ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Харитонов Михаил Игоревич

Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре Высшей алгебры Механико–математического факультета ФГБОУ ВПО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:	Михалёв Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор
	Белов Алексей Яковлевич, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Кемер Александр Робертович, доктор физико-математических наук, профессор (ФБГОУ ВПО Ульяновский государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Кафедра прикладной математики)
	Пионтковский Дмитрий Игоревич, доктор физико-математических наук профессор (ФГАОУ ВПО Национальный исследовательский университет, Высшая школа экономики, Факультет экономических наук, Департамент математики)
Ведущая организация:	ФБГОУ ВПО Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 30 октября 2015 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при ФГБОУ ВПО Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8й этаж), http://mech.math.msu.ru/∼snark/index.cgi, http://istina.msu.ru/dissertations/9403301.

Автореферат разослан 30 сентября 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.84 при ФГБОУ ВО МГУ, доктор физико–математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Проблемы бернсайдовского типа оказали огромное влияние на алгебру XX века. Центральное место имела проблема Бернсайда для групп:

"Будет ли конечной всякая периодическая конечно порождённая группа?"

Первоначальные усилия были направлены в сторону положительного решения проблемы, так как все известные частные случаи давали позитивный ответ. Например, если группа порождена m элементами и порядок каждого её элемента является делителем числа 4 или 6, она конечна.

Была поставлена так называемая "ослабленная" проблема Бернсайда (также известная как проблема Бернсайда–Магнуса):

"Верно ли, что среди всех n-порожденных конечных групп с тождеством $x^n = 1$ есть максимальная?"

При простом n эта проблема была решена Кострикиным[1]. Он свел задачу к локальной конечности алгебр Ли над полем $\mathbb{Z}_p$ с тождеством

$$[\ldots[x, y], y], \ldots, y] = 0.$$

В общем случае это составило знаменитый результат Е. Зельманова[2,3], который установил локальную конечность алгебраических PI-алгебр Ли над полем произвольной характеристики.

Первый контрпример к "неограниченной" проблеме был получен благодаря универсальной конструкции Голода–Шафаревича. Это вытекало из конструкции бесконечномерного ниль-кольца (разумеется, индекс нильпотентности этого кольца неограничен). Хотя "ослабленная" проблема Бернсайда была решена положительным образом, вопрос о локальной конечности групп с тождеством $x^n = 1$ был решен отрицательно в знаменитых работах П. С. Новикова и С. И. Адяна[4,5,6,7]: было доказано существование для любого нечетного $n \geqslant 4381$ бесконечной группы с $m > 1$ обра-

[1] А. И. Кострикин. *Вокруг Бернсайда.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 232 С.

[2] Е. И. Зельманов. *Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:1 (1990), 42–59.

[3] Е. И. Зельманов. *Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп.* Матем. сб., 182:4 (1991), 568–592.

[4] П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. I.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:1 (1968), 212–244.

[5] П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. II.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:2 (1968), 251–524.

[6] П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. III.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:3 (1968), 709–731.

[7] П. С. Новиков, С. И. Адян. *Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:4 (1968), 971–979.

зующими, удовлетворяющей тождеству $x^n = 1$. Эта оценка была улучшена до $n \geqslant 665$ С. И. Адяном[8]. Недавно С. И. Адян улучшил эту оценку до $n \geqslant 101$ (отметим, что наилучшие оценки в проблемах бернсайдовского типа для групп были получены представителями школы С. И. Адяна). Позднее А. Ю. Ольшанский[9] предложил геометрически наглядный вариант доказательства для нечетных $n > 10^{10}$.

Чётный случай оказался значительно сложнее нечётного. Определим группу $B(m, n)$ как группу с заданием

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_m | X^n = 1 \text{ для всех слов } X \rangle.$$

Результат о бесконечности групп $B(m, n)$ для чётных значений периода n был объявлен независимо С. В. Ивановым[10] для $n \geq 2^{48}$ и И. Г. Лысёнком[11] для $n \geq 2^{13}$. В подробном доказательстве результата С. В. Иванова[12] фактически разработан вариант теории, применимый к бернсайдовым группам периода $n \geq 2^{48}$, делящегося на 2^9.

Аналог проблемы Бернсайда для ассоциативных алгебр был сформулирован А. Г. Курошем в тридцатых годах двадцатого века:

"Пусть все 1-порождённые подалгебры конечно порождённой ассоциативной алгебры A конечномерны. Будет ли A конечномерна?"

