МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Харитонов Михаил Игоревич

УДК 512.5+512.64+519.1

# Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор А. В. Михалёв
доктор физико-математических наук,
профессор А. Я. Белов

Москва — 2015

# Оглавление

**1 Введение** **5**

1.1 Краткое содержание . . . . . 5

1.2 Проблемы бернсайдовского типа . . . . . 6

1.3 Теорема Ширшова о высоте, следствия и обобщения . . . . . 8

1.4 $n$-разбиваемость и теорема Дилуорса . . . . . 13

1.5 Оценки высоты и степени нильпотентности . . . . . 15

1.6 Цели и результаты исследования . . . . . 16

1.7 Основные результаты . . . . . 17

1.8 Методы исследования . . . . . 20

1.9 Апробация и публикации на тему диссертации . . . . . 20

1.10 Структура диссертации . . . . . 22

**2 Проблемы бернсайдовского типа и тождества в теории колец** **24**

2.1 Теория колец в контексте проблематики бернсайдовского типа . . . . . 24

2.2 Неассоциативные обобщения . . . . . 31

2.3 Базисы Ширшова . . . . . 32

2.4 Существенная высота . . . . . 33

2.5 Строение векторов степеней . . . . . 33

2.6 $n$-разбиваемость, обструкции и теорема Дилуорса . . . . . 34

2.7 Оценки высоты и степени нильпотентности . . . . . 36

2.8 О нижних оценках . . . . . 37

**3 Оценки индекса нильпотентности конечно порождённых алгебр с ниль-тождеством** **39**

3.1 Оценки на появление степеней подслов . . . . . 39

3.1.1 План доказательства субэкспоненциальности индекса нильпотентности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
3.1.2 Свойства периодичности и $n$-разбиваемости . . . . . . . . 40
3.2 Оценки на появление периодических фрагментов . . . . . . . . . 46
3.2.1 Применение теоремы Дилуорса. . . . . . . . . . . . . . . . 46
3.2.2 Наборы $B^p(i)$, процесс на позициях . . . . . . . . . . . . 46
3.2.3 Завершение доказательства субэкспоненциальности индекса нильпотентности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

**4 Оценки высоты и существенной высоты конечно порождённой PI-алгебры. 50**
4.1 Оценка существенной высоты. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
4.1.1 Нахождение различных периодических фрагментов в слове . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
4.1.2 Применение теоремы Дилуорса . . . . . . . . . . . . . . . 52
4.1.3 Наборы $C^\alpha(i)$, процесс на позициях . . . . . . . . . . . 53
4.1.4 Завершение доказательства субэкспоненциальности существенной высоты . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
4.2 Оценка высоты в смысле Ширшова . . . . . . . . . . . . . . . . 56
4.2.1 План доказательства . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
4.2.2 Суммирование существенной высоты и степени нильпотентности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
4.2.3 Завершение доказательства субэкспоненциальности высоты . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60

**5 Оценки кусочной периодичности 61**
5.1 План улучшения оценок существенной высоты . . . . . . . . . . 61
5.2 Доказательство верхних оценок выборочной высоты . . . . . . . 62
5.2.1 Периоды длины два . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
5.2.2 Периоды длины три . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
5.2.3 Завершение доказательства теоремы 1.7.7 . . . . . . . . . . 66
5.2.4 Периоды длины, близкой к степени тождества в алгебре 67
5.2.5 Завершение доказательства теоремы 1.7.8 . . . . . . . . . . 69

5.3 Нижняя оценка малой выборочной высоты над периодами длины два . . . 70
5.4 Оценка существенной высоты с помощью выборочной высоты . 71

**6 Оценки числа перестановочно упорядоченных множеств 77**
6.1 Введение и основные понятия . . . 77
6.2 Алгебраические обобщения . . . 80
6.3 Доказательство основных результатов . . . 81
6.4 Обобщенные диаграммы Юнга и их производящие функции . . 85

**7 Дальнейшее улучшение оценок высоты 87**

**Предметный указатель 91**

**Список литературы 93**

# Глава 1

# Введение

## 1.1 Краткое содержание

Рассмотрим $l$-порожденную ассоциативную алгебру $A$, в которой выполняется тождество $x^n = 0$ для некоторого натурального $n$ (так называемое ниль-тождество). Ее *индексом нильпотентности* называют наибольшее количество образующих, произведение которых может не быть равно нулю. В диссертации получена верхняя оценка индекса нильпотентности (см. теорему 1.7.1 и главу 3).

Рассмотрим теперь $l$-порожденную ассоциативную алгебру $B$, в которой выполняется полиномиальное тождество степени $n$. Пусть $Y = \{v_1, \ldots, v_t\}$ — некоторое множество слов от образующих алгебры $B$. Пусть $S(Y) = \bigcup\limits_{i=1}^{t}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} v_i^j$. *Высотой* $\mathrm{Ht}_Y(B)$ алгебры $B$ над множеством $Y$ называется наименьшее число такое, что любой элемент $b \in B$ раскладывается в линейную комбинацию слов из $S(Y)^{\mathrm{Ht}_Y(B)}$. Таким образом, понятие высоты является естественным обобщением понятия индекса нильпотентности.

Пусть $Y_k(X)$ — множество слов над образующими некоторой алгебры $X$ длины меньше $k$. А. И. Ширшовым было доказано, что высота $\mathrm{Ht}_{Y_n}(B)$ конечна. Заметим, что если $X$ — некоторая конечно порожденная коммутативная алгебра, то $\mathrm{Ht}_{Y_2(X)}(X)$ не больше числа порождающих алгебры. В диссертации получена верхняя оценка высоты $\mathrm{Ht}_{Y_n(B)}(B)$ (см. теорему 1.7.2 и главу 4).

Рассмотрим множество $B'$ слов над $l$-буквенным алфавитом. Назовем слово не $k$-разбиваемым, если в нем не найдется $k$ непересекающихся подслов в порядке строгого лексикографического убывания. А. И. Ширшов показал, что $\mathrm{Ht}_{Y_n}(B)$ не больше числа не $n$ разбиваемых слов в множестве $B'$. Таким образом алгебраическая задача переводится на комбинаторный язык. Результаты в статье получены с помощью разработки комбинаторного аппарата, основанного на этом комбинаторном языке. Автором разработаны комбинаторные методы для улучшения оценок в теореме 1.7.2 (см. теоремы 1.7.5, 1.7.6, 1.7.7, 1.7.8 и главу 5).

Концепция $k$-разбиваемости не ограничивается применением в теореме о высоте. Подробнее эта концепция, а также связанные с ней результаты автора описаны в пункте 1.4 и главе 6.

## 1.2 Проблемы бернсайдовского типа

Проблемы бернсайдовского типа оказали огромное влияние на алгебру XX века. Центральное место имела проблема Бернсайда для групп:

**Проблема 1.2.1** ([63]). *Будет ли конечной всякая периодическая конечно порождённая группа?*

Первоначальные усилия были направлены в сторону положительного решения проблемы, так как все известные частные случаи давали позитивный ответ. Например, если группа порождена $m$ элементами и порядок каждого её элемента является делителем числа 4 или 6, она конечна.

В связи с этим была поставлена так называемая "ослабленная" проблема Бернсайда:

**Проблема 1.2.2.** *Верно ли, что среди всех $m-$порожденных конечных групп с тождеством $x^n = 1$ есть максимальная?*

При простом $n$ эта проблема была решена А. И. Кострикиным [19]. Он свел задачу к локальной конечности алгебр Ли над полем $\mathbb{Z}_p$ с тождеством

$$[\dots[x, y], y], \dots, y] = 0.$$

В общем случае это составило знаменитый результат Е. И. Зельманова [13,14], который установил локальную конечность алгебраических PI-алгебр Ли над полем произвольной характеристики.

Первый контрпример к "неограниченной" проблеме был получен благодаря универсальной конструкции Голода–Шафаревича. Это вытекало из конструкции бесконечномерного ниль-кольца (разумеется, индекс нильпотентности этого кольца неограничен). Хотя "ослабленная" проблема Бернсайда была имела положительное решение, вопрос о локальной конечности групп с тождеством $x^n = 1$ был решен отрицательно в знаменитых работах П. С. Новикова и С. И. Адяна [30–33]: было доказано существование для любого нечетного $n \geqslant 4381$ бесконечной группы с $m > 1$ образующими, удовлетворяющей тождеству $x^n = 1$. Эта оценка была улучшена до $n \geqslant 665$ С. И. Адяном [1][1]. Позднее А. Ю. Ольшанский [34] предложил геометрически наглядный вариант доказательства для нечетных $n > 10^{10}$.

Аналог проблемы Бернсайда для ассоциативных алгебр был сформулирован А. Г. Курошем в тридцатых годах двадцатого века:

**Вопрос 1.2.1.** *Пусть все* 1*-порождённые подалгебры конечно порождённой ассоциативной алгебры $A$ конечномерны. Будет ли алгебра $A$ конечномерна?*

Отрицательный ответ на вопрос А. Г. Куроша был получен Е. С. Голодом в 1964 году.

**Определение 1.2.1.** *Классом нильпотентности* или *ниль-индексом* ассоциативной алгебры $A$ называется минимальное натуральное число $n$ такое, что $A^n = 0$.

**Теорема 1.2.1** (А. Г. Курош, [21]). *Любая удовлетворяющая тождеству $x^2 = 0$ алгебра над полем характеристики $\geqslant 3$ или $0$ является нильпотентной класса $3$. Любая нильпотентная конечно порождённая алгебра конечномерна.*

**Определение 1.2.2.** *Индексом* алгебраической алгебры $A$ называется супремум степеней минимальных аннулирующих многочленов элементов $A$.

В 1941 году А. Г. Курош в работе [21] сформулировал аналог проблемы Бернсайда для алгебр конечного индекса:

**Вопрос 1.2.2.** *1. Верно ли, что конечно порождённая ниль-алгебра конечного ниль-индекса нильпотентна?*

[1]Недавно С. И. Адян улучшил эту оценку до $n \geqslant 101$.

2. *Верно ли, что конечно порождённая алгебра конечного индекса конечномерна?*

В 1948 году И. Капланский ответил на вопрос А. Г. Куроша, отказавшись от условия конечности индекса:

**Теорема 1.2.2** (И. Капланский, [78]). *Любая конечно порождённая алгебраическая алгебра над коммутативным кольцом, удовлетворяющая допустимому полиномиальному тождеству, конечномерна.*

## 1.3 Теорема Ширшова о высоте, следствия и обобщения

В 1958 году А. И. Ширшов улучшил результат И. Капланского, требуя алгебраичности только элементов алгебры, являющихся произведением менее чем $n$ порождающих.

**Обозначение 1.3.1.** *Пусть $X$ — некоторый конечный алфавит, на буквах которого введён линейный порядок $\succ$. Будем обозначать за $X^*$ множество слов от этого алфавита, причём $X^*$ содержит и пустое слово.*

**Определение 1.3.1.** Введём теперь порядок на словах из $X^*$.

Пусть $u \in X^*$, $v \in X^*$. Будем считать, что $u \succ v$, если найдутся такие (возможно пустые) слова $w$, $u'$, $v'$ из $X^*$ и буквы $a \succ b$ из $X$, что $u = wau'$, $v = wbv'$.

Заметим, что два слова будут несравнимыми, если одно является началом другого.

**Определение 1.3.2.** Назовем слово $W$ *$n$-разбиваемым*, если $W$ можно представить в виде

$$W = vu_1u_2\cdots u_n$$

так, чтобы

$$u_1 \succ u_2 \succ \cdots \succ u_n.$$

Слова $u_1, u_2, \ldots, u_n$ назовём *$n$-разбиением* слова $W$.

В этом случае при любой нетождественной перестановке $\sigma$ подслов $u_i$ получается слово

$$W_\sigma = vu_{\sigma(1)}u_{\sigma(2)}\cdots u_{\sigma(n)},$$

лексикографически меньшее $W$. Это свойство некоторые авторы берут за основу определения понятия $n$-разбиваемости.

**Определение 1.3.3.** Назовём множество $\mathcal{M} \subset X^*$ множеством *ограниченной высоты* $h = \mathrm{Ht}_Y(A)$ *над множеством слов* $Y = \{u_1, u_2, \ldots\}$, если $h$ — минимальное число такое, что любое слово $u \in \mathcal{M}$ либо $n$-разбиваемо, либо представимо в виде

$$u = u_{j_1}^{k_1}u_{j_2}^{k_2}\cdots u_{j_r}^{k_r}, \text{ где } r \leqslant h.$$

**Определение 1.3.4.** Назовём алгебру $A$ алгеброй *ограниченной высоты* $h = \mathrm{Ht}_Y(A)$ *над множеством элементов* $Y = \{u_1, u_2, \ldots\}$, если $h$ — минимальное число такое, что любой элемент $x$ из $A$ можно представить в виде

$$x = \sum_i \alpha_i u_{j_{(i,1)}}^{k_{(i,1)}} u_{j_{(i,2)}}^{k_{(i,2)}} \cdots u_{j_{(i,r_i)}}^{k_{(i,r_i)}},$$

причем $\{r_i\}$ не превосходят $h$. Множество $Y$ называется *базисом Ширшова* или *$s$-базисом* для алгебры $A$.

**Определение 1.3.5.** Назовём полиномиальное тождество некоторой ассоциативной алгебры *допустимым*, если коэффициент перед одним из его старших мономов равен единице.

**Замечание 1.3.1.** PI-*алгебра над полем обладает допустимым полиномиальным тождеством.*

**Теорема 1.3.1** (А. И. Ширшов, [48, 49])**.** *Конечно порождённая алгебра с допустимым полилинейным тождеством имеет ограниченную высоту над множеством слов над порождающими меньшей, чем $n$ длины, где $n$ — степень тождества.*

Используя линеаризацию, из теоремы Ширшова о высоте можно вывести следующее следствие:

**Следствие 1.3.1.** *Конечно порождённая алгебра с допустимым полиномиальным тождеством имеет ограниченную высоту над множеством слов над порождающими меньшей, чем $n$ длины, где $n$ — степень тождества.*

Из теоремы о высоте вытекает решение ряда проблем теории колец (см. ниже). Проблемы бернсайдовского типа, связанные с теоремой о высоте, рассмотрены в обзоре [101]. Многообразия ниль-алгебр исследовались А. Р. Кемером [79] и Л. М. Самойловым [38].

Понятие *$n$-разбиваемости* представляется фундаментальным. Оценки, полученные В. Н. Латышевым на $\xi_n(k)$ — количество полилинейных слов, не являющихся $n$-разбиваемыми, от $k$ символов — привели к фундаментальным результатам в PI-теории. Вместе с тем, это количество есть не что иное, как количество расстановок чисел от 1 до $k$ таких, что никакие $n$ из них (не обязательно стоящие подряд) не идут в порядке убывания. Это также является перечислением всех перестановочно упорядоченных множеств диаметра $n$, где множество называется *перестановочно упорядоченным*, если его порядок есть пересечение двух линейных порядков.

Из теоремы о высоте вытекает положительное решение проблем бернсайдовского типа для PI-алгебр. В самом деле, пусть в ассоциативной алгебре над полем выполняется полиномиальное тождество $f(x_1,\dots,x_n)=0$. Тогда в ней выполняется и допустимое полилинейное тождество (т.е. полилинейное тождество, у которого хотя бы один коэффициент при членах высшей степени равен единице):

$$x_1x_2\cdots x_n=\sum_\sigma \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)},$$

где $\alpha_\sigma$ принадлежат основному полю. В этом случае, если

$$W=vu_1u_2\cdots u_n$$

является $n$-разбиваемым, то для любой перестановки $\sigma$ слово

$$W_\sigma=vu_{\sigma(1)}u_{\sigma(2)}\cdots u_{\sigma(n)}$$

лексикографически меньше слова $W$, т.е. $n$-разбиваемое слово можно представить в виде линейной комбинации лексикографически меньших слов. Значит, PI-алгебра имеет базис из слов, не являющихся $n$-разбиваемыми. В силу теоремы А. И. Ширшова о высоте, PI-алгебра имеет ограниченную высоту. Как следствие имеем, что если в PI-алгебре выполняется тождество $x^n=0$, то эта алгебра — нильпотентна, т.е. все ее слова длины больше, чем некоторое $N$, тождественно равны 0. Обзоры, посвященные теореме о высоте, содержатся в работах [39, 57, 70, 76, 80].

Из этой теоремы вытекает положительное решение проблемы А. Г. Куроша и других проблем бернсайдовского типа для PI-колец, т. к. если $Y$ — базис Ширшова, и все элементы из $Y$ — алгебраичны, то алгебра $A$ конечномерна. Тем самым теорема Ширшова дает явное указание множества элементов, алгебраичность которых ведет к конечномерности всей алгебры. Из этой теоремы вытекает

**Следствие 1.3.2.** *Пусть $A$ — конечно порождённая* PI-*алгебра. Тогда*

$$\mathrm{GK}(A) < \infty.$$

$\mathrm{GK}(A)$ — это *размерность Гельфанда–Кириллова алгебры $A$*, т.е.

$$\mathrm{GK}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln V_A(n)}{\ln(n)},$$

где $V_A(n)$ есть *функция роста алгебры $A$*, т.е. размерность векторного пространства, порождённого словами степени не выше $n$ от образующих $A$.

Взаимосвязи между проблемой Куроша и теоремой Ширшова о высоте посвящена работа [2].

**Обозначение 1.3.2.** *Обозначим через* $\deg(A)$ степень алгебры*, т.е. минимальную степень тождества, которое в ней выполняется. Через* $\mathrm{Pid}(A)$ *обозначим* сложность *алгебры $A$, т.е. максимальное $k$ такое, что $\mathbb{M}_k$ — алгебра матриц размера $k \times k$ — принадлежит многообразию* $\mathrm{Var}(A)$*, порождённому алгеброй $A$.*

Вместо понятия *высоты* иногда удобнее пользоваться близким понятием *существенной высоты.*

**Определение 1.3.6.** Алгебра $A$ имеет *существенную высоту* $h = \mathrm{HtEss}(A)$ над конечным множеством $Y$, называемым *$s$-базисом алгебры $A$*, если можно выбрать такое конечное множество $D \subset A$, что $A$ линейно представима элементами вида $t_1 \cdot \dots \cdot t_l$, где $l \leqslant 2h+1$, и $\forall i (t_i \in D \vee t_i = y_i^{k_i}; y_i \in Y)$, причем множество таких $i$, что $t_i \notin D$, содержит не более $h$ элементов. Аналогично определяется *существенная высота* множества слов.

Говоря неформально, любое длинное слово есть произведение периодических частей и “прокладок” ограниченной длины. Существенная высота есть число таких периодических кусков, а обычная еще учитывает “прокладки”.

В связи с теоремой о высоте возникли следующие вопросы:

1. На какие классы колец можно распространить теорему о высоте?

2. Над какими множествами алгебра $A$ имеет ограниченную высоту? В частности, какие наборы слов можно взять в качестве $\{v_i\}$?

3. Как устроен вектор степеней $(k_1, \ldots, k_h)$? Прежде всего: какие множества компонент этого вектора являются существенными, т.е. какие наборы $k_i$ могут быть одновременно неограниченными? Какова существенная высота? Верно ли, что множество векторов степеней обладает теми или иными свойствами регулярности?

4. Как оценить высоту?

Перейдем к обсуждению поставленных вопросов.

Теорема о высоте была распространена на некоторые классы колец, близких к ассоциативным. С. В. Пчелинцев [36] доказал ее для альтернативного и $(-1,1)$ случаев, С. П. Мищенко [28] получил аналог теоремы о высоте для алгебр Ли с разреженным тождеством. В работе А. Я. Белова [3] теорема о высоте была доказана для некоторого класса колец, асимптотически близких к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановы PI-алгебры.

В ассоциативном случае доказана теорема

**Теорема 1.3.2** (А. Я. Белов, [57])**.** *Пусть $A$ — градуированная* PI-*алгебра, $Y$ — конечное множество однородных элементов, $Y^{(n)}$ обозначает идеал, порождённый $n$-ми степенями элементов из $Y$. Тогда если при всех $n$ алгебра $A/Y^{(n)}$ нильпотентна, то $Y$ есть $s$-базис $A$. Если при этом $Y$ порождает $A$ как алгебру, то $Y$ — базис А. И. Ширшова алгебры $A$.*

Описание базисов Ширшова, состоящих из слов, заключено в следующей теореме:

**Теорема 1.3.3** ([57, 75]). *Множество слов $Y$ является базисом Ширшова алгебры $A$ тогда и только тогда, когда для любого слова $u$ длины не выше $m = \mathrm{Pid}(A)$ — сложности алгебры $A$ — множество $Y$ содержит слово, циклически сопряженное к некоторой степени слова $u$.*

Аналогичный результат был независимо получен Г. П. Чекану [43] и В. Дренски [69]. Вопросы, связанные с локальной конечностью алгебр, с алгебраическими множествами слов степени не выше сложности алгебры, исследовались в работах [39, 40, 64–66, 100]. В этих же работах обсуждались вопросы, связанные с обобщением теоремы о независимости.

Известно, что размерность Гельфанда–Кириллова оценивается существенной высотой и что $s$-базис является базисом Ширшова тогда и только тогда, когда он порождает $A$ как алгебру. В представимом случае имеет место и обратное утверждение.

**Теорема 1.3.4** (А. Я. Белов, [57]). *Пусть $A$ — конечно порождённая представимая алгебра и пусть $\mathrm{HtEss}_Y(A) < \infty$. Тогда $\mathrm{HtEss}_Y(A) = \mathrm{GK}(A)$.*

**Следствие 1.3.3** (В. Т. Марков). *Размерность Гельфанда–Кириллова конечно порождённой представимой алгебры есть целое число.*

**Следствие 1.3.4.** *Если $\mathrm{HtEss}_Y(A) < \infty$ и алгебра $A$ представима, то $\mathrm{HtEss}_Y(A)$ не зависит от выбора $s$-базиса $Y$.*

В этом случае размерность Гельфанда–Кириллова также равна существенной высоте в силу локальной представимости относительно свободных алгебр.

## 1.4 $n$-разбиваемость и теорема Дилуорса

Значение понятия *$n$-разбиваемости* выходит за рамки проблематики, относящейся к проблемам бернсайдовского типа. Оно играет роль и при изучении полилинейных слов, в оценке их количества, где *полилинейным* называется слово, в которое каждая буква входит не более одного раз. В. Н. Латышев (см. [23]) применил теорему Дилуорса для получения оценки числа не являющихся $m$-разбиваемыми полилинейных слов степени $n$ над алфавитом $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Эта оценка: $(m-1)^{2n}$ и она близка к реальности. Напомним эту теорему.

**Теорема 1.4.1** (Р. Дилуорс, [68]). *Пусть $n$ — наибольшее количество элементов антицепи данного конечного частично упорядоченного множества $M$. Тогда $M$ можно разбить на $n$ попарно непересекающихся цепей.*

Рассмотрим полилинейное слово $W$ из $n$ букв. Положим $a_i \succ a_j$, если $i > j$ и буква $a_i$ стоит в слове $W$ правее $a_j$. Условие не $m$-разбиваемости означает отсутствие антицепи из $m$ элементов. Тогда по теореме Дилуорса все позиции (и, соответственно, буквы $a_i$) разбиваются на $(m-1)$ цепь. Сопоставим каждой цепи свой цвет. Тогда раскраска позиций и раскраска букв однозначно определяет слово $W$. А число таких раскрасок не превосходит

$$(m-1)^n \times (m-1)^n = (m-1)^{2n}.$$

Автору удалось улучшить оценку В. Н. Латышева для количества полилинейных слов, не являющихся $n$-разбиваемыми. Этот результат и другие вопросы, связанные с полилинейными словами, рассматриваются в главе 6.

Приведённые оценки позволяют получить прозрачное доказательство теоремы Регева о том, что тензорное произведение PI-алгебр снова является PI-алгеброй (см. [23]).

