

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Льва Вячеславовича Локуциевского “*Особые экстремали в задачах с многомерным управлением*”, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

В диссертации Льва Вячеславовича Локуциевского изучаются управляемые системы общего вида и связанные с ними гамильтоновы системы с разрывной правой частью. Как известно, очень тесная связь между задачами управления и задачами теории гамильтоновых систем осуществляется через принцип максимума Понтрягина.

Отметим в первой части диссертации следующие основные результаты:

1. Для задач, аффинных по одномерному управлению, доказана теорема о гамильтоновости особого потока (глава 1). Она утверждает, что при определенных условиях общности положения особые экстремали замечают симплектическое подмногообразие фазового пространства. Одно из главных достижений автора в этой главе — новое определение порядка особой траектории, оказавшееся намного удобнее классического определения локального порядка, и намного эффективнее классического определения глобального порядка. Внушительная совокупность результатов этой главы демонстрирует полезность нового определения для теории. Именно, достигается существенное прояснение структуры множества особых траекторий, а также вопросов сопряжения особых и неособых траекторий. В частности, показано, что в ситуации общего положения особые траектории замечают симплектическое подмногообразие фазового пространства, а движение по ним описывается гладким гамильтонианом. Понятие глобального порядка также весьма подходит для вычислений. Например с помощью нового определения порядка полностью вычислены особые траектории в задаче быстрого действия для управления волчком Лагранжа в переменном магнитном поле. Эта задача имеет 7 степеней свободы и, вряд-ли ее можно решить с помощью прямых выкладок.
2. Для задач с многомерным управлением построено обобщенное понятие порядка. В этом случае порядок особой траектории описывается флагом подпространств направлений с фиксированным порядком. Эти подпространства вообще говоря поворачиваются с течением времени (глава 2).
3. Построены примеры задач, где множеством допустимых управлений выступает шар, а оптимальное управление представляет собой иррациональную обмотку клиффордова тора, вложенного в границу шара. Причем половина этой обмотки (в одном направлении) проходит за конечное время. Оптимальная траектория представляет собой логарифмическую спираль, натянутую на эту обмотку, причем вся эта спираль тоже проходит за конечное время, в отличие от логарифмической спирали в стандартном фокусе (параграфы 2.6, 2.7). Вопрос о структуре оптимального управления оказывается тесно связанным с теорией чисел, точнее с вопросом о линейной независимости над полем рациональных чисел корней некоторого конкретного полинома с целыми коэффициентами.

4. Изучен один класс нильпотентно-выпуклых задач оптимального управления (глава 3). Доказано, что, во-первых, оптимальный синтез порождает в таких задачах полупоток на фазовом пространстве, а, во-вторых, этот полупоток можно эквивалентно перенести на пространство сопряженных переменных с помощью дифференциала функции Беллмана. Наличие оптимального потока оказывается очень удобным: например, удается доказать, что оптимальные траектории содержат не более чем счетное число переключений. Имея поток можно применять различного рода топологические результаты: например, с помощью формулы Лефшеца в некоторых случаях удается доказать существование оптимальных траекторий специального вида. Результаты этой главы служат основой для изучения отображения последования Пуанкаре на поверхности переключения управления в обобщенной задаче Фуллера во второй части диссертации.
5. Для задач с многомерным управлением из многогранника исследовался возможный выход оптимальных траекторий на особую траекторию первого порядка. Оказалось, что в голономных задачах лагранжева поверхность является стратифицированным многообразием, страты которого сотканы специальным образом из особых по соответствующей грани траекторий. Диаграмма примыканий стратов лагранжевой поверхности аналогична диаграмме примыканий граней многогранника.

Вторая, и, возможно, наиболее интересная часть диссертации посвящена исследованию нового феномена хаотического запутывания оптимальных траекторий в задачах с многомерным управлением из треугольника. Многие технические средства, использованные в этой части, заимствованы из результатов первой части. Тем самым, лишний раз подчеркивается идейное и техническое единство всей диссертации. Главная работа в изучении феномена хаотического запутывания оптимальных траекторий была проделана автором совместно с М. И. Зеликиным и Р. Хильдебрандом. Оказывается, что чередование вершин треугольника на оптимальном управлении описывается с помощью топологической цепи Маркова. Выделяется множество неблуждающих оптимальных траекторий. Это множество — фрактал, сходный с неблуждающим множеством подковы Смейла. Вычислена его размерность по Хаусдорфу и Минковскому — она строго больше 3 и строго меньше 4. Явно найдена топологическая энтропия, которая выражается через решение кубического уравнения с целыми коэффициентами.

Данный феномен сильно отличается от поведения известных классических хаотических систем. Обычно хаотическое поведение проявляется в асимптотическом поведении системы на бесконечно больших промежутках времени. В обнаруженном феномене все хаотическое поведение укладывается в конечный промежуток времени. Это связано с тем, что “асимптотика” здесь связана с точками переключения на оптимальной траектории, которых накапливается бесконечно много за конечное время.

1. Анализ базируется на исследовании оптимального синтеза одной модельной задачи оптимального управления, обобщающей классическую задачу Фуллера в том смысле, что отрезок допустимых управлений заменен на треугольник. В главе 5 исследованы основные свойства оптимального синтеза, в модельной задаче с получена первая теорема о хаотичности оптимального синтеза (основанная на исследовании гомоклинических точек). Условием теоремы является близость треугольника допустимых управлений к правильному. Результат состоит в том, что некоторая степень отображения последования Пуанкаре допускает инвари-

антное подмножество, которое непрерывно, эквивариантно и сюръективно отображается на пространство сдвига Бернулли.