Отрицательный ответ на вопрос А. Г. Куроша был получен Е. С. Голодом в 1964 году.

Классом нильпотентности или *ниль-индексом* ассоциативной алгебры A называется минимальное натуральное число n такое, что $A^n = 0$.

Индексом алгебраической алгебры A называется супремум степеней минимальных аннулирующих многочленов элементов A.

Назовём полиномиальное тождество некоторой ассоциативной алгебры *допустимым*, если коэффициент перед одним из его старших мономов равен единице.

В 1941 году Курош[13] сформулировал проблему Бернсайда для алгебр конечного индекса:

1. Верно ли, что конечно порождённая ниль-алгебра конечного ниль-индекса нильпотента?

[8]С. И. Адян. *Проблема Бернсайда и тождества в группах.* Наука, М., 1975, 335 С.

[9]А. Ю. Ольшанский. *О теореме Новикова–Адяна.* Матем. сб., 118(160):2(6) (1982), 203–235.

[10]S. V. Ivanov. *On the Burnside problem on periodic groups.* Bul l. Amer. Math. Soc. (N. S.), 27:2 (1992), 257–260; arXiv: math/9210221.

[11]И. Г. Лысенок. *Бесконечные бернсайдовы группы четного периода.* Изв. РАН. Сер. матем., 60:3 (1996), 3–224.

[12]S. V. Ivanov. *The free Burnside groups of sufficiently large exponents.* Int. J. of Algebra and Computation, 4 (1994), 1–307.

[13]А. Г. Курош. *Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бёрнсайда о периодических группах.* Изв. АН СССР, Сер. Матем., №5, 1941, P. 233–240.

2. Верно ли, что конечно порождённая алгебра конечного индекса конечномерна?

В 1948 году И. Капланский ответил на вопрос Куроша, отказавшись от условия конечности индекса. И. Капланский доказал, что любая конечно порождённая алгебраическая алгебра над коммутативным кольцом, удовлетворяющая допустимому полиномиальному тождеству, конечномерна.

В 1958 году Ширшов улучшил результат Капланского, требуя алгебраичности только элементов алгебры, являющихся произведением менее чем n порождающих.

Пусть X — некоторый конечный алфавит, на буквах которого введён линейный порядок $\succ$. Будем обозначать за X^* множество слов от этого алфавита, причём X^* содержит и пустое слово.

Введём теперь порядок на словах из X^*.

Пусть $u \in X^*$, $v \in X^*$. Будем считать, что $u \succ v$, если найдутся такие (возможно пустые) слова w, u', v' из X^* и буквы $a \succ b$ из X, что $u = wau'$, $v = wbv'$.

Назовем слово W *n-разбиваемым*, если W можно представить в виде

$$W = vu_1u_2\cdots u_n$$

так, чтобы

$$u_1 \succ u_2 \succ \cdots \succ u_n.$$

Слова $u_1, u_2, \ldots, u_n$ назовём *n-разбиением* слова W.

В этом случае при любой нетождественной перестановке σ подслов u_i получается слово

$$W_\sigma = vu_{\sigma(1)}u_{\sigma(2)}\cdots u_{\sigma(n)},$$

лексикографически меньшее W.

Назовём множество $\mathcal{M} \subset X^*$ множеством *ограниченной высоты* $h = \mathrm{Ht}_Y(A)$ *над множеством слов* $Y = \{u_1, u_2, \ldots\}$, если h — минимальное число такое, что любое слово $u \in \mathcal{M}$ либо n-разбиваемо, либо представимо в виде

$$u = u_{j_1}^{k_1}u_{j_2}^{k_2}\cdots u_{j_r}^{k_r}, \text{ где } r \leqslant h.$$

Назовём PI-алгебру A алгеброй *ограниченной высоты* $h = \mathrm{Ht}_Y(A)$ *над множеством слов* $Y = \{u_1, u_2, \ldots\}$, если h — минимальное число такое, что любое слово x из A можно представить в виде

$$x = \sum_i \alpha_i u_{j_{(i,1)}}^{k_{(i,1)}} u_{j_{(i,2)}}^{k_{(i,2)}} \cdots u_{j_{(i,r_i)}}^{k_{(i,r_i)}},$$

причем $\{r_i\}$ не превосходят h. Множество Y называется *базисом Ширшова* или *s-базисом* для алгебры A.