Вопросы, связанные с перечислением полилинейных слов, не являющихся $n$-разбиваемыми, имеют самостоятельный интерес. К примеру, количество полилинейных слов длины $l$ над $l$-буквенным алфавитом, не являющихся 3-разбиваемыми, равно $k$-му числу Каталана.

В. Н. Латышев в работе [24] поставил проблему конечной базируемости множества старших полилинейных слов для $T$-идеала относительно взятия надслов и изотонных подстановок. Из этой проблемы вытекает проблема Шпехта для полилинейных многочленов, имеется тесная связь с проблемой слабой нётеровости групповой алгебры бесконечной финитарной симметрической группы над полем положительной характеристики (для нулевой характеристики это было установлено А. Е. Залесским). Для решения проблемы Латышева надо уметь переводить свойства $T$-идеалов на язык полилинейных слов.

В работах [3, 57] была предпринята попытка осуществить программу перевода структурных свойств алгебр на язык комбинаторики слов. На язык полилинейных слов такой перевод осуществить проще, в дальнейшем можно получить информацию и о словах общего вида. Полилинейные слова также исследовал А. Р. Кемер [81, 82]. Отметим, что аппарат комбинаторики слов имеет важное значение для различных областей алгебры тождеств (см., например, [29, 39, 57, 90, 91, 96]).

## 1.5 Оценки высоты и степени нильпотентности

Первоначальное доказательство А. И. Ширшова хотя и было чисто комбинаторным (оно основывалось на технике элиминации, развитой им в алгебрах Ли, в частности, при доказательстве теоремы о свободе), однако оно давало только упрощённые рекурсивные оценки. Позднее А. Т. Колотов [18] получил оценку на $\mathrm{Ht}(A) \leqslant l^{l^n}$ ($n = \deg(A)$, $l$ — число образующих). А. Я. Белов в работе [58] показал, что $\mathrm{Ht}(n, l) < 2nl^{n+1}$. Экспоненциальная оценка теоремы Ширшова о высоте изложена также в работах [69,75,104]. Данные оценки улучшались в работах А. Клейна [83, 84]. В 2001 году Е. С. Чибриков в работе [45] доказал, что $\mathrm{Ht}(4, l) \geqslant (7k^2 - 2k)$. Верхние и нижние оценки на структуру кусочной периодичности, полученные автором в работах [103,104], изложены в главе 5.

Ф. Петровым и П. Зусмановичем в работе [93] была получена связь между высотой градуированной алгебры и её нейтрального компонента.

В 2011 году А. А. Лопатин [88] получил следующий результат:

**Теорема 1.5.1.** *Пусть $C_{n,l}$ — степень нильпотентности свободной $l$-порождённой алгебры и удовлетворяющей тождеству $x^n = 0$. Пусть $p$ — характеристика базового поля алгебры — больше чем $n/2$. Тогда*

$$(1) : C_{n,l} < 4 \cdot 2^{n/2} l.$$

Е. И. Зельманов поставил следующий вопрос в Днестровской тетради [11] в 1993 году:

**Вопрос 1.5.1.** *Пусть $F_{2,m}$ — свободное 2-порождённое ассоциативное кольцо с тождеством $x^m = 0$. Верно ли, что класс нильпотентности кольца $F_{2,m}$ растёт экспоненциально по $m$?*

Сравним полученные результаты с нижней оценкой для высоты. Высота алгебры $A$ не меньше ее размерности Гельфанда–Кириллова $\mathrm{GK}(A)$. Для алгебры $l$-порождённых общих матриц порядка $n$ данная размерность равна $(l-1)n^2+1$ [7, 94]. В то же время, минимальная степень тождества этой алгебры равна $2n$ согласно теореме Амицура–Левицкого. Имеет место следующее:

**Предложение 1.5.1.** *Высота $l$-порождённой* PI-*алгебры степени $n$, а также множества не $n$-разбиваемых слов над $l$-буквенным алфавитом, не менее, чем* $(l-1)n^2/4+1$.

Нижние оценки на индекс нильпотентности были установлены Е. Н. Кузьминым в работе [20]. Е. Н. Кузьмин привел пример 2-порождённой алгебры с тождеством $x^n=0$, индекс нильпотентности которой строго больше

$$\frac{(n^2+n-2)}{2}.$$

Результат Е. Н. Кузьмина изложен в монографиях [70, 75]. Вопрос нахождения нижних оценок рассматривается в главе 6 (см. также [103]).

В то же время для случая нулевой характеристики и счетного числа образующих Ю. П. Размыслов [37] получил верхнюю оценку на индекс нильпотентности, равную $n^2$. Автор получил субэкспоненциальные оценки на индекс нильпотентности для произвольной характеристики (см. теорему 1.7.1).

## 1.6 Цели и результаты исследования

В диссертации ставится цель получения как можно более точных оценок высоты в смысле Ширшова. Разрабатываются методы описания комбинаторной структуры слов, не являющихся $n$-разбиваемыми.

В главе 3 доказывается субэкспоненциальность индекса нильпотентности. В первой части главы 4 доказываются оценки существенной высоты, т.е. количества различных периодических фрагментов в не являющемся $n$-разбиваемым слове. Во второй части главы 4 доказана субэкспоненциальность высоты в смысле Ширшова. В главе 5 оценивается существенная высота в некоторых случаях и на основании этих оценок проводится альтернативное доказательство теоремы Ширшова о высоте. В главе 6 рассмотрены вопросы $n$-разбиваемости в полилинейном случае. В главе 7 указаны пути дальнейшего улучшения оценок высоты и продолжения исследования комбинаторной структуры слов PI-алгебр.

## 1.7 Основные результаты

В диссертации получен ответ на вопрос 1.5.1 Е. И. Зельманова: в действительности искомый класс нильпотентности растёт субэкспоненциально.

**Теорема 1.7.1.** *Индекс нильпотентности $l$-порожденной алгебры ассоциативной алгебры с тождеством $x^n = 0$ не превышает*

$$2^{27} n^{12(\log_3 n + 3\log_3\log_3 n + 6)}.$$

**Теорема 1.7.2.** *Высота множества слов, не являющихся $n$-разбиваемыми (см. опр. 1.3.2), над $l$-буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше $n$ не превышает $\Phi(n,l)$, где*

$$\Phi(n,l) = 2^{96} l \cdot n^{12\log_3 n + 36\log_3\log_3 n + 91}.$$

Из данной теоремы путем некоторого огрубления и упрощения оценки получается, что при фиксированном $l$ и $n \to \infty$

$$\Phi(n,l) = n^{12(1+o(1))\log_3 n},$$

а при фиксированном $n$ и $l \to \infty$

$$\Phi(n,l) < C(n)l.$$

Также доказательство этих результатов содержится в работе [102].

**Следствие 1.7.1.** *Высота $l$-порождённой* PI*-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени $n$ над множеством слов длины меньше $n$ не превышает $\Phi(n,l)$.*

Как следствие получаются субэкспоненциальные оценки на индекс нильпотентности $l$-порождённых ниль-алгебр степени $n$ для произвольной характеристики.

Другим основным результатом диссертации является следующая теорема:

**Теорема 1.7.3.** *Пусть $l$, $n$ и $d \geqslant n$ — некоторые натуральные числа. Тогда все $l$-порождённые слова длины не меньше, чем $\Psi(n,d,l)$, либо содержат $x^d$, либо являются $n$-разбиваемыми, где*

$$\Psi(n,d,l) = 2^{27} l (nd)^{3\log_3(nd)+9\log_3\log_3(nd)+36}.$$

Из данной теоремы путем некоторого огрубления и упрощения оценки получается, что при фиксированном $l$ и $nd \to \infty$

$$\Psi(n,d,l) = (nd)^{3(1+o(1))\log_3(nd)},$$

а при фиксированных $n, d$ и $l \to \infty$

$$\Psi(n,d,l) < C(n,d)l.$$

**Обозначение 1.7.1.** *Для вещественного числа $x$ положим $\ulcorner x \urcorner := -[-x]$. Таким образом мы округляем нецелые числа в большую сторону.*

В процессе доказательства теоремы 1.7.2 доказывается следующая теорема, оценивающая существенную высоту:

**Теорема 1.7.4.** *Существенная высота $l$-порождённой $PI$-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени $n$ над множеством слов длины меньше $n$ меньше, чем $\Upsilon(n,l)$, где*

$$\Upsilon(n,l) = 2n^{3\ulcorner \log_3 n \urcorner + 4} l.$$

**Определение 1.7.1.** а) Число $h$ называется *малой выборочной высотой* с границей $k$ слова $W$ над множеством слов $Z$, если $h$ — такое максимальное число, что у слова $W$ найдётся $h$ попарно непересекающихся циклически несравнимых подслов вида $z^m$, где $z \in Z, m > k$.

б) Множество слов $V$ имеет малую выборочную высоту $h$ над некоторым множеством слов $Z$, если $h$ является точной верхней гранью малых (больших) выборочных высот над $Z$ его элементов.

**Теорема 1.7.5.** *Малая выборочная высота множества слов, не являющихся сильно $n$-разбиваемыми, над $l$-буквенным алфавитом относительно множества ациклических слов длины 2 не больше $\beth(2,l,n)$, где*

$$\beth(2,l,n) = \frac{(2l-1)(n-1)(n-2)}{2}.$$

**Теорема 1.7.6.** *Малая выборочная высота множества слов, не являющихся сильно $n$-разбиваемыми, над $l$-буквенным алфавитом относительно множества ациклических слов длины 2 при фиксированном $n$ больше, чем $\alpha(n,l)$, где*

$$\alpha(n,l) = \frac{n^2 l}{2}(1 - o(l)).$$

*Более точно,*

$$\alpha(n,l) = \frac{(l - 2^{n-1})(n-2)(n-3)}{2}.$$

**Теорема 1.7.7.** *Малая выборочная высота множества слов, не являющихся сильно $n$-разбиваемыми, над $l$-буквенным алфавитом относительно множества ациклических слов длины 3 не больше $\daleth(3,l,n)$, где*

$$\daleth(3,l,n) = (2l-1)(n-1)(n-2).$$

**Теорема 1.7.8.** *Малая выборочная высота множества слов, не являющихся сильно $n$-разбиваемыми, над $l$-буквенным алфавитом относительно множества ациклических слов длины $(n-1)$ не больше $\daleth(n-1,l,n)$, где*

$$\daleth(n-1,l,n) = (l-2)(n-1).$$

**Теорема 1.7.9.** $\xi_k(n)$ *— количество не $(k+1)$-разбиваемых перестановок $\pi \in S_n$ — не больше, чем $\frac{k^{2n}}{((k-1)!)^2}$.*

**Теорема 1.7.10.** $\varepsilon_k(n)$ *— количество $n$-элементных перестановочно упорядоченных множеств с максимальной антицепью длины $k$ — не больше, чем $\min\{\frac{k^{2n}}{(k!)^2}, \frac{(n-k+1)^{2n}}{((n-k)!)^2}\}$.*

Таким образом, **основные результаты диссертации** следующие:

1. Пусть $l$, $n$ и $d \geqslant n$ — некоторые натуральные числа. Доказано, что все $l$-порождённые слова длины не меньше, чем $\Psi(n,d,l)$, либо содержат $x^d$, либо являются $n$-разбиваемыми, где
$$\Psi(n,d,l) = 2^{27} l (nd)^{3\log_3(nd) + 9\log_3\log_3(nd) + 36}.$$

2. Для вещественного числа $x$ положим $\ulcorner x \urcorner := -[-x]$. Доказано, что существенная высота $l$-порождённой $PI$-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени $n$ над множеством слов длины меньше $n$ меньше, чем $\Upsilon(n,l)$, где
$$\Upsilon(n,l) = 2n^{3\ulcorner \log_3 n \urcorner + 4} l.$$

3. Доказано, что высота множества слов, не являющихся $n$-разбиваемыми, над $l$-буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше $n$ не превышает $\Phi(n, l)$, где

$$\Phi(n, l) = 2^{96} l \cdot n^{12 \log_3 n + 36 \log_3 \log_3 n + 91}.$$

4. Получены нижние и верхние оценки на существенную высоту в случае периодов длины 2, 3 и близкой к степени тождества, причем нижние и верхние оценки отличаются в константу раз для слов длины 2. Установлена связь с проблемами рамсеевского типа.

5. Получена близкая к реальности оценка количества полилинейных слов, не являющихся $n$-разбиваемыми. Приведено перечисление полилинейных слов, не являющихся $n$-разбиваемыми.

## 1.8 Методы исследования

В работе используются современные комбинаторные методы теории колец. В частности, техника В. Н. Латышева переносится на неполилинейный случай, что позволяет получить субэкспоненциальную оценку в теореме Ширшова о высоте. Идею этого переноса предложил Г. Р. Челноков в 1996 году.

## 1.9 Апробация и публикации на тему диссертации

Результаты диссертации неоднократно докладывались автором на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. Научно-исследовательский семинар “Теория колец” кафедры высшей алгебры МГУ в 2010–2014 гг.

2. Научно-исследовательский семинар А. М. Райгородского в 2011–2012 гг.

   Кроме того, результаты докладывались на следующих семинарах:

3. “Bar-Ilan Algebra Seminar” (Bar-Ilan University) (December 18, 2013).

4. “PI-Seminar” (Technion (Israel Institute of Technology)) (December 20, 2013).

Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

1. International conference on Ring Theory dedicated to the 90th anniversary of A. I. Shirshov. Russia, Novosibirsk (July 13–19, 2011). Invited speaker.

2. International conference on Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory. Poland, Bedlewo (July 14–20, 2013).

3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2013". Россия, Москва (8-13 апреля, 2013).

4. Международный алгебраический симпозиум, посвященный 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалёва. Россия, Москва (15–18 ноября, 2010).

5. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2011". Россия, Москва (11–15 апреля 2011).

6. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2012". Россия, Москва (9–13 апреля, 2012).

7. XII международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения", посвященная восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева. Россия, Тула (21–25 апреля, 2014).

**Работы по теме диссертации:**


1. А. Я. Белов, М. И. Харитонов. *Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте.* Мат. сб., 4(2012), 81–102 (see also arXiv: 1101.4909).

2. М. И. Харитонов. *Двусторонние оценки существенной высоты в теореме Ширшова о высоте.* Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. 2(2012), 20–24.

3. М. И. Харитонов. *Оценки на структуру кусочной периодичности в теореме Ширшова о высоте.* Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. 1(2013), 10–16.

4. А. Я. Белов, М. И. Харитонов. *Оценки высоты в смысле Ширшова и на количество фрагментов малого периода.* Фундамент. и прикл. матем., 17:5 (2012), 21–54. (Journal of Mathematical Sciences, September 2013, Volume 193, Issue 4, pp 493–515); A. Ya. Belov, M. I. Kharitonov, *Subexponential estimates in the height theorem and estimates on numbers of periodic parts of small periods*, J. Math. Sci., 193:4 (2013), 493–515.

5. М. И. Харитонов.*Оценки на количество перестановочно упорядоченных множеств.* Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. 3(2015), 24–28.

6. М. И. Харитонов.*Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте.* Чебышевский сб., 15:4 (2014), 55–123.

В работах 1 и 4 М. И. Харитонову принадлежат идеи многоступенчатой конструкции и техническая реализация.

## 1.10 Структура диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, шести глав, предметного указателя и списка литературы, который включает 107 наименований.

## Благодарности

Автор глубоко благодарен своем научным руководителям — доктору физико-математических наук профессору Алексею Яковлевичу Белову и доктору физико-математических наук профессору Александру Васильевичу Михалёву за постановку задач, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе.

Также автор хотел бы поблагодарить за внимание и обсуждения работы доктора физико-математических наук, профессора Виктора Николаевича Латышева и всех участников семинара “Теория колец”.

Автор выражает свою отдельную благодарность Андрею Михайловичу Райгородскому и всем участникам его семинара.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке БФ Система (стипендиальная программа “Лифт в будущее”), фонда Саймонса, фонда Дмитрия Зимина “Династия”, гранта О. В. Дерипаска талантливым студентам, аспирантам и молодым ученым МГУ имени М.В.Ломоносова, гранта РФФИ №14-01-00548.

# Глава 2

# Проблемы бернсайдовского типа и тождества в теории колец

## 2.1 Теория колец в контексте проблематики бернсайдовского типа

Проблемы бернсайдовского типа оказали огромное влияние на алгебру XX века. Для теории групп центральное место имела проблема Бернсайда:

**Проблема 2.1.1** ([63]). *Будет ли конечной всякая периодическая конечно порождённая группа?*

Первоначальные усилия были направлены в сторону положительного решения проблемы, так как все известные частные случаи давали позитивный ответ. Например, если группа порождена $m$ элементами и порядок каждого её элемента является делителем числа 4 или 6, она конечна.

В связи с этим была поставлена так называемая "ослабленная" проблема Бернсайда:

**Проблема 2.1.2.** *Верно ли, что среди всех $m-$порожденных конечных групп с тождеством $x^n = 1$ есть максимальная?*

При простом $n$ эта проблема была решена А. И. Кострикиным [19]. Он свел задачу к локальной конечности алгебр Ли над полем $\mathbb{Z}_p$ с тождеством

$$[\dots[x, y], y], \dots, y] = 0.$$

В общем случае это составило знаменитый результат Е. И. Зельманова [13,14], который установил локальную конечность алгебраических PI-алгебр Ли над полем произвольной характеристики.

Первый контрпример к "неограниченной" проблеме был получен благодаря универсальной конструкции Голода–Шафаревича. Это вытекало из конструкции бесконечномерного ниль-кольца (разумеется, индекс нильпотентности этого кольца неограничен). Хотя "ослабленная" проблема Бернсайда была решена положительным образом, вопрос о локальной конечности групп с тождеством $x^n = 1$ был решен отрицательно в знаменитых работах П. С. Новикова и С. И. Адяна [30–33]: было доказано существование для любого нечетного $n \geqslant 4381$ бесконечной группы с $m > 1$ образующими, удовлетворяющей тождеству $x^n = 1$. Эта оценка была улучшена до $n \geqslant 665$ С. И. Адяном [1][1]. Позднее А. Ю. Ольшанский [34] предложил геометрически наглядный вариант доказательства для нечетных $n > 10^{10}$.

Построения в полугруппах, как правило, проще, чем в группах. Например, вопрос о существовании конечно порождённой ниль-полугруппы, то есть полугруппы, каждый элемент которой в некоторой степени обращается в нуль, имеет тривиальный положительный ответ: уже в алфавите из двух букв имеются слова сколь угодно большой длины, не содержащие трех подряд одинаковых подслов (так называемых кубов слов). Этот факт был независимо доказан А. Туэ [99] и М. Морсом [92].

**Теорема 2.1.1** (Морс–Туэ). *Пусть $X = \{a, b\}$, $X^*$ — множество слов над алфавитом $X$, подстановка $\varphi$ задана соотношениями*

$$\varphi(a) = ab, \varphi(b) = ba.$$

*Тогда если слово $w \in X^*$ — бескубное, то и $\varphi(w)$ — бескубное.*

В дальнейшем этот результат был усилен А. Туэ:

**Теорема 2.1.2** (А. Туэ–1, [99]). *Пусть $X = \{a, b, c\}$, $X^*$ — множество слов над алфавитом $X$, подстановка $\varphi$ задана соотношениями*

$$\varphi(a) = abcab, \varphi(b) = acabcb, \varphi(c) = acbcacb.$$

*Тогда если слово $w \in X^*$ — бесквадратное, то и $\varphi(w)$ — бесквадратное.*

[1] Недавно С. И. Адян улучшил эту оценку до $n \geqslant 101$.

**Теорема 2.1.3** (А. Туэ–2). *Пусть $L$ и $N$ — алфавиты, $N^*$ — множество слов над алфавитом $N$, для подстановки $\varphi : L \to N^*$ выполнены следующие условия:*

1. *если длина $w$ не больше 3, то $\varphi(w)$ — бесквадратное;*

2. *если $a$, $b$ — буквы алфавита $L$, а $\varphi(a)$ — подслово $\varphi(b)$, то $a = b$.*

*Тогда если слово $w \in L^*$ — бесквадратное, то и $\varphi(w)$ — бесквадратное.*

Полное алгоритмическое описание бесквадратных подстановок было впервые получено Дж. Берстелем [60, 61]. В дальнейшем М. Крошмором было предложено следующее описание:

**Теорема 2.1.4** (М. Крошмор, [67]). *Пусть $L$ и $N$ — алфавиты, $N^*$ — множество слов над алфавитом $N$, $\varphi : L \to N^*$ — подстановка, $M$ — наибольший размер образа буквы алфавита $L$ при подстановке $\varphi$, $m$ — наименьший размер образа буквы $L$ при той же подстановке,*

$$k = \max\{3, 1 + [(M - 3)/m]\}.$$

*Тогда подстановка $\varphi$ — бесквадратная в том и только в том случае, когда для любого бесквадратного слова $w$ длины $\leqslant k$ слово $\varphi(w)$ будет бесквадратным.*

Недавно А. Я. Беловым и И. А. Ивановым-Погодаевым был построен пример конечно определенного бесконечной ниль-полугруппы (см. [74]). Примеры конечно определенного ненильпотентного ниль-кольца и конечно определенной бесконечной периодической группы пока не построены.

Обзор проблем бернсайдовского типа в теории колец проведён в монографии М. Сапира [96] и статье А. Я. Белова [6].

Аналог проблемы Бернсайда для ассоциативных алгебр была сформулирована А. Г. Курошем в тридцатых годах двадцатого века:

**Вопрос 2.1.1.** *Пусть все 1-порождённые подалгебры конечно порождённой ассоциативной алгебры $A$ конечномерны. Будет ли $A$ конечномерна?*

**Предложение 2.1.1.** *Пусть $A$ — ассоциативная $K$-алгебра, $K$ — коммутативное кольцо, $a \in A$. Подалгебра, порождённая $a$, конечномерна тогда и только тогда, когда $a$ — алгебраический элемент.*

Отрицательный ответ был получен Е. С. Голодом в 1964 году более сложным способом, чем в случае полугрупп. Например, в полугрупповом случае найдётся 3-порождённая бесконечная полугруппа, удовлетворяющая тождеству $x^2 = 0$. Для ассоциативных алгебр над полем характеристики $\geqslant 3$ это невозможно.

**Определение 2.1.1.** *Классом нильпотентности*, *индексом нильпотентности* или *ниль-индексом* ассоциативной алгебры $A$ называется минимальное натуральное число $n$ такое, что $A^n = 0$.

**Теорема 2.1.5** (А. Г. Курош, [21]). *Любая удовлетворяющая тождеству $x^2 = 0$ алгебра над полем характеристики $\geqslant 3$ или 0 является нильпотентной класса 3. Любая нильпотентная конечно порождённая алгебра конечномерна.*

**Определение 2.1.2.** *Индексом* алгебраической алгебры $A$ называется супремум степеней минимальных аннулирующих многочленов элементов $A$.

В 1941 году А. Г. Курош в работе [21] сформулировал проблему Бернсайда для алгебр конечного индекса:

**Вопрос 2.1.2.**
1. *Верно ли, что конечно порождённая ниль-алгебра конечного ниль-индекса нильпотентна?*
2. *Верно ли, что конечно порождённая алгебра конечного индекса конечномерна?*

В 1946 году И. Капланский [77] и Д. Левицкий [86] ответили на эти вопросы положительным образом для алгебр с допустимым полиномиальным тождеством, где полиномиальное тождество называется *допустимым*, если один из его коэффициентов равен 1. Заметим, что в случае ассоциативных алгебр над полями любое полиномиальное тождество является допустимым.

В 1948 году И. Капланский отказался от условия конечности индекса:

**Теорема 2.1.6** (И. Капланский, [78]). *Любая конечно порождённая алгебраическая алгебра над коммутативным кольцом, удовлетворяющая допустимому полиномиальному тождеству, конечномерна.*

Проблема Куроша для альтернативных и йордановых алгебр была решена И. П. Шестаковым (см. [53]).

