

## Отзыв официального оппонента

на диссертационную работу Локуциевского Льва Вячеславовича  
“Особые экстремали в задачах с многомерным управлением”,

представленную на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.02 — «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

**Актуальность темы диссертации.** Задачи оптимального управления последние пол века являются предметом пристального внимания в связи с огромным спектром возможных практических применений. Сюда входят задачи управления роботами и космическими аппаратами, задачи нейрофизиологии и обработки изображений, управление квантовыми системами, неголономная механика и многое другое.

Начиная с начала 90х годов прошлого века множество работ посвящено изучению субримановых многообразий. Достаточно упомянуть работы таких известных математиков, как А.А. Аграчев, Ж.-П. Готье, Х. Суссман, М.И. Зеликин (научный консультант диссертанта), Р.В. Гамкрелидзе и многих других. Общую субриманову задачу можно рассматривать (по крайней мере локально) как задачу быстрогодействия на гладком многообразии  $M$  для управляемой системы следующего вида:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k f_i(x(t))u_i,$$

где многомерное управление  $(u_1, \dots, u_k)$  принадлежит единичному шару  $U \subset \mathbb{R}^k$ .

В диссертационной работе Л.В. Локуциевского исследуется родственный класс задач оптимального управления для систем вида

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^k f_i(x(t))u_i,$$

где управление принадлежит выпуклому компактному множеству  $U$ . При этом множество допустимых управлений  $U$  в диссертации, чаще всего, является многогранником и, следовательно, имеет негладкую границу  $\partial U$ .

В обоих этих классах огромную трудность вызывает изучение окрестностей аномальных (или же особых) экстремалей, которое, безусловно, играет очень большую роль, так как определяет структуру особенностей оптимального синтеза.

Важно отметить, что основные результаты диссертации переносятся с задач оптимального управления на случай общих гамильтоновых систем с разрывной правой частью. Такой переход осуществляется автором в каждом

конкретном случае по-своему, но всегда в его основе лежит построение и последующее исследование ниспадающей системы скобок Пуассона. Этот оригинальный метод разработан автором диссертации и может быть применен не только в рассмотренных в диссертации задачах, но и во многих других случаях перехода от гамильтоновых систем с разрывной правой частью к задачам оптимального управления.

Таким образом, актуальность тематики диссертации не вызывает сомнений.

**Общая характеристика работы.** В диссертации Л.В. Локуциевского для гамильтоновых систем с разрывной правой частью получен важный новый результат для случая когда множество разрыва является объединением трех гиперповерхностей, с общей границей в виде подмногообразия коразмерности 2. В диссертации доказано, что поведение экстремалей, входящих в данную странную точку на этом подмногообразии является хаотическим. Слово “хаос” употребляется в математике в нескольких разных смыслах. В данном случае оно имеет почти классическое значение и означает, что динамика переключений управления на экстремальных имеет ненулевую топологическую энтропию и описывается с помощью топологической цепи Маркова типа подковы Смейла. Счетное число переключений управления содержится на конечном промежутке времени, и статистическое поведение экстремалей здесь правильно описывать не с помощью непрерывного времени гамильтоновой системы а с помощью дискретного времени — последовательного пересечения гиперповерхностей переключения управления. При некоторых дополнительных предположениях на странную точку в диссертации получено полное описание хаоса, в том числе получены оценки на размерности по Хаусдорфу и Минковскому-Колмогорову множества неблуждающих точек и точное значение топологической энтропии (этот результат получен Л.В. Локуциевским совместно с научным консультантом М.И. Зеликиным и Р. Хильдебрандом). В работе доказана теорема о структурной устойчивости.

Понятие странной точки обобщает понятие особой экстремали второго порядка. В диссертации исследованы также и особые экстремали первого порядка и геометрическая структура их окрестностей. В диссертации доказано, что если множеством допустимых управлений в голономной задаче является выпуклый многогранник, то при попадании на особую экстремаль первого порядка, управление имеет конечное количество переключений. Множество всех таких последовательностей управлений находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей вложенных граней многогранника управлений.