А. И. Ширшов[14,15] доказал, что конечно порождённая алгебра с допустимым полилинейным тождеством имеет ограниченную высоту над множеством слов над порождающими длины меньшей n, где n — степень тождества.

Используя линеаризацию, из теоремы Ширшова о высоте можно вывести, что конечно порождённая алгебра с допустимым полиномиальным тождеством имеет ограниченную высоту над множеством слов над порождающими меньшей, чем n длины, где n — степень тождества.

Проблемы бернсайдовского типа, связанные с теоремой о высоте, рассмотрены в обзоре Зельманова[16]. Понятие *n-разбиваемости* представляется фундаментальным. Оценки, полученные В. Н. Латышевым на $\xi_n(k)$ — количество не являющихся n-разбиваемыми полилинейных слов от k символов — привели к фундаментальным результатам в PI-теории. Вместе с тем, это количество есть не что иное, как количество расстановок чисел от 1 до k таких, что никакие n из них (не обязательно стоящие подряд) не идут в порядке убывания. Это также является верхней оценкой числа всех перестановочно упорядоченных множеств диаметра n и с длиной наибольшей антицепи $\leqslant k$, где множество называется *перестановочно упорядоченным*, если его порядок есть пересечение двух линейных порядков.

Из теоремы о высоте вытекает положительное решение проблем бернсайдовского типа для PI-алгебр. В самом деле, пусть в ассоциативной алгебре над полем выполняется полиномиальное тождество $f(x_1,\ldots,x_n)=0$. Тогда в ней выполняется и допустимое полилинейное тождество (т.е. полилинейное тождество, у которого хотя бы один коэффициент при членах высшей степени равен единице):

$$x_1x_2\cdots x_n=\sum_\sigma \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)},$$

где α_σ принадлежат основному полю. В этом случае, если

$$W=vu_1u_2\cdots u_n$$

является n-разбиваемым, то для любой перестановки σ слово

$$W_\sigma=vu_{\sigma(1)}u_{\sigma(2)}\cdots u_{\sigma(n)}$$

[14] А. И. Ширшов. *О кольцах с тождественными соотношениями.* Матем. сб., Т. 43(85), №2, 1957, P. 277–283.

[15] А. И. Ширшов. *О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах.* Матем. сб., Т. 41(83), №3, 1957, P. 381–394.

[16] E. Zelmanov. *On the nilpotency of nilalgebras.* Lect. Notes Math., 1988, Vol. 1352, P. 227–240.

лексикографически меньше слова W, т.е. n-разбиваемое слово можно представить в виде линейной комбинации лексикографически меньших слов. Значит, PI-алгебра имеет базис из не являющихся n-разбиваемыми слов. В силу теоремы Ширшова о высоте, PI-алгебра имеет ограниченную высоту. Как следствие имеем, что если в PI-алгебре выполняется тождество $x^n = 0$, то эта алгебра — нильпотентна, т.е. все ее слова длины больше, чем некоторое N, тождественно равны 0.

Обзоры, посвященные теореме о высоте, содержатся в работах[17,18,19,20,21].

Из этой теоремы вытекает положительное решение проблемы Куроша и других проблем бернсайдовского типа для PI-колец. Ведь если Y — базис Ширшова, и все элементы из Y — алгебраичны, то алгебра A конечномерна. Тем самым теорема Ширшова дает явное указание множества элементов, алгебраичность которых ведет к конечномерности всей алгебры. Из этой теоремы следует, что для A — конечно порождённой PI-алгебры верно неравенство

$$\mathrm{GK}(A) < \infty,$$

где

$\mathrm{GK}(A)$ — это *размерность Гельфанда–Кириллова алгебры* A.

Значение понятия *n-разбиваемости* выходит за рамки проблематики, относящейся к проблемам бернсайдовского типа. Оно играет роль и при изучении полилинейных слов, в оценке их количества, где *полилинейным* называется слово, в которое каждая буква входит не более одного раз. В. Н. Латышев[22] применил теорему Дилуорса для получения оценки числа не являющихся m-разбиваемыми полилинейных слов степени n над алфавитом $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Эта оценка: $(m-1)^{2n}$ и она позволяет получить прозрачное доказательство теоремы Регева о том, что тензорное произведение PI-алгебр снова является PI-алгеброй. Улучшение этой оценки и другие вопросы, связанные с полилинейными словами, рассматриваются в главе 6.