Доказательства в работах [77] и [86] были проведены структурными методами. Заметим, что структурная теория, развитая в работах Ш. Амицура, И. Капланского и др., позволила решить ряд классических проблем и служит основой для дальнейших исследований. Обычная схема структурных рассуждений состояла в исследовании полупростой части (матриц над телами) и редукции к полупростой ситуации путём факторизации по радикалу. Несмотря на свою эффективность, рассуждения такого рода не являются конструктивными. Кроме того, доказательства, которые получаются с помощью структурной теории, не дают понимания происходящего "на микроуровне", т. е. на уровне слов и соотношений между ними.

В 1958 году А. И. Ширшов доказал свою знаменитую теорему о высоте чисто комбинаторными методами [46–52, 57]. Из теоремы Ширшова о высоте следует решение проблемы Куроша для ассоциативных PI-алгебр в усиленной форме, т.е. требование алгебраичности алгебры заменяется на требование алгебраичности слов от порождающих длины менее степени тождества в алгебре, а требование конечности отбрасывается. Таким образом, результат А. И. Ширшова есть улучшение теоремы 2.1.6.

**Теорема 2.1.7** (А. И. Ширшов, [48, 49])**.** *Пусть $A = \langle X\rangle$ — конечно порождённая ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом, удовлетворяющая допустимому полиномиальному тождеству степени $n$. Тогда найдётся число $H$, зависящее только от $|X|$ и $n$ такое, что каждый элемент $a \in A$ может быть представлен как линейная комбинация слов вида*

$$v_1^{n_1}\cdots v_h^{n_h},$$

*где $h \leqslant H$, а длина каждого слова $v_i$ меньше $n$.*

Если в ассоциативной алгебре есть допустимое полиномиальное тождество, то есть и допустимое полилинейное тождество той же или меньшей степени. Доказательство этого факта можно найти в монографии [12].

Пусть $f = 0$ — допустимое полилинейное тождество степени $n$. Тогда каждый моном $f$ является произведением переменных в некотором порядке (каждая переменная встречается в точности один раз в каждом мономе). Таким образом, все мономы $f$ получаются из $x_1x_2\cdots x_n$ путём перестановки переменных. Следовательно, каждое допустимое полилинейное тождество имеет форму

$$\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)},$$

где $S_n$ — группа всех перестановок множества $\{1,\ldots,n\}$, а один из коэффициентов $\alpha_\sigma$ равен 1.

Это тождество после переименования переменных может для некоторых коэффициентов $\beta_\sigma$ быть представлено в форме

$$x_1x_2\cdots x_n=\sum_{\sigma\in S_n\setminus\{1\}}\beta_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)}$$

Таким образом, каждое произведение $u_1u_2\cdots u_n$ элементов алгебры $A$ есть линейная комбинация перестановок этого произведения. Пусть на словах из $X^*$ задан некоторый частичный порядок. Рассмотрим подмножество, получающихся из $X^*$ выбрасыванием слов, представимых в виде линейной комбинации меньших слов. Получаем, что теорему 2.1.7 можно доказывать только для этого подмножества. Таким образом доказательство теоремы 2.1.7 сводится к чистой комбинаторике.

Заметим, что верно и утверждение, обратное теоремам 2.1.6 и 2.1.7.

**Обозначение 2.1.1.** *Выражением*

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)$$

*называется выражение*

$$S_n(x_1,\ldots,x_n):=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)},$$

*где $S_n$ — группа перестановок от $n$ элементов.*

Известно, что в каждой ассоциативной алгебре размерности $n$ над коммутативным кольцом выполняется так называемое *стандартное тождество*

$$S_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})=0.$$

Отсюда получаем следующее предложение:

**Предложение 2.1.2.** *Любая конечномерная алгебра является конечно порождённой, алгебраичной и удовлетворяет допустимому полилинейному тождеству.*

**Определение 2.1.3.** $\mathrm{GK}(A)$ — *размерность Гельфанда–Кириллова алгебры* $A$ — определяется по правилу

$$\mathrm{GK}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln V_A(n)}{\ln(n)},$$

где $V_A(n)$ есть *функция роста алгебры* $A$, т.е. размерность векторного пространства, порождённого словами степени не выше $n$ от образующих $A$.

**Следствие 2.1.1.** *Пусть* $A$ — *конечно порождённая* PI-*алгебра. Тогда* $\mathrm{GK}(A) < \infty$.

**Обозначение 2.1.2.** *Обозначим через* $\deg(A)$ степень алгебры, *т.е. минимальную степень тождества, которое в ней выполняется. Через* $\mathrm{Pid}(A)$ *обозначим* сложность *алгебры* $A$, *т.е. максимальное* $k$ *такое, что* $\mathbb{M}_k$ — *алгебра матриц размера* $k \times k$ — *принадлежит многообразию* $\mathrm{Var}(A)$, *порождённому алгеброй* $A$.

Введём понятие высоты, частный случай которого использовался в теореме 2.1.7.

**Определение 2.1.4.** Назовём множество $\mathcal{M} \subset X^*$ множеством *ограниченной высоты* $h = \mathrm{Ht}_Y(A)$ *над множеством слов* $Y = \{u_1, u_2, \ldots\}$, если $h$ — минимальное число такое, что любое слово $u \in \mathcal{M}$ либо $n$-разбиваемо, либо представимо в виде

$$u = u_{j_1}^{k_1} u_{j_2}^{k_2} \cdots u_{j_r}^{k_r}, \text{ где } r \leqslant h.$$

**Определение 2.1.5.** Назовём PI-алгебру $A$ алгеброй *ограниченной высоты* $h = \mathrm{Ht}_Y(A)$ *над множеством слов* $Y = \{u_1, u_2, \ldots\}$, если $h$ — минимальное число такое, что любое слово $x$ из $A$ можно представить в виде

$$x = \sum_i \alpha_i u_{j_{(i,1)}}^{k_{(i,1)}} u_{j_{(i,2)}}^{k_{(i,2)}} \cdots u_{j_{(i,r_i)}}^{k_{(i,r_i)}},$$

причем $\{r_i\}$ не превосходят $h$. Множество $Y$ называется *базисом Ширшова* или *s-базисом* для алгебры $A$.

Вместо понятия *высоты* иногда удобнее пользоваться близким понятием *существенной высоты.*

**Определение 2.1.6.** Алгебра $A$ имеет *существенную высоту* $h = \mathrm{HtEss}(A)$ над конечным множеством $Y$, называемым *$s$-базисом алгебры* $A$, если можно выбрать такое конечное множество $D \subset A$, что $A$ линейно представима элементами вида $t_1 \cdot \dots \cdot t_l$, где $l \leqslant 2h+1$, и $\forall i (t_i \in D \vee t_i = y_i^{k_i}; y_i \in Y)$, причем множество таких $i$, что $t_i \notin D$, содержит не более $h$ элементов. Аналогично определяется *существенная высота* множества слов.

Говоря неформально, любое длинное слово есть произведение периодических частей и “прокладок” ограниченной длины. Существенная высота есть число таких периодических кусков, а обычная еще учитывает “прокладки”.

В связи с теоремой о высоте возникли следующие вопросы:

1. На какие классы колец можно распространить теорему о высоте?

2. Над какими $Y$ алгебра $A$ имеет ограниченную высоту? В частности, какие наборы слов можно взять в качестве $\{v_i\}$?

3. Как устроен вектор степеней $(k_1, \dots, k_h)$? Прежде всего: какие множества компонент этого вектора являются существенными, т.е. какие наборы $k_i$ могут быть одновременно неограниченными? Какова существенная высота? Верно ли, что множество векторов степеней обладает теми или иными свойствами регулярности?

4. Как оценить высоту?

Перейдем к обсуждению поставленных вопросов.

## 2.2 Неассоциативные обобщения

Теорема о высоте была распространена на некоторые классы колец, близких к ассоциативным. С. В. Пчелинцев [36] доказал ее для альтернативного и $(-1,1)$ случаев, С. П. Мищенко [28] получил аналог теоремы о высоте для алгебр Ли с разреженным тождеством. В работе А. Я. Белова [3] теорема о высоте была доказана для некоторого класса колец, асимптотически близких к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановы PI-алгебры.

## 2.3 Базисы Ширшова

**Теорема 2.3.1** (А. Я. Белов, [57]). *а) Пусть $A$ — градуированная* PI-*алгебра, $Y$ — конечное множество однородных элементов. Тогда если при всех $n$ алгебра $A/Y^{(n)}$ нильпотентна, то $Y$ есть $s$-базис $A$. Если при этом $Y$ порождает $A$ как алгебру, то $Y$ — базис Ширшова алгебры $A$.*

*б) Пусть $A$ —* PI-*алгебра, $M \subseteq A$ — некоторое курошево подмножество в $A$. Тогда $M$ — $s$-базис алгебры $A$.*

$Y^{(n)}$ обозначает идеал, порождённый $n$-ми степенями элементов из $Y$. Множество $M \subset A$ называется *курошевым*, если любая проекция $\pi\colon A \otimes K[X] \to A'$, в которой образ $\pi(M)$ цел над $\pi(K[X])$, конечномерна над $\pi(K[X])$. Мотивировкой этого понятия служит следующий пример. Пусть $A = \mathbb{Q}[x, 1/x]$. Любая проекция $\pi$ такая, что $\pi(x)$ алгебраичен, имеет конечномерный образ. Однако множество $\{x\}$ не является $s$-базисом алгебры $\mathbb{Q}[x, 1/x]$. Таким образом, ограниченность существенной высоты есть некоммутативное обобщение свойства *целости.*

Описание базисов Ширшова, состоящих из слов, заключено в следующей теореме:

**Теорема 2.3.2** ([57, 75]). *Множество слов $Y$ является базисом Ширшова алгебры $A$ тогда и только тогда, когда для любого слова $u$ длины не выше $m = \mathrm{Pid}(A)$ — сложности алгебры $A$ — множество $Y$ содержит слово, циклически сопряженное к некоторой степени слова $u$.*

Аналогичный результат был независимо получен Г. П. Чекану и В. Дренски. Вопросы, связанные с локальной конечностью алгебр, с алгебраическими множествами слов степени не выше сложности алгебры, исследовались в работах [39, 40, 64–66, 100]. В этих же работах обсуждались вопросы, связанные с обобщением теоремы о независимости.

## 2.4 Существенная высота

Ясно, что размерность Гельфанда–Кириллова оценивается существенной высотой и что $s$-базис является базисом Ширшова тогда и только тогда, когда он порождает $A$ как алгебру. В представимом случае имеет место и обратное утверждение.

**Теорема 2.4.1** (А. Я. Белов, [57]). *Пусть $A$ — конечно порождённая представимая алгебра и пусть*

$$H_{EssY}(A) < \infty.$$

*Тогда*

$$\mathrm{HtEss}_Y(A) = \mathrm{GK}(A).$$

**Следствие 2.4.1** (В. Т. Марков). *Размерность Гельфанда–Кириллова конечно порожденной представимой алгебры есть целое число.*

**Следствие 2.4.2.** *Если*

$$\mathrm{HtEss}_Y(A) < \infty$$

*и алгебра $A$ представима, то* $\mathrm{HtEss}_Y(A)$ *не зависит от выбора $s$-базиса $Y$.*

В этом случае размерность Гельфанда–Кириллова также равна существенной высоте в силу локальной представимости относительно свободных алгебр.

## 2.5 Строение векторов степеней

Хотя в представимом случае размерность Гельфанда–Кириллова и существенная высота ведут себя хорошо, тем не менее даже тогда множество векторов степеней может быть устроено плохо — а именно, может быть дополнением к множеству решений системы экспоненциально-полиномиальных диофантовых уравнений [57]. Вот почему существует пример представимой алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Однако для относительно свободной алгебры ряд Гильберта рационален [5].

## 2.6 $n$-разбиваемость, обструкции и теорема Дилуорса

Значение понятия *$n$-разбиваемости* выходит за рамки проблематики, относящейся к проблемам бернсайдовского типа. Оно играет роль и при изучении полилинейных слов, в оценке их количества, где *полилинейным* называется слово, в которое каждая буква входит не более одного раз. В. Н. Латышев (см. [23]) применил теорему Дилуорса для получения оценки числа не являющихся $m$-разбиваемыми полилинейных слов степени $n$ над алфавитом $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Эта оценка: $(m-1)^{2n}$ и она близка к реальности. Напомним эту теорему.

**Теорема 2.6.1** (Р. Дилуорс, [68]). *Пусть $n$ — наибольшее количество элементов антицепи данного конечного частично упорядоченного множества $M$. Тогда $M$ можно разбить на $n$ попарно непересекающихся цепей.*

Рассмотрим полилинейное слово $W$ из $n$ букв. Положим $a_i \succ a_j$, если $i > j$ и буква $a_i$ стоит в слове $W$ правее $a_j$. Условие не $m$-разбиваемости означает отсутствие антицепи из $m$ элементов. Тогда по теореме Дилуорса все позиции (и, соответственно, буквы $a_i$) разбиваются на $(m-1)$ цепь. Сопоставим каждой цепи свой цвет. Тогда раскраска позиций и раскраска букв однозначно определяет слово $W$. А число таких раскрасок не превосходит

$$(m-1)^n \times (m-1)^n = (m-1)^{2n}.$$

Улучшение этой оценки и другие вопросы, связанные с полилинейными словами, рассматриваются в главе 6.

В. Н. Латышев ([23]) с помощью приведённых оценок провёл прозрачное доказательство теоремы Регева:

**Теорема 2.6.2** (А. Регев, [95]). *Если алгебры $A$ и $B$ удовлетворяют полиномиальному тождеству, то алгебра $A \otimes_F B$ также удовлетворяет полиномиальному тождеству.*

Вопросы, связанные с перечислением полилинейных слов, не являющихся $n$-разбиваемыми, имеют самостоятельный интерес. К примеру, количество полилинейных слов длины $l$ над $l$-буквенным алфавитом, не являющихся 3-разбиваемыми, равно $k$-му числу Каталана.

В 1950 году В. Шпехт в работе [98] поставил проблему существования бесконечно базируемого многообразия ассоциативных алгебр над полем характеристики 0. Решение проблемы Шпехта для нематричного случая представлено в докторской диссертации В. Н. Латышева [25]. Рассуждения В. Н. Латышева основывались на применении техники частично упорядоченных множеств. А. Р. Кемер [16]) доказал, что каждое многообразие ассоциативных алгебр конечно базируемо, тем самым решив проблему Шпехта.

Первые примеры бесконечно базируемых ассоциативных колец были получены А. Я. Беловым [4]), А. В. Гришиным [10] и В. В. Щиголевым [54].

Введём теперь некоторый порядок на словах алгебры над полем. Назовём *обструкцией* полилинейное слово, которое

- является уменьшаемым (т. е. является комбинацией меньших слов);
- не имеет уменьшаемых подслов;
- не является изотонным образом уменьшаемого слова меньшей длины.

В. Н. Латышев [24] поставил проблему конечной базируемости множества старших полилинейных слов для $T$-идеала относительно взятия надслов и изотонных подстановок.

**Вопрос 2.6.1** (В. Н. Латышев). *Верно ли, что количество обструкций для полилинейного $T$-идеала конечно?*

Из проблемы Латышева вытекает полилинейный случай проблемы конечной базируемости для алгебр над полем конечной характеристики. Наиболее важной обструкцией является обструкция $x_n x_{n-1} \cdots x_1$, её изотонные образы составляют множество слов, не являющихся $n$-разбиваемыми.

В связи с этими вопросами возникает проблема:

**Вопрос 2.6.2.** *Перечислить количество полилинейных слов, отвечающих данному конечному набору обструкций. Доказать элементарность соответствующей производящей функции.*

Также имеется тесная связь с проблемой слабой нётеровости групповой алгебры бесконечной финитарной симметрической группы над полем положительной характеристики (для нулевой характеристики это было установлено А. Е. Залесским). Для решения проблемы В. Н. Латышева надо уметь переводить свойства $T$-идеалов на язык полилинейных слов. В работах [3, 57] была предпринята попытка осуществить программу перевода структурных свойств алгебр на язык комбинаторики слов. На язык полилинейных слов такой перевод осуществить проще, в дальнейшем можно получить информацию и о словах общего вида.

В диссертации техника В. Н. Латышева переносится на неполилинейный случай, что позволяет получить субэкспоненциальную оценку в теореме Ширшова о высоте. Г. Р. Челноков предложил идею этого переноса в 1996 году.

## 2.7 Оценки высоты и степени нильпотентности

Первоначальное доказательство А. И. Ширшова хотя и было чисто комбинаторным (оно основывалось на технике элиминации, развитой им в алгебрах Ли, в частности, в доказательстве теоремы о свободе), однако оно давало только упрощённые рекурсивные оценки. Позднее А. Т. Колотов [18] получил оценку $\mathrm{Ht}(A) \leqslant l^{l^n}$ (Здесь и далее: $n = \deg(A)$, $l$ — число образующих). А. Я. Белов в работе [58] показал, что

$$\mathrm{Ht}(n, l) < 2nl^{n+1}.$$

Экспоненциальная оценка теоремы Ширшова о высоте изложена также в работах [69, 75, 104]. Данные оценки улучшались в работах А. Клейна [83, 84].

В работе [89] рассматривается связь между высотой конечных и бесконечных полей одинаковой характеристики. Пусть $A$ — ассоциативная алгебра надо конечным полем $\mathbb{F}$ из $q$ элементов и тождеством степени $n$. Тогда доказано, что если $q \geqslant n$, то индекс нильпотентности алгебры будем таким же, что и в случае бесконечного поля. Если же $q = n - 1$, то индексы нильпотентности в случае поля $\mathbb{F}$ и бесконечного поля отличается не более, чем на 1.

В 2011 году А. А. Лопатин [88] получил следующий результат:

**Теорема 2.7.1.** *Пусть $C_{n,l}$ — степень нильпотентности свободной $l$-порождённой алгебры и удовлетворяющей тождеству $x^n = 0$. Пусть $p$ —*

*характеристика базового поля алгебры — больше чем $n/2$. Тогда*

$$(1): C_{n,l} < 4 \cdot 2^{n/2} l.$$

По определению $C_{n,l} \leqslant \Psi(n,n,l)$.

Заметим, что для малых $n$ оценка (1) меньше, чем полученная в данной работе оценка $\Psi(n,n,l)$, но при росте $n$ оценка $\Psi(n,n,l)$ асимптотически лучше оценки (1).

Е. И. Зельманов поставил следующий вопрос в Днестровской тетради [11] в 1993 году:

**Вопрос 2.7.1.** *Пусть $F_{2,m}$ — свободное 2-порождённое ассоциативное кольцо с тождеством $x^m = 0$. Верно ли, что класс нильпотентности кольца $F_{2,m}$ растёт экспоненциально по $m$?*

В диссертации получен следующий ответ на вопрос Е. И. Зельманова: в действительности искомый класс нильпотентности растёт субэкспоненциально.

## 2.8 О нижних оценках

Сравним полученные результаты с нижней оценкой для высоты. Высота алгебры $A$ не меньше ее размерности Гельфанда–Кириллова $\mathrm{GK}(A)$. Для алгебры $l$-порождённых общих матриц порядка $n$ данная размерность, равна $(l-1)n^2+1$ ([7, 94]).

В то же время Ш. Амицур и Ж. Левицкий в 1950 году доказали следующий факт:

**Теорема 2.8.1** (Амицур–Левицкий, [55]). *Пусть $S_n$ — группа перестановок. Определим* стандартное тождество степени $n$

$$S_n(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

*следующим образом:*

$$S_n(x_1,\ldots,x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(n)}.$$

*Тогда для любого натурального числа $d$ и любого коммутативного кольца $\mathbb{F}$ в матричной алгебре $\mathrm{Mat}_d(\mathbb{F})$ выполняется стандартное тождество степени $2d$.*

Минимальная степень тождества алгебры $l$-порождённых общих матриц порядка $n$ равна $2n$ согласно теореме Амицура–Левицкого. Имеет место следующее:

**Предложение 2.8.1.** *Высота $l$-порождённой* PI*-алгебры степени $n$, а также множества не $n$-разбиваемых слов над $l$-буквенным алфавитом, не менее, чем*

$$(l-1)n^2/4+1.$$

Другие примеры использования теоремы Амицура–Левицкого можно найти в работе [87]

Нижние оценки на индекс нильпотентности были установлены Е. Н. Кузьминым в работе [20]. Е. Н. Кузьмин привел пример 2-порождённой алгебры с тождеством $x^n = 0$, индекс нильпотентности которой строго больше

$$\frac{(n^2+n-2)}{2.}$$

Результат Е. Н. Кузьмина изложен также в моногографиях [70, 75]. Вопрос нахождения нижних оценок рассматривается в главе 6 (см. также [103]).

В то же время для случая нулевой характеристики и счетного числа образующих Ю. П. Размыслов [37] получил верхнюю оценку на индекс нильпотентности, равную $n^2$. Автор получил субэкспоненциальные оценки на индекс нильпотентности для произвольной характеристики (см. теорему 1.7.1).

# Глава 3

# Оценки индекса нильпотентности конечно порождённых алгебр с ниль-тождеством

## 3.1 Оценки на появление степеней подслов

### 3.1.1 План доказательства субэкспоненциальности индекса нильпотентности

В леммах 3.1.1, 3.1.2 и 3.1.3 описываются достаточные условия для присутствия периода длины $d$ в не являющемся $n$-разбиваемым слове $W$. В лемме 3.1.4 связываются понятия $n$-разбиваемости слова $W$ и множества его хвостов. После этого определённым образом выбирается подмножество множества хвостов слова $W$, для которого можно применить теорему Дилуорса. Затем мы раскрашиваем хвосты и их первые буквы в соответствии с принадлежностью к цепям, полученным при применении теоремы Дилуорса.

Необходимо изучить, в какой позиции начинают отличаться соседние хвосты в каждой цепи. Вызывает интерес, с какой "частотой" эта позиция попадает в $p$-хвост для некоторого $p \leqslant n$. Потом мы несколько обобщаем наши рассуждения, деля хвосты на сегменты по несколько букв, а затем рассматривая, в какой сегмент попадает позиция, в которой начинают отличаться друг от друга соседние хвосты в цепи. В лемме 3.2.2 связываются рассматриваемые "частоты" для $p$-хвостов и $kp$-хвостов для $k = 3$.

В завершение доказательства строится иерархическая структура на основе применения леммы 3.2.2, т. е. рассматриваем сначала сегменты $n$-хвостов, потом подсегменты этих сегментов и т. д. Далее рассматривается наибольшее возможное количество хвостов из подмножества, для которого была применена теорема Дилуорса, после чего оценивается сверху общее количество хвостов, а, значит, и букв слова $W$.

### 3.1.2 Свойства периодичности и $n$-разбиваемости

Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ — алфавит, над которым проводится построение слов. Порядок $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_l$ индуцирует лексикографический порядок на словах над заданным алфавитом. Для удобства введём следующие определения:

**Определение 3.1.1.** а) Если в слове $v$ содержится подслово вида $u^t$, то будем говорить, что в слове $v$ содержится период длины $t$.

б) Если слово $u$ является началом слова $v$, то такие слова называют *несравнимыми* и обозначают $u \approx v$.

в) Слово $v$ — *хвост* слова $u$, если найдется слово $w$ такое, что $u = wv$.

г) Слово $v$ — *$k$-хвост* слова $u$, если $v$ состоит из $k$ первых букв некоторого хвоста $u$. Если в хвосте $u$ меньше $k$ букв, то считаем $v = u$.

г ′) *$k$-начало* — это то же самое, что и $k$-хвост.

д) Пусть слово $u$ *левее* слова $v$, если начало слова $u$ левее начала слова $v$.