В работе также исследована серия обобщенных задач Фуллера с управлением из шара  $U$ . В отличие от предыдущих результатов, граница множества допустимых управлений  $\partial U$  является гладкой. Автором диссертации совмест-

но с М.И. Зеликиным и Р. Хильдебрандом построена серия оптимальных решений очень специального вида: траектория движения оптимального управления является иррациональной обмоткой клиффордова тора, вложенного в сферу  $\partial U$ . При этом оптимальное управление имеет вид наподобие  $e^{i\alpha \ln |t|}$ , то есть пробегает обмотку целиком за конечное время. Найденные оптимальные траектории имеют вид обобщенных логарифмических спиралей, попадающих в начало координат за конечное время и моделирующих вращение управления по иррациональной обмотке.

В работе исследован класс нильпотентно-выпуклых задач оптимального управления, которые часто возникают при нильпотентизации задач со сносом. Для этого класса задач Л.В. Локуциевский доказал теорему о том, что оптимальный синтез на фазовом пространстве определяется некоторым правосторонним потоком. Этот результат имеет много интересных следствий. Например, Л.В. Локуциевский доказал, что множество точек разрыва оптимального управления в этом классе задач конечно или счетно. Получение подобного рода результатов для разных классов задач всегда сопряжено с большими трудностями. Например для класса субримановых задач лишь в 2015 г. Э. Хакавуори и Э. Ле Донне удалось доказать, что оптимальное управление не может содержать изолированных точек разрыва первого рода.

Еще один важный результат, полученный автором диссертации, касается гамильтоновости особого потока в задачах с одномерным управлением. Л.В. Локуциевский ввел новое удобное понятие порядка особой экстремали, которое позволило выявить структуру ниспадающей системы скобок Пуассона в таких задачах. Исследование этой структуры лежит в основе доказательства теоремы о гамильтоновости особого потока. С использованием этой теоремы автор получил полное описание особых траекторий в задаче быстрого действия для управления осесимметричным намагниченным волчком, помещенным в катушку индуктивности. Система принципа максимума Понтрягина в задаче 14-мерна и прямое интегрирование представляется невозможным. Л.В. Локуциевский показал, что гамильтонов поток особых экстремалей является интегрируемым по Лиувиллю, нашел необходимый набор первых интегралов и проинтегрировал эту систему в квадратурах.

В целом работа представляет собой законченное научное исследование, выполненное на очень высоком уровне. Яркое впечатление производит глубина анализа ряда нетривиальных задач управления и разнообразие используемых методов. Работа разделена на две части, и каждая из них могла бы составить достойную диссертацию.

В качестве замечания отмечу, что в работе содержится ряд орфографических и пунктуационных опечаток. Например, фамилия “Клиффорд” иногда написана с одним “ф”, а на странице 134 слово “двузвенный” превратилось в “двугривенный”. Впрочем, эти опечатки никоим образом не влияют на каче-

ство математического содержание работы.

Таким образом, содержание и тема диссертации Л.В. Локуциевского “Особые экстремали в задачах с многомерным управлением” отвечает паспорту специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

**Апробация.** Результаты докладывались автором на большом количестве научных семинаров и международных конференций.

**Автореферат.** Автореферат диссертации правильно отражает содержание.

**Публикации.** Результаты диссертации являются новыми и были своевременно опубликованы в 15 работах, из перечня рецензируемых изданий, рекомендованных ВАК.

**Заключение.** Диссертационная работа Л.В. Локуциевского “Особые экстремали в задачах с многомерным управлением” является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных ее автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в геометрической теории оптимального управления.

На основании вышеизложенного можно заключить, что диссертация Льва Вячеславовича Локуциевского “Особые экстремали в задачах с многомерным управлением” удовлетворяет требованиям “Положения о порядке присуждения ученых степеней”, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, Локуциевский Лев Вячеславович, безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Сачков Юрий Леонидович, 8-4852-695228, sachkov@sys.botik.ru, руководитель исследовательского центра процессов управления ФГБУН Института Программных Систем имени А.К. Айламазяна РАН (152021 Ярославская область, Переславский район, с. Веськово, ул. Петра I, д.4 «а»), доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Руководитель исследовательского центра процессов управления  
ФГБУН ИПС им. А.К. Айламазяна РАН

доктор физико-математических наук  
9 декабря 2015 г.

*Сачков*

Ю.Л. Сачков

Личную подпись д.ф.-м.н. Сачкова Ю.Л. заверяю  
Ученый секретарь института  
кандидат технических наук



С.М. Пономарева