К настоящему моменту известны следующие оценки на высоту в смысле Ширшова.

[17] A. J. Belov, V. V. Borisenko, V. N. Latysev. *Monomial Algebras.* NY. Plenum, 1997.

[18] A. R. Kemer. *Comments on the Shirshov's Height Theorem.* Selected papers of A.I.Shirshov, Birkhüser Verlag AG, 2009, P. 41–48.

[19] A. Kanel-Belov, L. H. Rowen. *Perspectives on Shirshov's Height Theorem.* Selected papers of A. I. Shirshov, Birkhüser Verlag AG, 2009, P. 3–20.

[20] В. А. Уфнаровский. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре.* Итоги науки и техн., Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1990, №57, P. 5–177.

[21] V. Drensky, E. Formanek. *Polynomial identity ring.* Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona., Birkhauser Verlag, Basel, 2004.

[22] В. Н. Латышев. *К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр.* УМН, Т. 27, №4(166), 1972, P. 213–214.

Первоначальное доказательство А. И. Ширшова хотя и было чисто комбинаторным (оно основывалось на технике элиминации, развитой им в алгебрах Ли, в частности, в доказательстве теоремы о свободе), однако оно давало только упрощённые рекурсивные оценки. Позднее А. Т. Колотов[23] получил оценку на $\mathrm{Ht}(A) \leqslant l^{l^n}$ ($n = \deg(A)$, l — число образующих). А. Я. Белов[24] показал, что $\mathrm{Ht}(n,l) < 2nl^{n+1}$. Экспоненциальная оценка теоремы Ширшова о высоте изложена также в работах[25,26]. Данные оценки улучшались в работах А. Клейна[27,28].

Ф. Петровым и П. Зусмановичем[29] была получена связь между высотой градуированной алгебры и её нейтрального компонента.

В 2011 году А. А. Лопатин[30] получил следующий результат:

Пусть $C_{n,l}$ — степень нильпотентности свободной l-порождённой алгебры и удовлетворяющей тождеству $x^n = 0$. Пусть p — характеристика базового поля алгебры — больше чем $n/2$. Тогда

$$C_{n,l} < 4 \cdot 2^{n/2} l.$$

Е. И. Зельманов[31] поставил следующий вопрос в Днестровской тетради в 1993 году: "Пусть $F_{2,m}$ — свободное 2-порождённое ассоциативное кольцо с тождеством $x^m = 0$. Верно ли, что класс нильпотентности кольца $F_{2,m}$ растёт экспоненциально по m?"

Цель работы

В диссертации ставится цель получения как можно более точных оценок высоты в смысле Ширшова. Автором разрабатываются методы описания комбинаторной структуры не являющихся n-разбиваемыми слов.

[23] А. Г. Колотов. *О верхней оценке высоты в конечно порожденных алгебрах с тождествами.* Сиб. мат. ж., 1982, Т. 23, №1, P. 187–189.

[24] A. Ya. Belov. *Some estimations for nilpotency of nil-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem.* Commun. Algebra 20 (1992), №10, P. 2919–2922.

[25] A. Kanel-Belov, L. H. Rowen. *Computational aspects of polynomial identities.* Research Notes in Mathematics 9. AK Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005.

[26] V. Drensky. *Free Algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra.* Springer-Verlag, Singapore (2000).

[27] A. A. Klein. *Indices of nilpotency in a PI-ring.* Archiv der Mathematik, 1985, Vol. 44, №4, P. 323–329.

[28] A. A. Klein. *Bounds for indices of nilpotency and nility.* Archiv der Mathematik, 2000, Vol. 74, №1, P. 6–10.

[29] F. Petrov, P. Zusmanovich. *On Shirshov bases of graded algebras.* Zbl 1288.16056 Isr. J. Math. 197, 23–28 (2013).

[30] A. A. Lopatin. *On the nilpotency degree of the algebra with identity $x^n = 0$.* Journal of Algebra, 371(2012), P. 350–366.