**Обозначение 3.1.1.** *а) Для вещественного числа $x$ положим $\ulcorner x \urcorner := -[-x]$.*

*б) Обозначим как $|u|$ длину слова $u$.*

Для доказательства потребуются следующие достаточные условия наличия периода:

**Лемма 3.1.1.** *В слове $W$ длины $x$ либо первые $[x/d]$ хвостов попарно сравнимы, либо в слове $W$ найдется период длины $d$.*

*Доказательство.* Пусть в слове $W$ не нашлось слова вида $u^d$. Рассмотрим первые $[x/d]$ хвостов. Предположим, что среди них нашлись 2 несравнимых хвоста $v_1$ и $v_2$. Пусть $v_1 = u \cdot v_2$. Тогда $v_2 = u \cdot v_3$ для некоторого $v_3$. Тогда $v_1 = u^2 \cdot v_3$. Применяя такие рассуждения, получим, что $v_1 = u^d \cdot v_{d+1}$, так как

$$|u| < x/d, |v_2| \geqslant (d-1)x/d.$$

Противоречие. $\square$

**Лемма 3.1.2.** *Если в слове $V$ длины $k \cdot t$ не больше $k$ различных подслов длины $k$, то $V$ включает в себя период длины $t$.*

*Доказательство.* Докажем лемму индукцией по $k$. База при $k = 1$ очевидна. Если находится не больше, чем $(k-1)$ различных подслов длины $(k-1)$, то применяем индукционное предположение. Если существуют $k$ различных подслов длины $(k-1)$, то каждое подслово длины $k$ однозначно определяется своими первыми $(k-1)$ буквами. Значит, $V = v^t$, где $v$ — $k$-хвост $V$. □

**Определение 3.1.2.** а) Слово $W$ — *$n$-разбиваемо в обычном смысле*, если найдутся $u_1, u_2, \ldots, u_n$ такие, что

$$u_1 \succ \cdots \succ u_n \text{ и } W = v \cdot u_1 \cdots u_n.$$

Слова $u_1, u_2, \ldots, u_n$ назовём *$n$-разбиением* слова $W$.

б) В текущем доказательстве слово $W$ будем называть *$n$-разбиваемым в хвостовом смысле*, если найдутся хвосты $u_1, \ldots, u_n$ такие, что

$$u_1 \succ u_2 \succ \cdots \succ u_n$$

и для любого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ начало $u_i$ слева от начала $u_{i+1}$. Хвосты $u_1, u_2, \ldots, u_n$ назовём *$n$-разбиением в хвостовом смысле* слова $W$. В части 3, если не оговорено противное, то под *$n$-разбиваемыми* словами мы подразумеваем $n$-разбиваемые в хвостовом смысле.

в) Слово $W$ — *$(n, d)$-сократимое*, если оно либо $n$-разбиваемо в обычном смысле, либо существо слово $u$ такое, что $u^d \subseteq W$.

Теперь опишем достаточное условие $(n, d)$-сократимости и его связь с $n$-разбиваемостью.

**Лемма 3.1.3.** *Если в слове $W$ найдутся $n$ одинаковых непересекающихся подслов $u$ длины $n \cdot d$, то $W$ — $(n, d)$-сократимое.*

*Доказательство.* Предположим противное. Рассмотрим хвосты $u_1, u_2, \ldots, u_n$ слова $u$, которые начинаются с каждой из его первых $n$ букв. Перенумеруем хвосты так, чтобы выполнялись неравенства: $u_1 \succ \cdots \succ u_n$. Из леммы 3.1.1 они несравнимые. Рассмотрим подслово $u_1$, лежащее в самом левом экземпляре слова $u$, подслово $u_2$ — во втором слева, …, $u_n$ — в $n$-ом слева. Получили $n$-разбиение слова $W$. Противоречие. □

**Предложение 3.1.1.** *Если для некоторых слов $u, v, w$ верно соотношение $|u| \leqslant |v| < |w|$ и, кроме того, $u \approx w, v \approx w$, то слова $u$ и $v$ несравнимы.*

**Обозначение 3.1.2.** *Если для некоторого действительного числа $a$ мы говорим про $a$-разбиваемость, то имеется ввиду $[a]$-разбиваемость.*

**Обозначение 3.1.3.** $p_{n,d} := \left[\frac{3}{2}(n+1)d(\log_3(nd)+2)\right]$.

**Лемма 3.1.4.** *Если слово $W$ является $p_{n,d}$-разбиваемым, то оно – $(n,d)$-сократимое.*

*Доказательство.* От противного. Пусть слово $W$ является $p_{n,d}$-разбиваемым, хвосты

$$u_1 \prec u_2 \prec \cdots \prec u_{p_{n,d}}$$

образуют $p_{n,d}$–разбиение, но слово $W$ — не $(n,d)$-сократимое.

**Обозначение 3.1.4.** *Пусть для $1 \leqslant i < p_{n,d}$ слово $v_i$ — подслово слова $W$, которое начинается первой буквой хвоста $u_i$ и заканчивается буквой, стоящей на одну позицию левее первой буквы хвоста $u_{i+1}$. Также считаем, что $v_{p_{n,d}} = u_{p_{n,d}}$.*

Предположим, что для любого числа $i$ такого, что

$$1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{3}{2}(n-1)d(\log_3(nd)+2)\right],$$

найдутся числа

$$0 \leqslant j_i \leqslant k_i < m_i \leqslant q_i < [3d(\log_3(nd)+2)]$$

такие, что

$$\prod_{s=j_i+i}^{k_i+i} v_s \prec \prod_{s=m_i+i}^{q_i+i} v_s.$$

Тогда рассмотрим последовательность чисел

$$i_s = \frac{2s}{n} p_{n,d} + 1, \text{ где } 0 \leqslant s \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Тогда последовательность слов

$$\prod_{s=j_{i_0}+i_0}^{k_{i_0}+i_0} v_s \prec \prod_{s=m_{i_0}+i_0}^{q_{i_0}+i_0} v_s \prec \prod_{s=j_{i_1}+i_1}^{k_{i_1}+i_1} v_s \prec \prod_{s=m_{i_1}+i_1}^{q_{i_1}+i_1} v_s \prec$$

$$\prod_{s=j_{i_2}+i_2}^{k_{i_2}+i_2} v_s \prec \cdots \prec \prod_{s=j_{i_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}+i_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}^{k_{i_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}+i_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}} v_s \prec \prod_{s=m_{i_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}+i_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}^{q_{i_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}+i_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}} v_s$$

образует $2\left[\frac{n+1}{2}\right]$−разбиение в обычном смысле слова $W$.

Значит, слово $W$ — $(n,d)$-сократимо. Противоречие.

Следовательно, найдётся такое число

$$1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{3}{2}(n-1)d(\log_3{(nd)}+2)\right],$$

что для любых

$$0 \leqslant j \leqslant k < m \leqslant q < [3d(\log_3{(nd)}+2)]$$

имеем

$$\prod_{s=j+i}^{k+i} v_s \approx \prod_{s=m+i}^{q+i} v_s.$$

Без ограничения общности $i=1$. Для некоторого натурального $t$ рассмотрим некоторую последовательность натуральных чисел $\{k_i\}_{i=1}^{t}$ такую, что $k_1 = 3$ и $\prod\limits_{i=2}^{t} k_i > nd$. В силу леммы 3.1.3

$$\inf_{0<j\leqslant k_1 d} |v_j| \leqslant nd.$$

Пусть $\inf\limits_{0<j\leqslant k_1 d} |v_j|$ достигается на $v_{j_1}$, где $0 < j_1 \leqslant k_1 d$ (если таких минимумов несколько, то берём самый правый из них).

- Если $j_1 \leqslant d$, то $d|v_{j_1}|$−начала хвостов $u_{j_1}$ и $u_{j_1+1}$ не пересекаются и несравнимы со словом $\prod\limits_{j=2d+1}^{3d} v_j$ и меньше его по длине. Следовательно, по предложению 3.1.1 $d|v_j|$−начала хвостов $u_{j_1}$ и $u_{j_1+1}$ несравнимы, а, значит, $v_{j_1}^d$ — подслово слова $W$.

- Если $d < j_1 \leqslant 2d$, то $d|v_j|$−начала хвостов $u_{j_1}$ и $u_{j_1+1}$ не пересекаются со словом $v_{3d+1}$ и несравнимы со словом $\prod\limits_{j=1}^{d} v_j$. Кроме того, эти $d|v_j|$−начала меньше его по длине. Значит, по предположению 3.1.1, $v_{j_1}^d$ — подслово слова $W$.

- Если $2d < j_1 \leqslant 3d$ и $d|v_j|$—начало хвоста $u_{j_1+1}$ не пересекается с $v_{[3d(\log_3(nd)+2)]}$, то, аналогично предыдущему случаю, $v_{j_1}^d$ — подслово слова $W$. Пусть $d|v_j|$—начало хвоста $u_{j_1+1}$ пересекается с $v_{[3d(\log_3(nd)+2)]}$. Тогда для некоторого натурального числа $t$, которое будет выбрано позднее, рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{k_j\}_{j=2}^t$, для которой

$$\prod_{j=2}^{t} k_j \geqslant nd.$$

Выберем $t$ так, что

$$\sum_{j=2}^{t} k_j \leqslant (\log_3(nd) + 1).$$

Можно показать, что такое $t$ всегда существует. Заметим, что слово $\prod_{j=k_1d+1}^{(k_1+k_2)d} v_j$ содержится в $d|v_{j_1}|$—начале хвоста $u_{j_1}+1$. Рассмотрим $v_{j_2}$ — слово наименьшей длины среди слов $v_j$ при $k_1d < j \leqslant (k_1+k_2)d$. Если таких слов несколько, то в качестве наименьшего возьмём самое правое из них. Тогда

$$|v_{j_2}| \leqslant \left[\frac{|v_{j_1}|}{k_2}\right].$$

Теперь рассмотрим $d|v_{j_2}|$—начало хвоста $u_{j_2+1}$. Если оно не пересекается со словом $v_{[3d(\log_3(nd)+2)]}$, то $v_{j_2}^d$ — подслово слова $W$. В противном случае слово

$$\prod_{j=(k_1+k_2)d+1}^{(k_1+k_2+k_3)d} v_j$$

является подсловом $d|v_{j_2}|$—начала хвоста $u_{j_2+1}$.

Пусть для некоторого числа $i$ такого, что $2 \leqslant i < t$ среди чисел $j$ таких, что

$$d\sum_{s=1}^{i-1} k_s < j \leqslant d\sum_{s=1}^{i} k_s$$

найдётся число $j_i$ такое, что

$$|v_{j_i}| \leqslant \left[\frac{|v_{j_1}|}{\prod\limits_{s=2}^{i} k_s}\right].$$

Рассмотрим $d|v_{j_i}|$−начало хвоста $u_{j_i+1}$. Если оно не пересекается со словом $v_{[3d(\log_3(nd)+2)]}$, то $v_{j_i}^d$ — подслово слова $W$. В противном случае слово

$$\prod_{j=d\sum\limits_{s=1}^{i}k_s+1}^{d\sum\limits_{s=1}^{i+1}k_s} v_j$$

является подсловом $d|v_{j_i}|$−начала хвоста $u_{j_i+1}$. Рассмотрим $v_{j_{i+1}}$ — слово наименьшей длины среди слов $v_j$ при

$$d\sum_{s=1}^{i}k_s < j \leqslant d\sum_{s=1}^{i+1}k_s.$$

Тогда

$$|v_{j_{i+1}}| \leqslant \left[\frac{|v_{j_i}|}{k_{i+1}}\right] \leqslant \left[\frac{|v_{j_1}|}{\prod\limits_{s=2}^{i+1}k_s}\right].$$

Таким образом,

$$|v_t| \leqslant \left[\frac{|v_{j_1}|}{\prod\limits_{s=2}^{t}k_s}\right] < 1.$$

Получено противоречие, из которого и вытекает утверждение леммы.

□

Пусть $W$ — не $(n,d)$-сократимое слово. Рассмотрим $U$ — $[|W|/d]$-хвост слова $W$. Тогда $W$ — не $(p_{n,d}+1)$-разбиваемое. Пусть $\Omega$ — множество хвостов слова $W$, которые начинаются в $U$. Тогда по лемме 3.1.1 любые два элемента из $\Omega$ сравнимы. Естественным образом строится биекция между $\Omega$, буквами $U$ и натуральными числами от 1 до $|\Omega| = |U|$.

Введем слово $\theta$ такое, что $\theta$ лексикографически меньше любого слова.

**Замечание 3.1.1.** *В текущем доказательстве теоремы 1.7.3 все хвосты мы предполагаем лежащими в $\Omega$.*

## 3.2 Оценки на появление периодических фрагментов

### 3.2.1 Применение теоремы Дилуорса.

Для хвостов $u$ и $v$ положим $u < v$, если $u \prec v$ и, кроме того, $u$ левее $v$. Тогда по теореме Дилуорса $\Omega$ можно разбить на $p_{n,d}$ цепей, где в каждой цепи $u \prec v$, если $u$ левее $v$. Покрасим начальные позиции хвостов в $p_{n,d}$ цветов в соответствии с принадлежностью к цепям. Фиксируем натуральное число $p$. Каждому натуральному числу $i$ от 1 до $|\Omega|$ сопоставим $B^p(i)$ — упорядоченный набор из $p_{n,d}$ слов $\{f(i,j)\}$, построенных по следующему правилу:

*Для каждого* $j = 1, 2, \ldots, p_{n,d}$ *положим*

$$f(i,j) = \{\max\ f \leqslant i : f \text{ раскрашено в цвет } j\}.$$

*Если такого $f$ не найдется, то слово из $B^p(i)$ на позиции $j$ считаем равным $\theta$, в противном случае это слово считаем равным $p$-хвосту, который начинается с $f(i,j)$-ой буквы.*

Неформально говоря, мы наблюдаем, с какой скоростью хвосты "эволюционируют" в своих цепях, если рассматривать последовательность позиций слова $W$ как "ось времени".

### 3.2.2 Наборы $B^p(i)$, процесс на позициях

**Лемма 3.2.1** (О процессе). *Дана последовательность $S$ длины $|S|$, составленная из слов длины $(k-1)$. Каждое из них состоит из $(k-2)$ символа "0" и одной "1". Пусть $S$ удовлетворяет следующему условию:* если для некоторого $0 < s \leqslant k-1$ найдутся $p_{n,d}$ слов, в которых "1" стоит на $s$-ом месте, то между первым и $p_{n,d}$-м из этих слов найдется слово, в котором "1" стоит строго меньше, чем на $s$-ом месте*;* $L(k-1) = \sup\limits_S |S|$.

*Тогда*

$$L(k-1) \leqslant p_{n,d}^{k-1} - 1.$$

*Доказательство.* $L(1) \leqslant p_{n,d} - 1$. Пусть $L(k-1) \leqslant p_{n,d}^{k-1} - 1$. Покажем, что $L(k) \leqslant p_{n,d}^{k} - 1$. Рассмотрим слова, у которых символ "1" стоит на первом месте. Их не больше $p_{n,d} - 1$. Между любыми двумя из них, а также перед первым и после последнего, количество слов не больше $L(k-1) \leqslant p_{n,d}^{k-1} - 1$. Получаем, что

$$L(k) \leqslant p_{n,d} - 1 + (p_{n,d})\left((p_{n,d})^{k-1} - 1\right) = (p_{n,d})^k - 1$$

□

Нам требуется ввести некоторую величину, которая бы численно оценивала скорость "эволюции" наборов $B^p(i)$:

**Определение 3.2.1.** Положим

$$\psi(p) := \{\max\ k : B^p(i) = B^p(i+k-1)\}.$$

**Предложение 3.2.1.** *По лемме 3.1.2,* $\psi(p_{n,d}) \leqslant p_{n,d}d$.

Для заданного $\alpha$ определим разбиение последовательности первых $|\Omega|$ позиций $i$ слова $W$ на классы эквивалентности $\mathrm{AC}_\alpha$ следующим образом:

$$i \sim_{\mathrm{AC}_\alpha} j, \text{ если } B^\alpha(i) = B^\alpha(j).$$

**Предложение 3.2.2.** *Для любых натуральных* $a < b$ *имеем* $\psi(a) \leqslant \psi(b)$.

**Лемма 3.2.2** (Основная). *Для любых натуральных чисел* $a, k$ *верно неравенство*

$$\psi(a) \leqslant p_{n,d}^k \psi(k \cdot a) + k \cdot a$$

*Доказательство.* Рассмотрим по наименьшему представителю из каждого класса $\mathrm{AC}_{k\cdot a}$. Получена последовательность позиций $\{i_j\}$. Теперь рассмотрим все $i_j$ и $B^{k\cdot a}(i_j)$ из одного класса эквивалентности по $\mathrm{AC}_a$ . Пусть он состоит из $B^{k\cdot a}(i_j)$ при $i_j \in [b, c)$. Обозначим за $\{i_j\}'$ отрезок последовательности $\{i_j\}$, для которого $i_j \in [b, c - k \cdot a)$.

Фиксируем некоторое натуральное число $r, 1 \leqslant r \leqslant p_{n,d}$. Назовём все $k \cdot a$-начала цвета $r$, начинающиеся с позиций слова $W$ из $\{i_j\}'$, представителями типа $r$. Все представители типа $r$ будут попарно различны, так как они начинаются с наименьших позиций в классах эквивалентности по $\mathrm{AC}_{k\cdot a}$ . Разобьём каждый представитель типа $r$ на $k$ сегментов длины $a$. Пронумеруем сегменты внутри каждого представителя типа $r$ слева направо числами от нуля до $(k-1)$. Если найдутся $(p_{n,d}+1)$ представителей типа $r$, у которых совпадают первые $(t-1)$ сегментов, но которые попарно различны в $t$-ом, где $t$ — натуральное число, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, то найдутся две первых буквы $t$-го сегмента одного цвета. Тогда позиции, с которых начинаются эти сегменты, входят в разные классы эквивалентности по $\mathrm{AC}_a$.

Применим лемму 3.2.1 следующим образом: во всех представителях типа $r$, кроме самого правого, будем считать сегменты *единичными*, если именно в них находится наименьшая позиция, в которой текущий представитель типа $r$ отличается от предыдущего. Остальные сегменты считаем *нулевыми.*

Теперь можно применить лемму о процессе с параметрами, совпадающими с заданными в условии леммы. Получаем, что в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более $p_{n,d}^{k-1}$ представителей типа $r$. Тогда в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более $p_{n,d}^k$ членов. Таким образом, $c-b \leqslant p_{n,d}^k\psi(k\cdot a)+k\cdot a$. □

### 3.2.3 Завершение доказательства субэкспоненциальности индекса нильпотентности

Пусть

$$a_0 = 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d}\urcorner}, a_1 = 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d}\urcorner-1}, \ldots, a_{\ulcorner \log_3 p_{n,d}\urcorner} = 1.$$

При этом

$$|W| \leqslant d\,|\Omega| + d$$

в силу леммы 3.1.1.

Так как набор $B^1(i)$ принимает не более $(1+p_{n,d}l)$ различных значений, то

$$|W| \leqslant d(1+p_{n,d}l)\psi(1)+d.$$

Применим лемму 3.2.2 для $k=3, a=1$. Имеем

$$\psi(1) < (p_{n,d}^3+p_{n,d})\psi(3).$$

Применим лемму 3.2.2 $\ulcorner \log_3 p_{n,d}\urcorner$ для $k=3, a=3^0, 3^1, \ldots, 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d}\urcorner}$.
Имеем

$$\psi(1) < (p_{n,d}^3+p_{n,d})\psi(3) < (p_{n,d}^3+p_{n,d})^2\psi(9) < \cdots < (p_{n,d}^3+p_{n,d})^{\ulcorner \log_3 p_{n,d}\urcorner}\psi(3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d}\urcorner})$$

По предложению 3.2.2

$$(p_{n,d}^3+p_{n,d})^{\ulcorner \log_3 p_{n,d}\urcorner}\psi(3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d}\urcorner}) \leqslant (p_{n,d}^3+p_{n,d})^{\ulcorner \log_3 p_{n,d}\urcorner}\psi(p_{n,d}).$$

По предложению 3.2.1

$$(p_{n,d}^3 + p_{n,d})^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner} \psi(p_{n,d}) \leqslant (p_{n,d}^3 + p_{n,d})^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner} p_{n,d} d.$$

По определению (см. обозначение 3.1.3) $p_{n,d}$ равно

$$p_{n,d} = \left[ \frac{3}{2}(n+1)d(\log_3 (nd) + 2) \right].$$

Получаем, что

$$|W| < 2^{27} l (nd)^{3 \log_3 (nd) + 9 \log_3 \log_3 (nd) + 36}.$$

Отсюда имеем **утверждение теоремы 1.7.3.**

# Глава 4

# Оценки высоты и существенной высоты конечно порождённой PI-алгебры.

## 4.1 Оценка существенной высоты.

В данном разделе мы продолжаем доказывать основную теорему 1.7.2. Попутно доказывается теорема 1.7.4. Будем смотреть на позиции букв слова $W$ как на ось времени, то есть подслово $u$ встретилось раньше подслова $v$, если $u$ целиком лежит левее $v$ внутри слова $W$.

В пункте 4.1.1 мы приводим периодические подслова к виду, удобному для дальнейшего доказательства. В пункте 4.1.2 мы определённым образом выбираем множество подслов слова $W$, для которого применяем теорему Дилуорса. В лемме 4.1.2 связываем понятия $n$-разбиваемости определённого множества подслов и слова $W$. Далее мы оцениваем наибольшее возможное количество отмеченных слов.

В лемме 4.1.2 связываем понятия $n$-разбиваемости множества $\Omega'$ и слова $W$.

Далее мы оцениваем размер множества $\Omega'$.

В конце главы доказывается, что оценка в теореме 1.7.2 оценивается сверху суммой оценок из теорем 1.7.3 и 1.7.4.

Далее завершается доказательство теоремы 1.7.2.

### 4.1.1 Нахождение различных периодических фрагментов в слове

Обозначим за $s$ количество подслов слова $W$ с периодом длины меньше $n$, в которых период повторяется больше $2n$ раз и которые попарно разделены сравнимыми с предыдущим периодом подсловами длины больше $n$. Пронумеруем их от начала к концу слова:

$$x_1^{2n}, x_2^{2n}, \ldots, x_s^{2n}.$$

Таким образом,

$$W = y_0 x_1^{2n} y_1 x_2^{2n} \cdots x_s^{2n} y_s.$$

Если найдётся $i$ такое, что слово $x_i$ длины не меньше $n$, то в слове $x_i^2$ найдутся $n$ попарно сравнимых хвостов, а значит, слово $x_i^{2n}$– $n$-разбиваемое. Получаем, что число $s$ не меньше, чем существенная высота слова $W$ над множеством слов длины меньше $n$.

**Определение 4.1.1.** Слово $u$ назовём *ациклическим*, если для любого натурального $k > 1$ слово $u$ нельзя представить в виде $v^k$.

**Определение 4.1.2.** *Слово-цикл* $u$ — слово $u$ со всеми его сдвигами по циклу.

**Определение 4.1.3.** *Циклическое слово* $u$ — цикл из букв слова $u$, где после его последней буквы идёт первая.

**Определение 4.1.4.** Если любые два циклических сдвига слов $u$ и $v$ сравнимы, то назовём слова $u$ и $v$ *сильно сравнимыми.* Аналогично определяется сильная сравнимость слово-циклов и циклических слов.

Далее мы будем пользоваться естественной биекцией между слово-циклами и циклическими словами.

**Определение 4.1.5.** Слово $W$ называется *сильно $n$-разбиваемым*, если его можно представить в виде

$$W = W_0 W_1 \cdots W_n,$$

где подслова $W_1, \ldots, W_n$ идут в порядке лексикографического убывания, и каждое из слов $W_i, i = 1, 2, \ldots, n$ начинается с некоторого слова $z_i^k \in Z$, все $z_i$ различны.

