовича
«Особые экстремали в задачах с многомерным управлением»,
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

В диссертационной работе Л.В.Локуциевского исследуются вопросы геометрической структуры множества оптимальных траекторий и их динамики. В основе исследования лежит сведение задач оптимального управления к гамильтоновым системам с помощью принципа максимума Понтрягина. Гамильтониан в таких системах, вообще говоря, получается негладким, что влечет разрывность правой части канонических уравнений Гамильтона. Поэтому многие методы классической теории гладких гамильтоновых систем оказываются непригодными в окрестности множества разрыва. Особые экстремали - это экстремали, лежащие в множестве разрыва.

Изучение структур полей экстремалей имеет большое значение и более чем полувековую историю. Однако их построение в окрестностях особых экстремалей связано с большими трудностями, обусловленными невозможностью явного интегрирования системы (в подавляющем большинстве задач) и отсутствием единственности решения в точках на особых экстремалях (вне особых экстремалей единственность не может нарушиться, как показано в теореме 1.3 диссертации). Для качественного описания особенностей системы, возникающих по причине ветвления решений, необходимо исследовать следующие семейства оптимальных траекторий: во-первых, множество особых экстремалей, и, во-вторых, множество неособых траекторий, проходящих через данную точку на особой экстремали (так называемые интегральные воронки). Исследованию именно этих семейств траекторий и посвящена основная часть диссертационной работы. Несомненна актуальность этого исследования.

Для задач с одномерным управлением в диссертации впервые доказано свойство гамильтоновости семейства особых экстремалей (теорема 1.2) и получено обобщение классической теоремы о сопряжении неособой траектории с особой экстремалью (теорема 1.4). Доказательства основаны на разработанном автором в первой главе новом аппарате выстраивания иерархии скобок Пуассона гладких частей гамильтониана в древовидную систему (в диссертации эта иерархия названа «ниспадающей системой»). К задачам с одномерным управлением относится рассмотренный в первой главе очень нетривиальный пример задачи быстродействия в управлении намагниченным осесимметричным волчком (пример (1.6)). Волчок помещен в катушку индуктивности, напряжение на которой выступает в качестве управления. С использованием теоремы о гамильтоновости потока особых экстремалей удалось показать, что этот поток в рассматриваемой задаче является суперинтегрируемым и найти явные формулы для особых экстремалей (теорема 1.5).

Начиная со второй главы автор исследует задачи с многомерным управлением. В этой главе развивается общая теория порядков особых траекторий. А в качестве примера для обобщенной задачи Фуллера (пример 2.3, теорема 2.6, совместно с М.И.Зеликиным) с управлением из шара B найдены оптимальные траектории необычного и совершенно нового типа: управление в них движется по иррациональной обмотке тора, вложенного в сферу ∂B, а фазовая точка при этом описывает логарифмическую спираль и входит в притягивающую точку за конечное время (эта притягивающая точка является особой траекторией).

В третьей главе диссертации исследован некоторый класс нильпотентно-выпуклых задач с ограниченным многомерным управлением (термин "нильпотентно-выпуклая задача" введен автором диссертации). Показано, что в задачах этого класса начало координат является единственной особой экстремалью, а его интегральная воронка представляет собой в точности семейство оптимальных траекторий задачи. Оптимальные траектории образуют необратимую динамическую систему (односторонний полупоток) в интегральной воронке начала координат (теоремы 3.1, 3.2 и 3.4). Показано (пример 3.1), что оптимальное управление в рассматриваемом классе задач может иметь лишь конечное или счетное число точек разрыва. Найденные общие свойства оптимальных траекторий использованы в последующих главах для изучения конкретных задач. В частности, исследование воронок точек на особых экстремалях первого порядка для задачи с многомерным управлением из многогранника $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, приводит к следующей нильпотентно-выпуклой задаче:

$$\int_0^\infty \sum_{j=1}^N x_j^2 \, dt \to \inf; \qquad \dot{x}_j = u_j, \ j = 1, \ldots, N; \quad (u_1, \ldots, u_N) \in \Omega,$$

которая исследована полностью в главе 4. Изучение воронок точек на особых экстремалях второго порядка для задачи с двумерным управлением из треугольника приводит к нильпотентно-выпуклой задаче

$$\int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2) \, dt \to \inf; \qquad \dot{x}_j = y_j, \ \dot{y}_j = u_j, \ j = 1, 2; \quad (u_1, u_2) \in U \subset \mathbb{R}^2,$$

где U – треугольник, Исследованию свойств оптимального синтеза этой задачи посвящены 5-ая, 6-ая и 8-ая главы диссертации. В пятой главе доказана хаотичность оптимального полупотока в этой задаче оптимального управления с управлением из произвольного треугольника (теорема 5.1, важную роль в доказательстве этой теоремы играет Лемма 5.9 (Л.В.Локуциевский, Р. Хильденбранд) о существовании и свойствах гомоклинической траектории). В восьмой главе получено полное описание хаотической структуры оптимального синтеза в этой задаче для случая, когда треугольник управлений является правильным (теорема 8.2, совместно с М.И.Зеликиным и Р. Хильденбрандом). При помощи предложенного автором метода выстраивания скобок Пуассона в некоторую иерархию (ниспадающую систему) удалось использовать эти результаты в качестве основы, на которую опираются теоремы 9.1 (совместно с М.И.Зеликиным и Р. Хильденбрандом) и 9.2, описывающие хаотические структуры интегральных воронок в произвольных задачах с двумерным управлением из треугольника.