[31] *Днестровская тетрадь: оперативно-информац. сборник.* 4-е изд., Новосибирск: изд. ин–та матем. СО АН СССР, 1993, 73 С.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно. В диссертации получен ответ на вопрос[31] Е. И. Зельманова: в действительности искомый класс нильпотентности растёт субэкспоненциально. Также разработана техника для получения полного ответа на вопрос Е. И. Зельманова.

1. Пусть l, n и $d \geqslant n$ — некоторые натуральные числа. Доказано, что все l-порождённые слова длины не меньше, чем $\Psi(n,d,l)$, либо содержат x^d, либо являются n-разбиваемыми, где

$$\Psi(n,d,l) = 2^{27} l (nd)^{3\log_3(nd)+9\log_3\log_3(nd)+36}.$$

2. Для вещественного числа x положим $\ulcorner x \urcorner := -[-x]$. Доказано, что существенная высота l-порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n меньше, чем $\Upsilon(n,l)$, где

$$\Upsilon(n,l) = 2n^{3^{\ulcorner \log_3 n \urcorner + 4}} l.$$

3. Доказано, что высота множества слов, не являющихся n-разбиваемыми, над l-буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше n не превышает $\Phi(n,l)$, где

$$\Phi(n,l) = 2^{96} l \cdot n^{12\log_3 n + 36\log_3\log_3 n + 91}.$$

4. Получены нижние и верхние оценки на существенную высоту в случае периодов длины 2, 3 и близкой к степени тождества, причем нижние и верхние оценки отличаются в константу раз для слов длины 2. Установлена связь с проблемами рамсеевского типа.

5. Получена близкая к реальности оценка количества полилинейных слов, не являющихся n-разбиваемыми. Впервые в рамках PI-теории приведено перечисление полилинейных слов, не являющихся n-разбиваемыми.

Основные методы исследования

В работе используются современные комбинаторные методы теории колец. В частности, техника В. Н. Латышева переносится на неполилинейный случай. Автором предложена иерархическая структура, позволяющая получить субэкспоненциальную оценку в теореме Ширшова о высоте. Автор применил проблематику рамсеевского типа к теории высоты в смысле Ширшова. В работе приведено использование методов динамического программирования для перечисления не n-разбиваемых полилинейных слов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области высшей алгебры и могут найти применение в комбинаторике.

Апробация диссертации

Результаты диссертации неоднократно докладывались автором на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. Научно-исследовательский семинар “Теория колец” кафедры высшей алгебры МГУ в 2010–2014 гг.
2. Научно-исследовательский семинар А. М. Райгородского в 2011–2012 гг.

   Кроме того, результаты докладывались на следующих семинарах:
3. “Bar-Ilan Algebra Seminar” (Bar-Ilan University) (December 18, 2013).
4. “PI-Seminar” (Technion (Israel Institute of Technology)) (December 20, 2013).

Результаты диссертации докладывались автором на следующих всероссийских и международных конференциях:

1. International conference on Ring Theory dedicated to the 90th anniversary of A. I. Shirshov. Russia, Novosibirsk (July 13–19, 2011). Invited speaker.
2. International conference on Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory. Poland, Bedlewo (July 14–20, 2013).
3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2013”. Россия, Москва (8–13 апреля, 2013).
4. Международный алгебраический симпозиум, посвященный 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалёва. Россия, Москва (15–18 ноября, 2010).

5. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2011”. Россия, Москва (11–15 апреля 2011).

6. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2012”. Россия, Москва (9–13 апреля, 2012).

7. XII международная конференция “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвященная восьмидесятилетию профессора В. Н. Латышева. Россия, Тула (21–25 апреля, 2014).

8. Int. conference “Modern algebra ad its applications”, Special Session dedicated to professor Gigla Janashia. Georgia, Batumi, (19–25 September 2011).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 11 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, шести глав, предметного указателя и списка литературы, который включает 116 наименований. Объём диссертации составляет 105 страниц.

Краткое содержание диссертации

Глава 1 является введением диссертации. Она содержит описание актуальности темы, цели работы, список основных результатов и сведения об апробации работы.

В **главе 2** приведён обзор основных понятий и результатов, используемых в диссертации, а также история вопроса. Освещены такие области, как теория колец в контексте проблематики бернсайдовского типа и концепция высота в смысле Ширшова. Также описывается комбинаторный аппарат, являющийся базой для приведённых в диссертации доказательств. Описаны продвижения в поиске оценок высоты и индекса нильпотентности.