**Лемма 4.1.1.** *Если найдётся число $m, 1 \leqslant m < n$, такое, что существуют $(2n-1)$ попарно несравнимых слов длины $m$ : $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{2n-1}}$, то $W$ — $n$-разбиваемое.*

*Доказательство.* Положим $x := x_{i_1}$. Тогда в слове $W$ найдутся непересекающиеся подслова

$$x^{p_1}v'_1, \ldots, x^{p_{2n-1}}v'_{2n-1},$$

где $p_1, \ldots, p_{2n-1}$ — некоторые натуральные числа, большие $n$, а $v'_1, \ldots, v'_{2n-1}$ — некоторые слова длины $m$, сравнимые с $x, v'_1 = v_{i_1}$. Тогда среди слов $v'_1, \ldots, v'_{2n-1}$ найдутся либо $n$ лексикографически больших $x$, либо $n$ лексикографически меньших $x$. Можно считать, что $v'_1, \ldots, v'_n$ — лексикографически больше $x$. Тогда в слове $W$ найдутся подслова

$$v'_1, xv'_2, \ldots, x^{n-1}v'_n,$$

идущие слева направо в порядке лексикографического убывания. □

Рассмотрим некоторое число $m, 1 \leqslant m < n$. Разобьём все $x_i$ длины $m$ на эквивалентности по сильной несравнимости и выберем по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Пусть это слова $x_{i_1}, \ldots, x_{i'_s}$, где $s'$ — некоторое натуральное число. Так как подслова $x_i$ являются периодами, будем рассматривать их как слово-циклы.

**Обозначение 4.1.1.** $v_k := x_{i_k}$

*Пусть $v(k,i)$, где $i$ — натуральное число от 1 до $m$, — циклический сдвиг слова $v_k$ на $(k-1)$ позиций вправо, то есть $v(k,1) = v_k$, а первая буква слова $v(k,2)$ является второй буквой слова $v_k$. Таким образом, $\{v(k,i)\}_{i=1}^m$ — слово-цикл слова $v_k$. Заметим, что для любых $1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant p, 1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant m$ слово $v(i_1,j_1)$ сильно несравнимо со словом $v(i_2,j_2)$.*

**Замечание 4.1.1.** *Случаи $m = 2, 3, n-1$ более подробно рассмотрены в работах [103, 104].*

### 4.1.2 Применение теоремы Дилуорса

Рассмотрим множество $\Omega' = \{v(i,j)\}$, где $1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant m$. Введём следующий порядок на словах $v(i,j)$ :

$v(i_1,j_1) \succ v(i_2,j_2)$, если

1) $v(i_1,j_1) > v(i_2,j_2)$

2) $i_1 > i_2$

**Лемма 4.1.2.** *Если во множестве $\Omega'$ для порядка $\succ$ найдётся антицепь длины $n$, то слово $W$ будет $n$-разбиваемым.*

*Доказательство.* Пусть нашлась антицепь длины $n$ из слов

$$v(i_1, j_1), v(i_2, j_2), \ldots, v(i_n, j_n), \text{ где } i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_n.$$

Если все неравенства между $i_k$ — строгие, то слово $W$ — $n$-разбиваемое по определению.

Предположим, что для некоторого числа $r$ нашлись $i_{r+1} = \cdots = i_{r+k}$, где либо $r = 0$, либо $i_r < i_{r+1}$. Кроме того, $k$ — такое натуральное число, что либо $k = n - r$, либо $i_{r+k} < i_{r+k+1}$.

Слово $s_{i_{r+1}}$ — периодическое, следовательно, оно представляется в виде произведения $n$ экземпляров слова $v^2_{i_{r+1}}$. Слово $v^2_{i_{r+1}}$ содержит слово-цикл $v_{i_{r+1}}$. Значит, в слове $s_{i_{r+1}}$ можно выбрать непересекающиеся подслова, идущие в порядке лексикографического убывания, равные

$$v(i_{r+1}, j_{r+1}), \ldots, v(i_{r+k}, j_{r+k})$$

соответственно. Таким же образом поступаем со всеми множествами равных индексов в последовательности $\{i_r\}_{r=1}^n$. Получаем $n$-разбиваемость слова $W$. Противоречие. $\square$

Значит, множество $\Omega'$ можно разбить на $(n-1)$ цепь.

**Обозначение 4.1.2.** *Положим $q_n = (n-1)$.*

### 4.1.3 Наборы $C^\alpha(i)$, процесс на позициях

Покрасим первые буквы слов из $\Omega'$ в $q_n$ цветов в соответствии с принадлежностью к цепям. Покрасим также числа от 1 до $|\Omega'|$ в соответствующие цвета. Фиксируем натуральное число $\alpha \leqslant m$. Каждому числу $i$ от 1 до $|\Omega'|$ сопоставим упорядоченный набор слов $C^\alpha(i)$, состоящий из $q_n$ слов по следующему правилу:

*Для каждого $j = 1, 2, \ldots, q_n$ положим*

*$f(i,j) = \{\max\ f \leqslant i$ : существует $k$ такое, что $v(f,k)$ раскрашено в цвет $j$ и $\alpha$-хвост, который начинается с $f$, состоит только из букв, являющихся первыми буквами хвостов из $\Omega'\}$.*

*Если такого $f$ не найдётся, то слово из $C^{\alpha}(i)$ считаем равным $\theta$, в противном случае это слово считаем равным $\alpha$-хвосту слова $v(f,k)$.*

**Обозначение 4.1.3.** *Положим $\varphi(a)$ равным наибольшему $k$ такому, что найдётся число $i$, для которого верно равенство*

$$C^a(i) = C^a(i+k-1).$$

*Для заданного $a \leqslant m$ определим разбиение последовательности слово-циклов $\{i\}$ слова $W$ на классы эквивалентности следующим образом:*

$$i \sim_{\mathrm{AC}_a} j, \text{ если } C^a(i) = C^a(j).$$

Заметим, что построенная конструкция во многом аналогична построенной в доказательстве теоремы 1.7.3. Можно обратить внимание на схожесть $B^a(i)$ и $C^a(i)$, а также $\psi(a)$ и $\varphi(a)$.

**Лемма 4.1.3.** *$\varphi(m) \leqslant q_n/m$.*

*Доказательство.* Напомним, что слово-циклы были пронумерованы. Рассмотрим слово-циклы с номерами

$$i, i+1, \ldots, i+[q_n/m].$$

Ранее было показано, что каждый слово-цикл состоит из $m$ различных слов. Рассмотрим теперь слова в слово-циклах

$$i, i+1, \ldots, i+[q_n/m]$$

как элементы множества $\Omega'$. При таком рассмотрении у первых букв из слово-циклов появляются свои позиции. Всего рассматриваемых позиций не меньше $n$. Следовательно, среди них найдутся две позиции одного цвета. Тогда в силу сильной несравнимости слово-циклов имеем утверждение леммы. □

**Предложение 4.1.1.** *Для любых натуральных $a < b$ имеем $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$.*

**Лемма 4.1.4** (Основная). *Для натуральных чисел $a, k$ таких, что $ak \leqslant m$, верно неравенство*

$$\varphi(a) \leqslant p_{n,d}^k \varphi(k \cdot a).$$

*Доказательство.* Рассмотрим по наименьшему представителю из каждого класса $\mathrm{AC}_{k\cdot a}$. Получена последовательность позиций $\{i_j\}$. Теперь рассмотрим все $i_j$ и $C^{k\cdot a}(i_j)$ из одного класса эквивалентности по $\mathrm{AC}_a$ . Пусть он состоит из $C^{k\cdot a}(i_j)$ при $i_j \in [b, c)$. Обозначим за $\{i_j\}'$ отрезок последовательности $\{i_j\}$, для которого $i_j \in [b, c)$.

Фиксируем некоторое натуральное число $r, 1 \leqslant r \leqslant q_n$. Назовём все $k \cdot a$-начала цвета $r$, начинающиеся с позиций слова $W$ из $\{i_j\}'$, представителями типа $r$. Все представители типа $r$ будут попарно различны, так как они начинаются с наименьших позиций в классах эквивалентности по $\mathrm{AC}_{k\cdot a}$ . Разобьём каждый представитель типа $r$ на $k$ сегментов длины $a$. Пронумеруем сегменты внутри каждого представителя типа $r$ слева направо числами от нуля до $(k-1)$. Если найдутся $(q_n+1)$ представителей типа $r$, у которых совпадают первые $(t-1)$ сегментов, но которые попарно различны в $t$-ом, где $t$ — натуральное число, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, то найдутся две первых буквы $t$-го сегмента одного цвета. Тогда позиции, с которых начинаются эти сегменты, входят в разные классы эквивалентности по $\mathrm{AC}_a$ .

Применим лемму 3.2.1 следующим образом: во всех представителях типа $r$, кроме самого правого, будем считать сегменты *единичными*, если именно в них находится наименьшая позиция, в которой текущий представитель типа $r$ отличается от предыдущего. Остальные сегменты будем считать *нулевыми.*

Теперь мы можем применить лемму о процессе с параметрами, совпадающими с заданными в условии леммы. Получаем, что в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более $q_n^{k-1}$ представителей типа $r$. Тогда в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более $q_n^k$ членов. Таким образом,

$$c - b \leqslant q_n^k \varphi(k \cdot a).$$

$\square$

### 4.1.4 Завершение доказательства субэкспоненциальности существенной высоты

Пусть

$$a_0 = 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner}, a_1 = 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner - 1}, \ldots, a_{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner} = 1.$$

Подставляя эти $a_i$ в леммы 4.1.4 и 4.1.3, получаем, что

$$\varphi(1) \leqslant q_n^3\varphi(3) \leqslant q_n^9\varphi(9) \leqslant \dots \leqslant q_n^{3^{\ulcorner \log_3 m \urcorner}}\varphi(m) \leqslant$$
$$\leqslant q_n^{3^{\ulcorner \log_3 m \urcorner}+1}.$$

Так как $C_i^1$ принимает не более $1 + q_n l$ различных значений, то

$$|\Omega'| < q_n^{3^{\ulcorner \log_3 m \urcorner}+1}(1 + q_n l) < n^{3^{\ulcorner \log_3 n \urcorner}+2} l.$$

По лемме 4.1.1 получаем, что количество $x_i$ длины $m$ меньше $2n^{3^{\ulcorner \log_3 n \urcorner}+3} l$.
Имеем, что количество всех $x_i$ меньше $2n^{3^{\ulcorner \log_3 n \urcorner}+4} l$.
То есть $s < 2n^{3^{\ulcorner \log_3 n \urcorner}+4} l$.
Таким образом, **теорема 1.7.4 доказана.**

## 4.2 Оценка высоты в смысле Ширшова

### 4.2.1 План доказательства

Будем снова под *$n$-разбиваемым словом* подразумевать *$n$-разбиваемое* в обычном смысле. Сначала мы находим необходимое количество фрагментов с длиной периода не меньше $2n$ в слове $W$. Это можно сделать, просто разбив слово $W$ на подслова большой длины, к которым применяется теорема 1.7.3. Однако мы можем улучшить оценку, если сначала выделим в слове $W$ периодический фрагмент с длиной периода не менее $4n$, затем рассмотрим $W_1$ — слово $W$ с “вырезанным” периодическим фрагментом $u_1$. У слова $W_1$ выделяем фрагмент с длиной периода не менее $4n$, после чего рассматриваем $W_2$ — слово $W_1$ с “вырезанным” периодическим фрагментом $u_2$. У слова $W_2$ так же вырезаем периодический фрагмент. Далее продолжаем этот процесс, подробнее описанный в алгоритме 4.2.1. Затем по вырезанным фрагментам мы восстанавливаем первоначальное слово $W$. После этого показывается, что в слове $W$ подслово $u_i$ чаще всего не является произведением большого количества не склеенных подслов. В лемме 4.2.1 доказывается, что применение алгоритма 4.2.1 дает необходимое количество подслов слова $W$ с длиной периода не меньше $2n$ среди вырезанных подслов.

### 4.2.2 Суммирование существенной высоты и степени нильпотентности

До конца главы будем использовать следующее

**Обозначение 4.2.1.** $\mathrm{Ht}(w)$ — *высота слова $w$ над множеством слов степени не выше $n$.*

Рассмотрим слово $W$ с высотой $\mathrm{Ht}(W) > \Phi(n,l)$. Теперь для него проведём следующий алгоритм:

**Алгоритм 4.2.1.**

**Первый шаг.** *По теореме 1.7.3 в слове $W$ найдётся подслово с длиной периода $4n$. Пусть*

$$W_0 = W = u'_1 x_{1'}^{4n} y'_1,$$

*причём слово $x_{1'}$ — ациклическое. Представим $y'_1$ в виде $y'_1 = x_{1'}^{r_2} y_1$, где $r_2$ — максимально возможное число. Слово $u'_1$ представим как $u'_1 = u_1 x_{1'}^{r_1}$, где $r_1$ — наибольшее возможное. Обозначим за $f_1$ следующее слово:*

$$W_0 = u_1 x_{1'}^{4n+r_1+r_2} y_1 = u_1 f_1 y_1.$$

*Назовём позиции, входящие в слово $f_1$,* скучными, *последнюю позицию слова $u_1$* — скучной типа 1, *вторую с конца позицию $u_1$* — скучной типа 2 *и так далее, $n$-ую с конца позицию $u_1$* — скучной типа $n$. *Положим $W_1 = u_1 y_1$.*

**$k$-й шаг.** *Рассмотрим слова*

$$u_{k-1},\ y_{k-1},\ W_{k-1} = u_{k-1} y_{k-1},$$

*построенные на предыдущем шаге. Если $|W_{k-1}| \geqslant \Phi(n,l)$, то применим теорему 1.7.3 к слову $W$ с тем условием, что процесс в основной лемме 3.2.2 будет вестись только по не скучным позициям и скучным позициям типа больше $ka$, где $k$ и $a$ — параметры леммы 3.2.2.*

*Таким образом, в слове $W_{k-1}$ найдётся ациклическое подслово с длиной периода $4n$, так что*

$$W_{k-1} = u'_k x_{k'}^{4n} y'_k.$$

*При этом положим*

$$r_1 := \sup\{r : u'_k = u_k x^r_{k'}\}, \quad r_2 := \sup\{r : y'_k = x^r_{k'} y_k\}.$$

*(Отметим, что слова в наших рассуждениях могут быть пустыми.) Определим $f_k$ из равенства:*

$$W_{k-1} = u_k x^{4n+r_1+r_2}_{k'} y_k = u_k f_k y_k.$$

*Назовём позиции, входящие в слово $f_k$,* скучными*, последнюю позицию слова $u_k$ —* скучной типа 1, *вторую с конца позицию $u_k$ —* скучной типа 2 *и так далее, $n$-ую с конца позицию $u_k$ —* скучной типа $n$. *Если позиция в процессе алгоритма определяется как скучная двух типов, то будем считать её скучной того типа, который меньше. Положим $W_k = u_k y_k$.*

**Обозначение 4.2.2.** *Проведём $4t+1$ шагов алгоритма 4.2.1. Рассмотрим первоначальное слово $W$. Для каждого натурального $i$ из отрезка $[1, 4t]$ имеет место равенство*

$$W = w_0 f_i^{(1)} w_1 f_i^{(2)} \cdots f_i^{(n_i)} w_{n_i}$$

*для некоторых подслов $w_j$. Здесь*

$$f_i = f_i^{(1)} \cdots f_i^{(n_i)}.$$

*Также мы считаем, что при $1 \leqslant j \leqslant n_i - 1$ подслово $w_j$ — непустое. Пусть $s(k)$ — количество индексов $i \in [1, 4t]$ таких, что $n_i = k$.*

Для доказательства теоремы 1.7.3 требуется найти как можно больше длинных периодических фрагментов. Помочь в этом сможет следующая лемма:

**Лемма 4.2.1.** $s = s(1) + s(2) \geqslant 2t$.

*Доказательство.* Назовём *монолитным* подслово $U$ слова $W$, если

1. $U$ является произведением слов вида $f_i^{(j)}$,
2. $U$ не является подсловом слова, для которого выполняется предыдущее свойство (1).

Пусть после $(i-1)$-го шага алгоритма 4.2.1 в слове $W$ содержится $k_{i-1}$ монолитных подслов. Заметим, что

$$k_i \leqslant k_{i-1} - n_i + 2.$$

Тогда если $n_i \geqslant 3$, то $k_i \leqslant k_{i-1} - 1$. Если же $n_i \leqslant 2$, то $k_i \leqslant k_{i-1} + 1$. При этом $k_1 = 1$, $k_t \geqslant 1 = k_1$. Лемма доказана. $\square$

**Следствие 4.2.1.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot s(k) \leqslant 10t \leqslant 5s. (4.2.1)$$

*Доказательство.* Из доказательства леммы 4.2.1 получаем, что

$$\sum_{n_i \geqslant 3} (n_i - 2) \leqslant 2t.$$

По определению $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s(k) = 4t$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2s(k) = 8t$.

Складывая эти два неравенства и применяя лемму 4.2.1, получаем доказываемое неравенство 4.2.1. $\square$

**Предложение 4.2.1.** *Высота слова $W$ будет не больше*

$$\Psi(n, 4n, l) + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot s(k) \leqslant \Psi(n, 4n, l) + 5s.$$

Далее будем рассматривать только $f_i$ с $n_i \leqslant 2$.

**Обозначение 4.2.3.** *Если $n_i = 1$, то положим $f'_i := f_i$.*

*Ежели $n_i = 2$, то положим $f'_i := f_i^{(j)}$, где $f_i^{(j)}$ – слово с наибольшей длиной между $f_i^{(1)}$ и $f_i^{(2)}$.*

*Слова $f'_i$ упорядочим в соответствии с их близостью к началу $W$. Получим последовательность*

$$f'_{m_1}, \ldots, f'_{m_s}, \text{ где } s' = s(1) + s(2),$$

*положим $f''_i := f'_{m_i}$. Пусть $f''_i = w'_i x_{i''}^{p_{i''}} w''_i$, где хотя бы одно из слов $w'_i, w''_i$ – пустое.*

**Замечание 4.2.1.** *Можно считать, что мы первыми шагами алгоритма 4.2.1 выбрали все те $f_i$, для которых $n_i = 1$.*

Теперь рассмотрим $z'_j$ — подслова $W$ следующего вида:

$$z'_j = x_{(2j-1)''}^{p_{(2j-1)''}+\daleth} v_j, \daleth \geqslant 0, |v_j| = |x_{(2j-1)''}|,$$

при этом $v_j$ не равно $x_{(2j-1)''}$, начало подслова $z'_j$ совпадает с началом периодического подслова в $f''_{2j-1}$. Покажем, что $z'_j$ не пересекаются как подслова слова $W$.

В самом деле, если $f''_{2j-1} = f_{m_{2j-1}}$, то $z'_j = f_{m_{2j-1}} v_j$.

Если же

$$f''_{2j-1} = f^{(k)}_{m_{2j-1}}, k = 1, 2,$$

а подслово $z'_j$ пересекается с подсловом $z'_{j+1}$, то $f''_{2j} \subset z'_i$. Так как слова $x_{(2j)''}$ и $x_{(2j-1)''}$ — ациклические, то $|x_{(2j)''}| = |x_{(2j-1)''}|$. Но тогда длина периода в $z'_j$ не меньше $4n$, что противоречит замечанию 4.2.1.

Тем самым доказана следующая лемма:

**Лемма 4.2.2.** *В слове $W$ с высотой не более*

$$\Psi(n, 4n, l) + 5s'$$

*найдётся не менее $s'$ непересекающихся периодических подслов, в которых период повторится не менее $2n$ раз. Кроме того, между любыми двумя элементами данного множества периодических подслов найдётся подслово длины периода более левого из выбранных элементов.*

### 4.2.3 Завершение доказательства субэкспоненциальности высоты

Подставляя в лемму 4.2.2 вместо числа $s'$ значение $s$ из доказательства теоремы 1.7.4 получаем, что высота $W$ не больше, чем

$$\Psi(n, 4n, l) + 5s < 2^{96} l \cdot n^{12\log_3 n + 36 \log_3 \log_3 n + 91}.$$

Тем самым мы получили **утверждение основной теоремы 1.7.2**.

# Глава 5

# Оценки кусочной периодичности

## 5.1 План улучшения оценок существенной высоты

Далее приводятся оценки на количество периодических подслов с периодом длины $2, 3, (n-1)$ произвольного не являющегося $n$-разбиваемым слова $W$. Рассмотрение случая периодов длины $2, 3$ при помощи кодировки обобщается до доказательства ограниченности существенной высоты. Кроме того, получена нижняя оценка на число подслов с периодом 2, и эта оценка при достаточно большом $l$ отличается от верхней в 4 раза.

С целью дальнейшего улучшения оценок, полученных в главе 4, вводятся следующие определения:

**Определение 5.1.1.** а) Число $h$ называется *малой выборочной высотой* с границей $k$ слова $W$ над множеством слов $Z$, если $h$ — такое максимальное число, что у слова $W$ найдётся $h$ попарно непересекающихся циклически несравнимых подслов вида $z^m$, где $z \in Z, m > k$.

б) Число $h$ называется *большой выборочной высотой* с границей $k$ слова $W$ над множеством слов $Z$, если $h$ — такое максимальное число,что у слова $W$ найдётся $h$ попарно непересекающихся подслов вида $z^m$, где $z \in Z, m > k$, причём соседние подслова из этой выборки несравнимы.

**Здесь и далее:** $k = 2n$.

в) Множество слов $V$ имеет малую (большую) выборочную высоту $h$ над некоторым множеством слов $Z$, если $h$ является точной верхней гранью малых (больших) выборочных высот над $Z$ его элементов.

Затем доказываются теоремы 1.7.5, 1.7.6, 1.7.7, 1.7.8 на кусочную периодичность:

Теорема 5.1.1 с помощью кодировки обобщает теорему 1.7.5 до доказательства ограниченности существенной высоты множества слов, не являющихся $n$-разбиваемыми.

**Теорема 5.1.1.** *Существенная высота $l$-порождённой* PI-*алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени $n$ над множеством слов длины $< n$ меньше, чем $\Upsilon(n,l)$, где*

$$\Upsilon(n,l) = 8(l+1)^n n^5 (n-1).$$

Доказательства теорем 1.7.8, 5.1.1 изложены в работе [104].

Малую и большую выборочные высоты связывает следующая теорема:

**Теорема 5.1.2.** *Большая выборочная высота $l$-порождённой* PI-*алгебры $A$ с допустимым полиномиальным тождеством степени $n$ над множеством ациклических слов длины $k$ меньше*

$$2(n-1)\beth(k,l,n),$$

*где $\beth(k,l,n)$ — малая выборочная высота $A$ над множеством ациклических слов длины $k$.*

Как и ранее будем считать, что слова строятся над алфавитом $\mathfrak{A}$ из букв $\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$, над которыми введён лексикографический порядок, причём $a_i < a_j$, если $i < j$. Для следующих ниже доказательств будем отождествлять буквы $a_i$ с их индексами $i$ (то есть будем писать не слово $a_i a_j$, а слово $ij$).

## 5.2 Доказательство верхних оценок выборочной высоты

### 5.2.1 Периоды длины два

Пусть слово $W$ не является сильно $n$-разбиваемым. Рассмотрим некоторое множество $\Omega''$ попарно непересекающихся циклических сравнимых подслов $W$ вида $z^m$, где $m > 2n$, $z$ — ациклическое двухбуквенное слово. Будем называть элементы этого множества *представителями,* имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось $t$ таких представителей. Пронумеруем их всех в порядке положения в слове $W$ (первое — самое левое) числами от 1 до $t$. В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно два различных двухбуквенных слова.

Введём порядок на этих словах следующим образом: $u \prec v$, если

- $u$ лексикографически меньше $v$,
- представитель, содержащий $u$ левее представителя, содержащего $v$.

Из отсутствия сильной $n$-разбиваемости получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно $(n-1)$. По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых двухбуквенных слов на $(n-1)$ цепь. Раскрасим слова в $(n-1)$ цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям.

Введём соответствие между следующими четырьмя объектами:

- натуральными числами от 1 до $t$,
- классами эквивалентности по сильной сравнимости,
- содержащимися в классах эквивалентности по сильной сравнимости циклическими словами длины 2,
- парами цветов, в которые раскрашены сдвиги по циклу этого слово-цикла.

Буквы слово-цикла раскрасим в цвета, в которые раскрашены сдвиги по циклу, начинающиеся с этих цветов.

