

«Утверждаю»

И.о. ректора федерального
государственного бюджетного
образовательного учреждения
высшего профессионального
образования «Московский
педагогический государственный
университет» (МПГУ),
академик РАН, академик РАО



А.Л.Семенов

2015 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу ХАРИТОНОВА Михаила Игоревича

«Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте»,

представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Работа посвящена известной проблеме в комбинаторной алгебре: получению субэкспоненциальных оценок в теореме Ширшова о высоте. Теорема Ширшова о высоте является жемчужиной теории колец. Теорема Ширшова устанавливает связь конечно-порожденных ассоциативных алгебр, удовлетворяющих нетривиальному полиномиальному тождеству, с коммутативными и конечномерными алгебрами.

Оценка высоты, которая следует непосредственно из доказательства А.И. Ширшова, очень далека от точной, поэтому вопрос об улучшении оценки на протяжении долгого времени был актуальным.

Первая приемлемая оценка была получена А.Т. Колотовым в 1982 году: высота k -порожденной ассоциативной алгебры, удовлетворяющей допустимому тождеству степени n , не превышает k^{k^n} . В 1992 году А. Я. Белов доказал экспоненциальность роста высоты относительно минимальной степени допустимых тождеств алгебры. Из этого результата следовал положительный ответ на заданный в Днестровской тетради вопрос Е.И. Зельманова об экспоненциальном росте индекса нильпотентности конечно-порожденного кольца, удовлетворяющего тождеству $x^n = 0$.

Основной результат диссертации М.И. Харитонова значительно усиливает теорему Белова об экспоненциальном росте. Доказано, что высота растет субэкспоненциально относительно минимальной степени допустимого тождества. Более того, приведена явная формула для оценочной функции, которая зависит от степени тождеств и количества порождающих. Показано, что при фиксированной степени тождества относительно количества порождающих высота растет линейно.

Кроме этого основная теорема дает значительное усиление оценки роста индекса нильпотентности конечнопорожденного кольца, удовлетворяющего тождеству $x^n = 0$: индекс нильпотентности растет субэкспоненциально. К числу основных результатов следует отнести и оценки роста существенной высоты.

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, предметного указателя и списка цитируемой литературы.

Первая глава является введением диссертации. Она содержит описание актуальности темы, цели работы, список основных результатов и сведения об апробации работы.

Во второй главе приведен обзор основных понятий и результатов, используемых в диссертации, а также история вопроса. Освещены такие области, как теория колец в контексте проблематики бернсайдовского типа и концепция высоты в смысле Ширшова. Также описывается комбинаторный аппарат, являющийся базой для приведённых в диссертации доказательств. Описаны продвижения в поиске оценок высоты и индекса нильпотентности.

В третьей главе доказывается субэкспоненциальность индекса нильпотентности.

В первой части четвертой главы доказываются оценки существенной высоты, т.е. количества различных периодических фрагментов в не n -разбиваемом слове. Во второй части четвертой главы доказана субэкспоненциальность высоты в смысле Ширшова.

В пятой главе оценивается существенная высота в некоторых случаях и на основании этих оценок проводится альтернативное доказательство теоремы Ширшова о высоте.

В шестой главе рассмотрены вопросы n -разбиваемости в полилинейном случае.

В седьмой главе указаны пути дальнейшего улучшения оценок высоты и продолжения исследования комбинаторной структуры слов PI-алгебр.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, описано содержание диссертации и перечислены основные полученные результаты.

Наиболее значительными результатами работы являются следующие:

- Пусть n и d - некоторые натуральные числа, причём d не меньше n . Доказано, что верхняя граница длины слов, не содержащих период в степени d и не являющихся n -разбиваемыми, растёт не более чем субэкспоненциально по d и n , и линейно по числу букв в алфавите.

- Доказано, что существенная высота конечно-порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n растёт не более чем субэкспоненциально по степени тождества и линейно по числу порождающих.
- Доказано, что высота в смысле Ширшова конечно-порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n растёт не более чем субэкспоненциально по степени тождества и линейно по числу порождающих.
- Получены нижние и верхние оценки на существенную высоту в случае периодов длины 2, 3 и близкой к степени тождества, причем нижние и верхние оценки отличаются в константу раз для слов длины 2. Установлена связь с проблемами рамсеевского типа.
- Получена близкая к реальности оценка количества полилинейных слов, не являющихся n -разбиваемыми. Впервые в рамках PI-теории приведено перечисление полилинейных слов, не являющихся n -разбиваемыми.

Диссертационная работа М. И. Харитоновой производит сильное впечатление. Она вызывает большой интерес, так как посвящена исследованиям в интенсивно развивающейся области современной алгебры. Представленная диссертация является самостоятельно выполненной, законченной научно-исследовательской работой, посвященной решению актуальных задач в области теории колец и комбинаторики слов.

Все перечисленные основные результаты являются научными результатами очень высокого уровня. Вызывает восхищение их красота и сила. В целом, диссертация М. И. Харитоновой заслуживает самой высокой оценки. Полученные результаты могут быть использованы в организациях, занимающихся решением задач в области теории колец и комбинаторики слов, например в МГУ, С-ПбГУ, КГУ, НГУ, МИАН, ВЦ РАН, МПГУ, РГТЭУ, ИВМ РАН и других.

В качестве недостатков диссертации следует отметить неточности в стилистике списка литературы, а также то, что связь с проблемами рамсеевского типа описана недостаточно подробно. Кроме того, было бы естественно, как представляется в седьмой главе, отметить открытые проблемы.

Замеченные недостатки не снижают общей положительной характеристики диссертации. Диссертация логично построена, содержит обширный тщательно проработанный список литературы и ряд важных примеров, иллюстрирующих как полученные результаты, так и невозможность их дальнейшего расширения. Структура и содержание работы соответствуют поставленным целям и задачам исследования. Полученные результаты являются новыми, интересными, снабжены полными и хорошо изложенными доказательствами. Работа демонстрирует высокий уровень научных способностей диссертанта.

Все основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, из них 7 написаны автором самостоятельно, 4 в соавторстве с научным руководителем. Шесть статей опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК Российских рецензируемых научных журналов. Автореферат написан очень четко и информативно. Содержание диссертации соответствует содержанию автореферата и опубликованных работ.

Все изложенное позволяет сделать вывод, что диссертация представляет собой завершённую научно-квалификационную работу на актуальную тему, полностью отвечает требованиям п.п. 9, 10, 11, 13, 14 Положения о присуждении ученых степеней ВАК Министерства образования и науки РФ от 24 сентября 2013 г. № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям. Диссертация соответствует специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Харитонов Михаил Игоревич несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв составлен доктором физико-математических наук профессором Гришиным Александром Владимировичем.

Отзыв обсуждён и утверждён на заседании кафедры алгебры МПГУ
28.09.2015 г.,

протокол № 2.

Заведующий кафедрой алгебры МПГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор



А.А. Фомин



Контактная информация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский педагогический государственный университет»

Адрес: 119991, г. Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1, каб. 123.

E-mail: algebra@mpgu.edu.ru

Телефон: (499) 264-25-56