Глава 3 посвящена доказательству теоремы 1.5.2, из которой следует субэкспоненциальная оценка индекса нильпотентности.

Теорема 1.5.2. Пусть l, n и $d \geqslant n$ — некоторые натуральные числа. Тогда все l-порождённые слова длины не меньше, чем $\Psi(n,d,l)$, либо содержат x^d, либо являются n-разбиваемыми, где

$$\Psi(n,d,l) = 2^{27} l (nd)^{3\log_3(nd)+9\log_3\log_3(nd)+36}.$$

По мнению автора, теорема 1.5.2 является вторым по значимости (после теоремы 1.5.1) результатом диссертации.

Идея доказательства заключается в том, что позиции букв слова W рассматриваются как ось времени, то есть подслово u встретилось раньше подслова v, если u целиком лежит левее v внутри слова W.

В леммах 3.1.1, 3.1.2 и 3.1.3 описываются достаточные условия для присутствия периода длины d в не являющимся n-разбиваемым слове W.

Лемма 3.1.1. В слове W длины x либо первые $[x/d]$ хвостов попарно сравнимы, либо в слове W найдется период длины d.

Лемма 3.1.2. Если в слове V длины $k{\cdot}t$ не больше k различных подслов длины k, то V включает в себя период длины t.

Лемма 3.1.3. Если в слове W найдутся n одинаковых непересекающихся подслов u длины $n \cdot d$, то W — (n, d)-сократимое.

В лемме 3.1.4 связываются понятия n-разбиваемости слова W и множества его хвостов.

Лемма 3.1.4. Если слово W является $p_{n,d}$-разбиваемым, то оно – (n, d)-сократимое.

После этого определённым образом выбирается подмножество множества хвостов слова W, для которого можно применить теорему Дилуорса. Затем мы раскрашиваем хвосты и их первые буквы в соответствии с принадлежностью к цепям, полученным при применении теоремы Дилуорса.

Необходимо изучить, в какой позиции начинают отличаться соседние хвосты в каждой цепи. Вызывает интерес, с какой "частотой" эта позиция попадает в p-хвост для некоторого $p \leqslant n$. Потом мы несколько обобщаем наши рассуждения, деля хвосты на сегменты по несколько букв, а затем рассматривая, в какой сегмент попадает позиция, в которой начинают отличаться друг от друга соседние хвосты в цепи.

Основной леммой в доказательстве является лемма 3.2.2, в которой связываются рассматриваемые "частоты" для p-хвостов и kp-хвостов при $k = 3$.

Лемма 3.2.2. Для любых натуральных чисел a, k верно неравенство

$$\psi(a) \leqslant p_{n,d}^{k}\psi(k \cdot a) + k \cdot a,$$

где величина $\psi(p)$ описывает "скорость эволюции" подслов длины p при проходе от начала к концу слова.

В завершение доказательства строится иерархическая структура на основе применения леммы 3.2.2, т. е. рассматриваем сначала сегменты n-хвостов, потом подсегменты этих сегментов и т. д. Далее рассматривается наибольшее возможное количество хвостов из подмножества, для которого была применена теорема Дилуорса, после чего оценивается сверху общее количество хвостов, а, значит, и букв слова W.

Далее завершается доказательство теоремы 1.5.2.

В **главе 4** доказывается теорема 1.5.1.

Теорема 1.5.1. Высота множества не являющихся n-разбиваемыми слов над l-буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше n не превышает $\Phi(n,l)$, где

$$\Phi(n,l) = 2^{96} l \cdot n^{12\log_3 n + 36\log_3\log_3 n + 91}.$$

Из теоремы 1.5.1 следует субэкспоненциальная оценка высоты в смысле Ширшова. По мнению автора, теорема 1.5.1 является наиболее значимым результатом диссертации.

При доказательстве используется теорема 1.5.2. В ходе доказательства теоремы 1.5.1 доказывается теорема 1.5.3.

Теорема 1.5.3. Существенная высота l-порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n меньше, чем $\Upsilon(n,l)$, где

$$\Upsilon(n,l) = 2n^{3^{\ulcorner\log_3 n\urcorner+4}} l.$$

В начале доказательства теоремы 1.5.3 мы приводим периодические подслова к виду, удобному для дальнейшего доказательства.