Рассмотрим граф $\Gamma$ с вершинами вида $(k, i)$, где $0 < k < n$ и $0 < i \leqslant l$. Первая координата соответствует цвету, а вторая — букве. Две вершины $(k_1, i_1), (k_2, i_2)$ соединяются *ребром с весом* $j$, если

- в $j$-ом представителе содержится слово-цикл из букв $i_1, i_2$,
- буквы $j$-го представителя раскрашены в цвета $k_1, k_2$ соответственно.

Посчитаем число рёбер между вершинами вида $(k_1, i_1)$ и вершинами вида $(k_2, i_2)$, где $k_1, k_2$ — фиксированы, $i_1, i_2$ – произвольны. Рассмотрим два ребра

$l_1$ и $l_2$ из рассматриваемого множества с весами $j_1 < j_2$ с концами в некоторых вершинах

$$A = (k_1, i_{1_1}), B = (k_2, i_{2_1}) \text{ и } C = (k_1, i_{1_2}), D = (k_2, i_{2_2})$$

соответственно. Тогда по построению одновременно выполняются неравенства $i_{1_1} \leqslant i_{1_2}, i_{2_1} \leqslant i_{2_2}$. При этом, так как рассматриваются представители классов эквивалентности по сильной сравнимости, одно из неравенств строгое. Значит,

$$i_{1_1} + i_{2_1} < i_{1_2} + i_{2_2}.$$

Так как вторые координаты вершин ограничены числом $l$, то вычисляемое число рёбер будет не более $(2l - 1)$.

Так как первая координата вершин меньше $n$, то всего рёбер в графе будет не более

$$\frac{(2l-1)(n-1)(n-2)}{2}.$$

Таким образом, теорема 1.7.5 доказана.

### 5.2.2 Периоды длины три

Пусть слово $W$ не является сильно $n$-разбиваемым. Рассмотрим некоторое множество попарно непересекающихся циклических несравнимых подслов слова $W$ вида $z^m$, где $m > 2n$, $z$ — ациклическое трёхбуквенное слово. Будем называть элементы этого множества представителями, имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось $t$ таких представителей. Пронумеруем их всех в порядке положения в слове $W$ (первое — ближе всех к началу слова) числами от 1 до $t$. В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно три различных трёхбуквенных слова.

Введём порядок на этих словах следующим образом:

$u \prec v$, если

- $u$ лексикографически меньше $v$,
- представитель, содержащий $u$, левее представителя, содержащего $v$.

Из отсутствия сильной $n$-разбиваемости получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно $n-1$. По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых трёхбуквенных слов на $(n-1)$ цепь. Раскрасим слова в $(n-1)$ цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям.

Можно заметить, что до этого момента доказательство теоремы 1.7.7 практически полностью повторяет доказательство теоремы 1.7.5. Однако для дальнейшего доказательства необходимо использовать ориентированный аналог графа $\Gamma$, который вводится далее.

Рассмотрим теперь уже ориентированный граф $G$ с вершинами вида $(k, i)$, где $0 < k < n$ и $0 < i \leqslant l$. Первая координата обозначает цвет, а вторая — букву. *Ребро с некоторым весом* $j$ выходит из $(k_1, i_1)$ в $(k_2, i_2)$, если для некоторых $i_3, k_3$

- в $j$-ом представителе содержится слово-цикл $i_1 i_2 i_3$,
- буквы $i_1, i_2, i_3$ $j$-го представителя раскрашены в цвета $k_1, k_2, k_3$ соответственно.

Таким образом, граф $G$ состоит из ориентированных треугольников с рёбрами одинакового веса. Однако в отличие от графа $\Gamma$ из доказательства теоремы 1.7.5, могут появляться кратные рёбра, то есть рёбра с общими началом и концом, но разным весом. Для дальнейшего доказательства нам потребуется следующая лемма:

**Лемма 5.2.1** (Основная). *Пусть $A$, $B$ и $C$ — вершины графа $G$, $A \to B \to C \to A$ — ориентированный треугольник с рёбрами некоторого веса $j$, кроме того, существуют другие рёбра $A \to B, B \to C, C \to A$ с весами $a, b, c$ соответственно. Тогда среди $a, b, c$ есть число, большее $j$.*

*Доказательство.* От противного. Если два числа из набора $a, b, c$ равны друг другу, то

$$a = b = c = j,$$

так как в противном случае есть 2 треугольника

$$A \to B \to C \to A,$$

в каждом из которых веса всех трёх рёбер совпадают между собой. Тогда в $\Omega''$ есть два не сильно сравнимых слова, что противоречит определению $\Omega''$. Без ограничения общности, что $a$ наибольшее из чисел $a, b$. Рассмотрим треугольник из рёбер веса $a$. Этот треугольник будет иметь общую с $\triangle ABC$ сторону $AB$ и некоторую третью вершину $C'$. Если вторая координата вершины $C'$ совпадает со второй координатой вершины $C$ (то есть совпали соответствующие $C$ и $C'$ буквы алфавита), то $\triangle ABC$ и $\triangle ABC'$ соответствуют не сильно сравнимым словам из множества $\Omega''$. Снова получено противоречие с определением множества $\Omega''$. По предположению $a < j$, а значит, из монотонности цвета $k_A$ (первой координаты вершины $A$) слово $i_A i_B i_{C'}$, составленное из вторых координат вершин $A, B, C'$ соответственно, лексикографически меньше слова $i_A i_B i_C$. Значит, $i_{C'} < i_C$. Тогда слово $i_B i_{C'}$ лексикографически меньше слова $i_B i_C$. Из монотонности цвета $k_B$ получаем, что $b > a$. Противоречие. □

### 5.2.3 Завершение доказательства теоремы 1.7.7

Рассмотрим теперь граф $G_1$, полученный из графа $G$ заменой между каждыми двумя вершинами кратных рёбер на ребро с наименьшим весом. Тогда по лемме 5.2.1 в графе $G_1$ встретятся рёбра всех весов от 1 до $t$.

Посчитаем число рёбер из вершин вида $(k_1, i_1)$ в вершины вида $(k_2, i_2)$, где $k_1, k_2$ фиксированы, $i_1, i_2$ произвольны. Рассмотрим два ребра из рассматриваемого множества с весами $j_1 < j_2$ с концами в некоторых вершинах

$$(k_1, i_{1_1}), (k_2, i_{2_1}) \text{ и } (k_1, i_{1_2}), (k_2, i_{2_2})$$

соответственно. Тогда по построению $i_{1_1} \leqslant i_{1_2}, i_{2_1} \leqslant i_{2_2}$, причём, так как рассматриваются представители классов эквивалентности по сильной сравнимости, одно из неравенств строгое. Так как вторые координаты вершин ограничены числом $l$, то вычисляемое число рёбер будет не более $2l - 1$.

Так как первая координата вершин меньше $n$, то всего рёбер в графе будет не более

$$(2l-1)(n-1)(n-2).$$

Таким образом, теорема 1.7.7 доказана.

### 5.2.4 Периоды длины, близкой к степени тождества в алгебре

Пусть слово $W$ не является $n$-разбиваемым. Как и прежде, рассмотрим некоторое множество попарно непересекающихся несравнимых подслов слова $W$ вида $z^m$, где $m > 2n$, $z$ — $(n-1)$-буквенное ациклическое слово. Будем называть элементы этого множества *представителями*, имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось $t$ таких представителей. Пронумеруем их всех в порядке положения в слове $W$ (первое — ближе всех к началу слова) числами от 1 до $t$. В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно $(n-1)$ различное $(n-1)$-буквенное слово.

Введём порядок на этих словах следующим образом: $u \prec v$, если

- $u$ лексикографически меньше $v$;
- представитель, содержащий $u$ левее представителя, содержащего $v$.

Из отсутствия сильной $n$-разбиваемости получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно $n-1$. По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых $(n-1)$-буквенных слов на $(n-1)$ цепь. Раскрасим слова в $(n-1)$ цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям. Раскрасим позиции, с которых начинаются слова, в те же цвета, что и соответствующие слова.

Рассмотрим ориентированный граф $G$ с вершинами вида $(k, i)$, где $0 < k < n$ и $0 < i \leqslant l$. Первая координата обозначает цвет, а вторая — букву.

**Определение 5.2.1.** Ребро с некоторым весом $j$ выходит из $(k_1, i_1)$ в $(k_2, i_2)$, если

- для некоторых
$$i_3, i_4, \ldots, i_{n-1}$$
в $j$-ом представителе содержится слово-цикл
$$i_1 i_2 \cdots i_{n-1};$$
- позиции, на которых стоят буквы $i_1, i_2$ раскрашены в цвета $k_1, k_2$ соответственно.

Таким образом, граф $G$ состоит из ориентированных циклов длины $(n-1)$ с рёбрами одинакового веса. Теперь нам требуется найти показатель, который бы строго монотонно рос с появлением каждого нового представителя при движении от начала к концу слова $W$. В теореме 1.7.7 таким показателем было число несократимых рёбер графа $G$. В доказательстве теоремы 1.7.8 будет рассматриваться сумма вторых координат неизолированных вершин графа $G$. Нам потребуется следующая лемма:

**Лемма 5.2.2** (Основная)**.** *Пусть* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ *— вершины графа* $G$, $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{n-1} \to A_1$ *— ориентированный цикл длины* $(n-1)$ *с рёбрами некоторого веса* $j$*. Тогда не найдётся другого цикла между вершинами* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ *одного веса.*

*Доказательство.* От противного. Рассмотрим наименьшее число $j$, для которого нашёлся другой одноцветный цикл между вершинами цикла цвета $j$. В силу минимальности $j$ можно считать, что этот цикл имеет цвет $k > j$. Пусть цикл цвета $k$ имеет вид

$$A_{j_1} \to A_{j_2} \to \cdots \to A_{j_{n-1}}, \text{ где } \{j_p\}_{p=1}^{n-1} = \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Пусть $(k_j, i_j)$ — координата вершины $A_j$. Рассмотрим наименьшее число $q \in \mathbb{N}$ такое, что для некоторого $r$ слово

$$i_{j_r} i_{j_{r+1}} \cdots i_{j_{r+q-1}}$$

лексикографически больше слова

$$i_{j_r} i_{j_r+1} \cdots i_{j_r+q-1}$$

(здесь и далее сложение нижних индексов происходит по модулю $(n-1)$). Такое $q$ существует, так как слова $i_1 i_2 \cdots i_{n-1}$ и $i_{j_1} i_{j_2} \cdots i_{j_{n-1}}$ сильно сравнимы. Кроме того, в силу совпадения множеств $\{j_p\}_{p=1}^{n-1}$ и $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ получаем, что $q \geqslant 2$. Так как $q$ — наименьшее, то для любого $s < q$, любого $r$ имеем

$$i_{j_r} i_{j_{r+1}} \cdots i_{j_{r+s-1}} = i_{j_r} i_{j_r+1} \cdots i_{j_r+s-1}.$$

Тогда для любого $s < q$, любого $r$ имеем

$$i_{j_{r+s-1}} = i_{j_r+s-1}.$$

Из монотонности слов каждого цвета получаем, что для любого $r$

$$i_{j_r} i_{j_{r+1}} \cdots i_{j_{r+q-1}}$$

не больше

$$i_{j_r} i_{j_r+1} \cdots i_{j_r+q-1}.$$

Значит, для любого $r$ верно неравенство

$$i_{j_{r+q-1}} \geqslant i_{j_r+q-1}.$$

По предположению найдётся такое $r$, что

$$i_{j_{r+q-1}} > i_{j_r+q-1}.$$

Так как обе последовательности $\{j_{r+q-1}\}_{=1}^{n-1}$ и $\{j_r+q-1\}_{=1}^{n-1}$ пробегают элементы множества чисел $\{1,2,\ldots,n-1\}$ по одному разу, то

$$\sum_{r=1}^{n-1} j_{r+q-1} = \sum_{r=1}^{n-1} (j_r+q-1)$$

(при вычислении числа $j_r+q-1$ суммирование также проходит по модулю $(n-1)$). Но мы получили

$$\sum_{r=1}^{n-1} j_{r+q-1} > \sum_{r=1}^{n-1} (j_r+q-1).$$

Противоречие. □

### 5.2.5 Завершение доказательства теоремы 1.7.8

Для произвольного $j$ рассмотрим циклы длины $(n-1)$ весов $j$ и $j+1$ для некоторого $j$. Из основной леммы 5.2.2 найдутся числа $k, i$ такие, что вершина $(k,i)$ входит в цикл веса $(j+1)$, но не входит в цикл веса $j$. Пусть цикл веса $j$ состоит из вершин вида $(k, i_{(j,k)})$, где $k = 1,2,\ldots,n-1$. Введём величину

$$\pi(j) = \sum_{k=1}^{n-1} i_{(j,k)}.$$

Тогда из основной леммы 5.2.2 и монотонности слов по цветам получаем, что

$$\pi(j+1) \geqslant \pi(j) + 1.$$

Так как рассматриваемые периоды не циклические, то найдётся $k$ такое, что $i_{(1,k)} > 1$. Значит, $\pi(1) > n-1$. Для любого $j$ имеем $i_{(j,k)} \leqslant l-1$, а значит,

$$\pi(j) \leqslant (l-1)(n-1).$$

Следовательно,

$$j \leqslant (l-2)(n-1).$$

Значит,

$$t \leqslant (l-2)(n-1).$$

Тем самым, теорема 1.7.8 доказана.

Представленная при доказательстве теоремы 1.7.8 техника позволяет доказать следующий факт:

**Предложение 5.2.1.** *Малая выборочная высота множества не слов, не являющихся сильно $n$-разбиваемыми, над $l$-буквенным алфавитом относительно множества ациклических слов длины $(n-c)$ не больше $D(c)n^c l$, где $D(c)$ — некоторая функция, зависящая от $c$.*

## 5.3 Нижняя оценка малой выборочной высоты над периодами длины два

Приведём пример. Из формулировки этой теоремы следует, что можно положить $l$ сколь угодно большим. Будем считать, что $l > 2^{n-1}$. Мы воспользуемся конструкциями, принятыми в доказательстве теоремы 1.7.5. Таким образом, процесс построения примера сводится к построению рёбер в графе на $l$ вершинах. Разобьём этот процесс на несколько больших шагов. Пусть $i$ — натуральное число от 1 до $(l-2^{n-1})$. Пусть на $i$-ом большом шаге в приведённом ниже порядке соединяются рёбрами следующие пары вершин:
$(i, 2^{n-2}+i)$,
$(i, 2^{n-2}+2^{n-3}+i), (2^{n-2}+i, 2^{n-2}+2^{n-3}+i)$,
$(i, 2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+i), (2^{n-2}+i, 2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+i)$,
$(2^{n-2}+2^{n-3}+i, 2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+i), \dots,$
$(i, 2^{n-2}+\dots+2^1+2^0+i), \dots, (2^{n-2}+\dots+2^1+i, 2^{n-2}+\ldots+2^1+2^0+i)$,
где $i = 2, 3, \dots, l-2^{n-1}+1$.
При этом:

1. Никакое ребро не будет подсчитано 2 раза, так как вершина соединена рёбрами только с вершинами, значения в которых отличаются от значения в выбранной вершине на неповторяющуюся сумму степеней двойки.

2. Пусть *вершина типа* $(k, i)$ — вершина, которая на $i$-ом шаге соединяется с $k$ вершинами, значения в которых меньше значения её самой. Для всех $i$ будут вершины типов $(0, i), (1, i) \ldots, (n-2, i)$.

   Раскрасим в $k$-й цвет слова, которые для некоторого $i$ начинаются с буквы типа $(k, i)$ и заканчиваются в буквах, с которыми вершина типа $(k, i)$ соединяется рёбрами на $i$-ом большом шаге. Получена корректная раскраска в $(n-1)$ цвет, а значит, слово сильно $n$-разбиваемо.

3. На $i$-ом большом шаге осуществляется $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ шагов. Значит,

   $$q = (l - 2^{n-1})(n-2)(n-3)/2,$$

   где $q$ — количество рёбер в графе Г.

Тем самым, теорема 1.7.6 доказана.

## 5.4 Оценка существенной высоты с помощью выборочной высоты

Из рассмотрения случая периодов длины 2 с помощью кодировки букв можно получить оценку на существенную высоту, которая будет расти полиномиально по числу образующих и экспоненциально по степени тождества. Для этого надо обобщить некоторые понятия, введённые ранее. Заметим, что механизм кодировки букв представляется перспективным для обобщения оценок на высоту, полученных при конкретном значении одного из параметров (в данном случае — ограничение длины слов в базисе Ширшова).

**Конструкция 5.4.1.** *Рассмотрим алфавит $\mathfrak{A}$ с буквами $\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$. Введём на буквах лексикографический порядок: $a_i > a_j$, если $i > j$. Рассмотрим произвольное множество ациклических попарно сильно сравнимых слово-циклов некоторой одинаковой длины $t$. Пронумеруем элементы этого множества натуральными числами, начиная с 1. Введём порядок на словах, входящих в слово-цикл, следующим образом: $u \prec v$, если:*

1. *слово $u$ — лексикографически меньше слова $v$,*

2. *слово-цикл, содержащий слово $u$, имеет меньший номер, чем слово-цикл, содержащий слово $v$.*

*Пронумеруем теперь позиции букв в слово-циклах числами от 1 до $t$ от начала к концу некоторого слова, входящего в слово-цикл.*

**Обозначение 5.4.1.** *1. Пусть $w(i,j)$ — слово длины $t$, которое начинается с $j$-ой буквы в $i$-ом слово-цикле.*

*2. Пусть класс $X(t,l)$ — рассматриваемое множество слово-циклов с введённым на его словах порядком $\prec$ .*

**Определение 5.4.1.** Назовём те классы $X$, в которых не найдётся антицепи длины $n$, — *$n$-светлыми.* Соответственно, те, в которых найдётся такая антицепь — *$n$-тёмными.*

Из теоремы Дилуорса получаем, что слова в $n$-светлых классах $X$ можно раскрасить в $(n-1)$ цвет, так что одноцветные слова образуют цепь. Далее требуется оценить число элементов в $n$-светлых классах $X$.

**Определение 5.4.2.** Пусть $\daleth(t,l,n)$ — наибольшее возможное число элементов в $n$-светлом классе $X(t,l)$.

**Замечание 5.4.1.** *Здесь и далее первый аргумент в функции $\daleth(\cdot,\cdot,\cdot)$ меньше третьего.*

Следующая лемма позволяет оценить $\daleth(t,l,n)$ через случаи малых периодов.

**Лемма 5.4.1.** $\daleth(t,l^2,n) \geqslant \daleth(2t,l,n)$

*Доказательство.* Рассмотрим $n$-светлый класс $X(2t,l)$. Разобьём во всех его слово-циклах позиции на пары соседних так, чтобы каждая позиция попала ровно в одну пару. Затем рассмотрим алфавит $\mathfrak{B}$ с буквами $\{b_{i,j}\}_{i,j=1}^{l}$, причём $b_{i_1,j_1} > b_{i_2,j_2}$, если

$$i_1 \cdot l + j_1 > i_2 \cdot l + j_2.$$

Алфавит $\mathfrak{B}$ состоит из $l^2$ букв. Каждая пара позиций из разбиения состоит из некоторых букв $a_i, a_j$. Заменим пару букв $a_i, a_j$ буквой $b_{i,j}$. Поступая так с каждой парой, получаем новый класс $X(t, l^2)$. Он будет $n$-светлым, так как если в классе $X(t, l^2)$ есть антицепь длины $n$ из слов

$$w(i_1, j_1), w(i_2, j_2), \ldots, w(i_n, j_n),$$

то следует рассматривать прообразы слов

$$w(i_1, j_1), w(i_2, j_2), \ldots, w(i_n, j_n)$$

в первоначально взятом классе $X(2t, l)$. Пусть эти прообразы — слова

$$w(i_1, j_1'), w(i_2, j_2'), \ldots, w(i_n, j_n').$$

Тогда слова

$$w(i_1, j_1'), w(i_2, j_2'), \ldots, w(i_n, j_n')$$

образуют в классе $X(2t, l)$ антицепь длины $n$. Получено противоречие с тем, что класс $X(2t, l)$ — $n$-светлый. Тем самым, лемма доказана. □

Теперь оценим $\beth(t, l, n)$ через случаи малых алфавитов.

**Лемма 5.4.2.** $\beth(t, l^2, n) \leqslant \beth(2t, l, 2n-1)$

*Доказательство.* Рассмотрим $(2n-1)$-тёмный класс $X(2t, l)$. Можно считать, что $n$ слов из антицепи, а именно

$$w(i_1, j_1), w(i_2, j_2), \ldots, w(i_n, j_n),$$

начинаются с нечётных позиций слово-циклов. Разобьём во всех его слово-циклах позиции на пары соседних так, чтобы каждая позиция попала ровно в одну пару и первая позиция в каждой паре была нечётной. Затем рассмотрим алфавит $\mathfrak{B}$ с буквами $\{b_{i,j}\}_{i,j=1}^{l}$, причём $b_{i_1,j_1} > b_{i_2,j_2}$, если

$$i_1 \cdot l + j_1 > i_2 \cdot l + j_2.$$

Алфавит $\mathfrak{B}$ состоит из $l^2$ букв. Каждая пара позиций из разбиения состоит из некоторых букв $a_i, a_j$. Заменим пару букв $a_i, a_j$ буквой $b_{i,j}$. Поступая так с каждой парой, получаем новый класс $X(t, l^2)$. Пусть слова

$$w(i_1, j_1), w(i_2, j_2), \ldots, w(i_n, j_n)$$

перешли в слова

$$w(i_1, j_1'), w(i_2, j_2'), \dots, w(i_n, j_n').$$

Эти слова будут образовывать антицепь длины $n$ в классе $X(t, l^2)$. Таким образом, получен $n$-тёмный класс $X(t, l^2)$ с тем же числом элементов, что и $(2n-1)$-тёмный класс $X(2t, l)$. Тем самым, лемма доказана. $\square$

Для дальнейшего рассуждения необходимо связать $\beth(t, l, n)$ для произвольного первого аргумента и для первого аргумента, равного степени двойки.

**Лемма 5.4.3.** $\beth(t, l, n) \leqslant \beth(2^s, l+1, 2^s(n-1)+1)$, *где* $s = \ulcorner \log_2(t) \urcorner$.

*Доказательство.* Рассмотрим $n$-светлый класс $X(t, l)$. Введём в алфавит $\mathfrak{A}$ новую букву $a_0$, которая лексикографически меньше любой другой буквы из алфавита $\mathfrak{A}$. Получен алфавит $\mathfrak{A}'$. В каждый слово-цикл из класса $X(t, l)$ добавим $(t+1)$-ю, $(t+2)$-ю,..., $2^s$−ю позиции, на которые поставим буквы $a_0$. Получили класс $X(2^s, l+1)$. Он будет $(2^s(n-1)+1)$-светлым, так как в противном случае в этом классе для некоторого $j$ найдутся слова

$$w(i_1, j), w(i_2, j), \dots, w(i_n, j),$$

которые образуют антицепь в классе $X(2^s, l+1)$. Тогда:

1. Если $j > t$, то слова

$$w(i_1, 1), w(i_2, 1), \dots, w(i_n, 1)$$

   образуют антицепь в классе $X(t, l)$.

2. Если $j \leqslant t$, то слова

$$w(i_1, j), w(i_2, j), \dots, w(i_n, j)$$

   образуют антицепь в классе $X(t, l)$.

Получено противоречие с тем, что класс $X(t, l)$ — $n$-светлый. Тем самым, лемма доказана. $\square$

**Предложение 5.4.1.** $\beth(t, l, n) \leqslant \beth(t, l, n+1)$

По лемме 5.4.3 $\beth(t,l,n) \leqslant \beth(2^s, l+1, 2^s(n-1)+1)$, где $s = \ulcorner \log_2(t) \urcorner$.

В силу замечания 5.4.1 $t < n$. Значит, $2^s < 2n$.

Следовательно, $\beth(2^s, l+1, 2^s(n-1)+1) \leqslant \beth(2^s, l+1, 2n^2)$.

