

ОТЗЫВ о диссертации
Харитоновна Михаила Игоревича
«Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук по специальности 01.01.06 –
математическая логика, алгебра и теория чисел

Теорема Ширшова о высоте является жемчужиной теории колец. С философской точки зрения теорема Ширшова утверждает, что конечнопорожденные ассоциативные алгебры, удовлетворяющие нетривиальному полиномиальному тождеству весьма близки к коммутативным и конечномерным алгебрам.

Хотя теорема Ширшова о высоте, относится к теории колец, но доказательство ее совсем не кольцевое. Действительно, эта теорема очень легко следует из следующего чисто комбинаторного утверждения, доказанного А.И. Ширшовым: *Для любых натуральных чисел l, n найдется натуральное число h такое, что любое слово от l букв либо n -разбиваемо, либо его можно представить в виде произведения не более чем h слов, каждое из которых является степенью слов длины, не превышающей n .* Минимальное число h , со свойствами, описанными только что, называют высотой данного слова относительно слов длины, не превосходящей n .

Как известно, теорема о высоте была создана для решения проблемы А. Г. Куроша для алгебр над коммутативным кольцом. Напомним, что для алгебр над полем, проблема была решена И. Капланским для чего фактически и создавалась структурная теория колец Н. Джекобсона.

Из основного комбинаторного утверждения А.И. Ширшова непосредственно вытекает, что для любых натуральных чисел l, n и d любое слово от l букв достаточно большой длины либо n -разбиваемо, либо содержит подслово вида u^d , где u - слово длины, не превышающей n . Из этого утверждения в частности следует, что конечнопорожденная ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом, удовлетворяющая тождеству $x^d = 0$, нильпотентна. Оценка индекса нильпотентности, как и оценка высоты, которые непосредственно следуют из доказательства А.И. Ширшова, была чрезвычайно неэффективной. В 1991 году Е.И. Зельманов поставил

вопрос: *Верно ли, что индекс нильпотентности относительно свободного 2-порожденного ассоциативного кольца с тождеством $x^d = 0$ растет экспоненциально.*

Диссертация М.И. Харитонова в основном посвящена получению оценки высоты не n -разбиваемых слов и оценки индекса нильпотентности конечнопорожденных ассоциативных ниль-алгебр ограниченного индекса над коммутативным кольцом.

Ввиду неэффективности оценки высоты, вопрос об улучшении оценки на протяжении долгого времени был актуальным.

Первая более-менее приемлемая оценка была получена А.Т. Колотовым в 1982 году: высота слов от l букв относительно слов длины, не превосходящей n , не превышает l^n . В 1992 году А. Я. Белов доказал экспоненциальность роста высоты относительно n . Из этой теоремы следовал положительный ответ на вопрос Е.И. Зельманова об экспоненциальном росте индекса нильпотентности конечнопорожденного кольца, удовлетворяющего тождеству $x^d = 0$. Несколько позже появилось еще несколько результатов немного улучшающих, но не принципиально, оценку А.Я. Белова. Наконец в 2012 году А.Я. Белов и М.И. Харитонов совершили грандиозный прорыв, доказав, что высота растет субэкспоненциально относительно n , откуда в частности следовало, что индекс нильпотентности конечнопорожденного кольца, удовлетворяющего тождеству $x^d = 0$ также растет субэкспоненциально относительно d . Этот результат опубликован в самом престижном российском математическом журнале – Математическом сборнике. Понятно, что ранее никто не ставил вопрос об субэкспоненциальном росте. Об этом даже не мечтали. Результат А.Я. Белова и М.И. Харитонова следует считать революционным. Предполагаемая следующая революция – это доказательство полиномиальности роста, а если будет построен контрпример, то хотелось бы взглянуть на этого монстра, который пока скрывается в узком ущелье между субэкспоненциальностью и полиномиальностью.

С юридической точки зрения вклад авторов совместной работы считается равноценным, однако, по мнению оппонента, без комбинаторного гения научного руководителя А.Я.Белова, успех был бы вряд ли возможен. В своей диссертации М.И. Харитонов честно оценивает свой вклад. По мнению оппонента, вклад М.И. Харитонова как минимум значителен.

Доказательство результатов совместной работы А.Я. Белова и М.И. Харитоновой излагаются в третьей и четвертой главах диссертации. В третьей главе приведена явная формула для верхней оценочной функции индекса нильпотентности l - порожденной ассоциативной алгебры, удовлетворяющей допустимому тождеству степени n и тождеству $x^d = 0$. Из этой формулы следует, что при фиксированном l индекс нильпотентности растет субэкспоненциально, а при фиксированном d не более чем линейно. В четвертой главе получена явная формула для верхней оценочной функции высоты не n -разбиваемого слова от l букв, которая имеет субэкспоненциальный рост относительно n и линейна относительно l . К числу основных результатов следует отнести и оценки роста существенной высоты.

Доказательства основных результатов чрезвычайно техничны и основываются на применении комбинаторной теоремы Дилуорса и новых оригинальных комбинаторных идеях диссертанта и А.Я. Белова.

Оппонент считает, что диссертант немного преувеличивает возможности теоремы Дилуорса. Оппонент пессимистически относится к применению этой теоремы для исследования полилинейных тождеств. Успешное применение В.Н. Латышевым теоремы Дилуорса для передоказательства теоремы Регева свидетельствует лишь о том, что результат Регева не является очень тонким с современной точки зрения. Для положительного решения проблемы Шпехта на полилинейном уровне требуются более тонкие методы. Вряд ли проблема В.Н. Латышева будет решена положительно.

Результаты пятой и шестой главы получены М.И. Харитоновым самостоятельно. Пятая глава посвящена улучшению оценок существенной высоты, а в шестой главе оценивается количество k -разбиваемых перестановок из симметрической группы порядка n . По мнению оппонента, эти результаты показывают высокую квалификацию соискателя.

Содержит ли текст диссертации опечатки и т.п.? Конечно содержит, как и любой длинный текст. Имеются «корявые» предложения. Например, на странице 25 написано: «выражением ... называется выражение...», где вместо отточий стоят формулы. В другом месте автор пишет: «из проблемы Латышева следует...». Из

проблемы ничего не может следовать. Следовать может из решения проблемы. На понимание работы эти недостатки не влияют.

Все результаты диссертации являются научными результатами очень высокого уровня. Диссертация М.И. Харитонова заслуживает самой высокой оценки, а ее автор, несомненно, заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент -
профессор Ульяновского
государственного университета,
доктор физико-математических
наук, профессор

А.Р. Кемер