2. Для случая правильного треугольника допустимых управлений удастся получить полную картину оптимального синтеза. Исследование связано с отображением последования Пуанкаре лагранжевого многообразия (графика градиентного отображения для функции Беллмана) на себя. Удастся построить инвариантное подмножество, которое непрерывно, эквивариантно и сюръективно отображается на топологическую цепь Маркова, связанную с явным конечным графом. Таким образом, здесь не нужно переходить к высоким степеням отображения Пуанкаре. Отображение последования Пуанкаре является липшицевым, но не гладким (даже класса C^1). Поэтому в главе 7 построена техника изучения липшицевых гиперболических систем, обобщающая известную технику для гладких гиперболических систем. В частности, получен простой и удобный метод оценки размерностей множества неблуждающих траекторий с помощью констант Липшица. Отметим, что глава 6 является вспомогательной, не содержащей каких-либо теорем. В ней, в частности, вводятся элементы, необходимые для описания топологической марковской цепи, возникающей из отображения последования.
3. В главе 8 получена полная структура оптимальной синтеза в модельной задаче с правильным треугольником допустимых управлений. В главе 9 эти результаты перенесены на случай общих гамильтоновых систем с разрывной правой частью.

В диссертации постоянно используется новый метод анализа системы скобок Пуассона, связанных с задачами оптимизации. Получаемая “ниспадающая” система скобок Пуассона вместе с разбиением всего множества скобок на главные и неглавные позволяет получить “правильную” нильпотентизацию системы в окрестности особой траектории. Эта процедура нильпотентизации сходна с процедурой, использованной Вершиком – Гершковичем, а затем Громовым, при доказательстве теоремы о приближении общих субримановых геодезических с помощью левоинвариантных геодезических на нильпотентных группах.

В каждой из глав оригинальный вклад автора является решающим и ясно изложен. Замечательно, что продвижения в теории гармонично сочетаются с использованием компьютерных технологий. Для работы характерно, что некоторые центральные теоретические результаты получены с помощью нетривиальных вычислений. В свою очередь, эти вычисления невозможно сделать без предварительного теоретического анализа. В некотором смысле вся работа строится как осмысление задачи Фуллера — вполне элементарного по формулировке примера задачи оптимального управления. Оказывается, что весьма конкретный анализ конкретной задачи приводит к выводам, имеющим универсальное значение для теории управления.

В целом работа производит очень сильное впечатление. Автор вскрыл богатые связи многочисленных изученных им задач со значительной частью известной математики. Чтение работы непросто, но каждый раз при углублении в аргументы автора видно, что они происходят из понимания существа дела.

Было бы очень интересно, хотя и непросто, написать на основе диссертации учебник высокого уровня по современной геометрической теории управления.

Разумеется, в работе имеются и неизбежные недостатки, скажем, довольно многочисленные опечатки. Например, на стр. 54 написано “клиффордова” вместо “клиффордова”, на стр. 70 в примере 2.2 написано “есть единственное решение (2.14) $\alpha = \sqrt{5}$ ” вместо “ $\alpha = \sqrt{5}$ есть единственное решение (2.14)”, на стр. 72 и 207 написано “Кор-

дано” вместо “Кардано”, на стр. 72 написано “не приводим” вместо “неприводим”, на стр. 134 написано “двугривенных циклов” вместо “двузвенных циклов”. Полный список замеченных мною опечаток и погрешностей языка мог бы занять много места.


В работе есть и математические описки. Например, выражение для Υ_0 после формулы (4.13) на стр. 116 не согласуется с выражением для Υ в формуле (4.12). Более серьезные недостатки имеются на стр. 172. Именно, после определения 7.1 полного множества отображения формулируется лемма 7.3, и в этой формулировке ничего не говорится о существовании полного множества. В то же время в доказательстве леммы существование такого множества используется без каких-либо пояснений.

Отмеченные несовершенства не влияют на общую весьма высокую оценку проделанной автором работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих российских и международных научных изданиях и представлены на многочисленных конференциях высокого уровня. Некоторые из этих докладов мне довелось выслушать. Все они были весьма ясными и интересными. Активная положительная реакция слушателей была неизменной. Можно сказать, что работа диссертанта знаменует переход теории управления в целом на новый уровень, соответствующий математике 21-го века и сопоставимый с современным уровнем общей теории динамических систем. Конечно, для правильной оценки работы следует понимать, что она сделана не в безвоздушном пространстве, а в рамках школы, основанной научным консультантом автора профессором М.И. Зеликиным. Это обстоятельство, разумеется, несколько не умаляет оригинальность и силу автора и его работы. Автореферат правильно отражает содержание диссертационной работы Л.В. Локуциевского «Особые экстремали в задачах с многомерным управлением» по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертационная работа Льва Вячеславовича Локуциевского полностью удовлетворяет всем квалификационным требованиям, предъявляемым ВАК РФ к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ведущий научный сотрудник
Института проблем механики РАН
доктор физико-математических наук


01.12.2015

А.И. Овсеевич

Овсеевич Александр Иосифович, доктор физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика, email: ovseev@gmail.com, +7 (495) 434 32 92. Место работы: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), пр. Вернадского, 101, корп. 1, г. Москва, 119526. Должность: ведущий научный сотрудник.

Подпись А.И. Овсеевича заверяю
ученый секретарь ИПМех РАН
кандидат физико-математических наук





Е.Я. Сысоева