По лемме 5.4.1 имеем

$$\beth(2^s, l+1, 2n^2) \leqslant \beth(2^{s-1}, (l+1)^2, 2n^2) \leqslant \beth(2^{s-2}, (l+1)^{2^2}, 2n^2) \leqslant$$

$$\leqslant \beth(2^{s-3}, (l+1)^{2^3}, 2n^2) \leqslant \cdots \leqslant \beth(2, (l+1)^{2^{s-1}}, 2n^2).$$

По теореме 1.7.5 имеем

$$\beth(2, (l+1)^{2^{s-1}}, 2n^2) < (l+1)^{2^{s-1}} \cdot 4n^4 < 4(l+1)^n n^4.$$

То есть доказана следующая лемма:

**Лемма 5.4.4.** $\beth(t,l,n) < 4(l+1)^n n^4$.

Чтобы применить лемму 5.4.4 к доказательству теоремы 5.1.1, требуется оценить число подслов не являющегося $n$-разбиваемым слова с одинаковыми периодами.

**Лемма 5.4.5.** *Если в некотором слове $W$ найдутся $(2n-1)$ подслов, в которых период повторится больше $n$ раз, и их периоды попарно не сильно сравнимы, то $W$ — $n$-разбиваемое.*

*Доказательство.* Пусть в некотором слове $W$ найдутся $(2n-1)$ подслов, в которых период повторится больше $n$ раз, и их периоды попарно не сильно сравнимы. Пусть $x$ — период одного из этих подслов. Тогда в слове $W$ найдутся непересекающиеся подслова

$$x^{p_1}v'_1, \ldots, x^{p_{2n-1}}v'_{2n-1},$$

где $p_1, \ldots, p_{2n-1}$ — некоторые натуральные числа, большие $n$, а $v'_1, \ldots, v'_{2n-1}$ — некоторые слова длины $|x|$, сравнимые с $x$. Тогда среди слов $v'_1, \ldots, v'_{2n-1}$ найдутся либо $n$ лексикографически больших $x$, либо $n$ лексикографически меньших $x$. Можно считать, что $v'_1, \ldots, v'_n$ — лексикографически больше $x$. Тогда в слове $W$ найдутся подслова

$$v'_1, xv'_2, \ldots, x^{n-1}v'_n,$$

идущие слева направо в порядке лексикографического убывания. $\square$

Из этой леммы получаем следствие 5.1.2.

Рассмотрим не являющееся $n$-разбиваемым слово $W$. Если в нём найдётся подслово, в котором ациклический период $x$ длины не меньше $n$ повторится больше $2n$ раз, то в слове $x^2$ подслова, которые начинаются с первой, второй, $\ldots, n$-ой позиции, попарно сравнимы. Значит, слово $x^{2n}$ является $n$-разбиваемым. Получаем противоречие с тем, что слово $W$ не является $n$-разбиваемым. Из лемм 5.4.5 и 5.4.4 получаем, что существенная высота слова $W$ меньше, чем

$$(2n-1)\sum_{t=1}^{n-1} \beth(t,l,n) < 8(l+1)^n n^5 (n-1).$$

Значит,

$$\Upsilon(n,l) < 8(l+1)^n n^5 (n-1).$$

Тем самым, **теорема 5.1.1 доказана.**

# Глава 6

# Оценки числа перестановочно упорядоченных множеств

## 6.1 Введение и основные понятия

**Определение 6.1.1.** Частично упорядоченное множество $M$ называется *перестановочно упорядоченным,* если порядок на нём есть пересечение двух линейных порядков.

Рассмотрим теперь некоторую перестановку $\pi$ элементов $1, 2, \ldots, n$ (иначе говоря, $\pi \in S_n$). Определим понятие $k$-разбиваемости.

**Определение 6.1.2.** Пусть для перестановки $\pi \in S_n$ найдётся последовательность натуральных чисел

$$1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k$$

таких, что

$$\pi(i_1) \geqslant \pi(i_2) \geqslant \cdots \geqslant \pi(i_k).$$

Тогда перестановка

$$\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)$$

называется $k$-разбиваемой.

**Пример 6.1.1.** Количество не 3-разбиваемых перестановок в группе $S_n$ есть $n$-е число Каталана и равно $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

**Предложение 6.1.1.** *Если слово является $k$-разбиваемым, то для любого $m < k$ оно также является $m$-разбиваемым.*

Далее нам потребуется определение диаграммы Юнга.

**Определение 6.1.3.** *(Стандартной) диаграммой Юнга порядка $n$* называется таблица, в ячейках которой написаны $n$ различных натуральных чисел, причём суммы чисел в каждой строке и каждом столбце возрастают, между числами нет пустых ячеек и есть элемент, который содержится и в первой строке, и в первом столбце.

**Определение 6.1.4.** Диаграмма Юнга называется *диаграммой формы*

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m),$$

если у неё $m$ строк и для любого числа $i$ от 1 до $m$ $i$-я строка имеет длину $p_i$.

Формы диаграмм Юнга пробегают все возможные разбиения на циклы элементов симметрической группы $S_n$. Любой класс сопряжённости группы $S_n$ задаётся некоторым разбиением на циклы. Каждому классу сопряжённости группы соответствует некоторое её неприводимое представление. Следовательно, форма диаграммы Юнга соответствует неприводимому представлению группы $S_n$.

Пронумеруем все клетки диаграммы Юнга формы $p$ числами от 1 до $n$. Пусть $h_k$ — количество клеток диаграммы Юнга, расположенных

- либо в одной строке, либо в одном столбце с клеткой с номером $k$,
- находящихся не левее или не выше клетки с номером $k$.

Тогда число диаграмм Юнга формы $p$ и равная ему размерность соответствующего неприводимого представления группы $S_n$, вычисляются по "формуле крюков" $\frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n} h_k}$.

В работе [97] приведена биекция между перестановками $\pi$ чисел $1, 2, \dots, n$ и заполненных теми же числами парами диаграмм Юнга $(P, Q)$. Эта биекция и её следствия будут разобраны в главе 6.3.

В данной главе доказываются теоремы 1.7.9 и 1.7.10.

**Следствие 6.1.1.** *Пусть $F$ является множеством слов алфавита из $l$ букв с введённым на них лексикографическим порядком. Назовём* полилинейным *слово, все буквы которого различны. Назовём слово $k$*-разбиваемым, *если в нём найдутся $k$ непересекающихся подслов, идущих в порядке лексикографического убывания. Тогда количество полилинейных слов длины $n$ $(n \leqslant l)$, не являющихся $(k+1)$-разбиваемыми, не больше, чем $\frac{l!k^{2n}}{n!(l-n)!((k-1)!)^2}$.*

Оценка в теореме 1.7.9 улучшает полученную в работе [23]. Следует сказать, что оценка на $\xi_k(n)$ в работе [23] была получена для доказательства теоремы Регева, вопрос же о её точности не ставился. Оценка в работе [23] доказывается с помощью теоремы Дилуорса. Применение теоремы Дилуорса в некоторых других задачах комбинаторики слов описано в работе [105].

В работе [44] доказывается, что для определённой функции

$$K(n) = o(\sqrt[3]{n}\ln n)$$

и числа $k$ такого, что

$$k \leqslant K(n) = o(\sqrt[3]{n}\ln n)$$

верна асимптотическая оценка $\xi_k(n) = k^{2n-o(n)}$.

Для получения производящей функции в работе [85] введено следующее понятие:

**Определение 6.1.5.** Обобщённой диаграммой Юнга формы

$$(p_1, p_2, \dots p_m), \text{ где } p_1 \geqslant p_2 \geqslant \dots \geqslant p_m \geqslant 1,$$

называется массив $Y$ положительных чисел

$$y_{ij}, \text{ где } 1 \leqslant j \leqslant p_i, 1 \leqslant i \leqslant m,$$

такой, что числа в его строках не убывают, а в столбцах возрастают.

Ещё требуются двухстрочные массивы следующего типа.

**Определение 6.1.6.** Набор пар положительных чисел

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_N, v_N)$$

такой, что пары $(u_k, v_k)$ расположены в неубывающем лексикографическом порядке, называется *набором типа* $\alpha(N)$.

В работе [85] устанавливается биекция между наборами типа $\alpha(N)$ и парами $(P, Q)$ обобщённых диаграмм Юнга порядка $N$ (т. е. состоящих из $N$ ячеек). Кроме того, существует взаимно-однозначное соответствие между рассматриваемыми наборами и матрицами, в которых число в ячейке из $i$-ой строки и $j$-го столбца равно количеству пар $(i, j)$ в наборе. В работе [71] на основании функций Шура $s_\lambda$, которые также являются производящими функциями для обобщённых диаграмм Юнга, строится производящая функция для $\xi_k(n)$. Однако сложность построения явной формулы для $\xi_k(n)$ растёт экспоненциально по $k$. К примеру,

$$\xi_3(n) = 2\sum_{k=0}^{n} \tbinom{2k}{k} \tbinom{n}{k}^2 \frac{3k^2 + 2k + 1 - n - 2kn}{(k+1)^2(k+2)(n-k+1)}.$$

## 6.2 Алгебраические обобщения

В 1950 году В. Шпехт [98] поставил проблему существования бесконечно базируемого многообразия ассоциативных алгебр над полем характеристики 0. Решение проблемы Шпехта для нематричного случая представлено в докторской диссертации В. Н. Латышева [25]. Рассуждения В. Н. Латышева основывались на применении техники частично упорядоченных множеств. А. Р. Кемер [16] доказал, что каждое многообразие ассоциативных алгебр конечно базируемо, тем самым решив проблему Шпехта.

Первые примеры бесконечно базируемых ассоциативных колец были получены А. Я. Беловым (см. [4]), А. В. Гришиным (см. [10]) и В. В. Щиголевым (см. [54]).

После решения проблемы Шпехта в случае характеристики 0 актуален вопрос, поставленный В. Н. Латышевым.

Введём некоторый порядок на словах алгебры над полем. Назовём *обструкцией* полилинейное слово, которое

- является уменьшаемым (т. е. является комбинацией меньших слов);
- не имеет уменьшаемых подслов;
- не является изотонным образом уменьшаемого слова меньшей длины.

**Вопрос 6.2.1** (В. Н. Латышев). *Верно ли, что количество обструкций для полилинейного $T$-идеала конечно?*

Из проблемы Латышева вытекает полилинейный случай проблемы конечной базируемости для алгебр над полем конечной характеристики. Наиболее важной обструкцией является обструкция $x_n x_{n-1} \cdots x_1$, её изотонные образы составляют множество слов, не являющихся $n$-разбиваемыми.

В связи с этими вопросами возникает проблема:

**Вопрос 6.2.2.** *Перечислить количество полилинейных слов, отвечающих данному конечному набору обструкций. Доказать элементарность соответствующей производящей функции.*

## 6.3 Доказательство основных результатов

**Лемма 6.3.1** ([97]). *Существует взаимнооднозначно соответствие между перестановками $\pi \in S_n$ и парами $(P, Q)$ стандартных диаграмм Юнга, заполненных числами от 1 до $n$ и такими, что форма $P$ совпадает с формой $Q$.*

*Доказательство.* Пусть $\pi = x_1 x_2 \cdots x_n$. Построим по ней пару диаграмм Юнга $(P, Q)$. Сначала построим диаграмму $P$.

Определим операцию $S \leftarrow x$, где $S$ — диаграмма Юнга, $x$ — натуральное число, не равное ни одному из чисел в диаграмме $S$.

1. Если $x$ не меньше самого правого числа в первой строке $S$ (если в ней нет чисел, то будем считать, что $x$ больше любого из них), то добавляем $x$ в конец первой строки диаграммы $S$. Полученная диаграмма $S \leftarrow x$.

2. Если найдётся большее, чем $x$, число в первой строке $S$, то пусть $y$ — наименьшее число в первой строке, такое что $y > x$. Тогда заменим $y$ на $x$. Далее проводим с $y$ и второй строкой те же действия, что проводили с $x$ и первой строкой.

3. Продолжаем этот процесс строка за строкой, пока какое-нибудь число не будет добавлено в конец строки.

Из построения $S \leftarrow x$ получаем, что вновь полученная таблица будет диаграммой Юнга.

Пусть

$$P = (\cdots((x_1 \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \cdots \leftarrow x_n).$$

Тогда $P$ является диаграммой Юнга и соответствует перестановке $\pi$. Пусть диаграмма $Q$ получается из диаграммы $P$ путём замены $x_i$ на $i$ для всех $i$ от 1 до $n$. Тогда $Q$ также является диаграммой Юнга.

Далее в работе [97] показывается, что приведённое построение пар диаграмм Юнга $(P, Q)$ по перестановкам $\pi \in S_n$ взаимнооднозначно. $\square$

Из алгоритма, приведённого в доказательстве леммы 6.3.1 следует

**Лемма 6.3.2** ([97]). *Количество строк в диаграмме $P$ равно длине максимальной убывающей подпоследовательности символов в $\pi = x_1 x_2 \cdots x_n$.*

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.7.9.

Рассмотрим перестановку $\pi = x_1 x_2 \cdots x_n$. Она не является $(k+1)$-разбиваемой тогда и только тогда, когда в соответствующих ей диаграммах $P$ и $Q$ не больше $k$ строк.

Покрасим числа от 1 до $n$ в $k$ цветов произвольным образом. Таких раскрасок $k^n$. Рассмотрим теперь таблицы (не Юнга!), построенные следующим образом. Теперь для каждого $i$ от 1 до $k$ поместим в $i$-ю строку таблицы числа $i$-го цвета в возрастающем порядке так, чтобы наименьшее число в строке стояло в первом столбце и между числами в одной строке не было пустых ячеек (но целиком пустые строки быть могут). Назовём полученные таблицы *таблицами типа* $\beta(n, k)$. Между раскрасками в $k$ цветов чисел от 1 до $n$ и таблицами типа $\beta(n, k)$ есть естественная биекция, следовательно, таблиц типа $\beta(n, k)$ будет ровно $k^n$. Заметим, что любая диаграмма Юнга, заполненная числами от 1 до $n$ с не более, чем $k$ строками, будет таблицей типа $\beta(n, k)$. Будем считать, что таблицы $A$ и $B$ типа $\beta(n, k)$ эквивалентны ($A \sim_\beta B$), если одну из другой можно получить при помощи перестановки строк. Тогда если в таблице типа $\beta(n, k)$ не больше одной пустой строки, то в соответствующем классе эквивалентности будет ровно $k!$ элементов. Так как в диаграммах Юнга числа в столбцах строго упорядочены по возрастанию, то в каждом классе эквивалентности таблиц типа $\beta(n, k)$ будет не более одной диаграммы Юнга.

Если в диаграмме Юнга ровно $k$ строк, то в соответствующей таблице типа $\beta(n, k)$ не будет пустых строк. Следовательно, диаграмм Юнга, заполненных числами от 1 до $n$ и имеющих ровно $k$ строк, не больше, чем $\frac{k^n}{k!}$.

Если в диаграмме Юнга $k$ строк, то в ней не больше, чем $(n-k+1)$ столбец. Раскрасим числа от 1 до $n$ в $(n-k+1)$ цвет. Рассмотрим теперь таблицы (не Юнга!), построенные следующим образом. Теперь для каждого $i$ от 1 до $(n-k+1)$ поместим в $i$-й столбец таблицы числа $i$-го цвета в возрастающем порядке так, чтобы наименьшее число в столбце стояло в первой строке и между числами в одном столбце не было пустых ячеек (но целиком пустые столбцы быть могут). Назовём полученные таблицы *таблицами типа* $\gamma(n, k)$. Между раскрасками в $(n-k+1)$ цветов чисел от 1 до $n$ и таблицами типа $\gamma(n, k)$ есть естественная биекция, следовательно, таблиц типа $\gamma(n, k)$ будет ровно $k^n$. Заметим, что любая диаграмма Юнга, заполненная числами от 1 до $n$ с $k$ строками, будет таблицей типа $\gamma(n, k)$. Будем считать, что таблицы $A$ и $B$ типа $\gamma(n, k)$ эквивалентны ($A \sim_\gamma B$), если одну из другой можно получить при помощи перестановки столбцов. Пусть в таблице $A$ ровно $t$ ненулевых столбцов. Всего таблиц типа $\gamma(n, k)$ с $t$ ненулевыми строками будет не более, чем таблиц типа $\gamma(n, n-t+1)$, т. е. не более $t^n$. В классе эквивалентности таблицы типа $\gamma(n, k)$ с $t$ непустых столбцов будет $(\min\{t+1, n-k+1\})!$ элементов. При этом таблиц с $(n-k)$ или $(n-k+1)$ столбцов будет не более $(n-k+1)^n$ и в каждом классе эквивалентности среди них будет $(n-k+1)!$ элементов. Так как в диаграммах Юнга числа в строках строго упорядочены по возрастанию, то в каждом классе эквивалентности таблиц типа $\gamma(n, k)$ будет не более одной диаграммы Юнга. Следовательно, среди таблиц типа $\gamma(n, k)$ будет не более

$$\frac{(n-k+1)^n}{(n-k+1)!} + \sum_{t=1}^{n-k-1} \frac{t^n}{t!} \leqslant \frac{(n-k+1)^n}{(n-k)!}$$

диаграмм Юнга.

Значит, пар диаграмм Юнга, в каждой из которых по $k$ строк, не больше, чем $\min\{\frac{(n-k+1)^{2n}}{((n-k)!)^2}, \frac{k^{2n}}{(k!)^2}\}$. Следовательно, существует не больше $\min\{\frac{(n-k+1)^{2n}}{((n-k)!)^2}, \frac{k^{2n}}{(k!)^2}\}$ перестановок $\pi \in S_n$ с длиной максимальной убывающей подпоследовательности ровно $k$.

Каждая перестановка соответствует с точностью до изоморфизма паре линейных порядков из $n$ элементов. Порядок в перестановочно упорядоченном множестве есть пересечение двух линейных порядков. Так как у каждой пары линейных порядков ровно одно их пересечение, то по леммам 6.3.1 и 6.3.2 количество перестановочно упорядоченных множеств порядка $n$ с максимальной антицепью длины $k$ не больше, чем $\min\{\frac{(n-k+1)^{2n}}{((n-k)!)^2}, \frac{k^{2n}}{(k!)^2}\}$. Тем самым теорема 1.7.10 доказана.

**Замечание 6.3.1.** *Отметим, что по перестановочно упорядоченному множеству не всегда можно определить, какой именно парой линейных порядков оно порождено. Например, рассмотрим множество* $\{p_i\}_{i=1}^{15}$ *с порядком* $(p_1 > p_2 > p_3, p_4 > p_5 > \cdots > p_8, p_9 > \cdots > p_{15})$. *Оно могло быть порождено:*

- *парой линейных порядков с соотношениями* $(p_3 > p_4, p_8 > p_9)$ *и* $(p_3 < p_4, p_8 < p_9)$,
- *парой линейных порядков с соотношениями* $(p_3 > p_9, p_{15} > p_1)$ *и* $(p_3 < p_9, p_{15} < p_1)$.

*Эти 2 пары линейных порядков не изоморфны друг другу.*

Оценим $\Delta_k(n)$ — количество диаграмм Юнга, заполненных числами от 1 до $n$ и имеющих не больше $k$ строк.

**Лемма 6.3.3.** *Верно неравенство* $\Delta_k(n) \leqslant \frac{k^n}{(k-1)!}$.

*Доказательство.* Как показывалось ранее, если в таблице типа $\beta(n,k)$ не больше одной пустой строки, то в соответствующем классе эквивалентности будет ровно $k!$ элементов. Следовательно, диаграмм Юнга, заполненных числами от 1 до $n$ и имеющих либо $(k-1)$, либо $k$ строк, не больше $\frac{k^n}{k!}$. Значит, для $k < 3$ лемма доказана. Пусть она доказана для $k < t$. Тогда для $k = t$ имеем

$$\Delta_k(n) \leqslant \frac{k^n}{k!} + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{i^n}{(i-1)!} \leqslant \frac{k^n}{(k-1)!}.$$

$\square$

Значит, пар диаграмм Юнга порядка $n$, в каждой из которых по $\leqslant k$ строк, не больше, чем $\frac{k^{2n}}{((k-1)!)^2}$. Следовательно, по леммам 6.3.1 и 6.3.2 количество не

$(k+1)$-разбиваемых перестановок $\pi \in S_n$ меньше $\frac{k^{2n}}{((k-1)!)^2}$. Тем самым теорема 1.7.9 доказана.

Выведем из теоремы 1.7.9 следствие 6.1.1. Для каждого набора букв $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ количество не $(k+1)$-разбиваемых полилинейных слов длины $n$, составленных из этого набора букв, не больше, чем $\frac{k^{2n}}{((k-1)!)^2}$. Каждому полилинейному слову отвечает ровно один набор из $n$ букв. Так как наборов из $n$ букв ровно $\binom{l}{n}$, то количество не $(k+1)$-разбиваемых полилинейных слов длины $n$ не больше, чем $\frac{l!k^{2n}}{n!(l-n)!((k-1)!)^2}$. Тем самым, следствие 6.1.1 доказано.

## 6.4 Обобщенные диаграммы Юнга и их производящие функции

**Лемма 6.4.1** ([85]). *Существует взаимнооднозначно соответствие между наборами типа $\alpha(N)$ и парами $(P, Q)$ обобщённых диаграмм Юнга порядка $N$ у которых форма $P$ совпадает с формой $Q$.*

*Доказательство.* Определим операцию $S \leftarrow x$, где $S$ — обобщённая диаграмма Юнга, $x$ — натуральное число, так же, как в доказательстве леммы 6.3.1. Сопоставим некоторому набору типа $\alpha(N)$ из пар $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots (u_N, v_N)$ диаграмму Юнга

$$P = (\cdots((v_1 \leftarrow v_2) \leftarrow v_3) \cdots \leftarrow v_N).$$

Пусть диаграмма $Q$ получается из диаграммы $P$ путём замены $v_i$ на $u_i$ для всех $i$ от 1 до $N$. Тогда $Q$ также является диаграммой Юнга.

Далее в работе [85] показывается, что приведённое построение пар обобщённых диаграмм Юнга $(P, Q)$ по наборам типа $\alpha$ взаимнооднозначно. $\square$

**Обозначение 6.4.1.** *Перестановка $\pi \in S_n$ является набором типа $\alpha(n)$ из пар $(1, \pi(1)), \ldots, (n, \pi(n))$.*

*Симметрические функции.*

Здесь и далее считаем, что множество индексов при переменных симметрический функций является множеством натуральных чисел.

Напомним несколько понятий из теории симметрических функций.

*Полная симметрическая функция* $h_n$ равна $h_n = \sum\limits_{i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$.

Пусть $\lambda$ — набор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ для некоторого натурального $k$. Пусть также $|\lambda| = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$. Набор $\lambda$ называется *разбиением,* если $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$.

*Функция Шура* $S_\lambda$ равна $S_\lambda = \det(h_{\lambda_i + j - i})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$.

В работе [71] определяются функции

$$b_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+i}}{n!(n+i)!}$$

и

$$U_k = \det(b_{|i-j|})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}.$$

Также вводится функция $R_k(x, y)$ как $R_k(x, y) = \sum\limits_{k} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$, где сумма берётся по всем разбиениям на не более чем $k$ частей. Тогда коэффициент при $x_1 x_2 \cdots x_n y_1 \cdots y_n$ в функции $R_k(x, y)$ равен $\xi_k(n)$. Из этого в [71] выводится, что $U_k = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_k(n) \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$.

Количество полилинейных слов длины $n$ над $l$-буквенным алфавитом ($n \leqslant l$), в каждом из которых не найдётся последовательности из $(k+1)$ буквы в порядке лексикографического убывания есть $\binom{l}{n} \xi_k(n)$.

# Глава 7

# Дальнейшее улучшение оценок высоты

Представленная вниманию читателя техника, возможно, позволяет улучшить полученную в данную работе оценку, но при этом она останется только субэкспоненциальной. Для получения полиномиальной оценки, если она существует, требуются новые идеи и методы.