Далее в пункте 4.1.2 мы определённым образом выбираем множество Ω' подслов слова W и вводим порядок на этом множестве. Затем применяем теорему Дилуорса для него.

В лемме 4.1.2 связываем понятия n-разбиваемости множества Ω' и слова W.

Лемма 4.1.2. Если во множестве Ω' для порядка $\succ$ найдётся антицепь длины n, то слово W будет n-разбиваемым.

Далее мы оцениваем размер множества Ω'. Этой оценкой завершается доказательство теоремы 1.5.3.

В конце главы доказывается, что оценка в теореме 1.5.1 оценивается сверху суммой оценок из теорем 1.5.2 и 1.5.3.

Далее завершается доказательство теоремы 1.5.1.

В **главе 5** приводятся оценки на количество периодических подслов с периодом длины $2, 3, (n-1)$ произвольного не являющегося n-разбиваемым слова W. Рассмотрение случая периодов длины $2, 3$ при помощи кодировки обобщается до доказательства ограниченности существенной высоты. Кроме того, получена нижняя оценка на число подслов с периодом 2, и эта оценка при достаточно большом l отличается от верхней в 4 раза.

С целью дальнейшего улучшения оценок, полученных в главе 4, вводятся следующие определения:

Определение.

а) Число h называется *малой выборочной высотой* с границей k слова W над множеством слов Z, если h — такое максимальное число, что у слова W найдётся h попарно непересекающихся циклически несравнимых подслов вида z^m, где $z \in Z, m > k$.

б) Число h называется *большой выборочной высотой* с границей k слова W над множеством слов Z, если h — такое максимальное число,что у слова W найдётся h попарно непересекающихся подслов вида z^m, где $z \in Z, m > k$, причём соседние подслова из этой выборки несравнимы.

в) Множество слов V имеет малую (большую) выборочную высоту h над некоторым множеством слов Z, если h является точной верхней гранью малых (больших) выборочных высот над Z его элементов.

Затем доказываются следующие нижние и верхние оценки на кусочную периодичность:

Теорема 5.1.1. Малая выборочная высота множества не сильно n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины 2 не больше $\daleth(2, l, n)$, где

$$\daleth(2, l, n) = \frac{(2l-1)(n-1)(n-2)}{2}.$$

Теорема 5.1.2. Малая выборочная высота множества не сильно n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины 2 при фиксированном n больше, чем $\alpha(n, l)$, где

$$\alpha(n, l) = \frac{n^2 l}{2}(1 - o(l)).$$

Более точно,

$$\alpha(n, l) = \frac{(l - 2^{n-1})(n-2)(n-3)}{2}.$$

Теорема 5.1.3. Малая выборочная высота множества не сильно n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины 3 не больше $\daleth(3, l, n)$, где

$$\daleth(3, l, n) = (2l-1)(n-1)(n-2).$$

Теорема 5.1.4. Малая выборочная высота множества не сильно n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины $(n-1)$ не больше $\daleth(n-1, l, n)$, где

$$\daleth(n-1, l, n) = (l-2)(n-1).$$

Теорема 5.1.5 с помощью кодировки обобщает теорему 5.1.1 до доказательства ограниченности существенной высоты множества не n-разбиваемых слов.

Теорема 5.1.5. Существенная высота l-порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины $< n$ меньше, чем $\Upsilon(n, l)$, где

$$\Upsilon(n, l) = 8(l + 1)^n n^5 (n - 1).$$

Малую и большую выборочные высоты связывает следующая теорема:

Теорема 5.1.6. Большая выборочная высота l-порождённой PI-алгебры A с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством нециклических слов длины k меньше

$$2(n - 1)\beth(k, l, n),$$

где $\beth(k, l, n)$ — малая выборочная высота A над множеством нециклических слов длины k.

В **главе 6** рассмотрены полилинейные слова и при помощи теоремы Дилуорса и работы Щенстеда[32] доказаны следующие теоремы:

Теорема 6.1.1. $\xi_k(n)$ — количество не $(k+1)$-разбиваемых перестановок $\pi \in S_n$ — не больше, чем $\frac{k^{2n}}{((k-1)!)^2}$.

Теорема 6.1.2. $\varepsilon_k(n)$ — количество n-элементных перестановочно упорядоченных множеств с максимальной антицепью длины k — не больше, чем $\min\{\frac{k^{2n}}{(k!)^2}, \frac{(n-k+1)^{2n}}{((n-k)!)^2}\}$.