При исследовании оптимального синтеза в модельной нильпотентно-выпуклой задаче оптимального управления из треугольника возникает некоторая гиперболическая динамическая система с дискретным временем. Эта динамическая система задается негладким (липшицевым) отображением. Гладкие гиперболические динамические системы исследовались ранее в классических работах С. Смейла, Д.В. Аносова, Я.Г. Синая, А.Б. Катка, Д. Рюэля, Р. Боуэна и многих других. Однако, этих результатов оказалось недостаточно для доказательства полученных в диссертации результатов. В седьмой главе диссертации исследованы липшицевы гиперболические динамические системы. Доказана теорема о сопряженности такой системы с топологической марковской цепью (на соответствующем графе) и получены оценки на размерности множеств неблуждающих точек. Для применения этих результатов необходимо лишь вычислить липшицевы константы отображения: если они удовлетворяют некоторым неравенствам, то выполняется теорема о сопряженности с марковской цепью и получаются явные оценки на размерности множества неблуждающих точек. Проведенное в этой главе исследование липшицевых систем важно и несомненно будет использоваться и в общем контексте теории динамических систем.

В диссертационной работе Л.В. Локуциевского выявлено и исследовано новое явление в теории гамильтоновых систем с разрывной правой частью: хаотическое поведение траекторий в интегральных воронках. Данное явление является новым как с точки зрения классической теории гамильтоновых систем, так и с точки зрения классической эргодической теории. В 1990г. в работах И. Купки, М.И. Зеликина и В.Ф. Борисова исследовались интегральные воронки некоторых специальных точек в случае, когда множество N разрыва правой части системы является гиперповерхностью. В их работах было доказано, что в ситуации общего положения любая траектория, попадающая в некоторую особую точку $x_0 \in N$, обязана за конечное время совершить счетное число последовательных пересечений N. При этом моменты пересечения t_k монотонно возрастают к предельному моменту T, в который траектория попадает в точку x_0. За это время траектория обязана счетное число раз побывать с обеих сторон от гиперповерхности N. Множество всех таких особых точек x_0 является гладким подмногообразием коразмерности 7. Важно отметить, что на конечном промежутке времени содержится счетное число точек пересечения траектории с множеством разрыва N. В диссертации Л.В. Локуциевского обнаружена возможность хаотического поведения траекторий в интегральных воронках на конечных промежутках времени (теоремы 9.1 (совместно с М.И.Зеликиным и Р. Хильденбрандом) и 9.2). В отличие от работ Купки-Зеликина-Борисова, в диссертации исследуется ситуация, когда множество точек разрыва правой части системы N является объединением трех гиперповерхностей S_i, $i = 1, 2, 3$, смыкающихся по подмногообразию S коразмерности 2. По-прежнему, если траектория попадает в $x_0 \in S$, то она обязана счетное число раз пересечь каждую из гиперповерхностей S_i. Однако последовательность пересечения гиперповерхностей S_i у разных траекторий может быть разной. Прямое использование классической эргодической теории невозможно, так как вся динамика укладывается в конечный промежуток времени. Вместо асимпотики по непрерывному времени исходной системы, автор использует асимптотику по числу пересечений траектории с множеством N (которых накапливается счетное число за конечное время). Получающаяся динамическая система с дискретным временем оказывается полусопряжена с топологической марковской цепью. Это ведет к тому, что интегральная воронка имеет фрактальную структуру и нецелую размерность, а описанная динамическая система имеет ненулевую топологическую энтропию. Все эти явления, естественные для теории гиперболических динамических систем, наблюдаются здесь на конечных (более того, сколь угодно малых) промежутках времени.

Через всю диссертацию проходит разработанный Л.В. Локуциевским новый метод выстраивания системы скобок Пуассона в иерархическую систему с последующим анализом полученной иерархии («ниспадающая» система скобок Пуассона). С помощью этого метода устанавливается, что экстремали в широком классе задач приближаются оптимальными траекториями в некоторой модельной нильпотентно-выпуклой задаче. Поэтому решение одной модельной задачи дает ответ о структуре поля экстремалей в целом классе задач оптимального управления. Как показал автор, поля оптимальных экстремалей в нильпотентно-выпуклых задачах устроены достаточно хорошо, и часто допускают точное описание.

Автор провел огромную работу по исследованию особых экстремалей. Производит большое впечатление математическая эрудиция автора: в работе используются результаты и подходы из оптимального управления, обыкновенных дифференциальных уравнений, динамических систем, геометрии, функционального анализа и алгебры.

Текст работы написан с вниманием к читателю и может служить основой монографии. Общие результаты используется в примерах, которые имеют самостоятельную важность. Количество опечаток незначительно для текста столь большого объема.

Результаты диссертации являются новыми. Они полностью доказаны и своевременно опубликованы в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание. Результаты диссертации докладывались автором на большом количестве международных конференций и научных семинарах. Тематика и содержание диссертации Л.В. Локуциевского «Особые экстремали в задачах с многомерным управлением» отвечает паспорту специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертационная работа Л.В. Локуциевского «Особые экстремали в задачах с многомерным управлением» является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных ее автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области оптимального управления.

На основании вышесказанного считаю, что диссертация Л. В. Локуциевского «Особые экстремали в задачах с многомерным управлением» полностью удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждении ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, Локуциевский Лев Вячеславович, безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ведущий научный сотрудник
ФГБУН Институт космических исследований РАН,
доктор физико-математических наук А.И. Нейштадт

Нейштадт Анатолий Исерович (e-mail: aneishta@iki.rssi.ru, +7 (495) 333 51 45), доктор физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика, ведущий научный сотрудник, ФГБУН Институт космических исследований РАН, 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная 84/32.

Подпись А.И.Нейштадта заверяю.

Ученый секретарь
ФГБУН Институт космических исследований РАН
доктор физико-математических наук А.В. Захаров

9.12.2015