В главах 3 и 4 подслова большого слова используются прежде всего в качестве множества независимых элементов, а не набора тесно связанных друг с другом слов. Далее используется то, что буквы внутри подслов раскрашены. При учёте раскраски только первых букв подслов получается экспоненциальная оценка. При рассмотрении раскраски всех букв подслов опять получается экспонента. Данный факт имеет место из-за построения иерархической системы подслов. Не исключено, что подробное рассмотрение приведенной связи подслов вкупе с изложенным выше решением позволит улучшить полученную оценку вплоть до полиномиальной.

В диссертации получены оценки на высоту, линейные по числу образующих $l$. На самом деле точные оценки на высоту также линейны по $l$. Следовательно, если какие-либо оценки будут доказаны для случая $l = 2$, то с помощью перекодировки образующих можно получить общий случай. Модельный пример применения механизма перекодировки можно найти в секции 5.4. Заметим, что в этой секции оценки изначально доказываются не для конкретного числа образующих, а для конкретного базиса Ширшова.

Представляется перспективным перевод основных понятий доказательства теоремы Ширшова на язык графов. По написанному выше, можно считать, что у нас две образующие: 0 и 1. Рассмотрим некоторое очень длинное не являющееся $n$-разбиваемым слово $W$ с раскрашенными в соответствии с теоремой Дилуорса позициями (см., например, подсекцию 3.1.2). Теперь возьмём подслово $u$ слова $W$, достаточно большое для того, что если мы возьмём подслово $v$ слова $W$, в два раза большее $u$ по длине и, в свою очередь, содержащее $u$ как подслово, то число цветов позиций, встречающихся в $v$, примерно равно аналогичному числу в $u$. Рассмотрим теперь бинарное корневое дерево. Отметим у каждой невисячей вершины левого сына как 0, а правого — как 1. Корневую вершину никак отмечать не будем. Пусть глубина дерева крайне мала по сравнению с длиной слова $u$. Заметим, что для любого натурального $k$ любое слово над бинарным алфавитом длины $k$ может быть представлено как путь длины $k$, начинающийся из корня рассмотренного бинарного графа.

Теперь для каждого подслова слова $u$ длины $k$ рассмотрим в графе соответствующий путь и покрасим этот путь в цвет первой позиции соответствующего $k$-начала. Естественно, некоторые ребра будут покрашены по несколько раз. Полученная картина — слишком пёстрая, чтобы сделать какие-либо выводы. Поэтому для каждого цвета оставим самый левый путь этого цвета. Назовём полученную структуру *деревом подслов* (сравните это дерево с наборами $B^p(i)$ из подсекции 3.2.2). Так как $u$ — подслово слова $W$, можно представить себе его как "окно" определённой длины, положенное на слово $W$. Теперь будем двигать это окно вправо шагом в одну позицию. На каждом шаге будем перерисовывать дерево позиций. Назовём изменение дерева позиций при движении окна вправо *эволюцией дерева подслов.* Пусть в слове $W$ нет периодов длины $n$, то есть рассматриваем так называемый ниль-случай. Если взять $k = n$, то по лемме 3.1.3 при сдвиге окна на $n^2$ позиций дерево позиций точно изменится. Если дерево позиций хорошо сбалансировано, то есть мало групп цветов, имеющих длинную общую часть пути, то дерево довольно быстро эволюционирует, более того, количество изменений в нём будет ограничено полиномом. Однако если дерево подслов не сбалансировано, то некоторые ветки дерева "перегружаются" цветами. В подсчёте того, до какой степени ветки могут быть перегружены цветами, быть может, кроется получение полиномиальной оценки на высоту.

Рассмотренный выше граф одинаково применим как для оценки индекса нильпотентности, так и для оценки существенной высоты. Ниже построен граф, который можно построить на периодических подсловах при оценке существенной высоты. Пусть $t$ — длина периода.

Пусть слово $W$ не является $n$-разбиваемым. Как и прежде, рассмотрим некоторое множество попарно непересекающихся несравнимых подслов слова $W$ вида $z^m$, где $m > 2n$, $z$ — $t$-буквенное ациклическое слово. Будем называть элементы этого множества *представителями*, имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось $t$ таких представителей. Пронумеруем их всех в порядке положения в слове $W$ (первое — ближе всех к началу слова) числами от 1 до $t$. В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно $t$ различное $t$-буквенное слово.

Введём порядок на этих словах следующим образом: $u \prec v$, если

- $u$ лексикографически меньше $v$;
- представитель, содержащий $u$ левее представителя, содержащего $v$.

Из отсутствия сильной $n$-разбиваемости получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно $t$. По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых $t$-буквенных слов на $t$ цепь. Раскрасим слова в $t$ цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям. Раскрасим позиции, с которых начинаются слова, в те же цвета, что и соответствующие слова.

Напомним, что *слово-цикл* $u$ — слово $u$ со всеми его сдвигами по циклу.

Рассмотрим ориентированный граф $G$ с вершинами вида $(k, i)$, где $0 < k < n$ и $0 < i \leqslant l$. Первая координата обозначает цвет, а вторая — букву.

Ребро с некоторым весом $j$ выходит из $(k_1, i_1)$ в $(k_2, i_2)$, если

- для некоторых $i_3, i_4, \ldots, i_t$ в $j$-ом представителе содержится слово-цикл $i_1 i_2 \cdots i_t$;
- позиции, на которых стоят буквы $i_1, i_2$ раскрашены в цвета $k_1, k_2$ соответственно.

Таким образом, граф $G$ состоит из ориентированных циклов длины $t$. Теперь нам требуется найти показатель, который бы строго монотонно рос с появлением каждого нового представителя при движении от начала к концу слова $W$. Можно заметить, что как и в случае дерева подслов, мы естественным образом столкнулись с понятием эволюции графов. Только в данном случае “окно” может “растягиваться”, то есть его левый край остаётся на месте, а правый движется вправо. Разбалансировка же выражается также — в длинных путях, которые по очереди входят в разные циклы длины $t$. Отметим, что конструкция графа $G$ близка к конструкции графов Рози. Обзор тематики графов Рози можно найти в [90].

Интересно также получить оценки на высоту алгебры над множеством слов степени не выше сложности алгебры (в англоязычной литературе PI-degree). В работе [57] получены экспоненциальные оценки, а для слов, не являющихся линейной комбинацией лексикографически меньших, в работе [6] получены надэкспоненциальные оценки.

# Предметный указатель


Базис Ширшова, 9, 12, 13, 30, 32

Высота
- алгебры, 5, 9, 30
- выборочная
  - большая, 61
  - малая, 18, 61
  - множества, 18, 61
- множества, 9, 30
- слова, 57
- существенная, 11, 20, 31, 33

Граф
- подслов, 87
  - большой длины, 67, 89
  - длины два, 63
  - длины три, 65

Дерево подслов, 88

Диаграмма Юнга
- обобщённая, 79
- стандартная, 78

Индекс
- алгебры, 7, 27
- нильпотентности, 5, 27

Класс нильпотентности, 7, 27

Лемма
- о процессе, 46
- основная
  - для ниль-случая, 47
  - для общего случая, 54

Множество перестановочно упорядоченное, 77

Ниль-
- индекс, 7, 27
- полугруппа, 26

Проблема
- Бернсайда
  - для ассоциативных алгебр, 7, 26
  - для групп, 6, 24
- Куроша, 7, 11, 27
- Латышева, 35
- Шпехта, 14, 35

Размерность
- Гельфанда–Кириллова, 11, 30

Слова
- $k$-начало, 40
- $k$-хвост, 40
- несравнимые, 40
- сравнимые, 8
  - сильно, 51
- хвост, 40, 45

Слово
- $(n, d)$-сократимое, 41

$n$-разбиваемое, 5, 8, 13, 34
в обычном смысле, 41
в хвостовом смысле, 41
сильно, 51
-цикл, 51, 63, 89
ациклическое, 51
полилинейное, 14, 34
циклическое, 51

Теорема
Амицура–Левицкого, 37
Дилуорса, 14, 34, 46, 52, 79
Капланского, 27
Крошмора, 26
Морса–Туэ, 25
Регева, 14, 34
Туэ, 25, 26
Ширшова о высоте, 6, 9, 28
Тождество
допустимое полиномиальное, 9
стандартное, 29, 37

Функция роста алгебры, 11, 30

Эволюция дерева подслов, 88

# Список литературы


1. С. И. Адян. *Проблема Бернсайда и тождества в группах.* Наука, М., 1975, 335 С.

2. А. Я. Белов. *Проблема Куроша, теорема о высоте, нильпотентность радикала и тождество алгебраичности.* Фундамент. и прикл. матем., 13:2 (2007), 3–29; A. Ya. Belov. *The Kurosh problem, height theorem, nilpotency of the radical, and algebraicity identity.* J. Math. Sci., 154:2 (2008), 125–142.

3. А. Я. Белов. *О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n.* Мат. сб., 1988, Т. 135, №31, Р. 373–384.

4. А. Я. Белов. *О нешпехтовых многообразиях.* Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), Р. 47–66.

5. А. Я. Белов. *О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр.* Успехи мат. наук, 1997, Т. 52, №2, Р. 153–154.

6. А. Я. Белов. *Проблемы бернсайдовского типа, теоремы о высоте и о независимости.* Фундамент. и прикл. матем., 13:5 (2007), Р. 19–79; A. Ya. Belov. *Burnside-type problems, theorems on height, and independence.* J. Math. Sci., 156:2 (2009), 219–260.

7. А. Я. Белов. *Размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободных ассоциативных алгебр.* Матем. сб., 195:12 (2004), Р. 3–26.

8. И. И. Богданов. *Теорема Нагаты-Хигмана для полуколец.* Фундамент. и прикл. матем., 7:3 (2001), Р. 651–658.

9. В. О. Бугаенко. *Обобщённая теорема Ван дер Вардена.* Москва, МЦНМО, 2006.

10. А. В. Гришин. *Примеры не конечной базируемости $T$-пространств и $T$-идеалов в характеристике* 2. Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), P. 101–118.

11. *Днестровская тетрадь: оперативно-информац. сборник.* 4-е изд., Новосибирск: изд. ин–та матем. СО АН СССР, 1993, 73 С.

12. К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков и А. И. Ширшов. *Кольца, близкие к ассоциативным, первое издание.* Современная алгебра, Москва (1978).

13. Е. И. Зельманов. *Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:1 (1990), 42–59.

14. Е. И. Зельманов. *Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп.* Матем. сб., 182:4 (1991), 568–592.

15. А. И. Зимин. *Блокирующие множества термов.* Мат. сб., 1982, Т. 119(161), № 3(11), P. 363–375.

16. А. Р. Кемер. *Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр.* Алгебра и логика, Т. 26, №5, 1987, P. 597–641.

17. А. А. Клячко. *Спецкурс по теории групп.* 2009.

18. А. Г. Колотов. *О верхней оценке высоты в конечно порожденных алгебрах с тождествами.* Сиб. мат. ж., 1982, Т. 23, №1, P. 187–189.

19. А. И. Кострикин. *Вокруг Бернсайда.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 232 С.

20. Е. Н. Кузьмин. *О теореме Нагаты-Хигмана.* В сб. Трудов посвященный 60-летию акад. Илиева. София, 1975, P. 101–107.

21. А. Г. Курош. *Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бёрнсайда о периодических группах.* Изв. АН СССР, Сер. Матем., №5, 1941, P. 233–240.

22. В. Н. Латышев. *ЕНС Прикладные проблемы алгебры.* 2012.

23. В. Н. Латышев. *К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр.* УМН, Т. 27, №4(166), 1972, P. 213–214.

24. В. Н. Латышев. *Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств.* Фундамент. и прикл. матем., 12:2 (2006), P. 101–110.

25. В. Н. Латышев. *Нематричные многообразия ассоциативных алгебр.* Диссертация на соискание степени д. ф.-м. н. М., Изд-во Моск. ун-та, 1977.

26. И. Г. Лысенок. *Бесконечность бернсайдовых групп периода $2k$ при $k >$ 13.* УМН, 47:2 (1992), 201–202.

27. И. Г. Лысенок. *Бесконечные бернсайдовы группы четного периода.* Изв. РАН. Сер. матем., 60:3 (1996), 3–224.

28. С. П. Мищенко. *Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли.* Мат. заметки, 1990, Т. 47, №4, P. 83–89.

29. Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов. *Последовательности, близкие к периодическим.* УМН, 64:5(389) (2009), 21–96.

30. П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. I.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:1 (1968), 212–244.

31. П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. II.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:2 (1968), 251–524.

32. П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. III.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:3 (1968), 709–731.

33. П. С. Новиков, С. И. Адян. *Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:4 (1968), 971–979.

34. А. Ю. Ольшанский. *О теореме Новикова–Адяна.* Матем. сб., 118(160):2(6) (1982), 203–235.

35. А. Ю. Ольшанский. *Геометрия определяющих соотношений в группах.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 448 С.

36. С. В. Пчелинцев. *Теорема о высоте для альтернативных алгебр.* Мат. сб., 1984, Т. 124, №4, Р. 557–567.

37. Ю. П. Размыслов. *Тождества алгебр и их представлений.* М.: Наука, 1989, 432 С.

38. Л. М. Самойлов. *Первичные многообразия ассоциативных алгебр и связанные с ними нильпроблемы.* Диссертация на соискание степени д. ф.-м. н. М., 2010.

39. В. А. Уфнаровский. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре.* Итоги науки и техн., Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1990, №57, Р. 5–177.

40. В. А. Уфнаровский. *Теорема о независимости и ее следствия.* Матем. сб., 1985, 128(170):1(9), Р. 124–132.

41. А. Э. Фрид. *Введение в комбинаторику слов.* Лекции, 2011.

42. А. Я. Хинчин. *Три жемчужины теории чисел.* Москва, Наука, 1979.

43. Г. П. Чекану. *К теореме Ширшова о высоте.* XIX Всес. алгебр. конф., Тез. сообщ. Ч. 1, Львов, 1987, С. 306

44. Г. Р. Челноков. *О нижней оценке количества* $k+1$*-разбиваемых перестановок.* Модел. и анализ информ. систем, Т. 14, 4(2007), Р. 53–56.

45. Е. С. Чибриков. *О высоте Ширшова конечнопорождённой ассоциативной алгебры, удовлетворяющей тождеству степени четыре.* Известия Алтайского государственного университета, 1(19), 2001, 52–56.

46. А. И. Ширшов. *Некоторые алгоритмические проблемы для* $\varepsilon$*-алгебр.* Сиб. матем. ж., Т. 3, №1, 1962, Р. 132–137.

47. А. И. Ширшов. *Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли.* Сиб. матем. ж., Т. 3, №2, 1962, Р. 292–296.

48. А. И. Ширшов. *О кольцах с тождественными соотношениями.* Матем. сб., Т. 43(85), №2, 1957, P. 277–283.

49. А. И. Ширшов. *О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах.* Матем. сб., Т. 41(83), №3, 1957, P. 381–394.

50. А. И. Ширшов. *О свободных алгебрах Ли.* Мат. сб., 1958, Т. 45(87), №2, P. 113–122.

51. А. И. Ширшов. *Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр.* Матем. сб., Т. 34(76), №1, 1954, P. 81–88.

52. А. И. Ширшов. *Подалгебры свободных лиевых алгебр.* Матем. сб., Т. 33(75), №2, 1953, P. 441–452.

53. И. П. Шестаков. *Конечно порожденные йордановы и альтернативные* PI-*алгебры.* Матем. сб., 122(144) (1983), 31–40.

54. В. В. Щиголев. *Примеры бесконечно базируемых T-идеалов.* Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), P. 307–312.

55. S. A. Amitsur, J. Levitzki. *Minimal identities for algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. (2), 1950, P. 449–463.

56. K. I. Beidar, W. S. Martindale III, A. V. Mikhalev. *Rings with generalized identities.* Pure and applied mathematics, 1995.

57. A. J. Belov, V. V. Borisenko, V. N. Latysev. *Monomial Algebras.* NY. Plenum, 1997.

58. A. Ya. Belov. *Some estimations for nilpotency of nil-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem.* Commun. Algebra 20 (1992), №10, P. 2919–2922.

59. G. M. Bergman. *The Diamond Lemma for Ring Theory.* Advances in mathematics, 29, P. 178–218 (1978).

60. J. Berstel. *Mots sans carré et morphismes itérés.* Discrete Math., 29:235–244, 1979.

61. J. Berstel. *Sur les mots sans carré définis par un morphisme.* In A. Maurer, editor, ICALP, 16–25, Springer-Verlag, 1979.

62. J. Berstel, D. Perrin. *The origins of combinatorics on words.* European Journal of Combinatorics 28 (2007), P. 996–1022.

63. W. Burnside. *On an unsettled question in the theory of discontinuous groups.* Quart. J. Math., №33, 1902, P. 230–238.

64. Gh. Ciocanu. *Independence and quasiregularity in algebras. II.* Izv. Akad. Nauk Respub. Moldova Mat., 1997, №70, P. 70–77, 132, 134.

65. Gh. Ciocanu. *Local finiteness of algebras.* Mat. Issled., 1988, №105, Moduli, Algebry, Topol., P. 153–171, 198.

66. Gh. Ciocanu, E. P. Kozhukhar. *Independence and nilpotency in algebras. (Russian. English, Russian, Moldavian summaries.)* Izv. Akad. Nauk Respub. Moldova Mat., 1993, №2, P. 51–62, 92–93, 95.

67. M. Crochemore. *Sharp characterizations of square-free morphisms.* Theoret. Comput. Sci., 18:221–226, 1982.

68. R. P. Dilworth. *A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets.* Annals of Mathematics, №51(1), 1950, P. 161–166.

69. V. Drensky. *Free Algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra.* Springer-Verlag, Singapore (2000).

70. V. Drensky, E. Formanek. *Polynomial identity ring.* Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona., Birkhauser Verlag, Basel, 2004.

71. I. M. Gessel. *Symmetric Functions and P-Recursiveness.* J. Combin. Theory Ser. A 53, 1990, P. 257–285.

72. S. V. Ivanov. *On the Burnside problem on periodic groups.* Bul l. Amer. Math. Soc. ( N. S.), 27:2 (1992), 257–260; arXiv: math/9210221.

73. S. V. Ivanov. *The free Burnside groups of sufficiently large exponents.* Int. J. of Algebra and Computation, 4 (1994), 1–307.

74. I. Ivanov-Pogodayev, A. Kanel-Belov. *Construction of infinite finitely presented nillsemigroup.* 2014, 154 pp., 103 figures, in Russian, arXiv: 1412.5221.

75. A. Kanel-Belov, L. H. Rowen. *Computational aspects of polynomial identities.* Research Notes in Mathematics 9. AK Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005.

76. A. Kanel-Belov, L. H. Rowen. *Perspectives on Shirshov's Height Theorem.* Selected papers of A. I. Shirshov, Birkhüser Verlag AG, 2009, P. 3–20, eds. Zelmanov, Latyshev, Bokut, Shestakov, Birkhüser Verlag AG, 2009, 3–20, ISBN: 978-3-7643-8857-7/hbk; ISBN 978-3-7643-8858-4/ebook.

77. I. Kaplansky. *On a problem of Kurosch and Jacobson.* Bull. Amer. Math. Soc., №52, 1946, P. 496–500.

78. I. Kaplansky. *Rings with a polynomial identity.* Bull. Amer. Math. Soc., 54:575–580, 1948.

79. A. Kemer. *Multilinear components of the prime subvarieties of the variety $Var(M_2(F))$.* Algebras and Representation Theory, **4**:1 (2001), 87–104.

80. A. R. Kemer. *Comments on the Shirshov's Height Theorem.* Selected papers of A.I.Shirshov, Birkhüser Verlag AG, 2009, P. 41–48, eds. Zelmanov, Latyshev, Bokut, Shestakov, Birkhüser Verlag AG, 2009, 41–48, ISBN: 978-3-7643-8857-7/hbk; ISBN 978-3-7643-8858-4/ebook.

81. A. Kemer. *Remarks on the prime varieties.* Zbl 0874.16016 Isr. J. Math. 96, Pt. B, 341–356 (1996).

82. A. Kemer. *Matrix type of some algebras over a field of characteristic p.* Zbl 1015.16025 J. Algebra 251, №2, 849–863 (2002).

83. A. A. Klein. *Indices of nilpotency in a $PI$-ring.* Archiv der Mathematik, 1985, Vol. 44, №4, P. 323–329.

84. A. A. Klein. *Bounds for indices of nilpotency and nility.* Archiv der Mathematik, 2000, Vol. 74, №1, P. 6–10.

85. D. E. Knuth. *Permutations, matrices, and generalized Young tableux.* Pacific journal of mathematics, Vol. 34, №3, 1970, P. 709–727.

86. J. Levitzki. *On a problem of A. Kurosch.* Bull. Amer. Math. Soc., №52, 1946, P. 1033–1035.

87. F. Li, I. Tzameret. *Matrix dentities and proof complexity lower bounds.* 2013.

88. A. A. Lopatin. *On the nilpotency degree of the algebra with identity* $x^n = 0$. Journal of Algebra, 371(2012), P. 350–366.

89. A. A. Lopatin, I. P. Shestakov. *Associative nil-algebras over finite fields.* International Journal of Algebra and Computation, Vol. 23, № 8(2013), P. 1881–1894.

90. M. Lothaire. *Combinatorics of words.* Cambridge mathematical library, 1983.

91. M. Lothaire. *Algebraic combinatorics on words.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. 90. Cambridge: Cambridge University Press. 504 P.

92. M. Morse. *Recurrent Geodesics on a Surface of Negative Curvature.* Trans. Amer. Math. Soc. 22, P. 84–100, 1921.

93. F. Petrov, P. Zusmanovich. *On Shirshov bases of graded algebras.* Zbl 1288.16056 Isr. J. Math. 197, 23–28 (2013).

94. C. Procesi. *Rings with polynomial identities.* N.Y., 1973, 189 P.

95. A. Regev. *Existence of polinomial identities in* $A \otimes_F B$. Bull. Amer. Math. Soc. 77:6 (1971), P. 1067–1069.

96. M. V. Sapir. *Combinatorial algebra: syntax and semantics.* Springer, 2014.

97. C. Schensted. *Longest increasing and decreasing subsequences.* Canad. J. Math 13, 1961, P. 179–191.

98. W. Specht. *Gesetze in Ringen. I.* Math. Z., 52:557–589, 1950.

99. A. Thue. *Über unendliche Zeichenreihen.* Norske Vid. Selsk. Skr., I. Mat. Nat. Kl., Christiana, 7:1–22, 1906.

100. V. A. Ufnarovskii, Gh. Ciocanu. *Nilpotent matrices.* Mat. Issled.,1985, №85, Algebry, Koltsa i Topologii, P. 130–141, 155

101. E. Zelmanov. *On the nilpotency of nilalgebras.* Lect. Notes Math., 1988, Vol. 1352, P. 227–240.

## Работы автора по теме диссертации


102. А. Я. Белов, М. И. Харитонов. *Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте.* Мат. сб., №4, 2012, 81–102.

103. М. И. Харитонов. *Двусторонние оценки существенной высоты в теореме Ширшова о высоте.* Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. №2, 2012, 20–24.

104. М. И. Харитонов. *Оценки на структуру кусочной периодичности в теореме Ширшова о высоте.* Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. №1, 2013, 10–16.

105. А. Я. Белов, М. И. Харитонов. *Оценки высоты в смысле Ширшова и на количество фрагментов малого периода.* Фундамент. и прикл. матем., 17:5 (2012), 21–54. (Journal of Mathematical Sciences, September 2013, Volume 193, Issue 4, 493–515); A. Ya. Belov, M. I. Kharitonov, *Subexponential estimates in the height theorem and estimates on numbers of periodic parts of small periods*, J. Math. Sci., 193:4 (2013), 493–515.

106. М. И. Харитонов. *Оценки на количество перестановочно упорядоченных множеств.* Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. №3, 2015. 24–28.

107. М. И. Харитонов.*Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте.* Чебышевский сб., 15:4 (2014), 55–123.