Глава 7 посвящена свойствам изложенной в статье комбинаторной техники, её плюсам и минусам. Также оцениваются перспективы этой техники для улучшения оценок в теоремах 1.5.2, 1.5.3 и 1.5.1. Описана связь между комбинаторикой полилинейных слов и проблемой Шпехта.

Благодарности

Автор глубоко благодарен своем научным руководителям — доктору физико-математических наук профессору Алексею Яковлевичу Белову и доктору физико-математических наук Александру Васильевичу Михалеву за постановку задач, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе.

Также автор хотел бы поблагодарить за внимание и обсуждения работы доктора физико-математических наук, профессора Виктора Николаевича Латышева и всех участников семинара “Теория колец”.

[32] C. Schensted. *Longest increasing and decreasing subsequences.* Canad. J. Math 13, 1961, P. 179–191.

Автор выражает свою отдельную благодарность Андрею Михайловичу Райгородскому и всем участникам его семинара.

Работа выполнена причастичной финансовой поддержке БФ Система (стипендиальная программа “Лифт в будущее”), фонда Саймонса, фонда Дмитрия Зимина “Династия”, гранта О. В. Дерипаска талантливым студентам, аспирантам и молодым ученым МГУ имени М.В.Ломоносова, гранта РФФИ №14-01-00548.

Работы автора по тмем диссертации

1. М. И. Харитонов. *Двусторонние оценки существенной высоты в теореме Ширшова о высоте.* Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. 2(2012), 20–24.

2. М. И. Харитонов. *Оценки на структуру кусочной периодичности в теореме Ширшова о высоте.* Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. 1(2013), 10–16.

3. А. Я. Белов, М. И. Харитонов. *Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте.* Мат. сб., 4(2012), 81–102 (see also arXiv: 1101.4909).

4. А. Я. Белов, М. И. Харитонов. *Оценки высоты в смысле Ширшова и на количество фрагментов малого периода.* Фундамент. и прикл. матем., 17:5 (2012), 21–54. (Journal of Mathematical Sciences, September 2013, Volume 193, Issue 4, pp 493–515); A. Ya. Belov, M. I. Kharitonov, *Subexponential estimates in the height theorem and estimates on numbers of periodic parts of small periods*, J. Math. Sci., 193:4 (2013), 493–515.

5. М. И. Харитонов.*Оценки на количество перестановочно-упорядоченных множеств.* Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. 3(2015), 24–28.

6. М. И. Харитонов.*Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте.* Чебышевский сб., 15:4 (2014), 55–123.

7. A. Belov-Kanel, M. Kharitonov. *Subexponential estimations in Shirshov's height theorem.* Georgian Schience foundation., Georgian Technical University, Batumi State University, Ramzadze mathematical institute, Int. conference “Modern algebra ad its applications” (Batumi, Sept. 2011), Proceedings of the Int. conference, 1, Journal of Mathematical Sciences September 2013, Volume 193, Issue 3, 378–381, Special Session dedicated to Professor Gigla Janashia.

8. A. Belov-Kanel, M. Kharitonov. *Subexponential estimates in the height theorem and estimates on numbers of periodic parts of small periods.* Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory, Abstracts (Bedlewo, Poland, July 14–20), Stefan Banach International Mathematical Center, 2013, 58–61.

9. М. И. Харитонов. *Оценки на количество перестановочно-упорядоченных множеств.* Материалы Международного молодежного научного форума “Ломоносов-2013” (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 8–13 апреля 2013 г.), Секция “Математика и механика”, подсекция “Математическая логика, алгебра и теория чисел”, М.: МАКС Пресс, 2013, 15.

10. М. И. Харитонов. *Существенная высота алгебр с полиномиальными тождествами и графы подслов.* Материалы XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 9–13 апреля 2012 г.), Секция “Математика и механика”, подсекция “Математическая логика, алгебра и теория чисел”, М.: МАКС, 2012, 18.

11. М. И. Харитонов. *Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте.* Материалы XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”. (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 11–15 апреля 2011 г.), Секция “Математика и механика”, подсекция “Математика”, М.: МАКС, 2011, 176.

В работах 3, 4, 7 и 8 Харитонову М. И. принадлежат концепция иерархической конструкции и техническая реализация, Белову А. Я. принадлежит идея отступа.